

1. Elastizität - Elasticity

1 Grundlagen

Ein Vorgang wird als *elastisch* bezeichnet, wenn nach Aufhören deformierender Kräfte der ursprüngliche Zustand wieder angenommen wird. Je nach der Art der wirkenden Kräfte besteht die elastische Formänderung in einer *Dehnung*, *Biegung*, *Drillung* (Torsion) oder *Knickung*, die im allgemeinsten Falle gleichzeitig auftreten können.

1.1 Dehnung

Ein Stab eines beliebigen elastischen Materials kann als lineare Feder betrachtet werden. Auf einen *homogenen*, isotropen Stab der Länge ℓ und vom Querschnitt q wirke parallel der Längsachse die Kraft K . Nach Hooke (1678) ist die *spezifische Verlängerung*

$$\varepsilon = \frac{\Delta \ell}{\ell}$$

proportional zur spezifischen *Spannung*.

$$\sigma = K/q$$

also:

$$\varepsilon = \alpha \sigma$$

(α = Elastizitätskonstante)

1 Basics

A deformation is called *elastic* if once the forces are no longer applied, the object returns to its original shape. Depending on the nature of the acting forces, the elastic deformation is called an *extension*, *deflection*, *torsion* or *buckling*. In the most general cases those can occur simultaneously.

1.1 Extension

A rod of any elastic material may be viewed as a linear spring. On such a *homogenous*, isotropic rod with length ℓ and a cross-section area q , a force K is applied along the axis of the rod. Hooke's law (1678) states that the *specific extension*, ε ,

$$\varepsilon = \frac{\Delta \ell}{\ell}$$

is proportional to the *specific stress* σ

$$\sigma = K/q$$

through the relation:

$$\varepsilon = \alpha \sigma$$

where α is the elastic constant of the material.

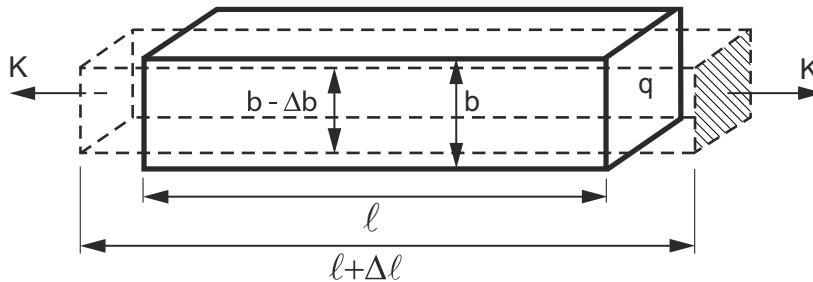


Fig. 1: Dehnung / Extension

Statt α führt man die zweckmässigere Proportionalitätskonstante $E = 1/\alpha$, d.h. den sog. *Elastizitätsmodul* (auch bekannt als Young'scher Modul) ein, und erhält so das Hooke'sche Gesetz:

$$\frac{\Delta \ell}{\ell} = \frac{1}{E} \frac{K}{q} \quad (1)$$

E hat die Dimension einer spezifischen (mechanischen) Spannung [Kraft pro Flächeneinheit]. Gleichzeitig mit der Verlängerung tritt auch eine *Querkontraktion* des Stabes in Erscheinung. Ist b eine Querdimension des Stabes, so zeigt sich, dass die *spezifische Querkontraktion* $\Delta b/b$ proportional der spezifischen

Instead of α we introduce the more appropriate proportionality constant $E = 1/\alpha$, the *modulus of elasticity*, also known as Young's modulus. Therefore Hooke's law reads:

$$\frac{\Delta \ell}{\ell} = \frac{1}{E} \frac{K}{q} \quad (1)$$

E has the dimension of a specific mechanical stress [force per unit area]. If the material is stretched, it usually tends to contract in the directions transverse to the direction of stretching. If b is the transverse dimension of the rod, the ratio of contraction $\Delta b/b$ is linked to the specific extension $\Delta \ell/\ell$ by the proportional relation:

Verlängerung $\Delta\ell/\ell$ ist:

$$\frac{\Delta b}{b} = -m \frac{\Delta\ell}{\ell} = -\frac{m K}{E q}$$

m ist die Poisson'sche Zahl. Überschreitet die Deformation einen bestimmten Betrag, so ist die spezifische Dehnung nicht mehr proportional zur Spannung (Proportionalitätsgrenze). Bei noch weiterer Steigerung der Spannung geht der Stab nach Entlastung nicht mehr auf seine ursprüngliche Länge zurück; die *Elastizitätsgrenze* ist überschritten worden.

1.2 Biegung

Die Durchbiegung s eines an einem Ende eingespannten und am andern Ende durch die Kraft K belasteten prismatischen Stabes der Länge ℓ ist proportional der Kraft K , der dritten Potenz der Länge ℓ und umgekehrt proportional der Breite a und der dritten Potenz der Höhe b des Stabes. Die genaue Formel für die Durchbiegung am Ende des Stabes lautet:

$$s = 4 \frac{\ell^3 K}{a b^3 E} \quad (2)$$

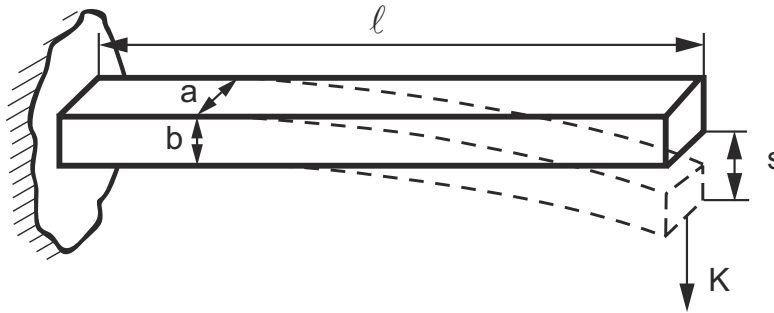


Fig. 2: Biegung / Deflection

Der Beweis zu Formel (2) wird im Anhang gegeben. Die Konstante E bedeutet wie in (1) den Elastizitätsmodul. Er kann sowohl nach (1) wie auch nach (2) durch einfache Dehnungs- bzw. Biegungsversuche ermittelt werden.

1.3 Torsion

Verdreht man das eine Ende eines Drahtes von der Länge ℓ und vom Radius R gegen das andere um den Winkel φ , so entsteht ein rücktreibendes Drehmoment $D\varphi$. Die Konstante D , das sog. Direktionsmoment, ist proportional der vierten Potenz des Drahtradius R und umgekehrt proportional der Drahtlänge ℓ . Der genaue Zusammenhang ist:

$$D = \frac{\pi R^4}{2 \ell} G \quad (3)$$

Der Beweis zu Formel (3) findet sich im Anhang. G ist wiederum eine Materialkonstante und wird Torsionsmodul, auch Schubmodul oder Gleitmodul genannt.

$$\frac{\Delta b}{b} = -m \frac{\Delta\ell}{\ell} = -\frac{m K}{E q}$$

where m is Poisson's ratio. When the deformation exceeds a certain amount, the specific extension is no longer proportional to the applied stress (proportional limit). If we further increase the stress, the rod is no longer going to reverse back to its original shape; the *elastic limit* has been exceeded.

1.2 Deflection

A rod fixed only at one end is called a cantilever. Cantilevers are widely found in construction, notably in bridges and balconies. If a cantilever of length, ℓ , and transverse dimensions, a , b , is subject to a force K on the other end, it will undergo a deflection s as shown in fig. 2. The formula for the deflection at the end of the bar is:

$$s = 4 \frac{\ell^3 K}{a b^3 E} \quad (2)$$

The proof of equation (2) is given in the Appendix. As in (1), the constant E denotes the elastic modulus. It can be determined either by equation (1) as well as by equation (2) by simple extension or deflection experiments.

1.3 Torsion

If one end of a wire with the length ℓ and the radius R is twisted against the other by the angle φ , a driving torque $D\varphi$ is generated. The constant D , the so-called directional torque, is proportional to the fourth power of the wire radius R and inversely proportional to the wire length ℓ . The exact relationship is:

$$D = \frac{\pi R^4}{2 \ell} G \quad (3)$$

The proof of equation (3) is given in the appendix. G is the modulus of rigidity or shear modulus. Simple relations exist between the elastic constants E , m

Zwischen den elastischen Konstanten E , m und G besteht, wie in der Elastizitätstheorie gezeigt wird, der Zusammenhang:

$$E = 2G(1 + m).$$

Ist das eine Drahtende festgeklemmt und hängt am anderen eine Masse mit dem Trägheitsmoment θ , so kann die Masse diese Drehschwingungen ausführen (siehe Anleitung 2 "Trägheitsmoment"). Die Schwingungsdauer beträgt dann

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\theta}{D}}$$

Wird das Trägheitsmoment um einen bekannten Betrag θ' vermehrt, so wird die Schwingungsdauer

$$T' = 2\pi \sqrt{\frac{\theta + \theta'}{D}}$$

Aus den beiden Gleichungen für T und T' lässt sich nun die Unbekannte θ eliminieren und das Direktionsmoment D berechnen, denn die Zeiten T und T' können einfach gemessen werden. Kennt man die Konstante D und die geometrischen Dimensionen des Drahtes, so kann man daraus den Torsionsmodul G berechnen.

2 Aufgaben

1. Man messe die Verlängerung eines Drahtes als Funktion der Belastung, stelle den Zusammenhang graphisch dar und berechne den Elastizitätsmodul nach (1).
2. Man messe die Durchbiegung eines an einem Ende eingespannten und am andern Ende belasteten Stabes von rechteckigem Profil. Die Durchbiegung ist tabellarisch und graphisch als Funktion der Belastung darzustellen. Ferner berechne man nach (2) den Elastizitätsmodul.
3. Man bestimme den Torsionsmodul G eines Drahtes durch Beobachtung der Drehschwingungen einer an ihm aufgehängten Masse.

3 Durchführung der Versuche

3.1 Dehung

An der Decke ist ein Draht D aufgehängt, der durch ein kleines Gewicht G gespannt wird. Durch Anhängen von Gewichtsstücken von je ca. 400 g wird die Belastung verändert. Die entsprechende Verlängerung wird mit einer Libelle L und einer Mikrometerschraube M abgelesen. Die Ganghöhe der Schraube beträgt 0,5 mm, der Umfang des Teilkreises ist in 50 Teile geteilt. *Der Draht darf nicht stärker als mit 2,0 kg belastet werden.* Der Durchmesser des Drahtes soll mit einem Mikrometer gemessen werden.

and G , that allow calculating one as long as the other two are known:

$$E = 2G(1 + m).$$

Torsion pendulums and balance wheels are examples of torsional harmonic oscillators that can oscillate with a rotational motion about the axis of the torsion spring (see also manual 2 - "moment of inertia"). If a moment of inertia, θ is added to the wire by an attached mass, the period of the vibration is then given by:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\theta}{D}}$$

If the moment of inertia is changed by a known amount θ' , the vibration period will read

$$T' = 2\pi \sqrt{\frac{\theta + \theta'}{D}}$$

From the two equations for T and T' the unknown θ can now be eliminated and the directional moment D can be calculated, because the times T and T' can easily be measured. If you know the constant D and the geometrical dimensions of the wire, you can calculate the torsion module G from this.

2 Tasks

1. Measure the extension of a wire as a function of load, plot the relationship graphically and calculate the Young's modulus according to equation (1.)
2. Measure the deflection of a cantilever with rectangular profile clamped at one end and loaded at the other end. Input the measured deflection in the table and plot deflection as a function of the load. Furthermore, calculate according to equation (2) the elastic modulus.
3. Determine the modulus of rigidity G of a wire by observing the rotation oscillations of a suspended mass.

3 Conducting the experiments

3.1 Extension

A wire D is suspended on the ceiling and tensioned by a small weight G . The load is increased gradually by appending weights of about 400 g each. The corresponding extension is measured with a level L and a micrometer screw M . The pitch of the screw is 0.5 mm, the circumference of the screw is divided in 50 divisions. *The wire must not be loaded with more than 2.0 kg.* The diameter of the wire is to be measured with a micrometer.

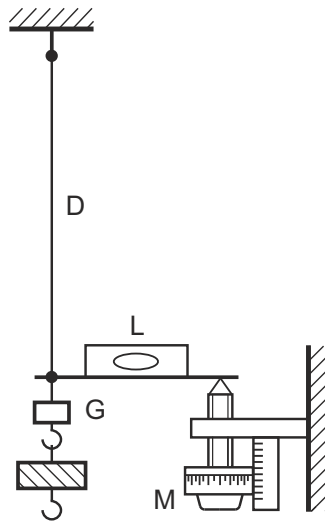


Fig. 3: Dehnung / Extension

3.2 Biegung

Die Messung erfolgt wieder mit Libelle und Mikrometerschraube. Es ist eine Messreihe für hochgestelltes Profil und eine für quergestelltes Profil aufzunehmen.

Maximale Belastung:

1.2 kg bei quergestelltem Profil

2.0 kg bei hochgestelltem Profil

3.2 Deflection

The measurement is carried out again with a bubble level-meter and a micrometer screw. Make a series of measurements for a profile with $b > a$ (see fig. 2) and one for a profile with $b < a$.

Maximum load:

1.2 kg not upright profile

2.0 kg upright profile

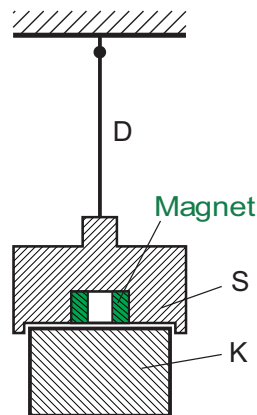


Fig. 4: Torsion

3.3 Torsion

An einem Draht D, der an einem Stativ befestigt ist, wurde eine Scheibe S mit dem axialen Trägheitsmoment θ festgeklemmt. Durch Verdrehung aus der Ruhelage wird sie zum Schwingen gebracht. Die Schwingungsdauer T wird mit einer Stoppuhr gemessen. Als zusätzliches Trägheitsmoment dient der von S magnetisch angezogene, zylindrische Körper K. Das Trägheitsmoment θ' eines Zylinders berechnet sich

3.3 Torsion

On the wire D, which is attached to a tripod, a disc S is clamped with an unknown axial moment of inertia θ . We rotate the disc from its rest position and the oscillation period T is measured with a stopwatch. An additional cylinder K can be attached magnetically to S to provide an additional moment of inertia. The moment of inertia θ' that of a cylinder and is calculated as follows:

zu

$$\theta' = M \frac{r^2}{2}$$

Dabei bedeuten r den Radius und M die Masse des Zylinders. Der Zylinder wird mit Schublehre und Massstab ausgemessen; den Durchmesser des Drahtes bestimmt man mit einem Mikrometer.

$$\theta' = M \frac{r^2}{2}$$

Here, r is the radius and M the mass of the cylinder. The cylinder is measured with a vernier caliper and a scale; the diameter of the wire is measured with a micrometer caliper.

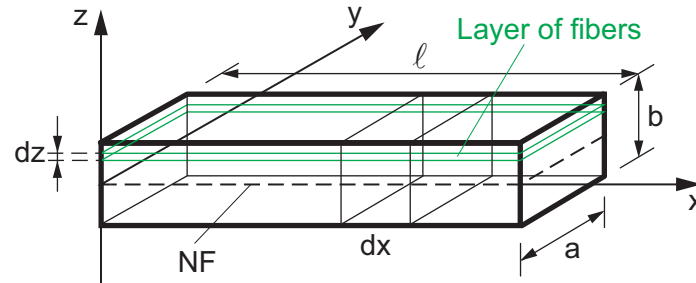


Fig. 5: Biegung / Deflection

4 Anhang: Herleitung der Formeln (2) und (3)

Eine elementare Herleitung der Gleichung (2) stammt von J. Bernoulli (1750). Sie beruht auf folgenden Überlegungen. Man denkt sich den Stab in dünne Faserschichten aufgeteilt, welche parallel der xy-Ebene liegen sollen (Abb. 5). Unter ihnen befindet sich eine sog. neutrale Faser (NF), welche bei reiner Biegung keine Längenänderung erleidet. Wirkt am freien Ende des einseitig eingespannten Stabes die Kraft K nach unten, so werden alle Fasern oberhalb NF verlängert, unterhalb verkürzt. Bernoulli legte nun seinen Überlegungen die Annahmen zu Grunde, dass einerseits die Fasern sich gegenseitig nicht beeinflussen und dass andererseits ein zur Stabachse senkrechter Querschnitt auch während der Deformation senkrecht zu ihr steht. Die neutrale Faser NF enthält in dieser Näherung die Stabachse.

4 Appendix: Derivation of the formulas (2) and (3)

An elementary derivation of equation (2) comes from J. Bernoulli (1750), based on the following consideration. The rod is divided into layers of fibers parallel to the x-y plane as shown in fig. 5. One of them is a so-called Neutral Fiber (NF), which suffers no change in length when the cantilever is subjected to bending. The force K acting on the free end of the cantilever compresses all the fibers below the NF and extends all those above. The NF hence defines the neutral axis. Bernoulli assumes that all fibers are independent and therefore any cross-section of the rod is perpendicular to the neutral axis during bending.

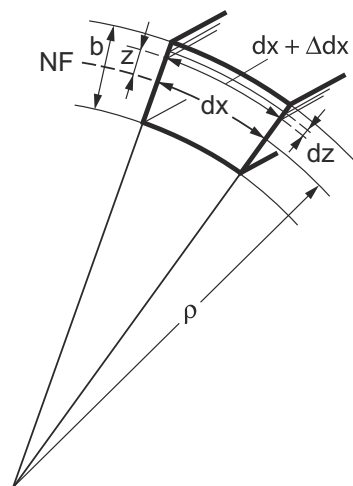


Fig. 6: Biegung, Detailansicht / Deflection, detailed view

Die Krümmung des Balkens an der Stelle x sei $\rho(x)$. Es soll nun ein Ausdruck für $\rho(x)$ hergeleitet und daraus durch Integration dessen Durchbiegung berechnet werden. Wir greifen ein Element dx des Balkens heraus (Abb. 6) und fragen uns nach der relativen Verlängerung einer Faserschicht im Abstand z von der neutralen Faser.

Es gilt:

$$\frac{dx + \Delta dx}{dx} = \frac{\rho + z}{\rho}$$

und somit

$$\frac{\Delta dx}{dx} = \frac{z}{\rho}$$

Diese relative Verlängerung muss nach dem Hooke'schen Gesetz gleich der in der Höhe z wirkenden Spannung $\sigma(z)$ sein:

$$\sigma(z) = E \frac{z}{\rho}$$

Damit kann das an jedem Querschnitt übertragene Drehmoment M berechnet werden:

$$\begin{aligned} M &= \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} z \sigma(z) a dz = \frac{E}{\rho} a \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} z^2 dz \\ &= \frac{E}{\rho} a \frac{z^3}{3} \Big|_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} = \frac{E}{\rho} \frac{ab^3}{12} \end{aligned}$$

Der Faktor $\int az^3 dz = ab^3/12$ wird als *Flächenträgheitsmoment* bezeichnet. Im Gleichgewicht muss M gleich dem deformierenden Moment M' sein.

$$M' = K(\ell - x)$$

Also

$$\frac{E}{\rho} \frac{ab^3}{12} = K(\ell - x) \quad (4)$$

Für den Krümmungsradius einer Kurve $z(x)$ gilt bekanntlich

$$\rho(x) = \frac{(1 + z'^2)^{3/2}}{z''}$$

wobei die Ableitungen nach x mit Strichen bezeichnet wurden. Für kleine Krümmungen kann z'^2 gegen 1 vernachlässigt werden. Es gilt also näherungsweise

$$\frac{1}{\rho(x)} = z''$$

In (4) eingesetzt erhalten wir mit

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = \frac{12 K}{ab^3 E} (\ell - x)$$

die gesuchte Differentialgleichung für $z(x)$. Zweimal nach x integriert liefert:

$$z(x) = \frac{12 K}{ab^3 E} \left[\frac{\ell x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right] + c_1 x + c_2$$

Da für $x = 0$ sowohl z als auch z' gleich Null sein müssen, verschwinden die Integrationskonstanten c_1 und c_2 . Man erhält also für die Durchbiegung s am Ende des Stabes ($x = \ell$):

$$z(\ell) = -s = \frac{4 K \ell^3}{ab^3 E} \quad \text{QED}$$

The curvature of the beam at the point x is $\rho(x)$. An expression for $\rho(x)$ can be derived by integrating its total deflection. We take an element dx of the bar (fig. 6) and consider the relative extension of a fiber at distance z from the neutral axis. The following applies:

$$\frac{dx + \Delta dx}{dx} = \frac{\rho + z}{\rho}$$

and thus:

$$\frac{\Delta dx}{dx} = \frac{z}{\rho}$$

According to Hooke's law this relative extension is equal to the stress $\sigma(z)$ acting along z :

$$\sigma(z) = E \frac{z}{\rho}$$

Thus at each cross-section the torque M can be calculated:

$$\begin{aligned} M &= \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} z \sigma(z) a dz = \frac{E}{\rho} a \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} z^2 dz \\ &= \frac{E}{\rho} a \frac{z^3}{3} \Big|_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} = \frac{E}{\rho} \frac{ab^3}{12} \end{aligned}$$

The term $\int az^3 dz = ab^3/12$ is called the *area moment of inertia*. In equilibrium M must be equal to the deformation moment M' .

$$M' = K(\ell - x)$$

Thus

$$\frac{E}{\rho} \frac{ab^3}{12} = K(\ell - x) \quad (4)$$

The radius of curvature of a curve $z(x)$ is considered known and is given by:

$$\rho(x) = \frac{(1 + z'^2)^{3/2}}{z''}$$

The strokes denote the first and second derivatives. For small curvatures z'^2 can be neglected with respect to z' . It follows approximately:

$$\frac{1}{\rho(x)} = z''$$

Combining with equation (4) we obtain:

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = \frac{12 K}{ab^3 E} (\ell - x)$$

the desired differential equation for $z(x)$. Integrating twice by x yields:

$$z(x) = \frac{12 K}{ab^3 E} \left[\frac{\ell x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right] + c_1 x + c_2$$

With the boundary condition that at $x = 0$ both z and z' equal zero, we get for the integration constants $c_1 = 0$ and $c_2 = 0$. So the deflection s at the end of the bar ($x = \ell$) is given by:

$$z(\ell) = -s = \frac{4 K \ell^3}{ab^3 E}$$

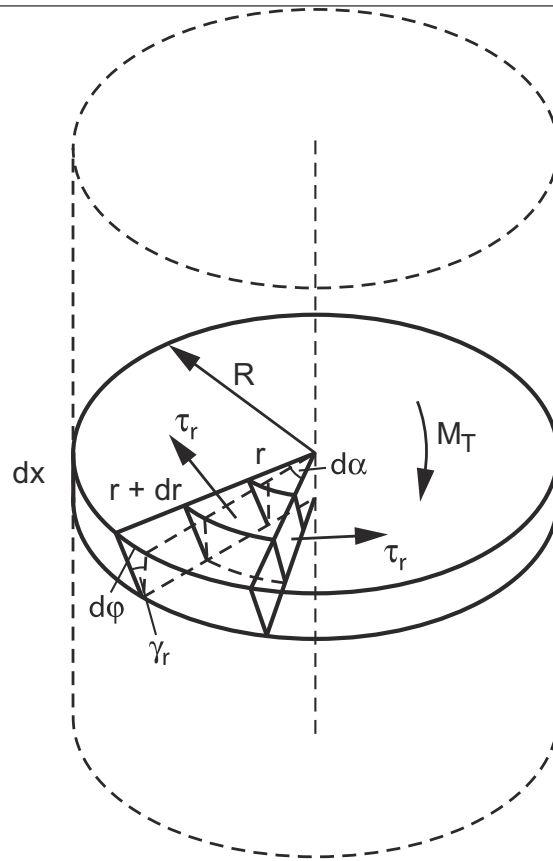


Fig. 7: Direktionsmoment / Directional Moment

Zur Formel (3) gelangt man folgendermassen. In Abb. 7 ist aus einem *kreisförmigen* Zylinder (Draht) eine Scheibe der Dicke dx senkrecht zur Zylinderachse herausgeschnitten gedacht. Infolge des in jedem Querschnitt wirksamen Torsionsmomentes M_T ist die Deckfläche der Scheibe um den Winkel $d\varphi$ gegen die Grundfläche verdreht. Auf Deck- und Grundfläche des Volumenelementes

$$r \, d\alpha \, dr \, dx$$

wirken daher *Schubspannungen* τ_r , welche entsprechend dem Hooke'schen Gesetz eine *Winkeländerung* γ_r zur Folge haben:

$$\gamma_r = \frac{1}{G} \tau_r$$

(G = Torsionsmodul)

Aus Abb. 7 sieht man leicht, dass bei kleinen Verdrehungen $d\varphi$ gilt:

$$\gamma_r \, dx = r \, d\varphi$$

Equation (3) is derived in the following way: we consider a circular cylinder (e.g a wire) divided into slices of thickness dx perpendicular to its axis as shown in fig. 7. Each torsional moment M_T rotates the top surface of the disk by the angle $d\varphi$ relative to its base. On the top and base of the volumetric element

$$r \, d\alpha \, dr \, dx$$

therefore the *shear stresses* τ_r which provides a modification γ_r of the angle are, according to Hooke's law, related by :

$$\gamma_r = \frac{1}{G} \tau_r$$

(G = modulus of rigidity)

From fig. 7 we easily understand that applying this relation to small twists $d\varphi$ yields:

$$\gamma_r \, dx = r \, d\varphi$$

The torsion modulus over the entire disk is given by:

$$\begin{aligned} M_T &= \int_0^R \int_0^{2\pi} r \cdot \tau_r \cdot r \cdot dr \cdot d\alpha \\ &= G \frac{d\varphi}{dx} \int_0^R \int_0^{2\pi} r^3 \cdot dr \cdot d\alpha \\ &= G \frac{d\varphi}{dx} \frac{R^4}{4} 2\pi = \frac{\pi R^4 G}{2} \frac{d\varphi}{dx} \end{aligned}$$

Das gesamte, von einem Querschnitt auf einen benachbarten übertragene Drehmoment wird damit:

$$\begin{aligned} M_T &= \int_0^R \int_0^{2\pi} r \cdot \tau_r \cdot r \cdot dr \cdot d\alpha \\ &= G \frac{d\varphi}{dx} \int_0^R \int_0^{2\pi} r^3 \cdot dr \cdot d\alpha \\ &= G \frac{d\varphi}{dx} \frac{R^4}{4} 2\pi = \frac{\pi R^4 G}{2} \frac{d\varphi}{dx} \end{aligned}$$

Hat der Draht die Länge $x = \ell$, und ist der gesamte Verdrehungswinkel φ , so wird

$$M_T = \frac{\pi R^4 G}{2\ell} \varphi = D \varphi$$

d. h. für das Direktionsmoment ergibt sich:

$$D = \frac{\pi R^4}{2\ell} G$$

For a wire of length $x = \ell$, and an angle of torsion φ , we get:

$$M_T = \frac{\pi R^4 G}{2\ell} \varphi = D \varphi$$

hence for the coefficient of torsion:

$$D = \frac{\pi R^4}{2\ell} G$$

5 Fragen für Studierende des Studiengangs Physik

1. Was bedeutet elastische, was plastische Verformung? Wie erkennt man diese in einer Darstellung von Spannung σ vs. Dehnung ε ?
2. Wie verhält sich bei elastischer bzw. plastischer Verformung jeweils die atomare Nachbarschaft?
3. Sind Elastizitätsmodul, Querkontraktion und Schubmodul unabhängige Größen eines Festkörpers?
4. Nennen Sie ein weiteres Modul samt seiner Definition.
5. Hat eine Flüssigkeit ein Schubmodul?
6. Von welchen Größen hängt das Schubmodul einer Legierung ab?

5 Questions for Physics Students

1. What are elastic and plastic deformation? How does one recognise these from stress σ vs. strain ε ?
2. What happens on the atomic scale for elastic and plastic deformation, respectively?
3. Are the bulk modulus, the lateral contraction, and the shear modulus dependent on the size of a solid?
4. Name another modulus and give its definition.
5. Does a liquid have a shear modulus?
6. What quantities does the shear modulus of an alloy depend on?