

## Versuch

### Oberflächenwellen und Interne Wellen

## 1 Einleitung

Schwerewellen an der Oberfläche von Fluiden (Seen, Flüssen, dem Meer) sind allgegenwärtig. Weniger offensichtlich sind sogenannte *interne Wellen* an Dichtegrenzen. Sie treten stets in Seen an der Grenze zwischen Epilimnion und Hypolimnion oder in Meeren zwischen der meist wärmeren, oberen Deckschicht ("mixed layer") und dem kälteren Tiefenwasser auf. In Seen beobachtet man häufig auch lange, stehende Interne Wellen, sogenannte Seiches. Auch in der Atmosphäre kann man manchmal anhand der periodischen Abfolge von bewölkten und wolkenfreien Himmel *interne Wellen* erkennen.

In einer Reihe von Experimenten sollen Sie sowohl interne Wellen als auch Oberflächenwellen erzeugen, ihre Eigenschaften untersuchen und ihre Messungen mit der Theorie von Schwerewellen an der Oberfläche und an einer Dichtegrenze im Inneren eines Fluids vergleichen.

## 2 Theorie

Wir betrachten zwei homogene Fluide mit konstanten Dichten  $\rho_1, \rho_2, \rho_1 < \rho_2$  (siehe Abb. 1).

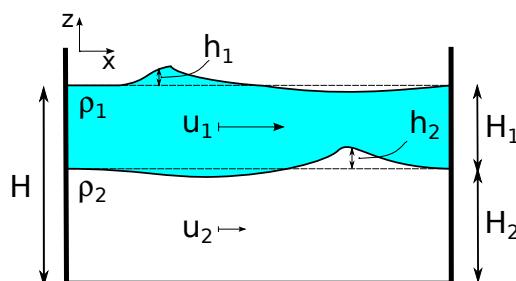


Abbildung 1: Zweischichtsystem

Für den hydrostatischen Druck  $p(x, z)$  in der oberen Schicht 1 und der Stelle  $x$  in Tiefe  $z$ , gilt  $p(x, z) = -\rho_1 g (z - h_1(x))$ . Der das Wasser beschleunigende negative Druckgradient in  $x$ -Richtung ist folglich unabhängig von der Tiefe  $z$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = g\rho_1 \frac{\partial h_1}{\partial x}. \quad (1)$$

Für den Druckgradienten in x-Richtung in Schicht 2 kommt noch ein Summand hinzu, der mit der Auslenkung  $h_2$  der Grenze zwischen den beiden Schichten verbunden ist. Hier spielt nur der Dichteunterschied  $\Delta\rho = \rho_2 - \rho_1$  zwischen den Schichten eine Rolle:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = g\rho_1 \frac{\partial h_1}{\partial x} + g\Delta\rho \frac{\partial h_2}{\partial x} \quad (2)$$

Nach den Newton'schen Gesetzen beschleunigen diese Druckgradienten das Wasser. Beschleunigung ist die zeitliche Änderung der Geschwindigkeiten des Wassers. Somit gilt für die Geschwindigkeiten  $u_1, u_2$  in den Schichten 1 und 2:

$$\rho_1 \frac{\partial u_1}{\partial t} = -g\rho_1 \frac{\partial h_1}{\partial x} \quad (3)$$

$$\rho_2 \frac{\partial u_2}{\partial t} = -g\rho_1 \frac{\partial h_1}{\partial x} - g\Delta\rho \frac{\partial h_2}{\partial x} \quad (4)$$

Für ein nahezu inkompressibles Fluid wie Wasser muss die räumliche Änderung der Geschwindigkeit mit einer Änderung der Höhe der Wassersäule einhergehen (Kontinuitätsgleichung). Für das Zweischichtsystem dargestellt in Abb. 1 ergibt sich

$$\frac{\partial h_1}{\partial t} - \frac{\partial h_2}{\partial t} + H_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} = 0, \quad (5)$$

$$\frac{\partial h_2}{\partial t} + H_2 \frac{\partial u_2}{\partial x} = 0. \quad (6)$$

Eliminiert man nun aus (3), (5)  $u_1$ , und aus (4), (6)  $u_2$  so erhält man

$$\frac{\partial^2 h_1}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 h_2}{\partial t^2} = gH_1 \frac{\partial^2 h_1}{\partial x^2}, \quad (7)$$

$$\frac{\partial^2 h_2}{\partial t^2} = gH_2 \frac{\rho_1}{\rho_2} \frac{\partial^2 h_1}{\partial x^2} + gH_2 \frac{\Delta\rho}{\rho_2} \frac{\partial^2 h_2}{\partial x^2}. \quad (8)$$

Da sich  $\rho_1$  und  $\rho_2$  nur wenig unterscheiden gilt  $\rho_1/\rho_2 \approx 1$  und (8) vereinfacht sich zu:

$$\frac{\partial^2 h_2}{\partial t^2} = gH_2 \frac{\partial^2 h_1}{\partial x^2} + gH_2 \frac{\Delta\rho}{\rho} \frac{\partial^2 h_2}{\partial x^2}. \quad (9)$$

wobei es kaum eine Rolle spielt, ob man für  $\rho, \rho_1, \rho_2$  oder etwa die mittlere Dichte  $\bar{\rho} = \rho_1 + \rho_2/2$  verwendet. Die Gleichungen (7) und (9) bilden ein System von zwei linearen, homogenen partiellen Differentialgleichungen für die zwei Unbekannten  $h_1, h_2$ .

Für  $H_2 = 0$  und  $h_2 \equiv 0$  verschwindet (9) und (7) reduziert sich zu einer Wellengleichung für  $h = h_1$ :  $\frac{\partial^2 h}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}$  mit Wellengeschwindigkeit  $c = \sqrt{gH}$ .

Für  $H_2 > 0$  löst man das Gleichungssystem durch Bestimmung der Eigenwerte des Gleichungssystems nach einem Wellenansatz. Man erhält zwei Eigenwerte, die mit der Geschwindigkeit der damit verbundenen Wellen verknüpft sind (Abb. 2, oben). Die erste Lösung beschreibt Oberflächenwellen (*Surface Waves*) bei denen sich die gesamte Wassersäule in eine Richtung bewegt. Für die Geschwindigkeit dieser Wellen gilt  $c_s = \sqrt{g(H_1 + H_2)} = \sqrt{gH}$ , wobei  $H = H_1 + H_2$  die gesamte Tiefe des Wasser bezeichnet.

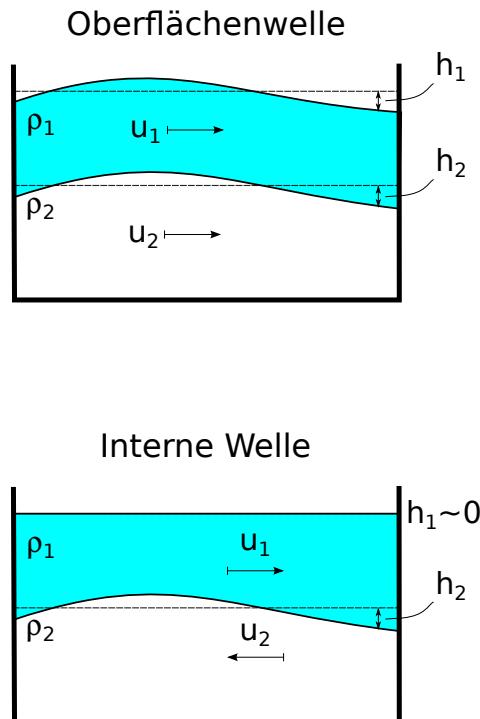


Abb. 2: Oberflächenwellen und interne Wellen.

Bei der zweiten Lösung bewegen sich die beiden Wasserschichten gegeneinander, so dass die Oberfläche nahezu ruht und sich nur die Grenze zwischen den beiden Schichten bewegt (Abb. 2 unten). Dies sind die *internal waves* (*internal waves*). Für ihre Geschwindigkeit  $c_i$  dieser Wellen ergibt sich

$$\begin{aligned} c_i &= \sqrt{\frac{\Delta\rho}{\rho} \frac{H_1 H_2}{H}} \\ &= \sqrt{g' H'} \\ &= \sqrt{g H_e} \end{aligned} \tag{10}$$

mit

$$H' := \frac{(H_1 H_2)}{H}$$

der *reduzierten Erdbeschleunigung*

$$g' = g \frac{\Delta\rho}{\rho}$$

und der *effektive Tiefe*

$$H_e = H' \frac{\Delta\rho}{\rho}$$

Zur Vorbereitung überlege man sich wie sich die Geschwindigkeit der internen Welle mit sich änderndem Dichteunterschied  $\Delta\rho$  verändert und für welche Schichttiefen  $H_1, H_2$  sie bei konstantem  $\Delta\rho$  und  $H$  maximal wird.

## 2.1 Dichte von Salzwasser

Für die Dichte  $\rho$  von Salzwasser gilt in linearer Näherung bei Atmosphärendruck in Abhängigkeit von Temperatur  $T$  (in Celsius) und Salinität  $S$  (in g/kg) für  $10^\circ\text{C} < T < 30^\circ\text{C}$  und  $0 \leq S \leq 40 \text{ g/kg}$ :

$$\rho(T, S) = (998.2 - 0.1(T - 20) + 0.76S \pm 0.3) \text{ kg/m}^3 \quad (11)$$

## 2.2 Stehende Wellen

Für stehende Wellen(*modes*) in dem quaderförmigen Gefäß der Länge  $L$  muss die horizontale Geschwindigkeit  $u$  an den Wänden stets verschwinden, was aufgrund von Gl. (3) und (5) bedeutet, dass die horizontale Ableitung der Auslenkung auch verschwinden muss. Für sinusförmige Wellen der Wellenlänge  $\lambda$  folgt  $L = n\lambda/2$  mit  $n \in \mathbb{N}$ . Die längste dieser Wellen (Grundschwingung) erfährt in der Regel die geringste Dämpfung und ist deshalb diejenige, die man nach einer Einschwingdauer ausschliesslich beobachtet. Da für Sinuswellen der Wellenlänge  $\lambda$ , Geschwindigkeit  $c$  und Periode  $T$   $c = \lambda/T$  gilt ergibt sich für diese Grundschwingung

$$c = \frac{2L}{T} \quad (12)$$

## 3 Aufgaben

1. Messen Sie die Geschwindigkeit von Oberflächenwellen für verschiedene Wassertiefen und vergleiche die Messungen mit der Theorie.
2. Messen Sie die Geschwindigkeit von internen Wellen und vergleiche die Messungen mit der Theorie

## 4 Durchführung



Abb. 3: Benötigtes Material.

### Benötigtes Material

- Kleiner durchsichtiger, quaderförmiger Wasserbehälter (2-3l)<sup>1</sup>,
- Küchenwaage,
- Kochsalz,
- Tinte oder andere Farbe zum Einfärben des Wasser,
- Zentimetermass,
- Frischhaltefolie,
- Messbecher
- Thermometer (nützlich aber nicht notwendig),
- Löffel zum umrühren.

### 4.1 Oberflächenwellen

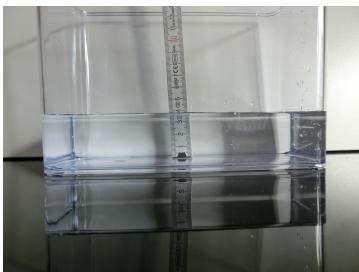
#### 4.1.1 Schritte

1. Messen Sie die Innenlänge und Breite Ihres Behälters.



2. Füllen Sie den Behälter mit ca. 1cm Wasser und messen sie die Wassertiefe mit dem Zentimetermass.

<sup>1</sup>Der Behälter sollte relativ hoch und schmal sein mit einen ebenen Boden. Den Behälter der in diese Anleitung benutzt wurde, gibt es bei Rotho.com (Loft Serie).



3. Kippen Sie den Behälter und messen Sie die Zeit, die die entstehende Welle benötige um von einem Ende des Behälters zum anderen zu kommen.<sup>2</sup>
4. Bei grösseren Tiefen läuft die Welle so schnell, dass die Laufzeit schwer zu bestimmen ist. Hier misst man die nach dem Eigenschwingen übrig gebliebene Periode der längsten Welle (Grundschwingung), um mit Hilfe von (12) die Wellengeschwindigkeit zu bestimmen.
5. Aus der Durchlaufzeit können Sie nun die Geschwindigkeit der Welle berechnen.
6. Wiederholen Sie die Messung für mindestens 3 weitere Wassertiefen.

#### 4.1.2 Auswertung

Tragen Sie Ihre gemessenen Geschwindigkeiten gegen die Quadratwurzel der Wassertiefe auf. Die Messpunkte sollten auf einer Geraden liegen. Warum? Berechnen Sie aus ihren Messungen die effektive Erdbeschleunigung und vergleichen Sie Ihren Messwert mit dem Standardwert von  $9.81 \text{ m/s}^2$ .

### 4.2 Interne Wellen

#### 4.2.1 Herstellung der Wassermassen

Für diesen Teil des Versuchs benötigen Sie 2 Wassermassen unterschiedlicher Dichte. Die unterschiedliche Dichte kann durch Temperaturunterschiede oder verschiedenen Salzgehalt erreicht werden. Hier verwenden Sie Unterschiede im Salzgehalt, da hier die Mischung kleiner ist und der Wärmeaustausch der mit der Umgebung stattfindet den Versuch nicht maßgeblich beeinflusst.

1. Färben Sie das Wasser für die obere Schicht Frischwasser mit Tinte oder anderer waserlöslicher Farbe und befüllen Sie Ihren Wasserbehälter etwa zur Hälfte damit.
2. Stellen Sie Salzwasser mit einer ungefähren Salinität der Meere ( $35\text{g/kg}$ ) her.

#### 4.2.2 Methode 1 (mit Diffusor)

3. Befestigen Sie den Diffusor mit befestigtem Schlauch am Boden Ihres Gefäss mit Klebegummi.

---

<sup>2</sup>Genauere Ergebnisse erhält man, wenn man nicht nur einen Durchlauf der Welle misst sondern möglichst viele Durchläufe und die Gesamtlaufzeit durch die Anzahl der Durchläufe teilt. Überlegen Sie sich, warum.

4. Legen sie den Schlauch vollständig in Salzwasser, damit er sich mit dem Wasser füllt oder saugen Sie das Wasser mit dem Mund an, bis der Schlauch gefüllt ist. Dann klemmen sie den Schlauch ab und geben ihn in das gefärbte Frischwasser. Der Schlauch muss hier vollständig mit Wasser gefüllt bleiben. Der Wasserspiegel beider Schichten sollte hierbei auf etwa gleicher Höhe stehen.
5. Nun heben Sie das Salzwassergefäß an, damit aufgrund des Archimedischen Prinzips das Salzwasser in das Gefäß mit dem Frischwasser fliesst. Die Flussrate nimmt zu je höher Sie das Salzwassergefäß heben. Ziel ist eine möglichst scharfe Grenze zwischen dem Salz und dem Frischwasser zu erhalten. Deshalb darf die Flussrate nicht zu hoch sein solange der Diffusor nicht vollständig von dem klaren Salzwasser bedeckt ist. Befüllen Sie den Behälter so zu mindestens einem viertel von unten mit Salzwasser. Danach kann der Diffusor abgenommen werden, um die Flussrate zu erhöhen.

#### 4.2.3 Alternative Methode (ohne Diffusor)

1. Wasserschicht: Stellen Sie Salzwasser her mit ungefähr der Salinität der Meere (35 g/kg). Befüllen Sie dazu ihren Behälter zur Hälfte oder Zweidrittel mit Wasser. Messen Sie das Volumen dieses Wassers und wiegen Sie eine entsprechende Menge Salz für dieses Wasser ab. Schütten Sie das Wasser mit dem Salz zurück in den Behälter und rühren Sie gut um, bis das Salz aufgelöst und das Wasser wieder klar ist.



2. Färben Sie für die obere Schicht Frischwasser der gleichen Temperatur mit Tinte oder anderer wasserlöslicher Farbe.



3. Beim Einfüllen der oberen Schicht muss man sehr vorsichtig sein, damit sich die beiden Wassermassen nicht mischen. Ab besten legt man eine Frischhaltfolie auf die Oberfläche der unteren Schicht. Die Folie sollte auf dem Wasser schwimmen. Man schüttet dann dass Wasser langsam auf die Folie und entfernt anschliessend vorsichtig die Folie. Zunächst sollte der Behälter nur zu 80 % bis 90 % gefüllt werden.



4. Der Übergang zwischen oberer und untere Schicht sollte möglichst scharf sein, damit man das System als Zweischichtsystem betrachten kann. Nun misst man die Dicke der oberen und unteren Schicht.



5. Nun schliessen Sie den Behälter. Falls er nicht Wasserdicht ist, kann man versuchen ihn mit Frischhaltefolie abzudichten.



6. Das Zweischichtsystem ist nun für die Messung vorbereitet. Kippen Sie den Behälter um mindestens 30° Grad, halten Sie den Behälter gekippt für mindestens 10 Sekunden und setzen Sie ihn wieder langsam ab, um interne Wellen zu erzeugen.

#### 4.2.4 Auswertung

Aus den Messungen der Periode der beobachteten Grundschwingung der Oberflächen- und internen Wellen berechnet man deren Geschwindigkeiten und vergleicht die Ergebnisse mit den theoretischen Werten.