

8. Tragflügelmodell - Airplane wing

1 Grundlagen

1.1 Das Gesetz von Bernoulli

D. Bernoulli hat 1738 die wohl wichtigste Formel der Hydro- und Aerodynamik angegeben. Das Gesetz von Bernoulli ist eine Konsequenz des Energiesatzes und hat deshalb die Form eines **Erhaltungssatzes**. Es ist an folgende Voraussetzungen geknüpft:

- Inkompressibilität $\kappa = 0$
- Reibungsfreiheit $\eta = 0$
- stationäre Strömung $d/dt = 0$

Verfolgt man ein Flüssigkeitselement Δm längs seiner Stromlinie, so wird neben der kinetischen Energie $E_{kin} = \Delta m v^2/2$ und (bei Berücksichtigung der Schwerkraft) der potentiellen Energie $E_{pot} = \Delta m g h$, noch eine dritte Energieform auftreten, die wir als Druckenergie E_p bezeichnen wollen. E_p kommt dadurch zustande, dass Arbeit geleistet werden muss, um Δm an einen Ort mit höherem Druck p zu bringen. Da bei Reibungsfreiheit keine Wärme erzeugt werden kann, muss:

$E_{kin} + E_{pot} + E_p = \text{konstant}$ längs einer Stromlinie sein. Man kann nun zeigen, dass E_p in der Form

$$E_p = \frac{\Delta m}{\rho} p,$$

angeschrieben werden kann (siehe Lehrbücher der Physik). Es gilt also:

$$\frac{\Delta m v^2}{2} + \Delta m g h + \frac{\Delta m}{\rho} p = \text{konstant}$$

Ersetzt man Δm durch $\rho \Delta v$, und berücksichtigt man, dass Δv bei Inkompressibilität unverändert bleibt und deshalb gekürzt werden kann, so erhält man:

$$\boxed{\frac{\rho v^2}{2} + \rho g h + p = \text{konstant}} \quad (1)$$

Bezeichnungen: Die drei Summanden im Gesetz von Bernoulli (1) haben die Dimension von Drücken, und man bezeichnet den, längs einer Stromlinie konstanten, Wert der Summe als den **Gesamtdruck** p_0 , wobei wir aber gleich betonen müssen, dass dies nur eine (mehr oder weniger sinnvolle) **Bezeichnung** ist. Die **Grösse** p repräsentiert den an einem Ort tatsächlich herrschenden Druck (der z.B. die Grösse einer mitbewegten Gasblase bestimmt). Man bezeichnet p als den **statischen Druck**, $\rho v^2/2$ als **Staudruck** und $\rho g h$ als **Schweredruck**.

Da in unserem Fall mit einer konstanten Geschwindigkeit v_∞ angeströmt werden soll und Variationen

1 Basics

1.1 Bernoulli's law

Bernoulli's law from 1738 is presumably the most important equation of hydrodynamics and aerodynamics. It is based on the **conservation** of energy and subject to the following conditions:

- incompressibility, $\kappa = 0$
- no friction, $\eta = 0$
- stationary flow, $d/dt = 0$.

Following a fluid element Δm along its streamline, there are the kinetic energy $E_{kin} = \Delta m v^2/2$ and the potential energy $E_{pot} = \Delta m g h$ (arising from gravity), and also a third form of energy, the 'pressure energy' E_p . E_p arises from the fact that work is needed to bring Δm to a place of higher pressure p . As there is no friction, no heat is produced and conservation of energy gives

$$E_{kin} + E_{pot} + E_p = \text{constant along a streamline.}$$

One can show that E_p can be written as

$$E_p = \frac{\Delta m}{\rho} p,$$

(see physics textbooks). Thus one gets

$$\frac{\Delta m v^2}{2} + \Delta m g h + \frac{\Delta m}{\rho} p = \text{constant}$$

Substituting Δm by $\rho \Delta V$, and considering that incompressibility means that ΔV remains constant, one can write

$$\boxed{\frac{\rho v^2}{2} + \rho g h + p = \text{constant}} \quad (1)$$

Terminology: The three terms in Bernoulli's law (1) have the dimension of pressure, and the constant value of the sum is referred to as **total pressure** p_0 , where we emphasize that this is just a **label**. The **variable** p represents the actual pressure at a location (determined, for example, by the size of a co-traveling gas bubble). p is called the **static pressure**, $\rho v^2/2$ is the **dynamic pressure** and $\rho g h$ as the **gravity pressure**.

In our case we assume a constant velocity v_∞ and ignore pressure variations due to gravity, thus p_0 is virtually identical for all streamlines. Therefore, in all space:

$$p + \frac{\rho v^2}{2} = p_0 = \text{constant.}$$

des Schweredruckes vernachlässigt werden können, wird p_0 für alle Stromlinien praktisch gleich. Es gilt also im ganzen Raum:

$$p + \frac{\rho v^2}{2} = p_0 = \text{konstant.}$$

Wird die Strömung an einem Punkt gestaut ($v = 0$), so treten dort grosse Drücke auf. Im Gesetz von Bernoulli wird dieser Druckanstieg durch den Term $\rho v^2/2$ berücksichtigt, der an Staupunkten verschwindet, so dass p entsprechend grösser sein muss.

Die Voraussetzung der Inkompressibilität darf auch für Luft als erfüllt betrachtet werden, da die längs einer Stromlinie auftretenden Druckdifferenzen gegenüber dem Atmosphärendruck meistens vernachlässigt werden können.

1.2 Widerstand und dynamischer Auftrieb

Ein beliebig geformter Körper erfährt in einer Strömung an seiner Oberfläche Druckkräfte, die in eine resultierende Kraft zusammengefasst werden können. \vec{F} kann in eine zur Strömungsgeschwindigkeit \vec{v}_∞ parallele \vec{W} Komponente und eine zu ihr senkrechte Komponente \vec{A} zerlegt werden (Abb. 1). Die Komponente \vec{W} wird als **Widerstand**, die Komponente \vec{A} als **dynamischer Auftrieb** bezeichnet. Damit ein Auftrieb entsteht, muss offenbar der Flüssigkeits- oder Gasdruck p unterhalb des Körpers durchschnittlich grösser sein als oberhalb desselben.

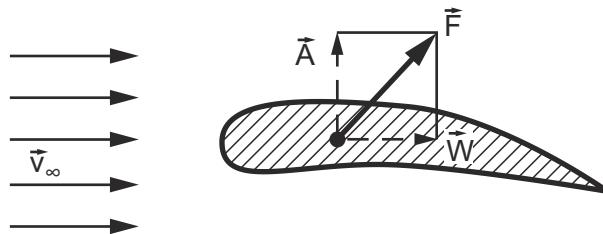


Fig. 1: Widerstand, dynamischer Auftrieb / Drag and dynamic lift.

1.3 Die Zirkulation Γ

Ein Tragflügel (Abb. 1) muss nun so geformt werden, dass die durchschnittliche Geschwindigkeit oberhalb grösser ist als unterhalb, damit durch den statischen Druck p ein Auftrieb erzeugt werden kann. Eine solche Geschwindigkeitsverteilung zeigt z.B. die Überlagerung (Abb. 4) einer reinen **Translationsströmung** (Abb. 2) und einer **Zirkulationsströmung** (Abb. 3).

Die Translationsströmung ist charakterisiert durch die Anströmungsgeschwindigkeit \vec{v}_∞ des Mediums in grosser Entfernung vom Hindernis. Die Zirkulationsströmung ist charakterisiert durch das Linienintegral der Geschwindigkeit \vec{v} längs des **Profils** des

If the flow is blocked at a point ($v = 0$), then pressure grows. In Bernoulli's law this increase of pressure is determined by the term $\rho v^2/2$. If $v = 0$, p has to grow accordingly.

The condition of incompressibility may be considered fulfilled also for air, since pressure differences along streamlines are small relative to the atmospheric pressure, and thus can be usually neglected.

1.2 Drag and dynamic lift

The pressure on the surface of an arbitrarily shaped body can be combined into a single net force on the body. This force \vec{F} can be decomposed into components \vec{W} and \vec{A} , being parallel and perpendicular to \vec{v}_∞ , respectively (Fig. 1). The component \vec{W} is called **drag**, the component \vec{A} is called **dynamic lift**. Lift is generated when the average fluid pressure p is greater below the body than above it.

1.3 The circulation Γ

An airplane wing (Fig. 1) must be shaped so that the average speed is higher above than below it: thus, static pressure p generates lift. Such a velocity distribution shows (Fig. 4) a **translatory flow**. (Fig. 2) superposed with a **circulatory flow** (Fig. 3).

Translational flow is characterized by the flow velocity \vec{v}_∞ at a large distance from the wing. Rotational flow is characterized by the line integral of the velocity \vec{v} around the **profile** of the wing, i.e. by the

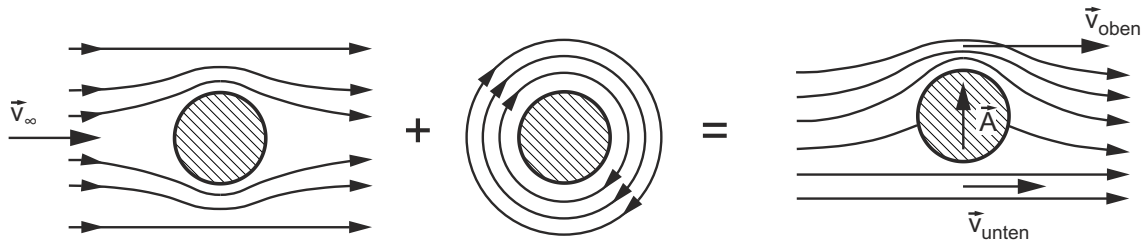


Fig. 2: Translation / Translation. Fig. 3: Zirkulation / Circulation.

Fig. 4: Ueberlagerung / Flow superposition.

Körpers, d.h. durch die sog. **Zirkulation**:

$$\Gamma = \oint_{\text{Profil}} \vec{v} \cdot d\vec{s}. \quad (2)$$

Auf Grund der Zirkulation unterscheidet man allgemein zwei verschiedene Strömungsarten, nämlich:

- **Potentialströmung** für $\Gamma = 0$,
- **Wirbelströmung** für $\Gamma \neq 0$.

1.4 Strömung am Tragflügel

Ein Tragflügelprofil wird so gestaltet, dass durch dessen Asymmetrie automatisch eine Zirkulation um den Tragflügel erzeugt wird, wobei sich aus Gründen der Drallerhaltung beim Entstehen dieser Zirkulation ein entgegengesetzter Wirbel (Anfahrwirbel) ausbildet (Abb. 5).

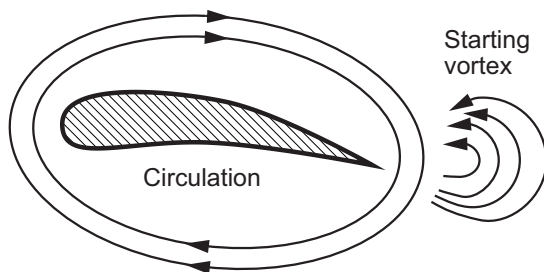


Fig. 5: Asymmetrisches Profil mit Zirkulation / Asymmetrical airfoil with circulation.

Bei einem symmetrischen Profil würde keine Zirkulation auftreten (Abb. 6). Die Überlagerung einer solchen Potentialströmung mit der am asymmetrischen Profil auftretenden Zirkulation führt zu einem Stromlinienbild wie in Abb. 7 und damit (da oben grössere Geschwindigkeiten auftreten als unten) zum Auftrieb A . Es sei darauf hingewiesen, dass in der unmittelbaren Nachbarschaft der Flügeloberfläche diese einfachen Vorstellungen nicht mehr gelten. In unserem idealisierten Bild hat nämlich die Luft eine **endliche** Geschwindigkeit auf dem Profil selbst, während in Wirklichkeit, infolge der Reibung, das Profil von einer (einige mm dicken) **Grenzschicht** umgeben ist, in der die Geschwindigkeit von Null an bis auf den vollen Wert anwächst.

so-called **circulation**:

$$\Gamma = \oint_{\text{profile}} \vec{v} \cdot d\vec{s}. \quad (2)$$

Based on circulation, two types of flow are distinguished:

- **potential flow** for $\Gamma = 0$,
- **turbulent flow** for $\Gamma \neq 0$.

1.4 Flow at the wing

As angular momentum must be conserved, the circulatory flow around an airfoil must be balanced by the buildup of a vortex (starting vortex) rotating in the opposite sense (Fig. 5).

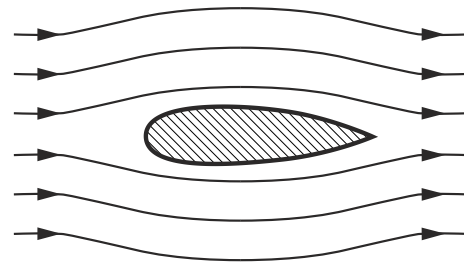


Fig. 6: Symmetrisches Profil ohne Zirkulation / Symmetrical airfoil without circulation.

For a symmetrical profile, no circulation would occur (Fig. 6). The superposition of such a potential flow with circulation due to an asymmetric profile leads to the streamline image shown in Fig. 7 and thus (as the velocities are higher above the wing than below) to a lift A . It should be noted that in the immediate vicinity of the wing, these simple ideas no longer apply. In our idealized view, the air has a **finite** velocity on the wing surface itself, whereas in reality the air-surface friction causes a **boundary layer** (several mm in thickness) to surround the wing, in which the air speed increases from zero to its full value.

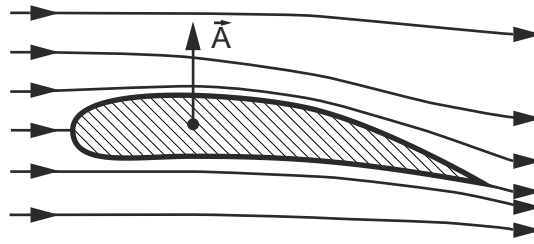


Fig. 7: Stromlinienbild beim Tragflügel / Streamlines around an airplane wing.

1.5 Auftrieb und induzierter Widerstand

Der Auftrieb kommt also dadurch zustande, dass durch die spezielle Form eines Tragflügels das Strömungsbild der Luft eine nicht verschwindende Zirkulation aufweist. Eine Zirkulation liesse sich auch dadurch erzeugen, dass z.B. ein zylinderförmiges Profil in einer Potentialströmung rotiert wird. Der Zylinder erfährt dann eine zur Windrichtung und seiner Achse senkrecht stehende Kraft (Prinzip des Flettner-Schiffes). Dieser Effekt, der z.B. auch an “geschnittenen” Ping-Pong-Bällen und an Geschossen beobachtet werden kann, wird als Magnus-Effekt bezeichnet. Um den Magnus-Effekt zu demonstrieren, steht bei unserer Apparatur ein kleiner Zylinder zur Verfügung, der durch einen Elektromotor in Rotation versetzt werden kann. Dieser Zylinder kann (mit horizontaler Achse) auf eine Waage gestellt und seitlich angeströmt werden. Bei maximaler Anströmungsgeschwindigkeit \vec{v}_∞ verschwindet der Magnus-Effekt praktisch wieder, weil dabei ein turbulentes Strömungsbild entsteht, so dass die hier gemachten Voraussetzungen nicht mehr erfüllt sind.

Der Magnus-Effekt wird um so grösser sein, je grösser die Zirkulation Γ ist. Nach Kutta-Joukowski gilt (Herleitung im Anhang):

$$A' = \rho v_\infty \Gamma, \quad (3)$$

wobei \vec{v}_∞ wieder die Anströmungsgeschwindigkeit und ρ die Dichte der Flüssigkeit bzw. des Gases bezeichnen. A' bedeutet die Kraft pro m Breite. Um den gesamten Auftrieb des Tragflügels zu erhalten, ist also A' mit seiner Breite oder **Spannweite** b zu multiplizieren.

Den bisherigen Betrachtungen war eine zweidimensionale Strömung zu Grunde gelegt, wie sie in der Tat nur um einen Flügel von unendlicher Breite auftreten würde. Bei einer Tragfläche von endlicher Spannweite aber ist an den Enden ein seitlicher Ausgleich der Druckunterschiede unterhalb und oberhalb des Flügels zu erwarten. Es findet auf der Unterseite eine Auswärtsströmung, auf der Oberseite eine Einwärtsströmung statt. Nach der Hinterkante würden diese entgegengesetzten Strömungen direkt übereinander fließen, und es kommt statt dessen zur Bildung von zwei **Randwirbelzöpfen**. Diese bilden mit der Zirkulation um den Flügel und dem Anfahrwirbel zu-

1.5 Lift and lift-induced drag

The lift is thus due to the fact that for a wing, the flow pattern has a nonzero circulation. Circulation could also be generated by, e.g., spinning a cylinder in a potential flow. The cylinder then experiences a force perpendicular to its axis and the wind direction (this is the principle of a Flettner ship). This effect can also be observed on “sliced” ping-pong balls and spinning bullets, and is called the Magnus effect. To demonstrate this effect, we use a small cylinder, which can be spun by an electric motor. The cylinder can be placed horizontally on a balance, with air being blown from side. At maximum flow velocity \vec{v}_∞ , the Magnus effect practically disappears because a turbulent flow pattern is created, no longer fulfilling the assumptions made here.

The greater the circulation Γ , the greater the Magnus effect. According to Kutta-Joukowski (derivation in appendix):

$$A' = \rho v_\infty \Gamma, \quad (3)$$

where \vec{v}_∞ is again the velocity at the wing tip and ρ denotes the fluid or air density. A' is the force per meter of wing width. The total lift of the wing is given by A' multiplied by the width of the wing (**wingspan** b).

So far we have considered a two-dimensional flow as our model would only exist on an infinitely wide wing. For a wing with finite wingspan, the pressure differences above and below the wing will result in a flow from lower to upper surface at the ends of the wing: the air flows outward off the wing on the lower side, and inward onto the wing on the upper surface. Behind the trailing edge of the wing, the two currents flow directly into one another to form two **tip vortex** lines. They merge with the starting vortex to create a closed vortex ring of circulation.

sammen einen geschlossenen Wirbelring der Zirkulation.

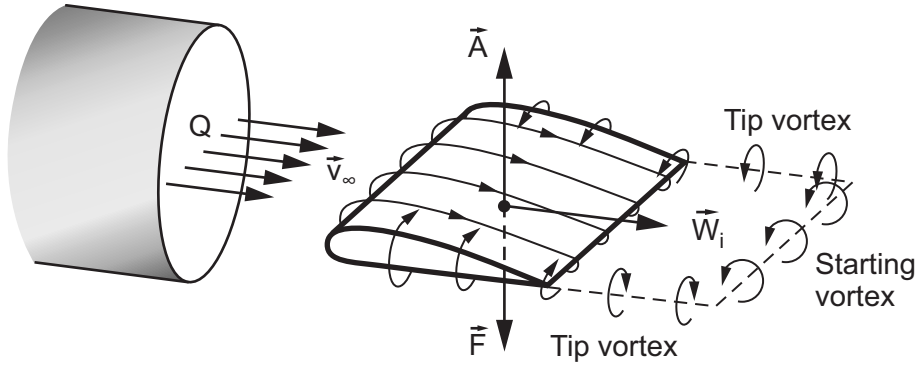


Fig. 8: Zirkulation um den Flügel, Randwirbelzöpfe und Anfahrwirbel / Circulation around the tip vortex lines and starting vortex.

Wir betrachten die durch den Querschnitt Q (Abb. 8) pro Sekunde anströmende Luftmenge. Sie möge durch den Tragflügel eine durchschnittliche Abwärtsgeschwindigkeit \vec{w} erhalten haben. Es erfährt also die pro sec durch den Querschnitt Q strömende Luftmasse $\rho Q v_\infty$ eine **Impulsänderung** pro sec

$$\frac{d\vec{J}}{dt} = \rho Q v_\infty \vec{w} = \vec{F},$$

oder eine **Kraft** \vec{F} der gleichen Grösse. In dieser Näherung wird nicht die örtliche Abhängigkeit der Impulsänderung einzelner Luftpakete berücksichtigt, sondern eine Mittelung vorgenommen. Der Auftrieb des Flügels ist die **Reaktion** der Kraft \vec{F} , also

$$\vec{A} = -\rho Q v_\infty \vec{w}. \quad (4)$$

Die pro sec mit der Geschwindigkeit \vec{w} abwärts strömende Luftmasse $\frac{dm}{dt} = \rho Q v_\infty$ führt sekundlich die kinetische Energie, d.h. Leistung

$$P_{kin} = \frac{dm}{dt} \frac{w^2}{2} = \rho Q v_\infty \frac{w^2}{2},$$

ab, die der Energie der anströmenden Luft entnommen wird. Anders ausgedrückt bedeutet dies, dass der Tragflügel der anströmenden Luft einen Widerstand W_i , den sog. **induzierten Widerstand** entgegensetzt, der dieselbe Leistung vernichtet:

$$W_i v_\infty = \rho Q v_\infty \frac{w^2}{2}, \quad (5)$$

und zusammen mit (4):

$$W_i = \frac{A^2}{4Q \frac{\rho}{2} v_\infty^2}. \quad (6)$$

Wenn noch Q durch den Durchmesser der Düsenöffnung d des Windkanals ausgedrückt wird, so erhält man:

$$W_i = \frac{A^2}{\pi d^2 \frac{\rho}{2} v_\infty^2}. \quad (7)$$

We now consider the amount of air flowing through the cross-section Q (Fig. 8) per second. The air experiences a downward velocity \vec{w} due to the airfoil. So the mass of air per s, $\rho Q v_\infty$, experiences a **change in momentum** per second of

$$\frac{d\vec{J}}{dt} = \rho Q v_\infty \vec{w} = \vec{F},$$

or a **force** \vec{F} of the same magnitude. In this approximation, the local distribution of the force will not be considered, but only the average value. The lift of the wing is the **reaction** to \vec{F} ,

$$\vec{A} = -\rho Q v_\infty \vec{w}. \quad (4)$$

The per-second air mass $\frac{dm}{dt} = \rho Q v_\infty$, traveling downwards with velocity \vec{w} , has a kinetic energy per second, i.e. power, of

$$P_{kin} = \frac{dm}{dt} \frac{w^2}{2} = \rho Q v_\infty \frac{w^2}{2},$$

which is taken from the energy of the incoming air. In other words, the wing opposes the incoming air through the so-called **induced drag** W_i , that just removes this power from the air:

$$W_i v_\infty = \rho Q v_\infty \frac{w^2}{2}, \quad (5)$$

and together with (4):

$$W_i = \frac{A^2}{4Q \frac{\rho}{2} v_\infty^2}. \quad (6)$$

If Q is expressed by the diameter of the nozzle d of the wind tunnel, we obtain:

$$W_i = \frac{A^2}{\pi d^2 \frac{\rho}{2} v_\infty^2}. \quad (7)$$

So, the lift of a wing A can be increased by increasing the induced drag W_i , the fluid or air density ρ , or the tip velocity v_∞ . Besides the induced drag W_i there is

Der Auftrieb A eines Tragflügels ist also umso größer, je größer der induzierte Widerstand W_i , die Flüssigkeits- oder Gasdichte ρ und die Anströmungsgeschwindigkeit v_∞ sind. Ausser dem induzierten Widerstand W_i ist jedoch noch der sog. **Profilwiderstand** W_p (Reibungs- und Druck- oder Wirbelwiderstand) wirksam, d.h. der Gesamtwiderstand, den ein Tragflügel der Strömung entgegensetzt, ist:

$$W = W_p + W_i. \quad (8)$$

Für den Profilwiderstand W_p gilt unter Vernachlässigung der Reibungskräfte (siehe auch Anleitung 7. "Innere Reibung in Flüssigkeiten"):

$$W_p = c_w \frac{\rho}{2} v_\infty^2 F. \quad (9)$$

Dabei ist c_w die dimensionslose, von der Form des Tragflügels abhängige **Widerstandszahl** und F die Fläche des sog. **Hauptspants**, d.h. der auf eine Ebene senkrecht zur Strömungsrichtung projizierte Querschnitt. Somit ist:

$$W = c_w \frac{\rho}{2} v_\infty^2 F + \frac{A^2}{\pi d^2 \frac{\rho}{2} v_\infty^2}.$$

W_p und A hängen in hohem Masse von der Anströmungsrichtung, d.h. dem sog. **Anstellwinkel** α des Tragflügels ab (Abb. 9). Stellt man A als Funktion von W mit α als Parameter graphisch dar, so ergibt sich das sog. **Polardiagramm** von Lilienthal (Abb. 10).

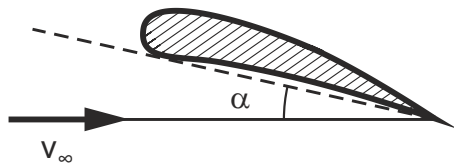


Fig. 9: Anstellwinkel α / Angle of attack, α .

an effective **profile drag** W_p (friction and pressure or eddy drag), i.e. the total drag of a wing, opposing the flow, is:

$$W = W_p + W_i. \quad (8)$$

For the profile drag W_p , neglecting frictional forces, (see also manual "7. Internal Friction in Fluids"):

$$W_p = c_w \frac{\rho}{2} v_\infty^2 F. \quad (9)$$

Here, c_w is a dimensionless **drag factor** that depends on the shape of the wing, and F is the area of a projection of the wing onto a plane perpendicular to the airflow v_∞ (sometimes called "main bulkhead"). Thus:

$$W = c_w \frac{\rho}{2} v_\infty^2 F + \frac{A^2}{\pi d^2 \frac{\rho}{2} v_\infty^2}.$$

W_p and A depend to a large extent on the inflow direction, i.e. the so-called **angle of attack**, α , of the wing (Fig. 9). If one draws A as a function of W with a given α , one obtains the so-called **polar diagram** of Lilienthal (Fig. 10).

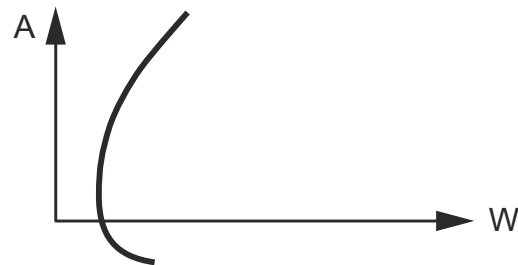


Fig. 10: Polardiagramm von Lilienthal / Lilienthal's polar diagram.

2 Aufgaben

Sämtliche Untersuchungen werden im Luftstrom eines Windkanals (Ventilator) von 10 cm Düsenöffnung durchgeführt.

1. Man messe die Anströmungsgeschwindigkeit v_∞ mit Hilfe des Prandtlschen Staurohrs unter Verwendung der Bernoullischen Gleichung (1).
2. Man messe die **Druckverteilung** im Mittelquerschnitt des Tragflügelprofils für zwei Anstellwinkel 0° und 10° , bestimme daraus den **Auftrieb** A' pro Längeneinheit und berechne aus diesem, nach Gleichung (3) die **Zirkula-**

2 Tasks

All experiments are carried out in the airstream of a wind tunnel (fan) with a 10 cm nozzle.

1. Measure the flow velocity v_∞ using the Prandtl tube and employing the Bernoulli Equation (1).
2. Measure the **pressure distribution** in the middle cross-section of the airfoil for two angles of attack, 0° and 10° . Determine the **lift** A' per unit length and calculate the **circulation** Γ therefrom according to Equation (3). Also plot the pressure distribution.
3. Using the balance, measure **lift** A and **drag** W

tion Γ . Die Druckverteilung ist graphisch darzustellen!

3. Mit Hilfe einer Waage sollen **Auftrieb** A und **Widerstand** W des Tragflügels für verschiedene **Anstellwinkel** α gemessen und im **Polar diagramm** graphisch dargestellt werden: $A = f(W)$!
4. Man bestimme die Widerstandskoeffizienten c_w für verschiedene Profile: Kreisscheibe, Kugel, Zeppelinprofil.
5. Man überzeuge sich von der Wirkung des Magnus-Effektes mit Hilfe eines kleinen Flettner-Rotors.

of the wing for different **angles of attack**, α , and plot the relationship $A = f(W)$ in a **polar diagram**.

4. Determine the drag coefficient c_w for different profiles: disc, ball and Zeppelin profile.
5. Convince yourself of the Magnus effect by using a small Flettner rotor.

3 Durchführung der Versuche

3.1 Anströmungsgeschwindigkeit

Die Anströmungsgeschwindigkeit v_∞ soll direkt vor der Düse des Ventilators bestimmt werden. Man benutzt dazu das sog. **Prandlsche Staurohr** (Abb. 11).

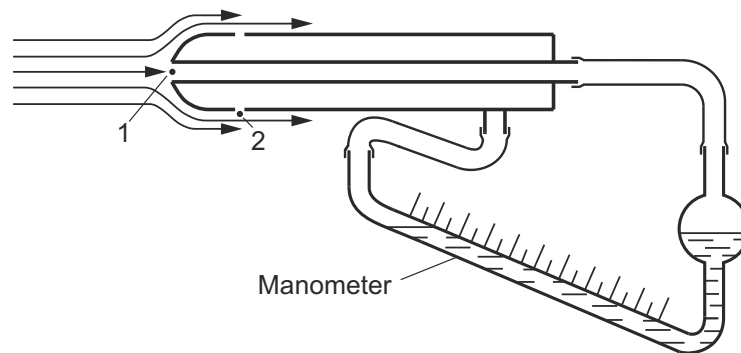


Fig. 11: Prandtsches Staurohr / Prandtl tube with manometer.

Das Staurohr ist so gebaut, dass am Orte 2 die Luft praktisch mit der Geschwindigkeit v_∞ vorbeiströmt, während an der Mündung des Staurohres (Punkt 1) die Strömungsgeschwindigkeit verschwindet. Es gilt also (Bernoulli):

$$p_1 + 0 = p_2 + \rho \frac{v_\infty^2}{2},$$

bzw.

$$v_\infty = \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho}}.$$

Die Druckdifferenz $p_1 - p_2$ wird mit einem in Pa geeichten Manometer gemessen.

3 How to do the experiments

3.1 Flow velocity

The flow velocity v_∞ should be determined directly in front of the nozzle of the wind tunnel. Use the so-called **Prandtl tube** (Fig. 11). It is also known as **Pitot static tube**.

The Prandtl tube is designed such that the air at position 2 flows practically with v_∞ , while the flow velocity is zero at the opening of the Prandtl tube (position 1). Therefore (Bernoulli):

$$p_1 + 0 = p_2 + \rho \frac{v_\infty^2}{2},$$

or

$$v_\infty = \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho}}.$$

The pressure difference $p_1 - p_2$ should be measured with the manometer, calibrated in Pa (pascal).

3.2 Druckverteilung längs des Profils

Zur Justierung der gegenseitigen Lage von Tragflügel und Windkanal stellt man den am Tragflügel befestigten Teilkreis zunächst auf 0° . Dann visiert man über zwei am Tragflügel angebrachte Spitzen gegen

3.2 Pressure distribution along the profile

To adjust the positions of wing and wind tunnel, first set the circle on the wing to 0° . Ensure that the front edge of the wing is only 1 to 1.5 cm in front of the

einen an die Düse angelegten Spiegel. Durch Drehen der Dreifuss-Stellschrauben bringt man die beiden Spitzen und die beiden Spiegelbilder zur Deckung. Dabei soll die Stirnkante des Tragflügels nur 1 bis 1.5 cm vor der Düse stehen. Nun kann der gewünschte Einstellwinkel einfach am Teilkreis eingestellt werden (Abb. 12). Verbindet man die über den Mittelquerschnitt des Tragflügels verteilten Bohrungen an deren seitlichen Ausgängen mit dem Manometer, so erhält man den Druck an den Bohrstellen (bezüglich Atmosphärendruck).

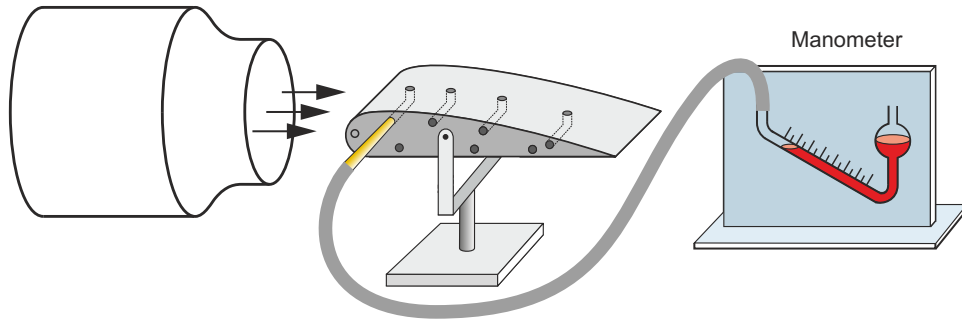


Fig. 12: Messung der Druckverteilung / Measurement of the pressure distribution.

Misst man an einer Stelle den Druck p und ist γ die Neigung des Linienelements ds gegen die Horizontale, so ergibt sich aus Abb. 13:

$$\begin{aligned} A' &= \int_{\text{Unterseite}} p \cos \gamma ds - \int_{\text{Oberseite}} p \cos \gamma ds \\ &= \int_{\text{Unterseite}} p ds' - \int_{\text{Oberseite}} p ds'. \end{aligned} \quad (10)$$

Mit einer **Schablone** zeichne man das Profil auf Millimeterpapier, projiziere die Bohrstellen auf die Abszissenachse, trage die gemessenen Drücke als Ordinate auf und bestimme die Integrale durch Auszählen. Dann berechne man nach Gleichung (3) die Zirkulation.

If one measures the pressure at a position p and if γ is the slope of the line element ds relative to the horizontal, one can obtain s' as shown in Fig. 13:

$$\begin{aligned} A' &= \int_{\text{lower side}} p \cos \gamma ds - \int_{\text{upper side}} p \cos \gamma ds \\ &= \int_{\text{lower side}} p ds' - \int_{\text{upper side}} p ds'. \end{aligned} \quad (10)$$

Draw the wing profile on graph paper using a **wing template**, indicate the projections of the drill holes on the x axis, mark the measured pressures as ordinates, and determine the enclosed areas by counting. Then calculate the circulation according to Equation (3).

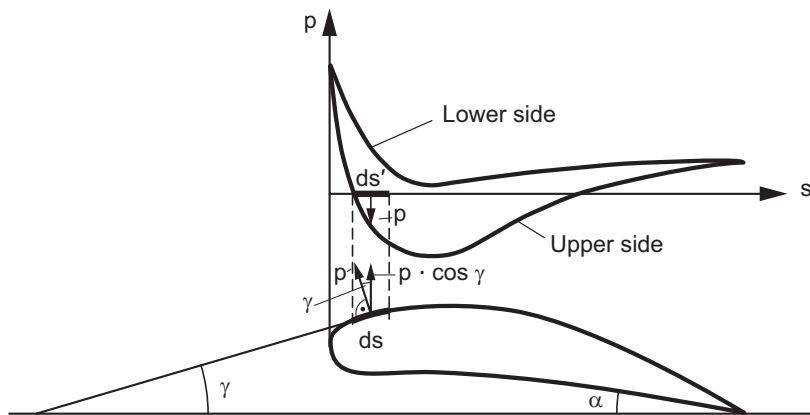


Fig. 13: Auftriebsberechnung durch Integration über die Druckverteilung / Calculating the lift by integrating the pressure distribution.

3.3 Auftrieb und Widerstand

Für diese Messungen wird das Tragflügelprofil auf eine Waage gesetzt und einmal in den **horizontalen**, dann in den vertikalen Luftstrom gebracht (Abb. 14 und 15). Bei diesen Messungen achtet man auf gute Justierung.

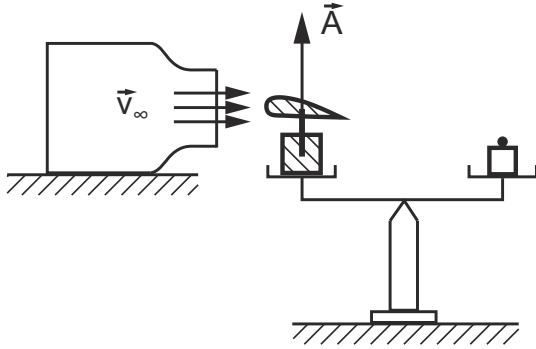


Fig. 14: Auftrieb / Aerodynamic lift.

Es wird sich zeigen, dass die gemessenen Widerstandswerte W viel grösser sind als die nach Gleichung (6) berechneten Werte für den induzierten Widerstand (siehe Gleichung (7)). An grossen Tragflügeln liegen die Verhältnisse allerdings wesentlich günstiger, indem dort der induzierte Widerstand (der zur Erzeugung des Auftriebs notwendigerweise in Kauf genommen werden muss) viel grösser als der Profilwiderstand ist.

Damit in einem Modell-Versuch ähnliche Verhältnisse auftreten wie an einem grossen Tragflügel, muss nach Reynolds die dimensionslose Grösse

$$Re = \frac{\rho v_{\infty} d}{\eta} \quad (\text{Reynolds-Zahl}),$$

in beiden Fällen gleich sein. Ist also im Modell z.B. d klein, so verlangt das Reynolds-Kriterium, dass entweder ρ und v_{∞} grösser oder η kleiner seien, damit ähnliche Verhältnisse untersucht werden können. In unserem Fall wird Re viel zu klein, da weder ρ noch v_{∞} oder η entsprechend geändert werden.

3.4 Widerstandskoeffizient c_w

Für diese Messungen dient die Anordnung Abb. 15. Die Widerstandskörper können an einer Platte befestigt und diese auf die Waage gelegt werden.

4 Anhang: Ableitung der Formel von Kutta-Joukowski

Die Formel von Kutta-Joukowski beruht auf der Voraussetzung, dass sich die Strömung um ein Profil als Überlagerung einer Potentialströmung und einer Zir-

3.3 Lift and drag

For these measurements, the wing is placed on a balance, oriented **horizontally** and also **vertically**, and the airflow is measured in both cases (Fig. 14 and 15). Make sure the wing is well aligned.

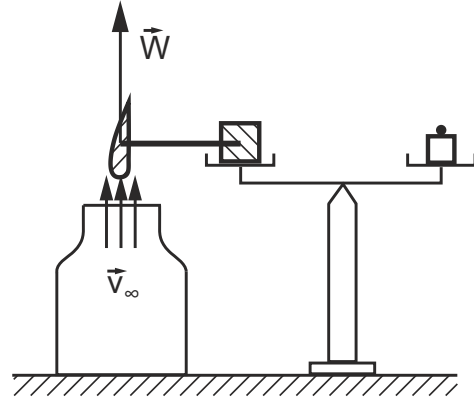


Fig. 15: Widerstand / Drag.

It will be seen that the measured values of the drag W are much larger than those calculated by equation (6) for the induced drag (see Equation (7)). This is due to profile drag (i.e. dissipative friction). For large wings, however, the discrepancy is smaller, as the induced drag (which must be taken into account when determining the lift) is much greater than the profile drag.

If the experimental conditions in a model were to be the same as for a real wing, the dimensionless quantity

$$Re = \frac{\rho v_{\infty} d}{\eta} \quad (\text{Reynolds number}),$$

has to be the same in both cases according to Reynolds. So for a model, where, e.g., d is small, the Reynolds criterion requires that either ρ and v_{∞} are greater or η is smaller, such that similar conditions are examined. In our case we find that Re is much too small to model a real wing, since neither ρ , v_{∞} or η can be altered accordingly.

3.4 Drag coefficient c_w

For these measurements, the set-up is shown in Fig. 15. The objects whose drag coefficient are to be measured can be attached to a plate that is then placed on the balance.

4 Appendix: Derivation of the formula of Kutta-Joukowski

The formula of Kutta-Joukowski is based on the assumption, that the airflow around a profile is a superposition of a potential flow and a vortex flow. We

kulationsströmung darstellen lässt. Die Zirkulation Γ sei für jeden Weg, der das Profil umschliesst, gleich gross. Daraus folgt automatisch, dass Γ für jeden Weg, der das Profil nicht umschliesst, verschwindet, denn ein solcher Integrationsweg kann immer als Differenz zweier erstgenannter Wege dargestellt werden. Die Erfahrung zeigt, dass eine solche Überlagerung die wirkliche Strömung um ein Profil relativ gut zu beschreiben vermag. Sie liefert allerdings nur einen Auftrieb und keine Widerstandskraft.

Für den Auftrieb pro m Breite gilt:

$$\vec{A}' = \oint_{\text{Profil}} p \vec{n} ds, \quad (11)$$

wobei \vec{n} den nach aussen gerichteten Einheitsvektor der Normalen zur Profil-Oberfläche bezeichnet. Wir drücken den Druck p durch das Bernoulli'sche Gesetz (1) aus:

$$p = p_0 - \frac{\rho}{2} v^2. \quad (12)$$

Gleichung (10) in (9) eingesetzt liefert:

$$\vec{A}' = \frac{\rho}{2} \oint_{\text{Profil}} v^2 \vec{n} ds - p_0 \oint_{\text{Profil}} \vec{n} ds. \quad (13)$$

Für den Vektor $\vec{n} ds$ schreiben wir:

$$\vec{n} ds = \vec{e}_z \times d\vec{s}, \quad (14)$$

wobei \vec{e}_z den Einheitsvektor senkrecht zur Zeichnungsebene bezeichnet.

Gleichung (12) in (11) eingesetzt:

$$\begin{aligned} \vec{A}' &= \frac{\rho}{2} \oint_{\text{Profil}} v^2 \vec{e}_z \times d\vec{s} - p_0 \oint_{\text{Profil}} \vec{e}_z \times d\vec{s} \\ &= \frac{\rho}{2} \vec{e}_z \times \oint_{\text{Profil}} v^2 d\vec{s} - p_0 \vec{e}_z \times \oint_{\text{Profil}} d\vec{s}. \end{aligned} \quad (15)$$

Das zweite Integral rechts verschwindet, da $\oint d\vec{s}$ für jede geschlossene Kurve gleich Null ist. Durch partielle Integration lässt sich zeigen, dass das Integral

$$\vec{J} = \oint_{\text{Profil}} v^2 d\vec{s},$$

unter den hier gemachten Voraussetzungen ebenfalls vom Integrationsweg unabhängig ist. Wir wählen nun einen Integrationsweg, der in grossem Abstand um das Profil herum verläuft. Es sei

$$\vec{v} = \vec{v}_\infty + \vec{v}_\Gamma. \quad (16)$$

\vec{v}_Γ bezeichne also denjenigen Anteil der Strömung, der von der Zirkulation herrührt.

Gleichung (15) in (14) eingesetzt:

$$\vec{J} = \oint v_\infty^2 d\vec{s} + 2 \oint (\vec{v}_\infty \cdot \vec{v}_\Gamma) d\vec{s} + \oint v_\Gamma^2 d\vec{s}. \quad (17)$$

assume, that the circulation Γ is the same for each path that includes the profile. That means that for each path which does not encompass the profile, the circulation Γ is zero, because any path, which does not encompass the profile, is equal to the difference of two paths which encompass the profile. Experience shows, that such a superposition describes the real flow quite accurately. This approach, however, only supplies a lift, not a drag.

The lift per wing length is

$$\vec{A}' = \oint_{\text{profile}} p \vec{n} ds, \quad (11)$$

where \vec{n} is the unit vector perpendicular to the profile surface (in outward direction). With the Bernoulli law (1), the pressure p can be written as

$$p = p_0 - \frac{\rho}{2} v^2. \quad (12)$$

Equation (10) in (9) gives

$$\vec{A}' = \frac{\rho}{2} \oint_{\text{profile}} v^2 \vec{n} ds - p_0 \oint_{\text{profile}} \vec{n} ds. \quad (13)$$

For vector $\vec{n} ds$ we write

$$\vec{n} ds = \vec{e}_z \times d\vec{s}, \quad (14)$$

where \vec{e}_z is the unit vector perpendicular to the drawing plane.

Equation (12) in (11) gives:

$$\begin{aligned} \vec{A}' &= \frac{\rho}{2} \oint_{\text{profile}} v^2 \vec{n} \times d\vec{s} - p_0 \oint_{\text{profile}} \vec{e}_z \times d\vec{s} \\ &= \frac{\rho}{2} \vec{e}_z \times \oint_{\text{profile}} v^2 d\vec{s} - p_0 \vec{e}_z \times \oint_{\text{profile}} d\vec{s}. \end{aligned} \quad (15)$$

The second integral on the right side is zero, as $\oint d\vec{s} = 0$ for any closed path. It can be shown by partial integration that the integral

$$\vec{J} = \oint_{\text{profile}} v^2 d\vec{s},$$

is independent of the contour path under the given assumptions. We chose a path that encompasses the profile at large distance, with

$$\vec{v} = \vec{v}_\infty + \vec{v}_\Gamma. \quad (16)$$

Here, \vec{v}_Γ is the part of the flow that comes from the circulation.

Equation (15) in (14) gives:

$$\vec{J} = \oint v_\infty^2 d\vec{s} + 2 \oint (\vec{v}_\infty \cdot \vec{v}_\Gamma) d\vec{s} + \oint v_\Gamma^2 d\vec{s}. \quad (17)$$

As $v_\Gamma \ll v_\infty$ at large distance from the profile, the third integral may be neglected with respect to the

Da in grosser Entfernung vom Profil $v_\Gamma \ll v_\infty$ ist, kann das dritte Integral gegenüber dem zweiten vernachlässigt werden (das erste Integral verschwindet, da \vec{v}_∞ konstant ist).

Es bleibt also:

$$\begin{aligned}\vec{A}' &= \frac{\rho}{2} \vec{e}_z \times 2 \oint (\vec{v}_\infty \cdot \vec{v}_\Gamma) d\vec{s} \\ &= \rho \vec{e}_z \times \vec{v}_\infty \oint \vec{v}_\Gamma \cdot d\vec{s}.\end{aligned}\quad (18)$$

Voraussetzungsgemäss ist aber

$$\oint \vec{v}_\Gamma \cdot d\vec{s} = \Gamma. \quad (19)$$

\vec{A}' steht also senkrecht auf \vec{v}_∞ und \vec{e}_z und hat den Betrag

$$\boxed{A' = \rho v_\infty \Gamma.} \quad (20)$$

Dies ist die Formel von Kutta-Joukowski.

5 Fragen für Studierende des Studiengangs Physik

1. Was versteht man unter Auftrieb, was unter dynamischen Auftrieb?
2. Wie lautet die Bernoulli-Gleichung? Was ist eine Stromlinie? Warum erfährt ein schwerer Körper einen dynamischen Auftrieb?
3. Welche Arten von Druck unterscheidet man? Was misst das Prandtlsche Staurohr?
4. Erläutern Sie den Magnus-Effekt, der z.B. bei angeschnittenen Tennisbällen auftritt!
5. Was versteht man unter einem Strömungswiderstand? Wie lautet dieser für eine Kugel?
6. Was besagt die Reynolds-Zahl? Wie ist die Viskosität definiert?

second term (the first integral disappears as \vec{v}_∞ is constant).

Thus we get:

$$\begin{aligned}\vec{A}' &= \frac{\rho}{2} \vec{e}_z \times 2 \oint (\vec{v}_\infty \cdot \vec{v}_\Gamma) d\vec{s} \\ &= \rho \vec{e}_z \times \vec{v}_\infty \oint \vec{v}_\Gamma \cdot d\vec{s}.\end{aligned}\quad (18)$$

According to our assumption we have

$$\oint \vec{v}_\Gamma \cdot d\vec{s} = \Gamma. \quad (19)$$

\vec{A}' is perpendicular to \vec{v}_∞ and \vec{e}_z , its magnitude is

$$\boxed{A' = \rho v_\infty \Gamma.} \quad (20)$$

This is the formula of Kutta-Joukowski.

5 Questions for Physics Students

1. What is meant by buoyancy and what is meant by dynamic buoyancy?
2. What is Bernoulli's equation? What is a streamline? Why does a heavy body experience dynamic lift?
3. What are the different types of pressure? What does Prandtl's tube measure?
4. Explain the Magnus effect, which occurs, for example, with spinning tennis balls!
5. What is drag? What is this for a bowl?
6. What does the Reynolds number mean? What is the definition of viscosity?