

17. Geometrische Optik - Geometrical Optics

Wir möchten dieses Experiment verbessern und bitten Sie, dazu den Moodle-Fragebogen unter <https://moodle-app2.let.ethz.ch/course/view.php?id=12074> auszufüllen, *nachdem Sie das Experiment absolviert haben und den Bericht geschrieben haben*. Die Umfrage dauert ca. 10 - 15 min. Erst nach Ausfüllend des Fragebogens wird das Testat für das Experiment erteilt.

Ihre Antworten haben keinerlei Auswirkungen auf Ihre Leistungen im Physikpraktikum. Die erhobenen Daten werden anonymisiert ausgewertet, so dass keine Rückschlüsse auf die teilnehmenden Personen gemacht werden können.

We would like to improve this experiment and ask you to complete the Moodle questionnaire at <https://moodle-app2.let.ethz.ch/course/view.php?id=12074> *after you have conducted the experiment and handed in the report*. The survey takes about 10 -15 min. Only after you have completed the questionnaire will you be given the ttestat/confirmation sheet for this experiment.

Your answers have no effect on your performance in the physics lab. The data collected will be evaluated anonymously so that no conclusions can be drawn about the participants.

1 Grundlagen

Jedes optische Problem besteht grundsätzlich darin, die Ausbreitung des Lichtes in einem vorgegebenen beliebig beschaffenen und begrenzten Medium vorauszusagen. Infolge der Wellennatur des Lichtes würde die Behandlung jeder derartigen Aufgabe die Lösung der **Wellengleichung** des Lichtes unter Berücksichtigung der für jedes Problem charakteristischen Randbedingungen erfordern. Dieses streng richtige Verfahren stösst aber sehr rasch auf ausserordentliche mathematische Schwierigkeiten, sodass nach vereinfachten Lösungsmethoden gesucht worden ist.

Besonders einfache Verhältnisse liegen dann vor, wenn sämtliche in einem Problem auftretenden geometrischen Abmessungen **gross**, verglichen mit der Wellenlänge des Lichtes, sind. In diesem Fall befindet man sich im Gültigkeitsbereich der **geometrischen Optik** oder **Strahlenoptik**. Sie geht von der Fiktion des **Lichtstrahles** aus und stützt sich auf die drei folgenden Elementargesetze:

1. Geradlinige Ausbreitung des Lichtes im homogenen und isotropen Medium
2. Reflexionsgesetz
3. Brechungsgesetz

Tatsächlich genügen diese drei Gesetze unter der oben gemachten Einschränkung, um den Weg eines Lichtstrahls in einem beliebig vorgegebenen Medium vorauszusagen (z. B. Abbildung durch Spiegel und Linsen), indem Reflexionsgesetz und Brechungsgesetz wiederholt angewendet werden. Fermat (1679) ist es gelungen, die oben genannten Gesetze in ein einziges zusammenzufassen, nämlich in den Satz des "extremalen Lichtweges". Mathematisch formuliert lautet er:

$$\int_{x_1, y_1, z_1}^{x_2, y_2, z_2} n(x, y, z) ds = \text{Extremum.} \quad (1)$$

1 Basics

Optical tasks generally consist in properly predicting the propagation of light in a given arbitrarily constituted and confined medium. Due to the wave nature of light, the treatment of each such task would require to solve the **wave equation** of light under the boundary conditions characteristic of the problem. This strictly correct approach very quickly encounters extraordinary mathematical difficulties, so that simplified solution methods have been sought.

Particularly simple conditions are present when the geometrical dimensions are much **larger** compared with the wavelength of light. In this case one is in the regime of **geometrical optics** or **ray optics**. Geometrical optics is based on the assumption of **light beams** as expressed by the following three fundamental laws:

1. linear propagation of light in homogeneous and isotropic media,
2. law of reflection,
3. Snell's law of refraction.

In fact, these three laws comply with the restraints made above on the path of a light beam and predict the path in any given medium (e.g., the imaging by mirrors and lenses), by repeatedly applying the laws of reflection and refraction. Fermat (1679) succeeded to merge the above-mentioned laws into one, namely the principle of "extremal optical path". Mathematically it states:

$$\int_{x_1, y_1, z_1}^{x_2, y_2, z_2} n(x, y, z) ds = \text{extremum.} \quad (1)$$

The extremum is usually a minimum. This means that a light beam runs between two points 1 and 2 with the coordinates x_1, y_1, z_1 and x_2, y_2, z_2 so that its "path" is extremal. Here, $n(x, y, z)$ is the locally

Extremum ist meistens Minimum. d.h. zwischen zwei Punkten 1 und 2 mit den Koordinaten x_1, y_1, z_1 und x_2, y_2, z_2 verläuft ein Lichtstrahl so, dass sein **”Lichtweg“** extremal wird. Dabei bedeutet $n(x, y, z)$ den im allgemeinsten Fall örtlich veränderlichen Brechungsindex und ds das Wegelement.

Auf die experimentell gesicherte Tatsache, dass Lichterscheinungen **Wellenvorgänge** sind, nimmt die geometrische Optik bewusst keine Rücksicht. Sie muss deshalb notwendig überall da versagen, wo die experimentellen Bedingungen so gehalten sind, dass ein für Wellenvorgänge charakteristisches Phänomen auftritt, also

1. beim Zusammentreffen zweier Lichtwellen mit bestimmter Gangdifferenz in einem Punkt (Interferenz),
2. beim Durchgang einer Lichtwelle durch eine Öffnung, deren Linearabmessungen mit der Wellenlänge des Lichtes vergleichbar sind (Beugung).

1.1 Abbildung durch Linsen

Eine optische Abbildung ordnet jedem Lichtstrahl in einem ersten Medium (Objektraum) einen Lichtstrahl im letzten Medium (Bildraum) zu. Zumeist wird dabei gefordert, dass alle von einem Punkt ausgehenden Strahlen wieder in einem Punkt vereinigt werden. Bei einfachen Linsen mit **kugelförmigen** Begrenzungsflächen ist dies nur der Fall, wenn der Öffnungswinkel des wirksamen Strahlenbündels klein und das verwendete Licht einfarbig ist. Die Tatsache, dass ein optisches Abbildungssystem die obige Forderung erfüllt, garantiert von der Wellenoptik aus gesehen, noch keine Abbildung, denn ein Bildpunkt wird nur dann zustande kommen, wenn die zusammentreffenden Lichtstrahlen sich nicht durch Interferenz gegenseitig kompensieren. Die verschiedenen Lichtstrahlen müssen also alle im Bildpunkt die gleiche Phasenlage besitzen. Diese von der Wellenoptik geforderte Zusatzbedingung einer optischen Abbildung wird durch das Fermatsche Prinzip automatisch erfüllt, denn die verschiedenen Lichtwege einer Abbildung können nur dann gleichzeitig ein Extremum sein, wenn sie alle gleich lang sind. Gleich langer Lichtweg bedeutet aber auch gleich lange Ausbreitungszeit und damit Phasengleichheit im Bildpunkt.

Die Bilderzeugung durch eine sphärische Linse beruht auf einer zweimaligen Brechung der vom Objekt O ausgehenden Lichtstrahlen an der Vorder- und Hinterfläche der Linse (Abb.1).

Die Ablenkung δ des vom Objekt O ausgehenden Strahles ist für eine **”dünne“** Linse (Krümmungsradius gross gegen Dicke und Durchmesser der Linse):

$$\delta = (n - 1)\varphi = (n - 1)(\beta_1 + \beta_2), \quad (2)$$

denn die Linse verhält sich an den Durchgangsstellen

varying refractive index and ds is the path element.

Geometrical optics does not consider the **wave character** of light. Therefore, it necessarily fails whenever the experimental conditions are such that a characteristic wave phenomenon is revealed, i.e.

1. two light waves meet with a well defined path difference at a point (interference),
2. a light wave passes through an aperture whose linear dimensions are comparable with the wavelength of light (diffraction).

1.1 Imaging through lenses

In an optical imaging each light beam in the first medium (object space) is correlated with a light beam in the final medium (image space). In most cases it is further required that all the rays emanating from a point re-unite at one point. For simple lenses with spherical surfaces (**spherical lenses**), this is only the case when the opening angle of the beam is small and the light used is monochromatic. The fact that an optical imaging system meets the above requirement, does not ensure an image to exist unless the merging light beams do not cancel each other by interference. The different light rays must all be in phase at the image point. This additional condition from wave optics required for an optical image to exist, is automatically satisfied by Fermat’s principle: the different light paths of an image can only simultaneously be an extremum, if they are all of equal length. Equal path length means equal propagation **time**, and thus the same phase at an image point.

The image generated by a spherical lens is based on a twofold refraction of the light beams outgoing from the object point O , at the front and rear surface of the lens (Fig. 1).

The deflection δ of the outgoing beam (from object O) is in the case of a **”thin“** lens (radii of curvature are large compared to thickness and diameter of the lens):

$$\delta = (n - 1)\varphi = (n - 1)(\beta_1 + \beta_2), \quad (2)$$

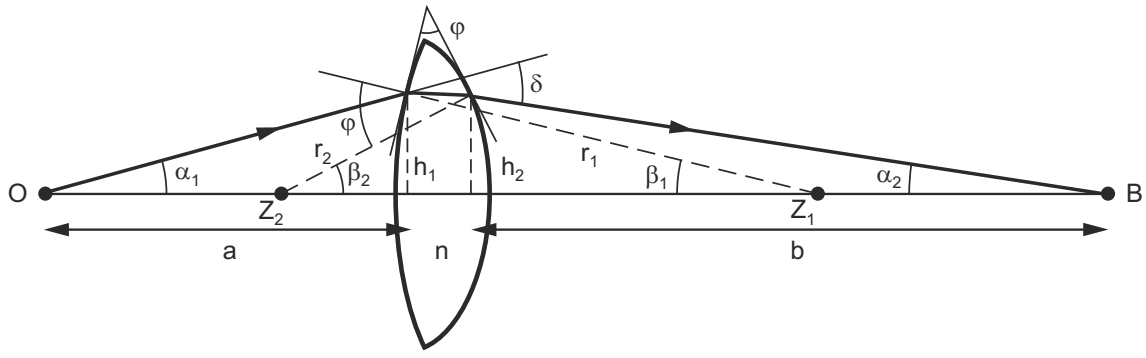


Fig. 1: Linsengleichung / Lens equation.

des Strahles wie ein Prisma von kleinem brechendem Winkel φ und dem Brechungsindex n [Herleitung der Formel (2) im Anhang]. Aus Abb. 1 liest man sofort ab, dass $\delta = \alpha_1 + \alpha_2$ ist, d.h.:

$$\alpha_1 + \alpha_2 = (n - 1)(\beta_1 + \beta_2). \quad (3)$$

Ersetzt man in (3) die kleinen Winkel durch ihre Sinus- bzw. ihre Tangenswerte, so erhält man unter Benützung der Krümmungsradien r_1 und r_2 der Kugelflächen

$$\frac{h_1}{a} + \frac{h_2}{b} = (n - 1) \left(\frac{h_1}{r_1} + \frac{h_2}{r_2} \right)$$

und da für eine dünne Linse $h_1 \approx h_2$ ist, folgt:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = (n - 1) \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right). \quad (4)$$

Befindet sich der Objektpunkt O unendlich fern ($a \rightarrow \infty$), so wird er in den **Brennpunkt** des Bildraumes der Linse abgebildet. Die Bilddistanz b ist dann gleich der Brennweite f :

$$\frac{1}{f} = (n - 1) \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right). \quad (5)$$

Die Brennweite einer Linse ist also umso kleiner, je grösser der Brechungsindex und je kleiner die Krümmungsradien r_1 und r_2 ihrer Begrenzungsflächen sind. Die Krümmungsradien konvexer Flächen sind **negativ** einzusetzen. Aus (4) und (5) ergibt sich die bekannte **Linsengleichung**

$$\boxed{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}}. \quad (6)$$

Lage und **Grösse** des Bildes eines gegebenen Gegenstandes lassen sich bei bekannter Brennweite f der Linse durch eine einfache **Konstruktion** finden (Abb. 2).

Bei einer dünnen Linse, die durch ihre Mittelebene M und ihre Brennpunkte F_1 und F_2 gegeben ist, verlaufen achsenparallele Strahlen des Objektraumes durch den Brennpunkt des Bildraumes und umgekehrt. Strahlen durch die Linsenmitte gehen unabge-

leitet, da die Linse als ein Prisma mit kleinem Brechungswinkel φ und dem Brechungsindex n [Herleitung der Formel (2) im Anhang] an den Durchgangspunkten des Strahles betrachtet werden kann. Aus Abb. 1 liest man sofort ab, dass $\delta = \alpha_1 + \alpha_2$ ist, d.h.:

$$\alpha_1 + \alpha_2 = (n - 1)(\beta_1 + \beta_2). \quad (3)$$

Ersetzt man in (3) die kleinen Winkel durch ihre Sinus- bzw. Tangenswerte, so erhält man unter Benützung der Krümmungsradien r_1 und r_2 der Kugelflächen

$$\frac{h_1}{a} + \frac{h_2}{b} = (n - 1) \left(\frac{h_1}{r_1} + \frac{h_2}{r_2} \right)$$

und da $h_1 \approx h_2$ folgt für eine dünne Linse:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = (n - 1) \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right). \quad (4)$$

Wenn der Objektpunkt O unendlich fern ($a \rightarrow \infty$) ist, wird er im **Fokus** des Bildraumes der Linse abgebildet. Die Bildweite b ist dann gleich der Brennweite f :

$$\frac{1}{f} = (n - 1) \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right). \quad (5)$$

Die Brennweite einer Linse wird umso kleiner, je größer der Brechungsindex und je kleiner die Krümmungsradien r_1 und r_2 der Begrenzungsflächen sind. Die Krümmungsradien konvexer Flächen sind mit einem **negativen** Vorzeichen einzusetzen. Aus (4) und (5) ergibt sich die bekannte **Linsengleichung**

$$\boxed{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}}. \quad (6)$$

Die Lage und **Grösse** des Bildes eines gegebenen Gegenstandes lassen sich bei bekannter Brennweite f der Linse durch eine einfache **Konstruktion** finden (Abb. 2).

Bei einer dünnen Linse, die durch ihre Mittelebene M und ihre Brennpunkte F_1 und F_2 gegeben ist, verlaufen achsenparallele Strahlen des Objektraumes durch den Brennpunkt des Bildraumes und umgekehrt. Strahlen durch die Linsenmitte gehen unabge-

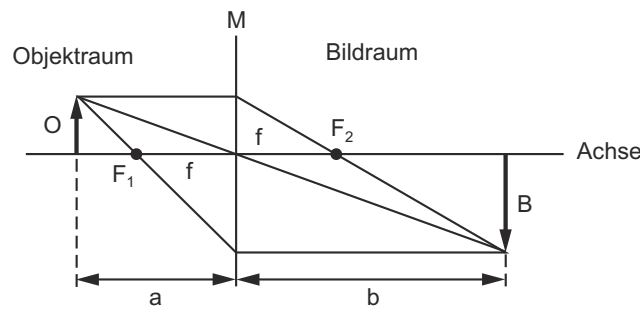


Fig. 2: Konstruktion des Bildes / Construction of the image.

lenkt durch die Linse. Aus Abb. 2 sieht man leicht, dass das Verhältnis von Bild- und Objektgrösse, d.h. die Vergrößerung (auch **Abbildungsmassstab** oder Seitenverhältnis) v gegeben ist durch

$$v = \frac{b}{a}. \quad (7)$$

Je nach der gegenseitigen Lage von Objekt und Linse erzeugt diese ein vergrössertes oder verkleinertes Bild. Die Bilder werden als **reell** oder **virtuell** bezeichnet, je nachdem sie im Bildraum oder im Objektraum entstehen. Werden verschiedene Linsen so hintereinander geschaltet, dass ihre Achsen zusammenfallen, so entsteht ein **zentriertes Linsensystem**. Die Brennweite f des zentrierten Systems aus zwei sich **berührenden** dünnen Linsen der Brennweite f_1 und f_2 ist

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}. \quad (8)$$

1.2 Messung der Brennweite von Linsen

Die Brennweite einer Linse kann nach Gleichung (6) durch Messung von Objekt- und Bilddistanz bestimmt werden. Ein zweites Verfahren stammt von Bessel (Abb. 3). Bei festgehaltenem Abstand d zwischen Objekt O und Bild B wird mit der Linse einmal ein vergrössertes Bild (Stellung 1), einmal ein verkleinertes Bild (Stellung 2) des Objektes entworfen. Die dazu notwendige Verschiebung der Linse sei e . Aus Abb. 3 liest man leicht die folgenden Beziehungen ab:

$$a + b = d \quad b - a = e$$

d.h.

$$a = \frac{d - e}{2} \quad b = \frac{d + e}{2}$$

und durch Einsetzen in die Linsengleichung (6) findet man

$$f = \frac{d^2 - e^2}{4d}. \quad (9)$$

Das Besselsche Verfahren hat den Vorteil, dass es auch für "dicke" Linsen angewendet werden kann.

by the lens. From Fig. 2 it is easily seen that the relationship between image and object size, i.e. the **magnification** scale v , is given by

$$v = \frac{b}{a}. \quad (7)$$

Depending on the relative location of the object and the lens, a magnified or demagnified image is produced. The images are called **real** or **virtual**, if they arise in image or object space. If several lenses are set behind each other such that their optical axes coincide, the result is a **centered lens system**. The focal length f of a centered system of two thin lenses of focal lengths f_1 and f_2 , in **contact** with each other is

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}. \quad (8)$$

1.2 Measurement of the focal length of lenses

The focal length of a lens may be determined by measuring the object and image distances and using Eq. (6). A second method goes back to Bessel (Fig. 3). For a fixed distance d between the object O and the image B , the lens produces once a magnified (position 1), once a demagnified image (position 2) of the object. The required displacement of the lens is e . From Fig. 3 one easily finds the following relationships:

$$a + b = d \quad b - a = e$$

i.e.

$$a = \frac{d - e}{2} \quad b = \frac{d + e}{2}$$

and by applying the lens equation (6)

$$f = \frac{d^2 - e^2}{4d}. \quad (9)$$

Bessel's method has the advantage that it can also be applied for "thick" lenses.

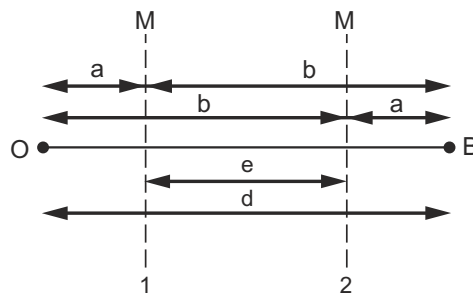


Fig. 3: Besselsches Verfahren / Bessel's method.

Ausser **Sammellinsen** mit $f > 0$ existieren auch **Zerstreuungslinsen** mit $f < 0$. Ihre Brennweite bestimmt man durch Vorsetzen einer Sammellinse von bekannter Brennweite und Bestimmung der Brennweite des Systems nach einer der vorstehenden Methoden. Die Brennweite der Zerstreuungslinse ergibt sich dann mit Hilfe der Gleichung (8).

In addition to **converging lenses** with $f > 0$ there are **diverging lenses** with $f < 0$. Their focal length is obtained by adding a converging lens of known focal length and determining the focal length of the system according to one of the above methods. The focal length of the diverging lens is then obtained using Equation (8).

1.3 Abbesche Abbildungstheorie

Wenn auch die meisten Gesetzmässigkeiten der optischen Abbildungen mit den Begriffen der geometrischen Optik beschrieben werden können, so muss doch für die Erklärung einiger Einzelheiten die Wellennatur des Lichtes berücksichtigt werden. So setzen insbesondere die **Beugungseffekte** (die nur durch die Wellennatur des Lichtes erklärt werden können) dem maximal erreichbaren Auflösungsvermögen einer optischen Abbildung eine grundsätzliche Grenze. Allgemein wird der Einfluss von Beugungseffekten auf optische Abbildungen in der Abbeschen Abbildungstheorie (1873) berücksichtigt. Die Grundgedanken dieser Theorie können in der folgenden Versuchsanordnung verfolgt und geprüft werden: Mit Hilfe der in Abb. 4 dargestellten Anordnung werde ein Gegenstand G (z.B. ein Drahtnetz) mit einer Sammellinse L auf einen Schirm S abgebildet. Bringt man nun in die bildseitige Brennebene von L eine Blende B (verschiebbarer Spalt, Irisblende), so ist nach der geometrischen Optik zu erwarten, dass das Bild G' von G seiner geometrischen Form nach nicht verändert wird, sondern nur seine Helligkeit mit kleiner werdender Blende vermindert wird.

1.3 Abbe's theory of imaging

Although most of the laws of optical imaging may be described with the concepts of geometrical optics, the wave nature of light has to be considered for some details. In particular, **diffraction effects** (which can only be explained by the wave nature of light) limit the maximum achievable resolution of an optical image. In general, the influence of diffraction effects on optical imaging is considered in Abbe's imaging theory (1873). The basic idea of this theory can be traced and verified in the following experiment: a subject G (e.g., a wire netting) is imaged with a converging lens L to a screen S (see Fig. 4). If one inserts an aperture B (movable slit, iris diaphragm) at the image-side focal plane of lens L , one expects - according to geometrical optics - that the image G' of G will not change its geometric shape, and that only its brightness will decrease with diminishing aperture.

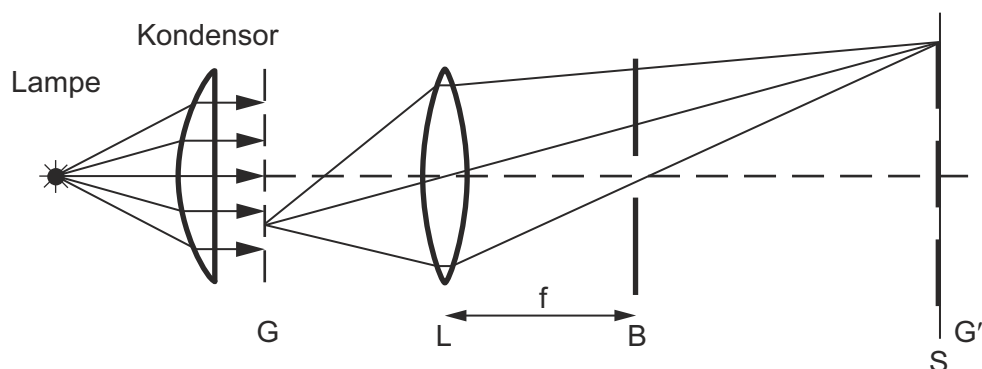


Fig. 4: Abbildung mit variabler Blendenöffnung / Optical imaging with different apertures.

In Wirklichkeit tritt hierbei auch eine Fälschung des Bildes ein, d.h. es findet keine streng geometrisch-optische Abbildung des Gegenstandes mehr statt. Dieser Effekt kann folgendermassen erklärt werden: Nach den Grundtatsachen der Wellenoptik erfährt die einfallende ebene Lichtwelle an den Öffnungen des Drahtnetzes G eine Beugung. Da ein Drahtnetz optisch ein Kreuzgitter darstellt (Abb. 5) und als solches stets als Überlagerung zweier eindimensionaler Strichgitter aufgefasst werden kann, so genügt es, für die folgenden Überlegungen ein eindimensionales Strichgitter zu betrachten.

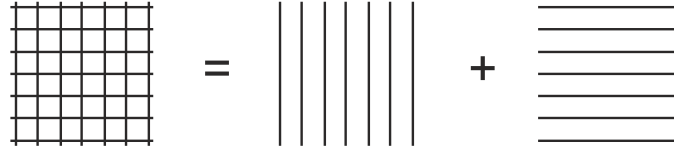


Fig. 5: Gitter als Summe zweier Strichgitter / Wire netting as sum of two one-dimensional gratings.

Fällt eine monochromatische ebene Lichtwelle auf eine Linse, so wird das Licht in einem Punkt ihrer Brennebene gesammelt. Bringt man nun vor die Linse ein eindimensionales Strichgitter, so beobachtet man infolge der **Beugung** an den verschiedenen Furchen des Strichgitters statt des einen Bildpunktes der Lichtquelle in der Brennebene eine Reihe von hellen Punkten, welche auf einer Geraden senkrecht zu den Gitterstrichen liegen. Das Entstehen dieser **Beugungsfigur** ist ein **Interferenzphänomen** (siehe Anleitung 15. «Wellenlängenmessung am Gitter»). Die Beugung an einem Gitter äussert sich darin, dass nicht nur in der Beleuchtungsrichtung, sondern auch unter bestimmten Winkeln α_p dazu (Abb. 6) Maxima der Lichtintensität hinter dem Strichgitter beobachtet werden können. Für diese Beugungswinkel α_p gilt (im Grenzfall Fraunhoferscher Beugung):

$$g \sin \alpha_p = p\lambda$$

g = Gitterkonstante, α = Winkel zwischen Wellen-normale und Gitternormale, p = ganze Zahlen 0, 1, 2, .. = Ordnungszahlen des Maximums, λ = Wellenlänge des Lichtes, siehe Anleitung 15. «Wellenlängenmessung am Gitter». Jedem Winkel α_p entspricht in der Brennebene der Sammellinse L ein heller Punkt. Diese hellen Punkte erscheinen, wie man sich leicht überlegt, vom Mittelpunkt der Linse aus betrachtet ebenfalls unter den Winkeln α_p (Abb. 6). Für den Abstand d zweier benachbarter Punkte gilt also

$$d = f(tg\alpha_{p+1} - tg\alpha_p),$$

und da es sich um kleine Winkel α_p handelt, kann $tg\alpha_p \approx \sin \alpha_p$ gesetzt werden:

$$d \approx f(\sin \alpha_{p+1} - \sin \alpha_p) = f \frac{\lambda}{g} \{(p+1) - p\}$$

oder

$$\boxed{d \approx f \frac{\lambda}{g}}. \quad (10)$$

In reality, the image will also get modified, i.e. there is no strict geometric-optical imaging of the object anymore. This effect may be explained as follows: According to the basic facts of wave optics an incident light wave undergoes diffraction at the openings of the wire netting G . Since a wire netting (Fig. 5) can always be interpreted as a superposition of two one-dimensional gratings, it is sufficient just to consider a one-dimensional grating in the subsequent consideration.

If a monochromatic plane wave hits a lens, the light is collected in a point in its focal plane. If a one-dimensional grating is introduced in front of the lens, then one observes a number of bright spots which lie on a straight line perpendicular to the grating lines in the focal plane - instead of one spot. The appearance of this **diffraction pattern** is an **interference phenomenon** (see instructions 15 "Wavelength measurement by a grating"). The diffraction by a grating manifests itself in the fact that there is not only light intensity in the direction of illumination, but intensity maxima can also be observed behind the grating at certain angles α_p (Fig. 6). For these diffraction angles α_p and in the limit of Fraunhofer diffraction:

$$g \sin \alpha_p = p\lambda$$

g = grating period, α = angle between wave normal and grid normal, p = integers 0, 1, 2, .. = atomic number of the maximum, λ = wavelength of light, see instructions 15 "Wavelength measurement by a grating". Each angle α_p corresponds to a bright spot in the focal plane of the lens L .

These bright spots appear, when considered from the center of the lens, also under the angles α_p (Fig. 6). Thus, the distance d between two adjacent points is

$$d = f(tg\alpha_{p+1} - tg\alpha_p),$$

and as α_p are small angles, $tg\alpha_p \approx \sin \alpha_p$:

$$d \approx f(\sin \alpha_{p+1} - \sin \alpha_p) = f \frac{\lambda}{g} \{(p+1) - p\}$$

or

$$\boxed{d \approx f \frac{\lambda}{g}} \quad (10)$$

The light rays which have emanated from a point of the original grating and then converged to a pixel on

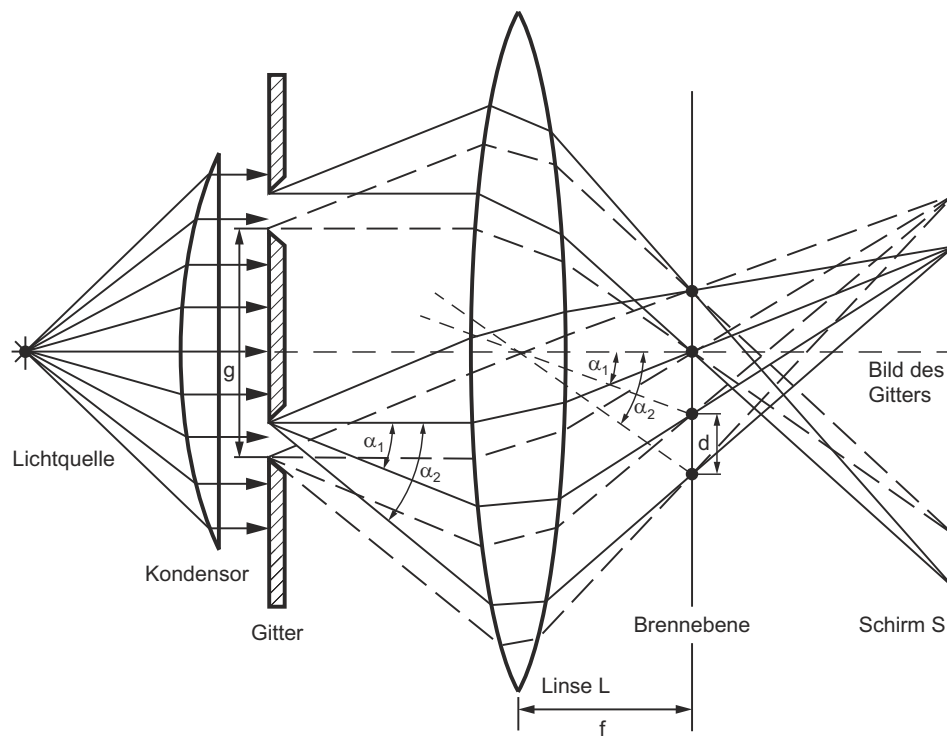


Fig. 6: Auswirkungen der Beugung bei der Gitterabbildung / Optical imaging accompanied by diffraction effects.

Die Lichtstrahlen, die von einem Punkt des ursprünglichen Gitters ausgegangen sind und wieder zu einem Bildpunkt auf dem Schirm S zusammenlaufen, haben also je zu einem anderen Beugungsmaximum in der Brennebene der Linse L beigetragen. Bringt man nun in diese Brennebene eine Blende B , welche einen Teil der Beugungsfigur abblendet, so wird die Abbildung unvollständig. Da für das Entstehen einer Interferenz wenigstens **zwei Wellen** notwendig sind, verlangt die Abbildung mindestens zwei Maxima der Beugungsfigur. Wird also die Blendenöffnung kleiner als d , so verschwindet die Abbildung.

Bei einem Gitter mit vertikalen Stäben wird die Beugungsfigur offenbar nur längs der Horizontalen veränderlich sein. Man benützt somit für die Untersuchung eine in horizontaler Richtung veränderliche Spaltblende (Spalt vertikal). Die Abbildung der horizontalen Stäbe eines Kreuzgitters wird dadurch in keiner Weise beeinflusst, so dass bei der kritischen Spaltbreite nur die vertikalen Streifen verschwinden. Dieselbe Überlegung gilt für einen horizontalen Spalt.

Diese Überlegungen lassen sich weitgehend verallgemeinern. Die Gitterfurchen, an der in unserer Versuchsanordnung die Beugung erzeugt wurde, kann man sich durch den Abstand zweier Konturen in irgend einem Bildobjekt ersetzt denken. Ausserdem ist die Grundidee dieser Abbildungstheorie auch nicht an eine Beleuchtung mit ebenen Lichtwellen gebunden, denn bei anderen Beleuchtungsarten werden wohl die Winkel, nicht aber das grundsätzliche Auftreten der Beugungsmaxima beeinflusst. [Diese Überlegungen werden allerdings hinfällig, wenn das Bildobjekt

the screen S , have thus contributed to different diffraction peaks in the focal plane of the lens L . If an aperture B is introduced at this point in the focal plane that marks a part of the diffraction pattern, then the imaging is incomplete. Since at least **two waves** are necessary for the appearance of an interference, imaging requires at least two maxima of the diffraction pattern. If the aperture is smaller than d , then the image disappears.

In a netting with vertical wires the diffraction pattern is only varied along the horizontal direction. Thus one uses a slit aperture that is variable in the horizontal direction (slit vertical). The imaging of the horizontal wires of a wire mesh is thereby not affected in any way. Only the vertical stripes disappear at the critical slit width. The same reasoning applies to a horizontal slit.

These considerations can be generalized to a large extent. The groove of the grating which produces the diffraction in our experiment, may be replaced by the distance between two contours in an image of any object. Moreover, the basic idea is even not tied to plane waves of light, as with other types of imaging, the angles but not the basic appearance of the diffraction maxima is affected. (These considerations, however, do not apply if the object itself is luminous, e.g., a glowing wire, because the light waves emanating from different points are not coherent, i.e. there is no fixed phase relationship among one another.) Two very closely spaced contours of an object will only appear separated in an optical imaging (e.g., in a microscope) if at least two diffraction

selber leuchtet (z.B. glühender Draht), da dann die von verschiedenen Punkten ausgehenden Lichtwellen nicht mehr kohärent sind, d.h. in keiner festen Phasenbeziehung zueinander stehen.] Zwei sehr nahe beieinander liegende Konturen eines Objektes werden nun bei einer optischen Abbildung (z.B. Mikroskop) nur dann getrennt erscheinen, wenn durch die Abbildung mindestens zwei Beugungsmaxima des an ihnen gebeugten Lichtes zur Interferenz gebracht werden können. Je enger die Konturen liegen, desto grösser werden die Beugungswinkel, und da sich nur endlich grosse Linsen mit endlichen Fassungen herstellen lassen, wird dadurch das maximal erreichbare Auflösungsvermögen grundsätzlich begrenzt. Um ein Mass dafür zu erhalten, betrachten wir wieder ein Strichgitter als Bildobjekt. Das feinste noch auflösbare Gitter hat eine Gitterkonstante von

$$g_{\min} = \frac{\lambda}{\sin u} = \frac{\lambda_0}{n \sin u}$$

u bedeutet den grössten möglichen, durch den Linsendurchmesser begrenzten halben Öffnungswinkel der Strahlen, λ_0 die Wellenlänge des Lichtes im Vakuum, λ diejenige im Medium vom Brechungsindex n , in welches das Gitter und die Objektlinse eingebettet sind (Immersionsobjektiv). Der für jedes optische Instrument charakteristische Zahlenwert $n \sin u$ heisst die **numerische Apertur**. Das **Auflösungsvermögen** eines idealen optischen Abbildungssystems (Auge, Mikroskop, Fernrohr, Projektionsapparat) hängt also nur von der Apertur, nicht aber von der speziellen Konstruktion der Linsensysteme ab.

Da die numerische Apertur von der Grössenordnung 1 ist, wird die kleinste noch auflösbare Struktur von der Grössenordnung der Wellenlänge λ des verwendeten Lichtes. Damit sind wir aber auch an der eingangs definierten Gültigkeitsgrenze der geometrischen Optik angelangt. Bei grösseren Strukturen werden so viele Beugungsmaxima vom Linsensystem erfasst, dass die nach der geometrischen Optik zu erwartende Abbildung zustande kommt.

2 Aufgaben

1. Man messe die Brennweite zweier Sammellinsen: a) aus Objekt- und Bilddistanz, feines Drahtnetz als Objekt, b) nach der Besselschen Methode, grobes Drahtnetz.
2. Die Brennweite einer Zerstreuungslinse soll durch Vorsetzen der einer Sammellinse aus Objekt- und Bilddistanz gemessen werden.
3. Man bilde zwei Drahtnetze mit Hilfe der einer fokussierenden Linse auf einen Schirm ab und bestimme ihre Gitterkonstante g aus der Bildgrösse g' und der Vergrösserung der Abbildung.
4. Die Richtigkeit der Abbeschen Abbildungstheo-

maxima can be made to interfere. The closer the contours, the larger the diffraction angle, and as there are only lenses of finite size, the maximum achievable resolution is limited in principle. For this to measure, we again consider a grating as object. The finest still resolvable grating has a grating period of

$$g_{\min} = \frac{\lambda}{\sin u} = \frac{\lambda_0}{n \sin u}$$

where u means the largest possible half-opening angle of the rays (limited by the lens diameter), λ_0 is the wavelength of light in vacuum, λ the wavelength in the medium of refractive index n , in which the grating and the objective lens are embedded (immersion lens). The value characteristic for each optical instrument, $n \sin u$, is called the **numerical aperture**. The **resolving power** of an ideal optical imaging system (eye, microscope, telescope, projector) depends only on the aperture, not on the particular design of the lens systems.

Since the numerical aperture is of the order of 1, the smallest resolvable structure is of the order of the wavelength λ of the light used. This presents the limitation of geometrical optics. With coarser structures many diffraction maxima can be detected, so the image expected from geometrical optics will come about.

2 Tasks

1. Measure the focal length of two converging lenses: a) using the object and image distances, fine wire mesh as object b) applying Bessel's method, coarse wire mesh as object.
2. The focal length of a diverging lens is to be determined from the object and image distances, inserting one of the converging lens.
3. Two wire nets are to be imaged on a screen one of the lenses. Their grating constant g is to be determined from the image size g' and the magnification.
4. The correctness of Abbe's imaging theory is to be examined. The two wire nets are to be

rie ist zu prüfen. Man bilde die ausgemessenen Netze mit der Linse auf den Schirm ab und setzt in die Brennebene der Linse einen Spalt, dessen Breite so lange verändert wird, bis die vertikalen Gitterstäbe im Bild gerade verschwinden. Man messe die kritische Spaltbreite durch Abbildung und Vergrößerung, und vergleiche sie mit dem nach (10) berechneten Wert.

imaged on the screen using a converging lens and introducing in the focal plane of the lens a slit whose width is to be changed until the vertical bars in the figure just disappear. The critical slit width is to be measured by magnifying it with a lens, and the data should be compared with the calculated value from Eq. (10).

3 Durchführung der Versuche

Als Lichtquelle dienen LED, welche hinreichend monochromatisches Licht emittieren. Die genaue Wellenlänge des Lichts ist bei den jeweiligen Experimentierplätzen angeschrieben. Mit Hilfe eines Kondensors wird paralleles Licht erzeugt und damit ein Drahtnetz, bzw. ein auf Transparenzfolie gedrucktes Gitter beleuchtet, welches für alle Versuche als Objekt dient. Die Abstände zwischen Objekt, Linse und Schirm können an einem längs der optischen Bank angebrachten Massstab abgelesen werden.

3 Experimental conduction

As a light source we use LED, which emit sufficiently monochromatic light. The exact wavelength is indicated at the setups. Parallel light is generated with the aid of a condenser, thus illuminating a wire mesh, or a grid printed on transparency film, which serves as an object for all experiments. The distances between object, lens and screen can be read off at a scale attached to the optical bench.

4 Anhang: Ablenkung an einem Prisma

Wir beschränken uns auf den Grenzfall kleiner Einfallswinkel α und ψ (Abb. 7), was nur bei kleinem brechendem Winkel φ des Prismas gleichzeitig möglich ist.

4 Appendix: Refraction through a prism

We restrict ourselves to the case of small angles of incidence and reflection, α and ψ (Fig. 7), which is also only possible with a small refracting angle φ of the prism.

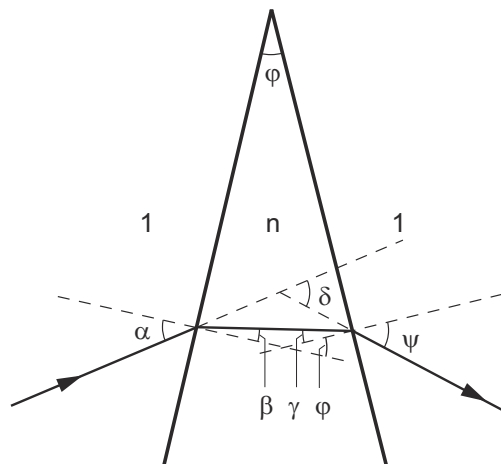


Fig. 7: Ablenkung am Prisma / Diffraction through a prism.

Beim Ein- und Austritt des Strahles gilt das Brechungsgesetz:

$$n \sin \beta = \sin \alpha \quad (11)$$

$$n \sin \gamma = \sin \psi \quad (12)$$

Also für kleine Winkel näherungsweise

$$n\beta = \alpha \quad (13)$$

und

$$n\gamma = \psi. \quad (14)$$

At the inlet and outlet of the prism the law of refraction has to be fulfilled:

$$n \sin \beta = \sin \alpha \quad (11)$$

$$n \sin \gamma = \sin \psi. \quad (12)$$

Thus, approximately for small angles:

$$n\beta = \alpha \quad (13)$$

and

$$n\gamma = \psi. \quad (14)$$

Ausserdem können aus Abb. 7 leicht folgende Beziehungen abgelesen werden:

$$\beta + \gamma = \varphi \quad (15)$$

und

$$\delta = (\alpha - \beta) + (\psi - \gamma) \quad (16)$$

Ablenkung beim Eintritt plus Ablenkung beim Austritt. β , ψ und γ können mit (13), (14) und (15) durch α ausgedrückt werden:

$$\beta = \alpha/n$$

$$\gamma = \varphi - \beta = \varphi - \alpha/n$$

$$\psi = n\gamma = n\varphi - \alpha$$

In Eq. (16) eingesetzt:

$$\delta = \alpha - \alpha/n + n\varphi - \alpha - \varphi + \alpha/n = \underline{\underline{\varphi(n-1)}}$$

The following relations are easily found from Fig. 7:

$$\beta + \gamma = \varphi \quad (15)$$

and

$$\delta = (\alpha - \beta) + (\psi - \gamma) \quad (16)$$

the deflection when entering and leaving the prism. β , ψ and γ may be expressed by α and φ using equations (13), (14) and (15):

$$\beta = \alpha/n$$

$$\gamma = \varphi - \beta = \varphi - \alpha/n$$

$$\psi = n\gamma = n\varphi - \alpha.$$

Inserted into Eq. (16) one obtains:

$$\delta = \alpha - \alpha/n + n\varphi - \alpha - \varphi + \alpha/n = \underline{\underline{\varphi(n-1)}}$$

5 Praktischer Hinweis

5 Practical Advice

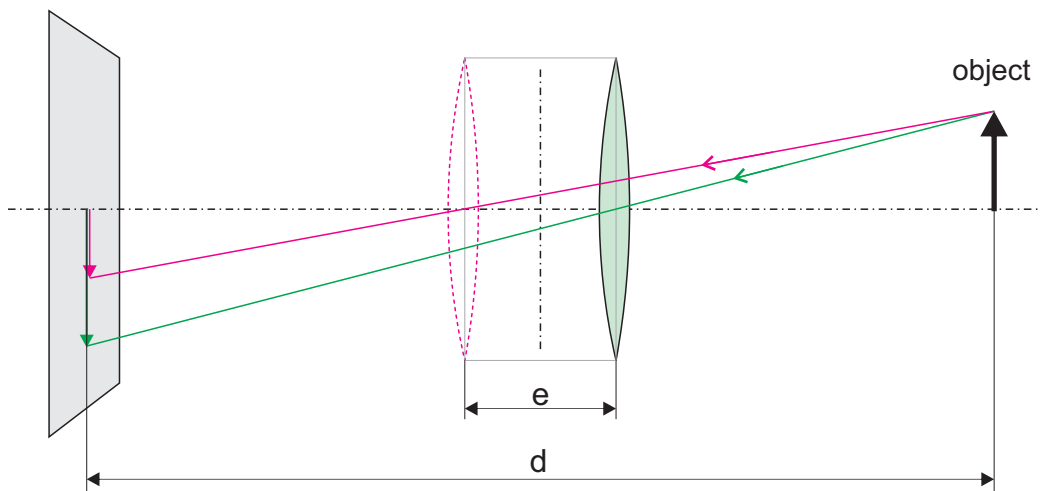


Fig. 8: Bessel Methode: Wählt man d nicht viel grösser als $4f$, so wird das kleine Abbild nicht viel kleiner als das Grosse. Im Fall $d = 4f$ wird e gleich Null. / Bessel method: If you choose d not much bigger than $4f$, the small image will not be much smaller than the large one. In the case of $d = 4f$, e is zero.