

3. Kreisel - Gyroscope

1 Grundlagen

1.1 Präzession und Nutation

Unter einem **Kreisel** versteht man einen starren Körper, der um einen festen Punkt 0 frei beweglich ist. Die Bewegung des Kreisels besteht aus einer **Rotation** um eine **momentane Drehachse**, die in jedem Zeitmoment im Raum und innerhalb des starren Körpers eine andere Lage einnehmen kann, siehe Abb. 1.

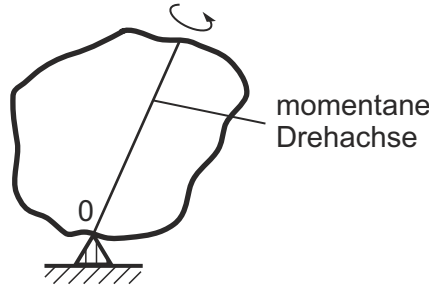


Fig. 1: Schematische Darstellung eines allgemeinen Kreisels. Ein starrer Körper ist beweglich gelagert und rotiert um eine momentane Drehachse. / Schematic of a general gyroscope. A rigid body is pivot-mounted and rotates around a momentary rotation axis.

Im allgemeinen Fall führt ein solcher Kreisel eine sehr komplizierte Bewegung aus, die mathematisch schwer zu behandeln ist. Beschränkt man sich jedoch auf den praktisch häufig auftretenden Fall des rasch rotierenden **rotationssymmetrischen** Kreisels (Schwungrad, Kreiselkompass, Kreiselstabilisatoren), so lassen sich die Bewegungsgesetze in verhältnismässig einfacher Form darstellen. In grossen Zügen lässt sich das Verhalten eines Kreisels auf Grund des **Drallsatzes**

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}, \quad (1)$$

übersehen, d.h. die zeitliche Änderung des **Dralles** \vec{L} ist gleich dem wirkenden **Drehmoment** \vec{M} .

1 Basics

1.1 Precession and nutation

A **gyroscope** is defined as a rigid body which is free to move around a fixed point 0. The motion of the gyroscope consists of a **rotation** around an **axis of rotation** that is free to assume any orientation by itself, see Fig. 1.

In general the motion of a gyroscope is complicated and mathematically difficult to treat. If you restrict yourself however to the convenient and commonly occurring case of a rapidly rotating and **rotational symmetric** gyroscopes (flywheel, gyrocompass, gyrostabilizer), then the laws of motion can be represented in a relatively simple form. The behavior of a gyroscope can be explained by the **conservation of angular momentum**:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}, \quad (1)$$

i.e. the time variation of the **angular momentum** \vec{L} is equal to the **acting torque** \vec{M} .

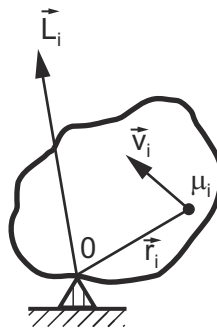


Fig. 2: Der Drehimpuls \vec{L} eines starren Körpers um den Bezugspunkt 0 ist die Summe der Drehimpulsvektoren $\vec{L}_i = \mu_i \vec{v}_i$ aller Massenpunkte. / The angular momentum \vec{L} of a rigid body with respect to the point 0 is the sum of the angular momentum vectors $\vec{L}_i = \mu_i \vec{v}_i$ of all mass points.

Der Drall oder Drehimpuls eines rotierenden Körpers entspricht dem Begriff des **Impulses** bei der Translationsbewegung. Man versteht daher unter dem Drall des um den festen Punkt 0 (Abb. 2) rotierenden starren Körpers die Summe der Momente der Impulsvektoren

$$\vec{p}_i = \mu_i \vec{v}_i,$$

aller Massenpunkte μ_i in Bezug auf den festen Punkt 0:

$$\vec{L} = \sum_i \vec{L}_i = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i = \sum_i \vec{r}_i \times \mu_i \vec{v}_i. \quad (2)$$

Die Gleichung (1) ist eine **Vektorgleichung**; sie sagt demnach nicht nur über die **Grösse**, sondern auch über die **Richtung** der Dralländerung etwas aus. Auf den in Abb. 3 und Abb. 4 dargestellten **symmetrischen Kreisel** (Spielkreisel) angewendet bedeutet dies folgendes.

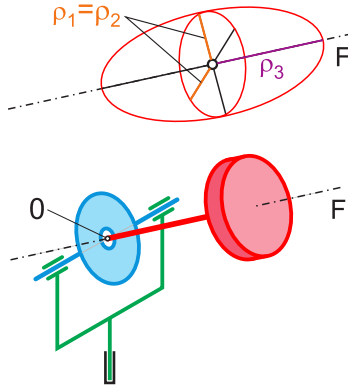


Fig. 3: Figurenachse f eines auf einem Kreuzgelenk gelagerten, symmetrischen Kreisels. Der obere Teil der Abbildung zeigt das Trägheitsellipsoid mit den Hauptachsen $\theta_i \equiv 1/\rho_i^2$. / Figure axis f of a gimbal-mounted, symmetric gyro. On top: the ellipsoid of inertia of the gyro with the axis of the principal moments of inertia. $\theta_i \equiv 1/\rho_i^2$.

Der Kreisel rotiere mit grosser Winkelgeschwindigkeit um eine durch 0 gehende Achse, die zunächst mit der **Figurenachse**, F , übereinstimmen möge. Zur Zeit t sei der Drall \vec{L} . Nun wirkt auf den Kreisel stets die Schwerkraft, d.h. das im Schwerpunkt angreifende Gewicht \vec{G} übt auf den Kreisel das Drehmoment \vec{M} in Bezug auf den Punkt 0 aus. Nach dem Drallsatz erfährt der Drall \vec{L} in der kurzen Zeit dt eine vektorielle Änderung $d\vec{L}$, die parallel zum Momentvektor \vec{M} steht. Zur Zeit $t + dt$ hat der Drallvektor und damit die Figurenachse ihre ursprüngliche Lage verlassen und die neue Lage $\vec{L} + d\vec{L}$ eingenommen. Bemerkenswert ist, dass die Figurenachse des rasch rotierenden Kreisels stets **senkrecht** zur wirkenden Kraft ausweicht! Wirkt diese Kraft dauernd, so ändert sich die Lage der Achse und des Dralles fortwährend. Diese Bewegung bezeichnet man als **Präzession des**

The spin or angular momentum of a rotating body corresponds to the concept of **linear momentum** for a translation movement. Therefore, the angular momentum of a rotating rigid body around the fixed point 0 (Fig. 2) can be assimilated to the sum of the individual angular momenta with linear momentum vectors

$$\vec{p}_i = \mu_i \vec{v}_i,$$

for all mass points μ_i with respect to the fixed point 0:

$$\vec{L} = \sum_i \vec{L}_i = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i = \sum_i \vec{r}_i \times \mu_i \vec{v}_i. \quad (2)$$

Equation (1) is a **vector** equation meaning that the angular momentum change depends not only on the **magnitude** but also on the **direction** of the torque. We can apply this consideration to the **symmetric gyroscope** shown in Fig. 3 and Fig. 4.

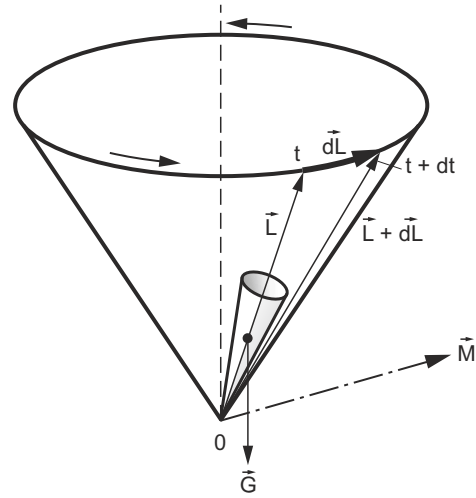


Fig. 4: Schematische Darstellung der Präzessionsbewegung. Die Kraft G übt ein Drehmoment \vec{M} aus, aufgrunddessen der Drehimpulsvektor einen Kegel beschreibt. / Schematic of the precession. The force G results in a torque \vec{M} which causes the angular momentum vector to follow a cone-shaped trajectory.

The gyroscope rotates with a large angular velocity around an axis passing through 0, which may initially coincide with the **figure axis**, F , which is the principal axis of inertia. Let the angular momentum at time t be \vec{L} . The weight \vec{G} exerts a torque \vec{M} to the gyroscope with respect to point 0. According to the conservation of angular momentum, the angular momentum \vec{L} experiences in a short time dt a vectorial change $d\vec{L}$, which is parallel to the torque \vec{M} . At time $t + dt$, the angular momentum vector and thus the figure axis has left its original position and assumed the new position $\vec{L} + d\vec{L}$. As can be understood the change of the gyroscope's rotation axis is always **perpendicular** to the acting force. This force acts constantly, so the position of the rotation axis and the angular momenta changes continuously. This motion is called **precession of angular momentum**.

Dralls.

Fällt die **Figurenachse** nicht mit dem **Drall** zusammen, so führt sie noch eine weitere, der Präzession überlagerte Bewegung aus, die sog. **Nutation** (Nickbewegung). Am besten übersieht man die Nutation, wenn kein Drehmoment auf den Kreisel wirkt, die Präzessionsbewegung also wegfällt. In diesem Fall ist wegen

$$\frac{\vec{L}}{dt} = \vec{M} = 0,$$

der Drallvektor **zeitlich konstant**. Man hat jedoch ausser dem Drallvektor noch die momentane Drehachse D und die Figurenachse F zu unterscheiden, wie in Abb. 5 dargestellt. Der Drall steht im Raum absolut fest. Die Figurenachse beschreibt im Raum einen Kegel, der den Drall als Achse hat, den sog. **Nutationskegel**. Diese Bewegung der Figurenachse ist leicht zu beobachten. Gibt man dem schnell laufenden Kreisel einen kurzen Stoss, durch welchen bewirkt wird, dass der Drall nicht mehr mit der Figurenachse zusammenfällt, so beschreibt die Figurenachse den Nutationskegel.

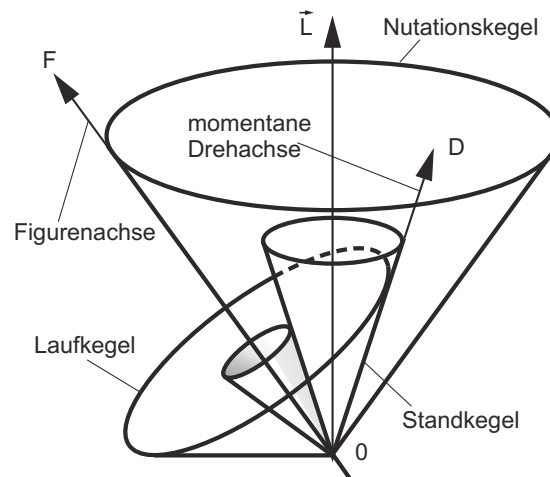


Fig. 5: Schematische Darstellung der Nutationsbewegung. Die Figurenachse F beschreibt einen Kegel um den Drehimpulsvektor \vec{L} . / Schematic of the nutation. The trajectory of the figure axis F lies on a cone centered on the angular momentum vector \vec{L} .

Die Bewegung kann in ihrem gesamten Verlauf auch durch das Abrollen zweier Kegel aufeinander dargestellt werden, siehe Abb. 5 : dem sog. **Laufkegel** auf dem **Standkegel**. Der Standkegel hat den Drall als Achse und steht im Raum fest, der Laufkegel hat die Figurenachse als Achse und rollt auf dem Standkegel ab. Die gemeinsame Mantellinie der beiden Kegel wird durch die momentane Drehachse gebildet.

1.2 Präzessionsgeschwindigkeit eines symmetrischen Kreisels

Die oben erwähnten Erscheinungen lassen sich an einem wie in Abb. 6 speziell konstruierten Kreisel gut beobachten und zahlenmässig überprüfen. Ein schweres Rad (Velorad mit Kupferring) ist am Ende eines

In Fig. 4, the fact that the **rotation axis** and the **angular momentum** are not aligned, leads to yet another movement, called **nutation**. It is easier to observe nutation when no torque acts on the gyroscope (hence there is no precession). In this case, because of

$$\frac{\vec{L}}{dt} = \vec{M} = 0,$$

the angular momentum is **constant over time**. However, in addition to the angular momentum axis one has still to distinguish the instantaneous axis of rotation D from the figure axis F as shown in Fig. 5. The figure axis describes a cone in space, which has the angular momentum axis as the so-called **nutation cone**. This motion of the figure axis is easy to observe. If you give a small perturbation to the fast-spinning gyroscope, it will cause the angular momentum and the figure axis to no longer coincide. Therefore the figure axis will describe a nutation cone.

The entire movement can also be represented by the rolling of two cones on each other, see Fig. 5: the so-called **body cone** on the **space cone**. The space cone has the angular momentum as axis and is fixed in space. The body cone has F as axis and rolls on the space cone. The common surface line of the two cones corresponds to the instantaneous torque.

1.2 Precession of a symmetric gyroscope

The above-mentioned phenomena can be observed and numerically checked with a specially designed gyroscope as shown in Fig. 6. A heavy wheel (bike wheel with copper ring) is mounted on the end of

Balkens drehbar gelagert, so dass seine Figuren- und Drehachse mit der Längsachse des Balkens zusammenfallen. Der Balken ist im Punkt 0 um eine horizontale und eine vertikale Achse, d.h. um den Punkt 0 frei drehbar. Durch ein verschiebbares Laufgewicht A kann das ganze System ausbalanciert werden, so dass die Kreiselachse horizontal steht. Der Kreisel, d.h. das bezüglich seiner Drehachse symmetrische Rad rotiere rasch mit der **Winkelgeschwindigkeit** $\vec{\omega}$ um seine Figuren- und Drehachse. In diesem Fall fällt der Drall \vec{L} mit der Figuren- und Drehachse zusammen und lässt sich einfach berechnen, wie folgende Überlegung zeigt.

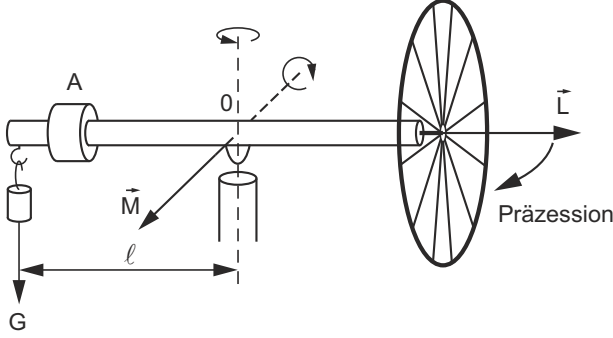


Fig. 6: Schematische Darstellung des Versuchsaufbaus. Ein ausbalancierter Balken mit einem Velorad und Gegengewicht ist frei drehbar gelagert. Die Präzession wird durch anhängen zusätzlicher Gewichte G hervorgerufen.
/ Schematic of the experimental setup. A balanced beam with a bicycle and a counterweight is mounted on a gimbal. The precession is induced by attaching additional weights G .

Zu jedem Massenpunkt μ_i gehört im symmetrischen Kreisel ein bezüglich der Figuren- und Drehachse symmetrischer Massenpunkt $\mu'_i = \mu_i$. Aus Abb. 8 ergibt sich für den Drall eines symmetrischen Paares von Massenpunkten:

$$\begin{aligned}\vec{L}_{ii'} &= \vec{L}_i + \vec{L}_{i'} \\ &= \mu_i(\vec{r}_{0i} + \vec{r}_i) \times \vec{v}_i + \mu'_i(\vec{r}_{0i} - \vec{r}_i) \times (-\vec{v}_i) \\ &= 2\mu_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i.\end{aligned}$$

Da nun $\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i$ ist, wird

$$\vec{L}_{ii'} = 2\mu_i \vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) = 2\mu_i r_i^2 \vec{\omega}.$$

Der Drall des ganzen Kreisels wird somit

$$\vec{L} = \sum_i \vec{L}_i = \frac{1}{2} \sum_i \vec{L}_{ii'} = \sum_i \mu_i r_i^2 \vec{\omega}.$$

Nun ist aber $\sum_i \mu_i r_i^2 = \theta = \text{Trägheitsmoment}$ des Kreisels bezüglich der Figuren- und Drehachse. Für den Drall hat man daher

$$\vec{L} = \theta \vec{\omega}$$

und für seinen Betrag L erhält man mit dem Betrag der Winkelgeschwindigkeit $\omega = |\vec{\omega}|$ den einfachen

a bar, so that its rotation axis coincides with the longitudinal axis of the bar. In addition the bar is free to rotate horizontally and vertically around the point 0. The whole system is balanced by a weight A so that the gyroscope axis is kept horizontal. The gyroscope, i.e. the axis of rotation with respect to its symmetric wheel rotates rapidly with **angular velocity** $\vec{\omega}$ about its figure axis. In this case, the angular momentum \vec{L} coincides with the figure axis and can be calculated easily, as shown in the following.

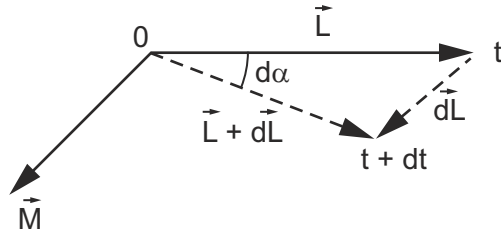


Fig. 7: Koordinatensystem für den Kreisel in Fig. 6.
/ Coordinate system for the gyroscope shown in Fig 6.

For each mass point μ_i in the symmetric gyroscope there exists a symmetric mass point relative to the figure axis $\mu'_i = \mu_i$. For the angular momentum of a symmetric pair of mass points as shown in Fig. 8 we get:

$$\begin{aligned}\vec{L}_{ii'} &= \vec{L}_i + \vec{L}_{i'} \\ &= \mu_i(\vec{r}_{0i} + \vec{r}_i) \times \vec{v}_i + \mu'_i(\vec{r}_{0i} - \vec{r}_i) \times (-\vec{v}_i) \\ &= 2\mu_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i.\end{aligned}$$

Since $\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i$, then:

$$\vec{L}_{ii'} = 2\mu_i \vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) = 2\mu_i r_i^2 \vec{\omega}.$$

The angular momentum of the whole gyroscope is thus:

$$\vec{L} = \sum_i \vec{L}_i = \frac{1}{2} \sum_i \vec{L}_{ii'} = \sum_i \mu_i r_i^2 \vec{\omega}.$$

But $\sum_i \mu_i r_i^2 = \theta = \text{moment of inertia}$ of the gyroscope with respect to the figure axis. For the angular momentum one has therefore

$$\vec{L} = \theta \vec{\omega}.$$

Its magnitude L is obtained from the magnitude of the angular velocity $\omega = |\vec{\omega}|$. We get the simple

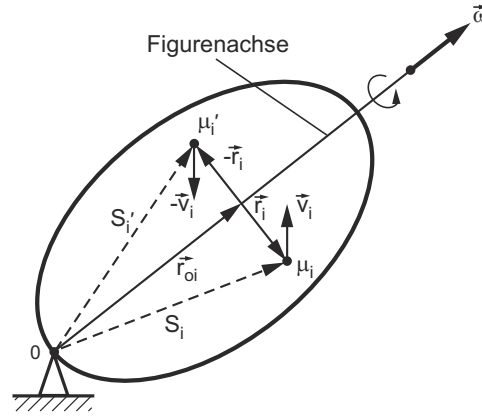


Fig. 8: Drehimpuls und Trägheitsmoment eines symmetrischen Kreisels. Paare von Massenpunkten zu beiden Seiten der Drehachse tragen symmetrisch zum Drehimpuls bei, woraus sich $L = \theta\omega$ herleiten lässt. / Angular momentum and moment of inertia of a symmetric gyroscope. Pairs of mass points on both sides of the rotation axis contribute symmetrically to the angular momentum, from which $L = \theta\omega$ can be derived.

Ausdruck

$$L = \theta\omega. \quad (3)$$

In diesem **speziellen** Fall ist also der Drall des symmetrischen Kreisels gleich dem Produkt aus dem Trägheitsmoment θ und der Winkelgeschwindigkeit ω , **beide** bezüglich der Figurenachse. Solange der Kiesel (Abb. 6) gut ausbalanciert ist und kein Drehmoment auf ihn ausgeübt wird, gilt nach Gleichung (1) wegen $\vec{M} = 0$:

$$d\vec{L} = \vec{M}dt = 0 \quad \text{also} \quad \vec{L} = \text{const.}$$

Der Drall bleibt **räumlich** und **zeitlich** fest. Übt man jetzt durch Anhängen eines Übergewichtes ein Drehmoment \vec{M} in Bezug auf den Punkt 0 aus, so ändert sich der Drall nach Gleichung (1) so, dass der kleine vektorielle Zuwachs $d\vec{L}$, den derselbe erfährt, durch den Vektor $\vec{M} \cdot dt$ gegeben ist. Wie in Abb. 7 zu sehen ist, liegt $d\vec{L}$ parallel zu \vec{M} . Der Vektor \vec{L} hat sich im Zeitelement dt in der Horizontalebene also etwas nach vorn gedreht. Dies wird geschehen, solange das Moment \vec{M} wirkt, d.h. der Kiesel **präzediert**. Die Winkelgeschwindigkeit dieser Präzessionsbewegung ist:

$$\Omega_{\text{Präz.}} = \frac{d\alpha}{dt}, \quad (4)$$

wobei $d\alpha$ der Winkel ist, um den sich die Figurenachse in der Horizontalebene im Zeitelement dt gedreht hat. Aus Abb. 7 folgt

$$d\alpha = \frac{\text{Bogen}}{\text{Radius}} = \frac{dL}{L}$$

und da $dL = Mdt$ und $d\alpha = \frac{M}{L}dt$, folgt daraus

$$\Omega_{\text{Präz.}} = \frac{M}{L}. \quad (5)$$

Setzt man noch das Drehmoment des Übergewichtes G (Hebelarm ℓ), nämlich $M = G\ell$ und den Drall in

expression

$$L = \theta\omega. \quad (3)$$

In this **particular case**, the angular momentum of the symmetric gyroscope is equal to the product of the moment of inertia θ and the angular velocity ω , both with respect to the figure axis. As long as the gyroscope (Fig. 6) is well balanced and no torque is exerted on it, according to Equation (1) and because of $\vec{M} = 0$, it holds that

$$d\vec{L} = \vec{M}dt = 0 \quad \text{also} \quad \vec{L} = \text{const.}$$

The angular momentum remains constant in **space** and **time**. If we provide a very large torque \vec{M} with respect to the point 0, then the angular momentum varies according to Equation (1) so that the small increase of vector $d\vec{L}$ is given by the vector $\vec{M} \cdot dt$. As shown in Fig. 7, $d\vec{L}$ is parallel to \vec{M} . The vector \vec{L} has thus rotated slightly forward on the horizontal plane during the time increment dt . This will happen as long as the torque \vec{M} is applied, i.e. the gyroscope is **precessing**. The angular velocity of this precession movement is:

$$\Omega_{\text{Präz.}} = \frac{d\alpha}{dt}, \quad (4)$$

where $d\alpha$ is the angle around the figure axis in the horizontal plane during the time increment dt . From Fig. 7 it follows that

$$d\alpha = \frac{\text{Bogen}}{\text{Radius}} = \frac{dL}{L}$$

and because $dL = Mdt$ and $d\alpha = \frac{M}{L}dt$, it follows that

$$\Omega_{\text{Präz.}} = \frac{M}{L}. \quad (5)$$

If you further plug in the torque due to the weight G (lever arm ℓ), namely $M = G\ell$ and the angular momentum in our special case according to Equation (3) one finds that

$$\Omega_{\text{Präz.}} = \frac{G\ell}{\theta\omega}. \quad (6)$$

unserem speziellen Fall nach Gleichung (3), ein, so findet man:

$$\Omega_{\text{Pr\"{a}z.}} = \frac{G\ell}{\theta\omega}. \quad (6)$$

Der Kreisel präzediert also umso schneller, je geringer sein Drall, d.h. bei gegebenem Trägheitsmoment seine Winkelgeschwindigkeit ist, und je grösser das Moment ist, welches den Kreisel aus seiner Gleichgewichtslage zu bringen versucht.

2 Aufgaben

Die Gültigkeit der Gleichung (6) ist zu prüfen.

1. Das Trägheitsmoment θ des Kreiselrades soll experimentell ermittelt werden.
2. Man messe die Winkelgeschwindigkeit Ω der Präzession für verschiedene Umdrehungsgeschwindigkeiten des Rades, sowie für verschiedene Übergewichte G , und vergleiche sie mit den nach Gleichung (6) berechneten Werten.
3. Man überzeuge sich von der Gültigkeit des **vektoriellen** Zusammenhanges von \vec{L} und \vec{M} , indem man das Rad in verschiedenen Drehrichtungen in Umlauf setzt.

3 Durchführung der Versuche

3.1 Bestimmung des Trägheitsmomentes des Kreiselrades

Zur Bestimmung des Trägheitsmomentes wird der Kreisel am Stativ mit horizontaler Achse befestigt. Um das Rad wird eine Schnur gelegt, an deren Ende die Masse m hängt, wie Abb. 9 gezeigt.

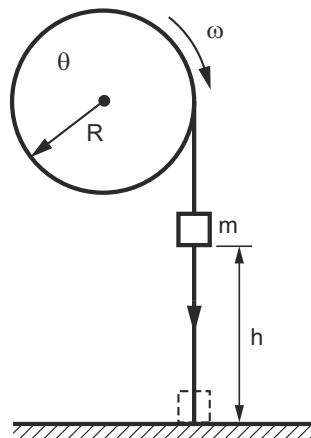


Fig. 9: Versuchsaufbau für die Bestimmung von θ . Das Rad wird durch eine Masse m beschleunigt, die aus der Höhe h fallengelassen wird. / Experimental setup for measuring θ . The wheel is accelerated by a mass m falling from the height h .

Lässt man die Masse in der Höhe h über dem Boden los, so fällt sie beschleunigt und erteilt dem Rad eine zunehmende Winkelgeschwindigkeit ω . Die Endge-

So the lower its angular momentum, the faster the gyroscope will precess. The gyroscope will also precess faster when the moment that tries to move it away from its equilibrium position increases.

2 Tasks

The validity of Equation (6) must be checked.

1. The moment of inertia θ of the gyroscope wheel is to be determined.
2. We measure the angular velocity Ω of the precession for different rotation speeds of the wheel, as well as for various weights G , and compare them with the values calculated according to Equation (6).
3. Convince yourself of the validity of the **vectorial** relationship of \vec{L} and \vec{M} , by setting the wheel in different directions of circulation.

3 Carrying out the experiments

3.1 Determining the moment of inertia of the gyroscope wheel

To determine the moment of inertia, the gyroscope is mounted on a stand with horizontal axis. A rope is placed around the wheel with a mass m fixed to its extremity, as shown in Fig. 9.

If you drop a mass from a height h above the floor, it falls and gives the wheel an increasing angular velocity ω . The final velocity ω_0 of the wheel can

schwindigkeit ω_0 des Rades lässt sich am einfachsten nach dem Energiesatz berechnen. Die Summe der potentiellen und kinetischen Energie des Rades und der Masse m ist zu Beginn und am Ende des Falles gleich gross:

$$mgh + 0 = 0 + \frac{mv^2}{2} + \frac{\theta\omega_0^2}{2}. \quad (7)$$

Die Fallgeschwindigkeit der Masse ist gleich der Umfangsgeschwindigkeit des Rades,

$$v = R\omega_0.$$

Damit wird Gleichung (7) zu

$$mgh = (mR^2 + \theta)\frac{\omega_0^2}{2},$$

oder

$$\theta = \frac{2mgh}{\omega_0^2} - mR^2. \quad (8)$$

Die Grössen m und g sind im Versuch bekannt, h und R werden mit dem Massstab, ω_0 bzw. die Umlaufzeit $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ wird mit der Stoppuhr gemessen. Der Versuch soll mit verschiedenen Massen m mehrmals ausgeführt und die gefundenen Werte für θ gemittelt werden.

3.2 Alternative Bestimmung des Trägheitsmomentes

Eine alternative Bestimmung von θ kann wie folgt durchgeführt werden. Wir betrachten wiederum Gleichung (7). Die Geschwindigkeit der Masse m zur Zeit t ist $v_t = a_t t$, wobei a_t die Beschleunigung zum Zeitpunkt t ist. Die Winkelgeschwindigkeit ω_t kann ebenfalls durch a_t ausgedrückt werden: $\omega_t = a_t t / R$. Gleichung (7) wird somit zu

$$mgh = \frac{ma_t^2 t^2}{2} + \frac{\theta a_t^2 t^2}{2R^2}. \quad (9)$$

Im Experiment ist a_t über die Beziehung $a_t = 2h/t^2$ zugänglich. Durch Einsetzen dieser Beziehung und Umformen von Gleichung (9) erhalten wir schlussendlich die Gleichung

$$\theta = mR^2 \left(\frac{gt^2}{2h} - 1 \right), \quad (10)$$

in welcher nur messbare Grössen vorkommen. Es soll bei Aufgabe 2 mehrere Male die Fallzeit t für verschiedene Massen m gemessen und gemittelt werden. Unter Verwendung von obiger Gleichung soll θ auch auf diese Art bestimmt werden. Die beiden Methoden zur Bestimmung von θ sollen miteinander verglichen und Unterschiede in der Streuung der Messdaten diskutiert werden, indem die Unsicherheit der gemessenen und daraus berechneten Grössen berücksichtigt wird.

be easily calculated according to the laws of energy conservation. The sum of the potential and kinetic energy of the wheel and the mass m at the beginning and at the end are related by the equation:

$$mgh + 0 = 0 + \frac{mv^2}{2} + \frac{\theta\omega_0^2}{2}. \quad (7)$$

The velocity of the mass at the end is equal to:

$$v = R\omega_0,$$

by replacing in Equation (7) we get,

$$mgh = (mR^2 + \theta)\frac{\omega_0^2}{2},$$

or

$$\theta = \frac{2mgh}{\omega_0^2} - mR^2. \quad (8)$$

The values of m and g are known for this experiment, h and R are measured with the ruler, ω_0 or rather $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ is measured with the stop watch. The experiment is to be conducted with different masses m and repeated multiple times in order to get an average value of θ each time.

3.2 Alternative method to determine the moment of inertia

An alternative method to determine θ is to measure the time it takes a mass m to fall a certain height. Consider again Equation (7). The velocity of the mass m at time t is $v_t = a_t t$, where a_t stands for the acceleration at time t . The angular velocity ω_t can also be expressed in terms of a_t : $\omega_t = a_t t / R$. Equation (7) can thus be rewritten as

$$mgh = \frac{ma_t^2 t^2}{2} + \frac{\theta a_t^2 t^2}{2R^2}. \quad (9)$$

The quantity a_t can be determined experimentally because $a_t = 2h/t^2$. Rearranging this relation and plugging it into Equation (9) yields the expression

$$\theta = mR^2 \left(\frac{gt^2}{2h} - 1 \right), \quad (10)$$

which consists only of measurable quantities. The task in exercise 2 is to measure for different masses m the time t it takes the mass to fall down. The measured values of t should be averaged for each mass, and by using the equation above the quantity θ should be determined. The results of the two methods for determining θ should be compared and differences in the variances of the two datasets should be discussed by considering the uncertainty on the calculated values for the moment of inertia.

3.3 Präzessionsgeschwindigkeit

Der Kreisel wird **sorgfältig** auf das Drehlager des Stativs aufgesetzt und mit Hilfe des Laufgewichts genau ausbalanciert. Dem Rad erteilt man von Hand einen kräftigen Drall. Durch Anhängen von Gewichtsstücken kann dann die Präzession erzeugt werden. Eine allenfalls auftretende Nutation kann man dadurch verhindern, dass man dem Kreisel die zu dem einwirkenden Drehmoment passende **Anfangspräzessionsgeschwindigkeit** erteilt. Diese Massnahme ist streng genommen notwendig (nicht etwa unerlaubt!), da Gleichung (6) unter der Annahme einer **stationären** Präzessionsbewegung abgeleitet worden ist und den **Anlauf** der Bewegung nicht erfasst.

Die Umlaufzeiten T_ω bzw. T_Ω des Rades bzw. der Präzessionsbewegung müssen gleichzeitig gemessen werden, da die Umlaufzeit des Rades infolge der Lagerreibung nicht konstant bleibt. Man führe den Versuch mit verschiedenen Übergewichten und verschiedenem Drehsinn des Rades durch.

4 Fragen für Studierende des Studiengangs Physik

1. Wie sind Drehmoment M und Drehimpuls (Drall) L definiert? Wie ergibt sich der Drallsatz?
2. Was versteht man unter Präzession und Nutation eines symmetrischen Kreisels? Skizzieren Sie die jeweilige Bewegung der Figurenachse!
3. Wann ist eine Figurenachse stabil? Was ist die Ursache für Präzession, was für Nutation?
4. Von was hängt die Präzessionsfrequenz, von was die Nutationsfrequenz ab?
5. Auch die Erde führt eine Präzessionsbewegung aus. Erläutern Sie diese!

3.3 Precession velocity

The gyroscope is to be placed **very carefully** on the pivot bearing of the stand and has to be precisely balanced with the help of the sliding weight. You manually provide a strong angular momentum to the wheel. By fixing the different weights one can then generate a precession. To avoid a potentially occurring nutation one can provide to the gyroscope an **initial** precession velocity that matches the applied torque. This measure is necessary, because Equation (6) was derived under the assumption of a **stationary** precession movement and doesn't take into account the **initial** condition of the movement.

The period T_ω or T_Ω of the wheel or of the precession movement have to be measured simultaneously because the period of the wheel doesn't remain constant due to friction at the pivot. The experiment is to be conducted with different weights and for both directions of rotation of the wheel.

4 Questions for Physics students

1. How are the torque M and angular momentum (spin) L defined? How can the angular momentum be seen?
2. What is meant by precession and nutation of a symmetric top? Sketch the respective movement of the figure axis.
3. When is a figure axis stable? What is the cause of precession and nutation?
4. On what effects do precession and nutation depend?
5. The earth performs a precession movement. Explain this.