5. Mechanische Resonanz - Mechanical Resonance

1 Grundlagen

Das Drehpendel (Abb. 1) besteht aus einer kreisförmigen Metallscheibe S, die um ihre Hauptachse drehbar gelagert und durch eine Spiralfeder F an eine Ruhelage gebunden ist. Wird es aus dieser Lage ausgelenkt und losgelassen, so führt es eine Drehschwingung, die sog. *gedämpfte Eigenschwingung*, aus, die charakterisiert wird durch die *Eigenfrequenz* ω_0 sowie die *Dämpfungskonstante* α.

1 Basics

The rotating pendulum (Fig. 1) consists of a circular metal disk S which is free to rotate around its main axis and is bound to a rest position by a coil spring F. When displaced from its rest position, it restores by performing a rotational oscillation, the so called *damped natural oscillation* that is characterized by the *eigenfrequency* ω_0 and the *damping constant* α.

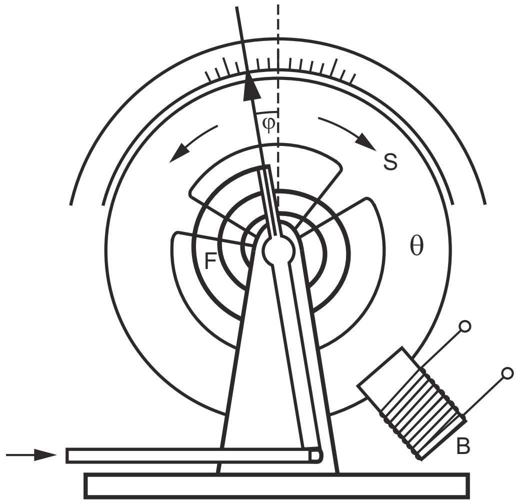

Fig. 1: Drehpendel / Rotating pendulum

Die Eigenfrequenz hängt im wesentlichen ab vom Trägheitsmoment der Scheibe und von der Stärke der Feder, während die Dämpfung durch Luft- und Lagerreibung, sowie durch eine Wirbelstrombremse B erzeugt wird. Wird auf das Pendel von aussen ein periodisches Drehmoment übertragen, so führt es eine *erzwungene Schwingung* aus, deren Frequenz mit der Frequenz der Störung übereinstimmt. Die Amplitude der erzwungenen Schwingung ist frequenzabhängig, sie erreicht grosse Werte, wenn die Störfrequenz in die Nähe der Eigenfrequenz zu liegen kommt. Diese Erscheinung wird als *mechanische Resonanz* bezeichnet. Der funktionelle Zusammenhang zwischen Amplitude und Störfrequenz, graphisch dargestellt, ergibt die *Resonanzkurve*. Resonanzen spielen in der Physik und in der Technik eine sehr wichtige Rolle. Elektrische Schwingkreise zeigen z. B. ein zur mechanischen Resonanz völlig analoges Verhalten (siehe z.B. Anleitung 34. «Wechselströme» und 35. «Elektrische Resonanz»). Diese Analogie ist darauf zurückzuführen, dass für die theoretische Behandlung der verschiedenen Resonanz-Phänomene von der *gleichen Differentialgleichung* ausgegangen werden kann, wobei lediglich deren Koeffizienten eine verschiedene physikalische Bedeutung haben.

Eine schwingungsfähige Vorrichtung wird als *har-*

The value of the eigenfrequency mainly depends on the moment of inertia of the disk and on the spring strength, while the damping is produced by the friction in the air and on the axis mechanical support. In the setup the damping can also be controlled by an electromagnetic brake B. If an exterior torque is applied, the pendulum will undergo a *forced oscillation*, the frequency of which matches the frequency of the disturbance. The amplitude of the forced oscillation depends on the frequency and will increase when the disturbing frequency is close to the pendulum's eigenfrequency. This phenomenon is called *mechanical resonance*. The relation between the oscillation amplitude and disturbance frequency is graphically displayed in a *resonance curve*. Resonances play a very important role in physics and technology. Electrical resonant circuits for example show a behavior that is completely analogous to mechanical resonators (see experiment 35. Electrical resonance and 34. Alternating currents). This analogy exists because both phenomena share the *same differential equations*, only the coefficients have a different physical meaning.

An apparatus that experiences a restoring force, proportional to the displacement, is called a *harmonic oscillator*, (the most common example is a mass on *monischer Oszillator* bezeichnet, wenn die bei einer Auslenkung auftretende, rücktreibende Kraft zum Betrag der Auslenkung proportional ist (z. B. Masse an einer Feder). Betrachtungen an harmonischen Oszillatoren haben bei der Entstehung der theoretischen Atomphysik (Wellenmechanik) eine entscheidende Rolle gespielt.

1.1 Die gedämpfte Eigenschwingung

Die Differentialgleichung der gedämpften Eigenschwingung folgt unmittelbar aus der Newton'schen Bewegungsgleichung für die Drehbewegung (siehe Anleitung 2. "Trägheitsmoment"):

$$\boxed{\Theta\,\ddot{\varphi} = M}$$

$$\begin{aligned}\Theta &= \text{Trägheitsmoment}\\ \varphi &= \text{Drehwinkel}\\ M &= \text{Drehmoment}\end{aligned}$$

Man setzt für das Drehmoment M ein von der Feder herrührendes rücktreibendes Moment M_1 und für die Reibungsverluste ein der Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}$ proportionales bremsendes Moment M_2 ein:

$$\begin{aligned}M_1 &= -D\,\varphi \qquad & D &= \text{Direktionsmoment der Feder}\\ M_2 &= -r\,\dot{\varphi} \qquad & r &= \text{Reibungskonstante}\end{aligned}$$

Die Differentialgleichung lautet also:

$$\boxed{\Theta\,\ddot{\varphi} + r\,\dot{\varphi} + D\,\varphi = 0} \tag{1}$$

Die Lösung dieser homogenen Gleichung wird bekanntlich durch einen Exponentialansatz gefunden:

$$\varphi = e^{\kappa\,t}$$

Einsetzen in (1) führt zu den beiden gesuchten Werten von κ:

$$\kappa_{1,2} = -\frac{r}{2\,\Theta} \pm \sqrt{\frac{r^2}{4\,\Theta^2} - \frac{D}{\Theta}}$$

Wir setzen $\frac{r}{2\,\Theta} = \alpha$ und nennen α die *Dämpfungskonstante*. Also gilt

$$\underline{\kappa_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \frac{D}{\Theta}} = -\alpha \pm \beta}$$

Man hat nun zur Diskussion der Lösung drei Fälle zu unterscheiden:

1.1.1 1. Fall: $\alpha^2 > D/\Theta$: Starke Dämpfung

Die Wurzel ist reell und die allgemeine Lösung von (1) lautet:

$$\varphi(t) = (A_1\,e^{\beta\,t} + A_1\,e^{-\beta\,t})\,e^{-\alpha\,t}$$

Wird das Pendel aus der Ruhelage gedreht und losgelassen, so geht der Ausschlag exponentiell nach Null

a spring). Studies of harmonic oscillators played a crucial role in the development of theoretical atomic physics (wave mechanics).

1.1 The damped natural oscillation

The differential equation of the damped natural oscillation follows immediately from Newton's equation of motion for rotations (see instruction for experiment 2. "Moment of inertia"):

$$\boxed{\Theta\,\ddot{\varphi} = M}$$

Θ	moment of inertia
φ	rotation angle
M	torque

For the torque M one includes a moment M_1 originating from the spring.

$$M_1 = -D\,\varphi$$

D arranging moment of the spring

and for the friction losses a second moment M_2 that is proportional to the angular velocity $\dot{\varphi}$:

$$M_2 = -r\,\dot{\varphi}$$

r damping constant

The differential equation is therefore:

$$\boxed{\Theta\,\ddot{\varphi} + r\,\dot{\varphi} + D\,\varphi = 0} \tag{1}$$

It is known that the solution for this homogeneous equation has the form of an exponential:

$$\varphi = e^{\kappa\,t}$$

Inserting into (1) leads to two values of κ:

$$\kappa_{1,2} = -\frac{r}{2\,\Theta} \pm \sqrt{\frac{r^2}{4\,\Theta^2} - \frac{D}{\Theta}}$$

We set $\frac{r}{2\,\Theta} = \alpha$ and call α the *damping constant*. Therefore,

$$\underline{\kappa_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \frac{D}{\Theta}} = -\alpha \pm \beta}$$

There are three different cases for the solution:

1.1.1 Case 1: $\alpha^2 > D/\Theta$: Strong damping

The root is real and the general solution of (1) is:

$$\varphi(t) = (A_1\,e^{\beta\,t} + A_1\,e^{-\beta\,t})\,e^{-\alpha\,t}$$

If the pendulum is moved from its rest position, the oscillation amplitude decays exponentially to zero. The movement is therefore *aperiodic*.

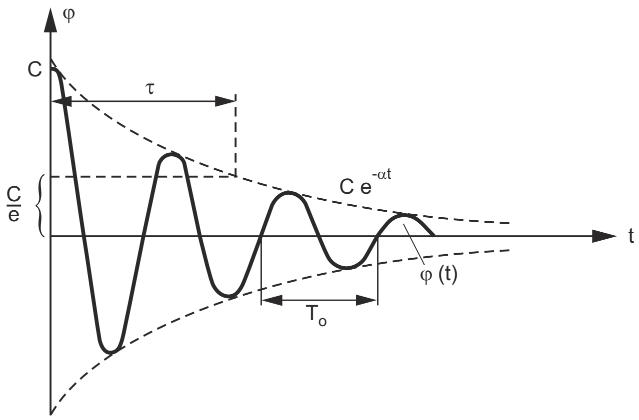

Fig. 2: Gedämpfte Eigenschwingung / Damped naturla oscillation

zurück. Die Bewegung verläuft also *aperiodisch.*

1.1.2 2. Fall: $\alpha^2 = D/\Theta$: Aperiodischer Grenzfall

Ähnliches Verhalten wie im 1. Fall.

$$\varphi(t) = (A + B\,t)\,e^{-\alpha\,t}$$

(Man kann sich durch Einsetzen überzeugen, dass im aperiodischen Grenzfall auch der Ansatz $\varphi(t) = B\,t\,e^{-\alpha\,t}$ die Differential-Gleichung (1) erfüllt.)

1.1.3 3. Fall: $\alpha^2 < D/\Theta$

Die Wurzel wird imaginär und man schreibt:

$$\beta = i\sqrt{\frac{D}{\Theta} - \alpha^2} = i\,\omega_0$$

Als spezielle Lösungen von (1) erhält man:

$$\varphi_1 = e^{-(\alpha + i\,\omega_0)\,t},\ \ \varphi_2 = e^{-(\alpha - i\,\omega_0)\,t}$$

Die komplexe Lösung φ_1 zerlegt man mit Hilfe der Eulerschen Formel:

$$e^{\pm i\,\omega_0\,t} = \cos\omega_0\,t \pm i\,\sin\omega_0\,t$$

und gewinnt im Realteil und Imaginärteil zwei spezielle Lösungen in reeller Form:

$$\varphi_3 = e^{-\alpha\,t}\,\cos\omega_0\,t,\ \ \varphi_4 = e^{-\alpha\,t}\,\sin\omega_0\,t$$

Die *allgemeine* Lösung lautet mit den Integrationskonstanten B_1 und B_2:

$$\underline{\varphi(t) = e^{-\alpha\,t}\,(B_1\ \cos\omega_0\,t + B_2\ \sin\omega_0\,t)}$$

Sie lässt sich auch in die Form bringen:

$$\boxed{\varphi(t) = C\,e^{-\alpha\,t}\,\cos(\omega_0\,t - \beta)} \quad \boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{\Theta} - \alpha^2}} \tag{2}$$

Dabei bedeuten:

C	Anfangsamplitude
β	Phasenkonstante, abhängig von t_0
ω_0	Eigenfrequenz der ged. Schwingung

Die *Eigenschwingung* des Pendels ist somit eine *harmonische Schwingung* mit *zeitlich exponentiell abklingender Amplitude* (Abb. 2). Die Eigenfrequenz

1.1.2 Case 2: $\alpha^2 = D/\Theta$: aperiodic limit

Similar behavior as in case 1:

$$\varphi(t) = (A + B\,t)\,e^{-\alpha\,t}$$

(By substitution, it is possible to check that in the aperiodic limit the solution $\varphi(t) = B\,t\,e^{-\alpha\,t}$ solves the differential equation (1.)

1.1.3 Case 3: $\alpha^2 < D/\Theta$

The root is imaginary and we can write:

$$\beta = i\sqrt{\frac{D}{\Theta} - \alpha^2} = i\,\omega_0$$

As a special solution of (1) one gets:

$$\varphi_1 = e^{-(\alpha + i\,\omega_0)\,t},\ \ \varphi_2 = e^{-(\alpha - i\,\omega_0)\,t}$$

The complex solution φ_1 is decomposed with the help of Euler's equation:

$$e^{\pm i\,\omega_0\,t} = \cos\omega_0\,t \pm i\,\sin\omega_0\,t$$

and we get in the real and imaginary part two special solutions of the form:

$$\varphi_3 = e^{-\alpha\,t}\,\cos\omega_0\,t,\ \ \varphi_4 = e^{-\alpha\,t}\,\sin\omega_0\,t$$

The *general* solution with the integration constants B_1 and B_2 is:

$$\underline{\varphi(t) = e^{-\alpha\,t}\,(B_1\ \cos\omega_0\,t + B_2\ \sin\omega_0\,t)}$$

It can also be written as:

$$\boxed{\varphi(t) = C\,e^{-\alpha\,t}\,\cos(\omega_0\,t - \beta)} \quad \boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{\Theta} - \alpha^2}} \tag{2}$$

with:

C initial amplitude β Phase constant, depends on t_0 ω_0 E

The *natural oscillation* of the pendulum is therefore a *harmonic oscillation* with *exponentially decaying amplitude in time* (Fig. 2). The Eigenfrequency ω_0 in the limit of small damping $\alpha^2 \ll \frac{D}{\Theta}$ practically

ω_0 stimmt bei kleiner Dämpfung $\alpha^2 \ll \frac{D}{\Theta}$ praktisch mit derjenigen des ungedämpften Pendels überein. Anstelle der charakteristischen Konstanten ω_0 und α, die beide von der Dimension s^{-1} sind, benützt man auch die Schwingungsdauer

$$\underline{T_0 = \frac{2\,\pi}{\omega_0}}$$

und die *Abklingzeit* (Zeit, in der die Amplitude auf den e-ten Teil ihres Anfangswertes fällt):

$$\underline{\tau = \frac{1}{\alpha}}$$

T_0 und τ sind direkt messbare Zeiten.

agrees with the one of the undamped pendulum. Instead of the characteristic constants ω_0 and α, which both have dimension $\sec^{-1}$, one also uses the oscillation period

$$\underline{T_0 = \frac{2\,\pi}{\omega_0}}$$

and the *decay time* (characteristic time during which the amplitude decays to e-th fraction of its initial value):

$$\underline{\tau = \frac{1}{\alpha}}$$

T_0 and τ are measurable times.

1.2 Die erzwungene Schwingung

Zu den Momenten der Feder und der Dämpfung trete noch ein von aussen angelegtes, periodisches Moment $M_0 \sin(\omega t)$ als Störung hinzu. Die Differentialgleichung wird dadurch *inhomogen* und lautet:

$$\Theta\,\ddot{\varphi} + r\,\dot{\varphi} + D\,\varphi = F(t) = M_0\ \sin\omega\,t \qquad (3)$$

Nach der Theorie der Differentialgleichungen setzt sich die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung zusammen aus einer partikulären Lösung der *inhomogenen* und der allgemeinen Lösung der entsprechenden *homogenen* Gleichung $F(t) = 0$. Wir suchen eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung. Dazu schreiben wir zunächst die Störung in komplexer Form

$$F(t) = -i\,M_0\,e^{i\,\omega\,t},$$

so dass der Realteil von $F(t)$ mit der tatsächlichen Störung übereinstimmt. Der Realteil einer komplexen Lösung wird dann automatisch die Gleichung (3) erfüllen. Zur Lösung macht man den naheliegenden Ansatz

$$\varphi = K\,e^{i\,\omega\,t},$$

in der Vermutung, dass die erzwungene Schwingung in ihrer Frequenz mit der Störung übereinstimmt. Durch Ableiten und Einsetzen erhält man aus (3):

$$K\,(-\Theta\,\omega^2 + i\,r\,\omega + D) = -i\,M_0$$

$$K = \frac{-i\,M_0}{(D - \Theta\,\omega^2) + i\,r\,\omega} = -i\,M_0 \cdot \frac{(D - \Theta\,\omega^2) - i\,r\,\omega}{(D - \Theta\,\omega^2)^2 + r^2\,\omega^2}$$

Dies kann in der Form $K = -i\,M_0\,Z\,e^{-i\,\delta}$ geschrieben werden, wobei

$$Z = \frac{1}{\sqrt{(D - \Theta\,\omega^2)^2 + r^2\,\omega^2}}$$

und

$$\text{tg}\ \delta = \frac{r\,\omega}{D - \Theta\,\omega^2}$$

bedeuten.

1.2 The forced oscillation

In addition to the torques of the spring and the damping, an additional external periodic torque $M_0\ \sin\omega\,t$ is added as a disturbance. The differential equation becomes *inhomogeneous*, it is expressed as:

$$\Theta\,\ddot{\varphi} + r\,\dot{\varphi} + D\,\varphi = F(t) = M_0\ \sin\omega\,t \qquad (3)$$

According to the theory of differential equations, the general solution of the inhomogeneous equation consists of a particular solution of the *inhomogeneous* and the general solution of the corresponding *homogeneous* equation $F(t) = 0$. We are looking for a particular solution for the inhomogeneous equation. To do this we first write the disturbance in complex form

$$F(t) = -i\,M_0\,e^{i\,\omega\,t},$$

such that the real part of $F(t)$ matches the real disturbance. The real part of a complex solution will then automatically satisfy equation (3). For the solution one makes the obvious ansatz

$$\varphi = K\,e^{i\,\omega\,t},$$

assuming that the forced oscillation matches the frequency of the disturbance. After taking the derivative and inserting, one gets from (3):

$$K\,(-\Theta\,\omega^2 + i\,r\,\omega + D) = -i\,M_0$$

$$K = \frac{-i\,M_0}{(D - \Theta\,\omega^2) + i\,r\,\omega} = -i\,M_0 \cdot \frac{(D - \Theta\,\omega^2) - i\,r\,\omega}{(D - \Theta\,\omega^2)^2 + r^2\,\omega^2}$$

This can be written in the form $K = -i\,M_0\,Z\,e^{-i\,\delta}$, where

$$Z = \frac{1}{\sqrt{(D - \Theta\,\omega^2)^2 + r^2\,\omega^2}}$$

and

$$\text{tg}\ \delta = \frac{r\,\omega}{D - \Theta\,\omega^2}.$$

The particulate solution of (3) therefore is:

$$\varphi(t) = \frac{-i\,M_0}{\Theta\sqrt{(\frac{D}{\Theta} - \omega^2)^2 + \frac{r^2\,\omega^2}{\Theta^2}}}\ e^{i(\omega\,t - \delta)}$$

Die partikuläre Lösung von (3) heisst also:

$$\varphi(t) = \frac{-i\,M_0}{\Theta\sqrt{(\frac{D}{\Theta} - \omega^2)^2 + \frac{r^2\,\omega^2}{\Theta^2}}}\; e^{i(\omega\,t-\delta)}$$

Man führt wieder $\frac{r}{2\,\Theta} = \alpha$ ein und findet als allgemeine Lösung von (3), indem nur der Realteil der partikulären Lösung eingesetzt wird:

$$\varphi(t) = A(\omega)\,\sin(\omega\,t - \delta) + C\,e^{-\alpha\,t}\,\cos(\omega_0\,t - \beta) \quad (4)$$

wobei

$$A(\omega) = \frac{M_0}{\Theta\sqrt{(\frac{D}{\Theta} - \omega^2)^2 + 4\,\alpha^2\,\omega^2}} \quad (5)$$

$$\mathrm{tg}\;\delta = \frac{2\,\alpha\,\omega}{\frac{D}{\Theta} - \omega^2} \quad (6)$$

Inserting again $\frac{r}{2\,\Theta} = \alpha$, one finds as general solution of (3) by only introducing the real part of the particulate solution:

$$\varphi(t) = A(\omega)\,\sin(\omega\,t - \delta) + C\,e^{-\alpha\,t}\,\cos(\omega_0\,t - \beta) \quad (4)$$

where

$$A(\omega) = \frac{M_0}{\Theta\sqrt{(\frac{D}{\Theta} - \omega^2)^2 + 4\,\alpha^2\,\omega^2}} \quad (5)$$

$$\mathrm{tg}\;\delta = \frac{2\,\alpha\,\omega}{\frac{D}{\Theta} - \omega^2} \quad (6)$$

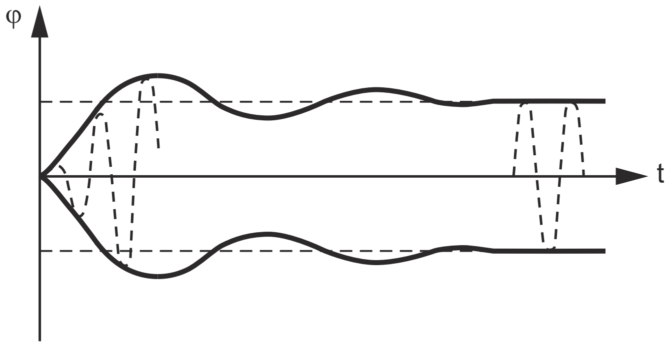

Fig. 3: Erzwungene Schwingung / Forced oscillation

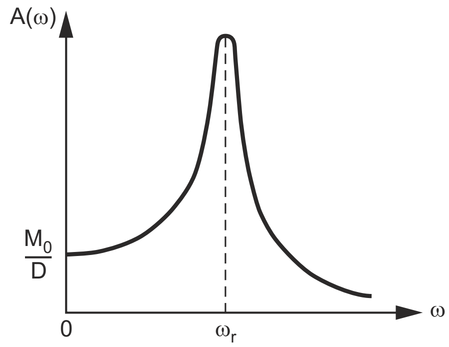

Fig. 4: Resonanzkurve / Resonance curve

1.2.1 Diskussion

Der zweite Summand in (4), die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung, bedeutet wieder die *gedämpfte Eigenschwingung*. Der erste Summand in (4), die partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung, stellt eine *stationäre harmonische erzwungene Schwingung* der Frequenz ω dar. Bis die Eigenschwingung abgeklungen ist, besteht die Bewegung des Pendels in einer Überlagerung zweier Schwingungen ungleicher Frequenz ($\omega \neq \omega_0$), d. h. in einer *Schwebung* mit der *Schwebungsfrequenz* $\Omega = |\omega - \omega_0|$. Nachher bleibt nur noch die erzwungene Schwingung mit der eingeprägten Frequenz ω übrig, die gegenüber dem Störmoment eine Phasendifferenz δ besitzt. Der zeitliche Verlauf der resultierenden Amplitude ist in Abb. 3 schematisch dargestellt. Die Periode der Schwebung ist umso grösser, je näher ω bei der Eigenfrequenz ω_0 liegt, und das Oszillieren der Amplitude umso stärker, je kleiner die Dämpfung ist. Die Amplitude $A(\omega)$ erreicht bei einer Frequenz ω_r, der *Resonanzfrequenz*, einen Maximalwert. Man fin-

1.2.1 Discussion

The second term in (4), the general solution of the homogeneous equation, again represents the *damped natural oscillation*. The first term in (4), the particulate solution of the inhomogeneous equation, represents a *stationary harmonically forced oscillation* of frequency ω. Until the natural oscillation has decayed, the movement of the pendulum consists of a superposition of two oscillations having unequal frequencies ($\omega \neq \omega_0$), i.e. in a beat with the beat frequency $\Omega = |\omega - \omega_0|$. After that, only the forced frequency (ω) remains, at a phase difference δ with respect to the disturbance torque. The time evolution of the resulting amplitude is shown schematically in Fig. 3. The period of the beat increases as ω gets close to the Eigenfrequency ω_0. The amplitude of the oscillations is also larger for smaller dampings.

The amplitude $A(\omega)$ reaches its maximum at the frequency ω_r, the *resonance frequency*. The extremum det als Extremum von $A(\omega)$:

$$\underline{A(\omega_r) = \frac{M_0}{2\,\Theta\,\alpha\sqrt{\frac{D}{\Theta} - \alpha^2}}}$$

bei der Frequenz:

$$\underline{\omega_r = \sqrt{\frac{D}{\Theta} - 2\,\alpha^2}}$$

Für kleine *Dämpfung* gilt also:

$$\omega_r = \sqrt{\frac{D}{\Theta} - \alpha^2} \approx \sqrt{\frac{D}{\Theta}} = \omega_0$$

d. h. die Resonanzfrequenz, die Frequenz der gedämpften und diejenige der ungedämpften Schwingung liegen nahe beisammen. Die Resonanzkurve ist nicht *symmetrisch* in Bezug auf die Resonanzfrequenz. Man erkennt das leicht, wenn man die Amplitudenwerte für $\omega = 0$ und $\omega = \infty$ bestimmt:

$$A(0) = M_0/D \quad A(\infty) = 0$$

Die Resonanzkurve zeigt etwa den in Abb. 4 angegebenen Verlauf.

of $A(\omega)$ is found to be:

$$\underline{A(\omega_r) = \frac{M_0}{2\,\Theta\,\alpha\sqrt{\frac{D}{\Theta} - \alpha^2}}}$$

at the frequency:

$$\underline{\omega_r = \sqrt{\frac{D}{\Theta} - 2\,\alpha^2}}$$

For small *dampings*:

$$\omega_r = \sqrt{\frac{D}{\Theta} - \alpha^2} \approx \sqrt{\frac{D}{\Theta}} = \omega_0.$$

The resonance frequency, the damped oscillation frequency and that of the undamped oscillation lie closely together. The resonance curve is *not symmetric* with respect to the resonance frequency. This is easily seen when determining the amplitude values for $\omega = 0$ and $\omega = \infty$

$$A(0) = M_0/D \quad A(\infty) = 0$$

The resonance curve shows approximately the progression displayed in Fig. 4

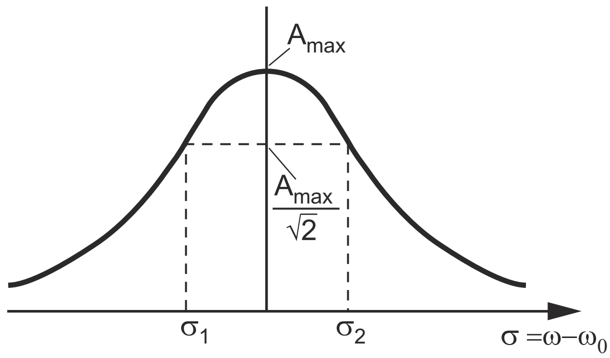

Fig. 5: Resonanzkurve mit Parameter / Resonance curve with parameters

1.3 Zusammenhang zwischen Dämpfung und Resonanzbreite

Eine einfache Beziehung, die nur bei *kleiner* Dämpfung gilt, gestattet den Wert von α aus einer experimentell ermittelten Resonanzkurve sofort abzulesen. Wir führen zwei Substitutionen in (6) ein:

$$\sqrt{\frac{D}{\Theta}} = \omega_0 \quad \text{und} \quad \omega = \omega_0 + \sigma$$

σ bezeichne also den Frequenzabstand von der Resonanzfrequenz der ungedämpften Schwingung.

$$A(\omega) = \frac{M_0}{\Theta\,\sqrt{\left[\omega_0^2 - (\omega_0 + \sigma)^2\right]^2 + 4\,\alpha^2\,(\omega_0 + \sigma)^2}}$$

Bleibt man in Resonanznähe, so wird σ klein gegen ω_0 und da andererseits bei schwacher Dämpfung auch α klein gegen ω_0 ist, können Terme dritter

1.3 Relation between damping and resonance width

A simple relation, only valid for *small* dampings, allows the value of α to be read out immediately from an experimental resonance curve. We are introducing two substitutions into (6):

$$\sqrt{\frac{D}{\Theta}} = \omega_0 \quad \text{and} \quad \omega = \omega_0 + \sigma$$

σ therefore denotes the difference in frequency from the resonance frequency of the undamped oscillation.

$$A(\omega) = \frac{M_0}{\Theta\,\sqrt{\left[\omega_0^2 - (\omega_0 + \sigma)^2\right]^2 + 4\,\alpha^2\,(\omega_0 + \sigma)^2}}$$

Close to the resonance point, σ is small with respect to ω_0. At weak dampings α can also be neglected und vierter Ordnung in σ und α nach dem Ausmultiplizieren des Radikanden vernachlässigt werden. Es bleibt also:

$$A(\sigma) = \frac{M_0}{\Theta\,\sqrt{4\,\omega_0^2\,\sigma^2 + 4\,\omega_0^2\,\alpha^2}} = \frac{M_0}{2\,\Theta\,\omega_0\,\sqrt{\sigma^2+\alpha^2}}$$

Diese angenäherte Resonanzkurve ist jetzt symmetrisch bezüglich ω_r und besitzt ein Maximum von der Höhe

$$\underline{A_{max} = A(0) = \frac{M_0}{2\,\Theta\,\omega_0\,\alpha}} \tag{7}$$

Man sucht nun die beiden Werte $\sigma_{1,2}$ für welche die Amplitude auf den Betrag

$$\frac{A_{max}}{\sqrt{2}}$$

gesunken ist:

$$A(\sigma_{1,2}) = \frac{M_0}{2\,\Theta\,\omega_0\,\sqrt{\sigma_{1,2}^2+\alpha^2}} = \frac{A(0)}{\sqrt{2}} = \frac{M_0}{2\,\Theta\,\omega_0\,\alpha\,\sqrt{2}} \tag{8}$$

Man erhält sofort:

$$\boxed{\sigma_{1,2} = \pm\alpha} \tag{9}$$

Die *halbe Breite* der Resonanzkurve, gemessen in der *Höhe* $A_{max}/\sqrt{2}$, ist gleich der Dämpfungskonstanten α.

with respec to ω_0. Therefore the third and fourth order terms in σ and α can be neglected:

$$A(\sigma) = \frac{M_0}{\Theta\,\sqrt{4\,\omega_0^2\,\sigma^2 + 4\,\omega_0^2\,\alpha^2}} = \frac{M_0}{2\,\Theta\,\omega_0\,\sqrt{\sigma^2+\alpha^2}}$$

This approximate resonance curve is now symmetric with respect to ω_r and has a maximum at:

$$\underline{A_{max} = A(0) = \frac{M_0}{2\,\Theta\,\omega_0\,\alpha}} \tag{7}$$

Now we compute the values $\sigma_{1,2}$ for which the amplitude has decreased by the amount $\frac{A_{max}}{\sqrt{2}}$:

$$A(\sigma_{1,2}) = \frac{M_0}{2\,\Theta\,\omega_0\,\sqrt{\sigma_{1,2}^2+\alpha^2}} = \frac{A(0)}{\sqrt{2}} = \frac{M_0}{2\,\Theta\,\omega_0\,\alpha\,\sqrt{2}} \tag{8}$$

One immediately gets:

$$\boxed{\sigma_{1,2} = \pm\alpha} \tag{9}$$

The *half width* of the resonance curve, measured at a value of $A_{max}/\sqrt{2}$, is equal to the damping constant α.

2 Aufgaben

1. Man beobachte die Amplitude der abklingenden Eigenschwingung als Funktion der Zeit für drei verschieden starke Dämpfungen und stelle sie in *logarithmischem Massstab* als Funktion der Zeit dar.

2. Für dieselben Dämpfungen wie in 1. nehme man die Resonanzkurven auf und stelle sie graphisch dar.

3. Man bestimme die Werte der Dämpfungskonstanten α
a) aus der Abklingzeit τ der Eigenschwingung
b) aus der Breite der Resonanzkurve (nach Formel (8)).

4. Man bestimme das Verhältnis der drei Dämpfungskonstanten aus dem Verhältnis der Resonanz Amplituden A_{max} (nach Formel (7)).

2 Tasks

1. Observe the amplitude of the decaying natural oscillation as a function of time for three different dampings and display them in a *logarithmic scale* as function of time.

2. For the same dampings as in 1, measure the resonance curves and represent them graphically

3. Determine the values of the damping constants α
a) from the decay time τ of the natural oscillation
b) from the width of the resonance curve (according to the formula (8)).

4. Determine the ratio of the three damping constants from the ratio of the resonance amplitudes A_{max} (according to formula (7)).

3 Durchführung der Versuche

3.1 Gedämpfte Eigenschwingung

Das Pendel wird um ca. 100-120° aus der Ruhelage ausgelenkt und losgelassen. Die Nullage kann mit

3 Conducting the experiments

3.1 Dampened natural oscillation

The pendulum is displaced by about 100-120° from its rest position and released. The zero position can

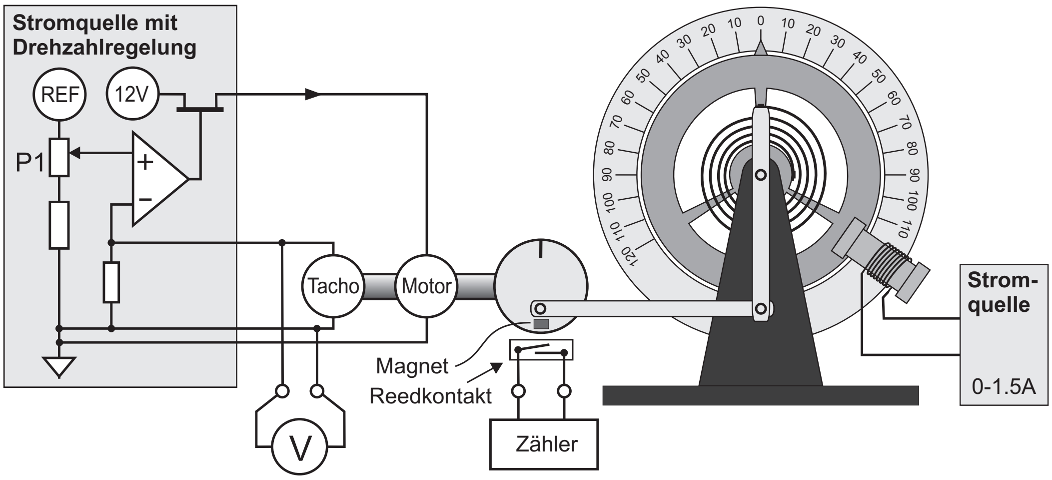

Fig. 6: Versuchsanordnung / Measurement Setup

Hilfe des Exzenters von Hand eingestellt werden. Man messe die Schwingungsdauer T_0 über eine grössere Anzahl von Schwingungen mit der Stoppuhr und bestimme den Gang der Amplitude. Zur Erzeugung der Dämpfung schliesse man den Elektromagneten an die Stromquelle an und benütze die drei Stromstärken 0.6, 0.9 und 1.2 A.

3.2 Erzwungene Schwingung

Die periodische Störung wird durch einen *regulierbaren Gleichstrommotor* erzeugt. Die Kreisfrequenz ω des Motors kann durch Ablesen der Tachometerspannung V_T bestimmt werden. ω ist proportional zu V_T.
Um eine Eichung des Tachometers zu erhalten, messe man mit der Stoppuhr die Zeit t, die der Motor für 100 Umdrehungen benötigt. Zusammen mit der abgelesenen Tachometerspannung kann so die Konstante $C_T = \omega/V_T$ bestimmt werden. Zur Kontrolle soll die Messung bei einer zweiten Drehzahl wiederholt werden. Bei der Messung der Resonanzkurve muss man nach jeder Veränderung der Kreisfrequenz ω mit der Ablesung der Amplitude warten, bis der stationäre Zustand erreicht ist.

be set manually with the eccentric. Measure the oscillation period over a large number of oscillations with the stop watch and determine the course of the amplitude. To generate a damping connect the electromagnet to the power source and use the three currents of 0.6, 0.9 and 1.2 A.

3.2 Forced oscillation

The periodic disturbance is generated with an *adjustable DC motor*. The angular frequency ω of the motor can be determined by reading the tachometer voltage V_T. ω is proportional to V_T.
To obtain a calibration of the speed indicator, use the stop watch to measure the time t that the motor needs for 100 revolutions. Together with the voltage read from the speed indicator the constant $C_T = \omega/V_T$ can be determined. As a control the measurement must be repeated with a second rotation speed. For the measurement of the resonance curve, after each change in angular frequency ω it is necessary to wait until the stationary state is reached before reading the amplitude.

4 Fragen für Studierende des Studiengangs Physik

1. Was ist ein harmonischer Oszillator, was ist seine Eigenfrequenz?
2. Was funktioniert eine Wirbelstrombremse?
3. Was ist ein Trägheitsmoment?
4. Wie lautet die Differentialgleichung eines harmonischen Oszillators. Wie gelangt man zur Unterscheidung von drei Fällen der Ausschlagbewegung?
5. Welche Frequenz stellt sich schlussendlich bei einer erzwungenen Schwingung (angetriebener Oszillator) ein?

4 Questions for the students of the Department of Physics

1. What is a harmonic oscillator, what is its Eigenfrequency?
2. How does an electromagnetic brake work?
3. What is a moment of inertia?
4. What is the differential equation of a damped harmonic oscillator? How does one differentiate the three cases of damped harmonic motion?
5. Which frequency dominates in the stationary state of a forced oscillation (driven oscillator)?

6. Wie verhält sich die Phasenverschiebung zwischen angreifendem Moment und erzwungener Schwingung, wenn die angreifende Frequenz viel grösser als die Eigenfrequenz ist? (Dieser Fall liegt bei Streuung von Röntgenstrahlung vor)

7. Resonanzkurven charakterisiert man gerne durch ihre Güte (oder Q-Faktor). Wie lautet dieser im vorliegenden Falle einer erzwungenen Schwingung?

6. How does the phase shift between driving moment and forced oscillation behave, if the driving frequency is much larger than the Eigenfrequency? (This case arises for the scattering of X-ray radiation)

7. Resonance curves are characterized by their quality (or Q factor). What is the Q factor in the case of a forced oscillation?