4. Transversalschwingung einer Saite - Transverse Oscillation of a String

1 Grundlagen

Unter einer Saite versteht man einen elastischen Stab, dessen Querdimensionen so klein gegen seine Länge l sind, dass einer Biegung praktisch keine Biegungsmomente entgegenwirken. Wird eine Saite an ihren beiden Enden fest eingespannt, so wird bei einer Deformation lediglich Arbeit gegen die in der Längsrichtung der Saite wirkende *Zugkraft* $\vec{Z}$ verrichtet. Unter diesen Voraussetzungen lässt sich die Bewegung einer Saite, die aus der Ruhelage ausgelenkt und dann frei gelassen worden ist, einfach beschreiben.

1 Basics

By definition a string is a flexible cord, whose cross-section is small compared to its length l. Therefore, when bending the string, there is almost no moment that counteracts the bending. If a string is fixed both ends, deformation will only cause work to be done against the *tensile force* $\vec{Z}$ acting in the longitudinal direction of the string. Under these conditions, the movement of a string that has been deflected from its resting position and then left free can be described easily.

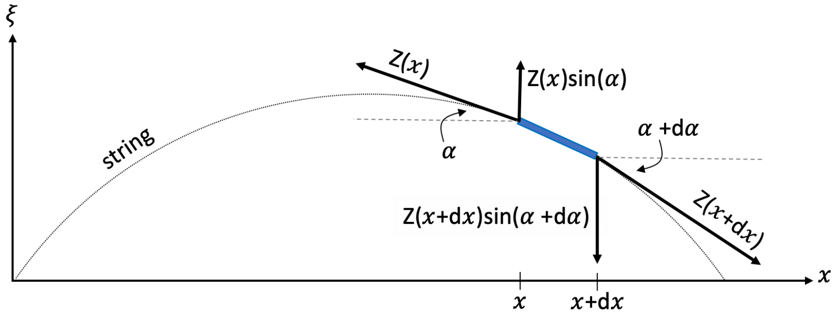

Fig. 1: Kräftediagramm an der Position x einer ausgelenkten Saite. Die rücktreibende Kraft $\mathrm{d}K_\xi$ ist die Summe der beiden Kräfte $Z(x)\sin(\alpha)$ und $Z(x+\mathrm{d}x)\sin(\alpha+\mathrm{d}\alpha)$, wobei $Z(x)$ die Zugkraft $Z(x)$ entlang der Saite an Position x ist. / Diagram of forces at the position x of a deflected string. The restoring force $\mathrm{d}K_\xi$ is the sum of the two forces $Z(x)\sin(\alpha)$ und $Z(x+\mathrm{d}x)\sin(\alpha+\mathrm{d}\alpha)$, with $Z(x)$ the tensile force along the string at position x.

Aus Fig. 1 erkennt man, dass auf das Saitenelement der Länge $\mathrm{d}x$ eine rücktreibende Kraft

$$\mathrm{d}K_\xi = Z(x+\mathrm{d}x)\sin(\alpha+\mathrm{d}\alpha) - Z(x)\sin\alpha$$

wirkt. Für kleine Auslenkungen können wir annehmen, dass $Z(x) = Z(x+\mathrm{d}x)$, also dass die Zugkraft links und rechts vom infinitesimalen Saitenelement identisch ist. Weil α klein ist, gilt $\sin\alpha \approx \alpha$, und somit können wir $\alpha = \mathrm{d}\xi(x)/\mathrm{d}x \equiv \xi'(x)$ setzen ($\xi'(x)$ ist die Steigung von ξ am Punkt x). Analoges gilt für $\alpha + \mathrm{d}\alpha = \mathrm{d}\xi(x+\mathrm{d}x)/\mathrm{d}x \equiv \xi'(x+dx)$. Wir erhalten also aus obiger Gleichung

$$\begin{aligned} \mathrm{d}K_\xi &= Z\left(\xi'(x+dx) - \xi'(x)\right) \\ &= Z\mathrm{d}x\frac{\xi'(x+\mathrm{d}x)-\xi'(x)}{\mathrm{d}x} \\ &\equiv Z\mathrm{d}x\frac{\mathrm{d}^2\xi(x)}{\mathrm{d}x^2} \end{aligned}$$

Dabei haben wir $\mathrm{d}x$ als infinitesimal betrachtet und für die letzte Gleichung die Definition der Ableitung verwendet. Im Prinzip ergibt also die Differenz der ersten Ableitungen die zweite Ableitung.
Sieht man von der Wirkung weiterer Kräfte (z. B. der Reibung) ab, so wird die Gleichung $F = ma$

In Figure 1 you can see that in a small string element of length $\mathrm{d}x$ there exists a restoring force

$$\mathrm{d}K_\xi = Z(x+\mathrm{d}x)\sin(\alpha+\mathrm{d}\alpha) - Z(x)\sin\alpha.$$

For small deviations, we can assume that $Z(x) = Z(x+\mathrm{d}x)$, i.e. that the tension force to the left and right of the infinitesimal string element is identical. Because α is small, $\sin\alpha \approx \alpha$ holds, and thus we can set $\alpha = \mathrm{d}\xi(x)/\mathrm{d}x \equiv \xi'(x)$ ($\xi'(x)$ is the slope of ξ at point x). Analogously, $\alpha + \mathrm{d}\alpha = \mathrm{d}\xi(x+\mathrm{d}x)/\mathrm{d}x \equiv \xi'(x+dx)$. We therefore obtain from the above equation

$$\begin{aligned} \mathrm{d}K_\xi &= Z\left(\xi'(x+dx) - \xi'(x)\right) \\ &= Z\mathrm{d}x\frac{\xi'(x+\mathrm{d}x)-\xi'(x)}{\mathrm{d}x} \\ &\equiv Z\mathrm{d}x\frac{\mathrm{d}^2\xi(x)}{\mathrm{d}x^2}. \end{aligned}$$

Here we have considered $\mathrm{d}x$ to be infinitesimal and used the definition of the derivative for the last equation. In principle, the difference of the first derivatives gives the second derivative.
If we disregard the effect of further forces (e.g. friction), the equation $F = ma$ becomes $\mathrm{d}K_\xi = \mathrm{d}m\,\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}$

zu $\mathrm{d}K_\xi = \mathrm{d}m\,\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}$ für das betrachtete Saitenelement. Bezeichnet man mit μ die *Masse* der Saite pro *Längeneinheit*, so ist $\mathrm{d}m = \mu\,\mathrm{d}x$ und man erhält die Bewegungsgleichung

$$Z\,\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}\,\mathrm{d}x = \mu\,\mathrm{d}x\,\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}$$

oder

$$\boxed{\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} = \frac{\mu}{Z}\,\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}.} \tag{1}$$

Die partielle Differentialgleichung (1) wird durch unendlich viele Funktionen ξ der beiden Variablen x und t befriedigt, d. h. es existieren unendlich viele Bewegungs- oder Schwingungsformen der Saite. Man kann sich leicht überzeugen, dass z. B. jede Funktion von der Form

$$\xi(x,t) = f(x-ut) \quad \text{mit} \quad u = \sqrt{\frac{Z}{\mu}}$$

die Differentialgleichung (1) erfüllt. Ein solcher Lösungsansatz kann jede beliebige, mit konstanter Geschwindigkeit u in x-Richtung sich fortpflanzende Verformung der Saite darstellen. Man bezeichnet deshalb allgemein Differentialgleichungen vom Typ (1) als *Wellengleichungen*.
Hier interessieren nun Lösungen von Gleichung (1), welche die *Randbedingungen*

$$\begin{aligned} x=0: &\qquad \xi(0,t)=0,\\ x=l: &\qquad \xi(l,t)=0, \end{aligned} \tag{2}$$

für jede Zeit t erfüllen. Wir versuchen einen Ansatz von der Form:

$$\xi(x,t) = A\sin(kx)\sin(\omega t). \tag{3}$$

Der Ansatz (3) stellt eine *stehende Welle* mit der Amplitude A dar. In Gleichung (1) eingesetzt erhalten wir zunächst die Verknüpfung

$$k^2 = \frac{\mu}{Z}\,\omega^2 \tag{4}$$

zwischen den beiden Parametern k und ω, während die Randbedingungen (2) durch die Forderung

$$k_n l = n\pi \qquad (n = \text{ganze Zahl}) \tag{5}$$

erfüllt werden können. Durch den Index n am Parameter k deuten wir an, dass eine ganze Reihe von k-Werten existiert (die sog. *Eigenwerte*), welche die Randbedingungen erfüllen. Aus den Eigenwerten k_n findet man durch Einsetzen in Gleichung (4) die *Eigenfrequenzen* ν_n der Saite, nämlich

$$\nu_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{k_n}{2\pi}\sqrt{\frac{Z}{\mu}} = \frac{n}{2l}\sqrt{\frac{Z}{\mu}} \quad (n = 1,2,3,\dots). \tag{6}$$

Für $n=1$ ergibt sich die niedrigste Frequenz, mit welcher die Saite schwingen kann, die sog. *Grundfrequenz*

$$\nu_1 = \frac{1}{2l}\sqrt{\frac{Z}{\mu}}. \tag{7}$$

for the string element under consideration.
For small deformations one can substitute $Z(x+\mathrm{d}x)$ by $Z(x)$ and $\sin\alpha$ by $\tan\alpha$, which in our case this is equivalent to $\mathrm{d}\xi/\mathrm{d}x$. This yields

$$\mathrm{d}K_\xi = Z\left[\left(\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}x}\right)_{x+\mathrm{d}x} - \left(\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}x}\right)_x\right] = Z\,\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}\,\mathrm{d}x.$$

If we ignore the impact of other forces (e. g. friction) then $\mathrm{d}K_\xi$ is equal to the force of inertia in our small element of the string $\mathrm{d}m\,\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}$. Here μ is the *mass* of the string *per unit length*, meaning $\mathrm{d}m = \mu\,\mathrm{d}x$. The equation of motion is then given by

$$Z\,\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}\,\mathrm{d}x = \mu\,\mathrm{d}x\,\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}$$

or

$$\boxed{\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} = \frac{\mu}{Z}\,\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}.} \tag{1}$$

The partial differential equation (1) has infinite solutions ξ which depend on the variables x and t. The string has an infinite number of possibilities to oscillate. You can verify for example that all functions of the form

$$\xi(x,t) = f(x-ut) \quad \text{with} \quad u = \sqrt{\frac{Z}{\mu}}$$

fulfill the differential equation. This solution describes a wave propagating with an arbitrary but constant speed u in the x direction. For this reason, differential equations such as equation (1) are called *wave equations*.
As we are only interested in solutions which fulfill the *boundary conditions*

$$\begin{aligned} x=0: &\qquad \xi(0,t)=0,\\ x=l: &\qquad \xi(l,t)=0, \end{aligned} \tag{2}$$

for all times t, we will be using the ansatz

$$\xi(x,t) = A\sin(kx)\sin(\omega t). \tag{3}$$

Equation (3) describes a *standing wave* with amplitude A. Substituting this in equation (1) we get a relationship between the parameters k and ω:

$$k^2 = \frac{\mu}{Z}\,\omega^2. \tag{4}$$

The boundary conditions (2) can be satisfied by requiring

$$k_n l = n\pi \qquad (n = \text{integer number}). \tag{5}$$

The index n in the parameter k is necessary, as k can take an infinite number of values (the *eigenvalues*) which fulfill the boundary conditions. Using these eigenvalues k_n we can be compute the *eigenfrequencies* ν_n of the string:

$$\nu_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{k_n}{2\pi}\sqrt{\frac{Z}{\mu}} = \frac{n}{2l}\sqrt{\frac{Z}{\mu}} \quad (n = 1,2,3,\dots). \tag{6}$$

Durch Einsetzen von höheren n-Werten in Gleichung (6) ergeben sich ganze Vielfache von ν_1, d. h. die Frequenzen der *Oberschwingungen*. Während für $n = 1$ längs der Saite zwei Stellen, sog. *Knoten*, existieren, für welche $\xi = 0$, d. h. die Saite dauernd in Ruhe ist, nämlich $x = 0$ und $x = l$, ergibt sich z. B. für $n = 2$ auch für $x = l/2$ ein *Knoten*; im ganzen also drei. Allgemein ist die Zahl der Knoten längs einer Saite $n + 1$.

Das physikalische Verhalten einer Saite muss also durch die Parameter k und ω beschrieben werden, die nicht kontinuierlicher Werte fähig sind, sondern nur *diskrete*, durch Gleichungen (5) und (6) bestimmte Werte annehmen können. Bohr (1913) hat nun postuliert, dass auch das physikalische Verhalten der Atome einen nicht kontinuierlichen Charakter zeige (vergleiche die Anleitung "24 – Spektroskopie"). Diese Analogie hat Schrödinger (1926) veranlasst, die Eigenschaften der Atome ebenfalls durch Eigenwerte und Eigenfrequenzen einer Differentialgleichung auszudrücken. Diese von Schrödinger *postulierte* Differentialgleichung bildet die Grundlage der modernen Atomphysik (der sog. *Wellenmechanik*).

Gleichung (7) liefert die Frequenz für die *freie, ungedämpfte Grundschwingung der Saite*. Eine Saite, z. B. ein Eisendraht, kann aber auch, wie in Fig. 2 angedeutet ist, durch ein periodisch veränderliches Magnetfeld $H = H_0 \sin(2\pi\nu t)$ zu *erzwungenen* Transversalschwingungen angeregt werden. Das Magnetfeld wird durch einen Elektromagneten erzeugt, durch dessen Spule ein Wechselstrom der Form $I = I_0 \sin(2\pi\nu t)$ fliesst. Die eiserne Saite wird demnach pro sec ν-mal angezogen, d. h. sie wird mit der Frequenz ν zu Transversalschwingungen angeregt. Mit maximaler Amplitude erfolgen die Schwingungen dann, wenn die Störfrequenz ν mit der *Eigenfrequenz* ν_1 der Saite identisch ist, d. h. im *Resonanzfall*. (Die Vorgänge bei erzwungenen Schwingungen werden in der Anleitung "5 – Mechanische Resonanz" ausführlich behandelt.)

For $n = 1$ we get the smallest frequency of the oscillations of the string, called the *fundamental frequency*,

$$\nu_1 = \frac{1}{2l}\sqrt{\frac{Z}{\mu}}. \tag{7}$$

If we use higher values of n in the equation (6) we get a multiple of ν_1 as a frequency. These frequencies are called *higher order harmonics or overtones*. For $n = 1$ the string exhibits two positions where $\xi = 0$ for all times t—the *nodes* of the oscillation. In these positions, given bz $x = 0$ and $x = l$, the string is always at rest. Looking at the higher order harmonic $n = 2$, we see that the string is also at rest for $x = l/2$. In general the number of *nodes* of a string is $n + 1$.

We found that the physical behavior of a string is described by the parameters k and ω which are not continuous variables, but *discrete*. They can take values which are defined by equations (5) and (6). Bohr (1913) postulated that the physical behavior of atoms is also described by a set of discrete values (see instructions of "24 – spectroscopy"). This analogy led Schroedinger (1926) to describe atoms with eigenvalues and eigenfrequencies of a differential equation. This differential equation is the foundation of modern atomic physics (*wave mechanics*).

Equation (7) describes the string's frequency in the case of a *free undamped harmonic oscillation*. A string (e. g. an iron wire) could also be *forced* into a transverse oscillation by a periodically changing magnetic field $H = H_0 \sin(2\pi\nu t)$ (see Fig. 2). The magnetic field will be produced by an electromagnet driven by an alternating current of the form $I = I_0 \sin(2\pi\nu t)$. The iron wire will be attracted ν-times per second. Therefore the frequency of the oscillation is ν. The maximum amplitude of the wire occurs when the interfering frequency ν is the same as the *eigenfrequency* of the wire (this is the *resonance*). For more details on forced oscillation see the instructions to "5 – mechanical resonance".

2 Aufgaben

1. Bestimmung der Unsicherheit der Mikrometerschraube: Messen Sie die Amplitude der schwingenden Saite nahe bei der Resonanz mindestens 10 mal. Danach wiederholt Ihre Laborpartnerin bzw. Ihr Laborpartner die Messung ebenfalls 10 mal.

2. Bilden Sie aus den je 10 Messungen den Mittelwert, und bestimmen Sie die Unsicherheit auf den Mittelwert. Sind die beiden Mittelwerte miteinander kompatibel?

3. Geben Sie ein Beispiel für einen systematischen Fehler in diesem Experiment an, quantifizieren Sie ihn, und beschreiben Sie, wie Sie den systematischen Fehler entdecken und wie Sie ihn beheben könnten.

2 Tasks

1. Determining the uncertainty of a measurement with the micrometer screw: Measure the amplitude of the oscillating string close to the resonance at least 10 times. Then, your lab partner repeats the measurement 10 times as well.

2. Calculate the mean value from each of the 10 measurements and determine the uncertainty on the mean. Are the two mean values compatible with each other?

3. Give an example of a systematic error in this experiment, quantify it, and describe how you would detect the systematic error and how you might correct for it.

4. For a constant string length (l = 40–50 cm),

4. Für eine konstante Saitenlänge ($l = 40$–$50\,\mathrm{cm}$) soll die sog. *Resonanzkurve* für die Grundschwingung der Saite aufgenommen werden. Man stelle die Amplitude A in Funktion von $\sqrt{Z}$ dar! Zeichnen Sie die Resonanzkurve inkl. der Fehlerbalken für die Amplitude. *Hinweis: Achten Sie darauf, dass Sie eine hinreichend feine Auflösung um die Resonanzkurve haben, und dass Sie die Kurve in einem sinnvollen Intervall aufzeichnen.*

5. Bestimmen Sie von der Resonanzkurve den Mittelwert, sowie die Halbwertsbreite (*full width at half maximum, FWHM*). Aus der FWHM kann die Unsicherheit σ auf den Mittelwert bestimmt werden. Der Zusammenhang ist $FWHM = 2.35\sigma$. Versuchen Sie dazu die Resonanzkurve entweder von Hand oder mittels Computer durch eine Gausskurve zu fitten. *Für Fortgeschrittene und Interessierte: Eine Resonanzkurve wird treffender durch eine Lorentzkurve (z.T. auch Breit-Wigner-Kurve genannt) beschrieben. Fitten Sie eine solche Lorentzkurven, und diskutieren Sie die Unterschiede!.*

6. Man erwartet, dass bei 1/3 der Datenpunkte die Fitkurve nicht durch den Fehlerbalken geht. Ist das bei Ihnen auch so? Falls nicht, so erklären Sie, warum das nicht der Fall ist.

7. Man prüfe das Gesetz (7) auf seine Gültigkeit. Für verschiedene Saitenlängen l ermittle man die Zugkraft Z, für welche die Saite in Resonanz gerät. Man stelle Z als Funktion von l^2 graphisch dar. Die Länge l soll in Schritten von 2 cm zwischen 36 und 54 cm verändert werden.

8. Zeichnen Sie eine Regressionsgerade durch die Datenpunkte $Z(l^2)$, entweder per Computer oder mittels der Formel $m = Cov(x, y)/Var(x)$, wobei x der quadrierten Saitenlänge l^2 entspricht, und y die Zugkraft Z darstellt. Berechnen Sie daraus dann die Grundfrequenz ν_1, und vergleichen Sie das mit der am Experiment angegebenen Treiberfrequenz des Oszillators.

record the so-called *resonance curve* for the fundamental vibration of the string. Plot the amplitude A as a function of $\sqrt{Z}$! Draw the resonance curve including the error bars for the amplitude. *Note: Make sure you have a sufficiently fine resolution around the resonance curve, and that you plot the curve at a reasonable interval.*

5. Determine the mean of the resonance curve, as well as the full width at half maximum (FWHM). From the FWHM, the uncertainty σ on the mean can be determined. The relationship is $FWHM = 2.35\sigma$. To do this, try fitting the resonance curve by a Gaussian curve either by hand or by computer. *For advanced and interested people: A resonance curve is better described by a Lorentz curve (also called Breit-Wigner curve). Fit such a Lorentz curve, and discuss the differences.*

6. One expects that for 1/3 of the data points the fit curve does not pass through the error bar. Is this the case for you? If not, explain why this is not the case.

7. Check the law (7) for its validity. For various string lengths l, determine the tensile force Z for which the string resonates. Graph Z as a function of l^2. Change the length l in steps of 2 cm between 36 and 54 cm.

8. Draw a regression line through the data points $Z(l^2)$, either by computer or using the formula $m = Cov(x, y)/Var(x)$, where x corresponds to the squared string length l^2, and y represents the tensile force Z. Then, calculate the fundamental frequency ν_1, and compare that to the oscillators driving frequency indicated at the experiment setup.

3 Durchführung der Versuche

Die Versuchsanordnung ist in Fig. 2 schematisch dargestellt. Die Saite S wird über den rechtwinkligen Hebel H durch Belasten der Waagschale mit verschiedenen Gewichten G gespannt. Durch zwei genau senkrecht stehende Stege St wird die Länge der schwingenden Saite eingestellt. Die Amplitude der Schwingung wird in der Saitenmitte, d. h. für $x = l/2$ mit einem Mikroskop gemessen. Am einfachsten geht das, indem das Fadenkreuz des Mikroskops zuerst auf z.B. die unterste Auslenkung des Wellenbauchs der Saite eingestellt wird. Danach wird das Mikroskop auf die oberste Auslenkung des Wellenbauchs verschoben, wobei auf der Mikrometerschraube abgelesen wird,

3 Performing the experiment

The experimental setup is shown schematically in Fig. 2. The string S is connected through an orthogonal lever H to a tray. By adding weights to this tray the wire can be strained. Use the two orthogonal partition walls St to adjust the length of the oscillating string. The amplitude of the oscillation will be measured in the middle of the string (i. e. $x = l/2$) with a microscope. An easy way to achieve that is by positioning the crosshair at the lowest point of the antinode. Then the microscope is shifted upwards by means of turning the micrometer screw until the crosshair is focusing onto the highest point of the antinode. Observing the overall translation on the

um wieviel das Mikroskop verschoben wurde. Die Amplitude ist somit die Hälfte dieser Translation.
Der Strom $I = I_0 \sin(2\pi\nu t)$, der den Elektromagneten anregt, wird von einem sehr stabilen elektronischen Oszillator geliefert. Beachten Sie, dass auf der Waagschale ein fixes Gewicht von 200 g angebracht ist, welches zu G dazugerechnet werden muss.

scale of the micrometer screw and dividing this value by two yields the amplitude.
The current $I = I_0 \sin(2\pi\nu t)$ that drives the electromagnet is generated by a very stable electronic oscillator. Note that on the lever tray there is a fixed mass of 200 g. Thus this additional weight has to be taken into account for G.

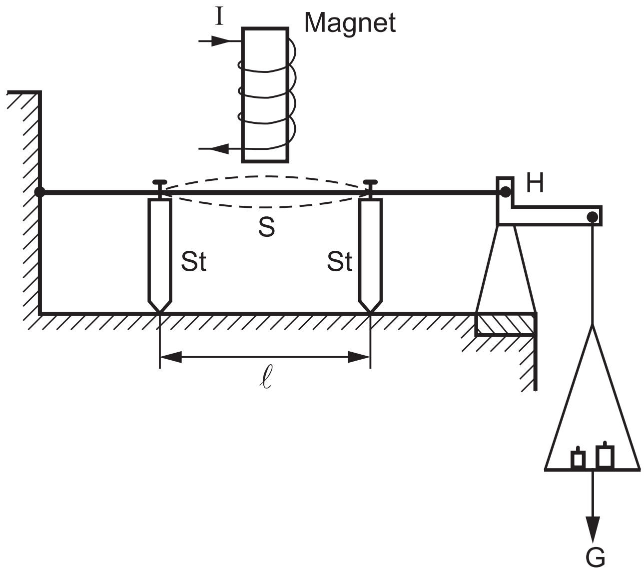

Fig. 2: Versuchsanodrnung: Eine Saite S wird zwischen zwei Stegen St durch einen Elektromagneten zur Schwinung angeregt. Die Zugkraft Z wird durch Gewichte auf einer Waagschale eingestellt. / Experiment setup: a string S is brought into oscillation by an electromagnet between two partition walls St. The tensile force Z is adjusted by the weight on a tray.