Ulični psi i šinteri

Iva Djordjević, Ivana Nestorović i Dimitrije Marković

May 2023

Sadržaj

1 Uvod

Ulični psi su zajednički problem mnogih gradova širom sveta. Mogu izazvati mnoge zdravstvene i sigurnosne probleme. Ulični psi često formiraju čopore i postaju agresivni, napadaju ljude i druge životinje. S ciljem da se iskontroliše populacija uličnih pasa, mnogi gradovi su uveli šinterske programe. U ovom radu, istražićemo dinamiku populacije uličnih pasa i efektivnost šinterskih programa u kontrolisanju njihovog broja.

2 Model

Model postupnog smanjenja uličnih pasa može se izvesti koristeći diferencijalnu jednačinu za Verhulstov model u kombinaciji sa jednačinom koja opisuje postepno smanjenje populacije.

Verhulstov model

$$\frac{dN}{dt} = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right) \tag{1}$$

Gde je:

1. N - broj jedinki u populaciji
2. r - stopa prirodnog priraštaja (razlika nataliteta i mortaliteta)
3. K - kapacitet staništa, odnosno maksimalan broj jedinki koje stanište može podržati
4. t - vreme

Ovim modelujemo stopu promene broja jedinki u populaciji u toku vremena.

Jednačina za postupno smanjenje populacije

$$\frac{dN}{dt} = -\epsilon N$$

Gde nam ϵ predstavlja procenat populacije koju svake godine šinterska služba uhvati i eutanazira.
Kombinovanjem ove dve jednačine dobijamo naš model:

$$\frac{dN}{dt} = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right) - \epsilon N \tag{2}$$

2.1 Rešenje

1. **Razdvajanje promenljivih**

$$\frac{dN}{rN(1-\frac{N}{K})-\epsilon N}=dt$$

2. **Integrišemo levu stranu**

$$\int \frac{1}{rN(1-N/K)-\epsilon N}dN=\int \frac{1}{rN-\frac{rN^2}{K}-\epsilon N}dN=-K\int \frac{1}{N(rN-rK+\epsilon K)}dN$$

3. **Primenimo dekompoziciju razlomaka na integral**

$$\int \frac{1}{N(rN-rK+\epsilon K)}dN$$

Nadjimo koeficijente A i B takve da je:

$$\frac{A}{N}+\frac{B}{rN-rK+\epsilon K}=\frac{1}{N(rN-rK+\epsilon K)}$$

Pomnozimo obe strane sa $N(rN-rK+\epsilon K)$.

$$A(rN-rK+\epsilon K)+BN=1$$

Ako za N uzmemo vrednost 0 mozemo izracunati koeficijent A

$$-ArK+A\epsilon K=1$$

Dobijamo da je

$$A=\frac{-1}{K(r-\epsilon)}$$

Ako za N uzmemo vrednost 1 i A zamenimo sa vrednoscu koju smo dobili dobijamo narednu jednacinu:

$$\frac{-1}{K(r-\epsilon)}(r-rK+\epsilon K)+B=1$$

Nakon kraceg racuna dobijamo da je:

$$B=\frac{r}{K(r-\epsilon)}$$

Nakon uvrštavanja koeficijenta A i B u razlomak (*) i primene linearnosti dobijamo:

$$\frac{r}{Kr-\epsilon K}\int \frac{1}{rN-rK+\epsilon K}dN+\frac{1}{rK-K\epsilon}\int \frac{1}{N}dN$$

4.**Rešavamo prvi integral iz prethodnog koraka**

Uvodimo smenu

$$u = rN - rK + \epsilon K$$

Dobijamo:

$$\frac{1}{r}\int \frac{1}{u} = \frac{\ln u}{r}$$

Kada vratimo smenu:

$$\frac{\ln\left(\mid rN - rK + \epsilon K \mid\right)}{r}$$

5.**Vraćamo se u korak 3**

Ubacivanje prethodnog izraza, izračunavanjem drugog integrala i množenjem sa -K imamo:

$$\int \frac{1}{rN(1-N/K) - \epsilon N} dN = \frac{\ln(\mid N \mid) - \ln\left(\mid rN - rK + \epsilon K \mid\right)}{r - \epsilon}$$

6.**Integracijom leve i desne strane izraza pod 1. dobijamo:**

$$\frac{\ln(\mid N \mid) - \ln\left(\mid rN - rK + \epsilon K \mid\right)}{r - \epsilon} = t + C$$

C je konstanta integracije.

7.**Postoje dva rešenja, ali uzećemo u obzir samo jedno**

Za rN-rk+ϵK ¡ 0:

$$\frac{rK - rN - \epsilon K}{N} = t(\epsilon - r) - C1$$

C1 = C(r- ϵ)

8.**Opšte rešenje po N:**

$$N = \frac{K(r-\epsilon)}{e^{t*(\epsilon - r) - c1} + r}$$

9.**Pronalazimo rešenje za t = 0**

$$e^{-c1} = \frac{K(r-\epsilon)}{N(0)} - r$$

10.**Kada uvrstimo rešenje za t=0, u opšte rešenje dobijamo jednačinu za nas model:**

$$N(t) = \frac{K(r-\epsilon)}{r + e^{t(\epsilon - r) - c1}\left(\frac{K(r-\epsilon)}{N(0)} - r\right)}$$

2.2 Rešenje za različite vrednosti parametra ϵ

Maksimalan kapacitet populacije je 250 jedinki po km^2. Za manji broj pasa, natalitet i mortalitet su 0.34 i 0.12 (na godišnjem nivou po km^2), redom.
Da bi ogranicila broj uličnih pasa, šinterska služba hvata i eutanizira konstantan procenat ϵ od ukupnog broja uličnih pasa.

Posmatraćemo ponašanje našeg modela za:

$$\epsilon 1 = 0.36$$

$$\epsilon 1 = 0.25$$

$$\epsilon 3 = 0.14$$

U periodu od 100 godina. Za početni broj pasa uzećemo 10.

Na x osi su označene godine, dok y osa označava broj populacije pasa.

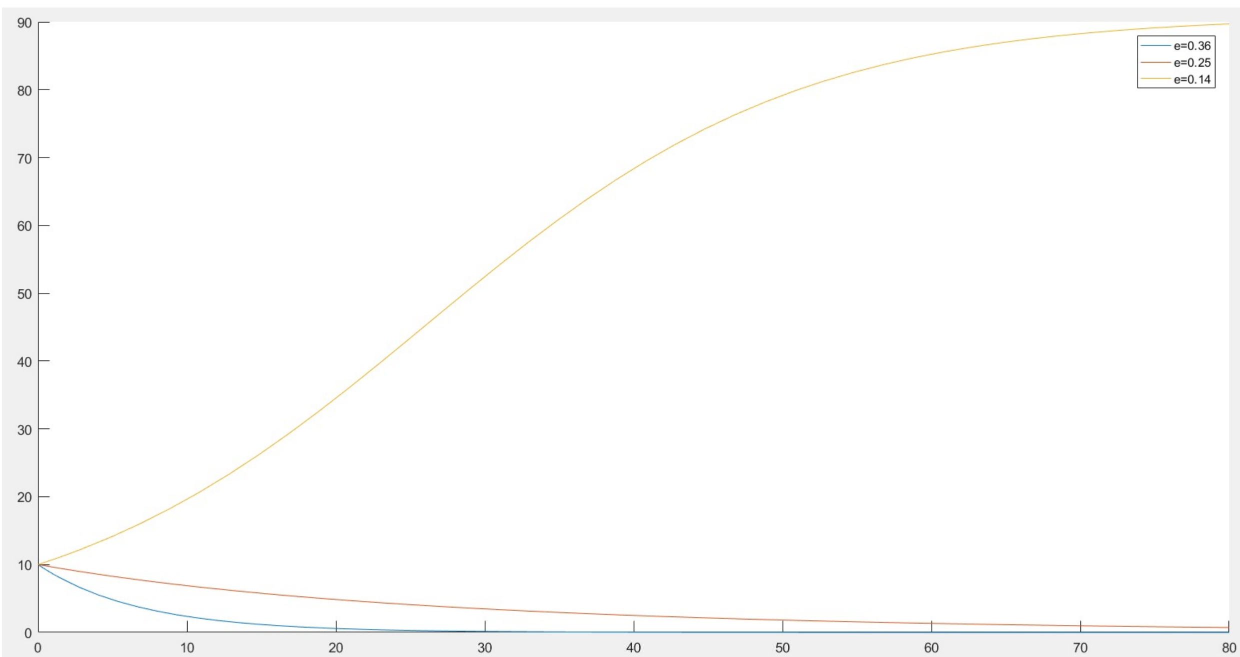


Figure 1: Grafik A

Oduzimanjem mortaliteta od nataliteta, dobijamo da je prirodni priraštaj jednak 0.22. Kao što možemo da primetimo na grafiku, za vrednosti ϵ koje su veće od prirodnog priraštaja, u našem primeru $\epsilon 1$ i $\epsilon 2$, dolazi do opadanja broja pasa. U slučaju kada je $\epsilon = 0.36$ funkcija brže opada, i dostiže nulu za 16 godina. Dok za $\epsilon = 0.25$, funkcija se sporije približava nuli i dostiže je tek nakon 69 godina[1]. Ovo nam govori da ako je procenat eutanaziranih pasa veći od prirodnog priraštaja, nakon nekog vremena će doći do njihovog istrebljenja.

Ako imamo ϵ manje od prirodnog priraštaja, na početku će doći do naglog porasta broja populacije pasa, medjutim nakon nekog vremena taj broj će se stabilizovati, što znači da će šinterske službe držati broj uličnih pasa na kontrolisanom nivou, posle 100 godina na ulici će biti 90 pasa u primeru za $\epsilon = 0.14$. U opštem slučaju, kada razmatramo različite vrednosti za ϵ imamo 3 različite mogućnosti:

1.

2. Epsilon veće od prirodnog priraštaja: U ovom slučaju, procenat eutanaziranih pasa je veći od prirodnog priraštaja, što znači da se broj pasa smanjuje tokom vremena. U dužem periodu, broj uličnih pasa bi težio ka nuli, jer se populacija smanjuje brže nego što se obnavlja. U zavisnosti od epsilona broj pasa bi se smanjivao različitim brzinama(što je veće epsilon, broj se brže smanjuje).

3. Epsilon jednako prirodnom priraštaja: U ovom slučaju, procenat eutanaziranih pasa jednak je prirodnom priraštaja, tako da bi broj pasa bio konstantan svo vreme.

4. Epsilon manje od prirodnog priraštaja: U ovom slučaju, procenat eutanaziranih pasa je manji od prirodnog priraštaja, što znači da se broj pasa povećava tokom vremena. U ovom scenariju, populacija pasa težili da raste i dostigne odredjenu stabilnost. U zavisnosti od epsilona broj pasa bi se povećavao različitim brzinama(što je manje epsilon, broj se brže povećava).

Ako ne bismo imali eutanaziranje, model bi se ponašao po Verhulstovom modelu, i nakon nekog vremena kapacitet staništa bi bio popunjen.

3 Prošireni model

Ako našem početnom modelu dodamo napuštene pse, pod pretpostavkom da svake godine A napuštenih pasa (po km^2) postaju ulični, dobićemo novi model.

$$\frac{dN}{dt} = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right) - \epsilon N + A \tag{3}$$

Ovaj model ima za cilj da istraži kako će se promene u populaciji odvijati kada dodamo faktor A.

[1]Ovu informaciju smo dobili detektovanjem kada vrednost niza prvi put ispunjava uslov zaustavljanja, odnosno kada je y ¡ 1

3.1 Rešenje

1.
$$\frac{dN}{dt} = -\frac{r}{K}N^2 + (r-\epsilon)N + A \tag{4}$$

2.**Radi lakšeg računanja uvodimo smene, a zatim razdvajamo promenljive**
$a = \frac{r}{k}$
$b = r - \epsilon$

$$\frac{dN}{-aN^2 + bN + A} = dx \tag{5}$$

3.**Radimo integral leve strane**

$$-\frac{1}{a}\int \frac{1}{N^2 - 2y\frac{b}{2a} + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} - \frac{A}{a}}dN$$

4.**Uvodimo smene:**
$p^2 = \frac{b^2+4aA}{4a^2}$
$z = N - \frac{b}{2a}$
$dz = dN$

$$-\frac{1}{a}\int \frac{dz}{z^2 - p^2} = -\frac{1}{2ap}\ln\left|\frac{z-p}{z+p}\right| = -\frac{1}{2ap}\ln\left|\frac{N-\frac{b}{2a}-p}{N-\frac{b}{2a}+p}\right|$$

5.**Integracijom levog i desnog izraza iz 2. koraka dobijamo:**

$$-\frac{1}{2ap}\ln\left|\frac{N-\frac{b}{2a}-p}{N-\frac{b}{2a}+p}\right| = t + C$$

6.**Tražimo opšte rešenje za N**

$$\left|\frac{N-\frac{b}{2a}-p}{N-\frac{b}{2a}+p}\right| = e^{-2apt} * e^{-2apc}$$

$D = (+/-)e^{-2apc}$
7.**Opšte rešenje za N:**

$$N = \frac{b}{2a} + \frac{p + Dpe^{-2apt}}{1 - De^{-2apt}}$$

8. $\mathbf{t = 0}$

$$N = \frac{b}{2a} + \frac{p + Dp}{1 - D}$$

9.**Rešenje za D**

$$D = \frac{2aN0 - b - 2ap}{2a - b + 2aN0}$$

10.**Ubacivanjem D u opšte rešenje:**

$$N = \frac{b}{2a} + \frac{p(1 + \frac{2aN0-b-2ap}{2a-b+2aN0}e^{-2apt})}{1 - \frac{2aN0-b-2ap}{2a-b+2aN0}e^{-2apt}}$$

Gde je: $a = \frac{r}{k}$
$b = r - \epsilon$
$p = \sqrt{\frac{b^2+4aA}{4a^2}}$

Ponašanje ovog modela zavisiće od izbora vrednosti za konstantu A, kao i za vrednosti parametra ϵ.
Mi ćemo iskoristiti vrednosti ϵ iz prethodnog poglavlja, kao i period posmatranja od 100 godina.

3.2 Grafik za A = 2

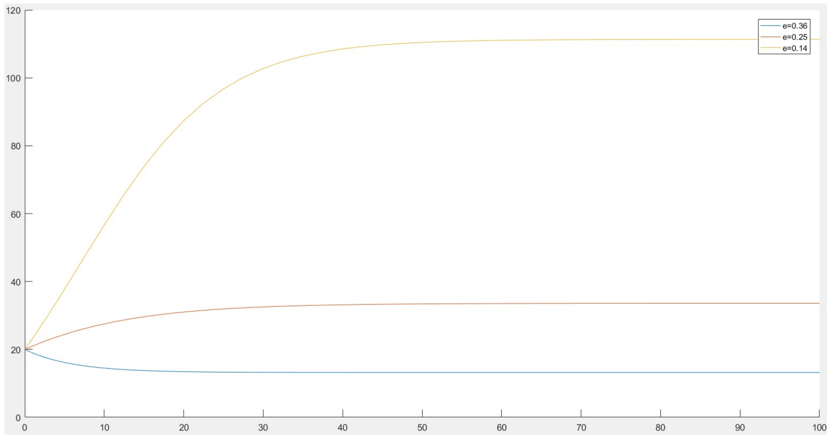


Figure 2: A = 2

Sa dodatkom A = 2 koji predstavlja broj napuštenih pasa koji postaju ulični psi svake godine, po jedinici površine, očekivano je da će broj pasa biti veći nego u prethodnom modelu. Primećujemo da će za vrednost $\epsilon = 0.36$ čak doći i do smanjivanja populacije, ali neće doći do potpunog istrebljenja. Zbog konstantnog priliva novih napuštenih pasa, njihov broj će se stabilizovati, pa će nakon 100 godina za $\epsilon = 0.36$, $\epsilon = 0.25$, $\epsilon = 0.14$, redom iznositi 13, 33 i 111.

3.3 Grafik za A = 10

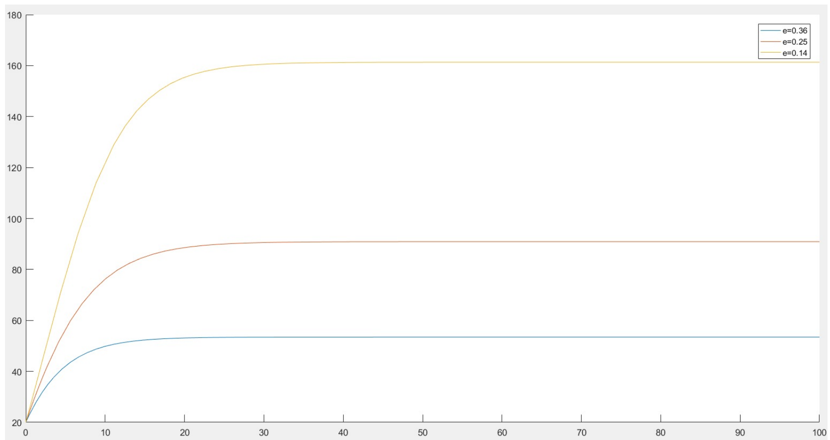


Figure 3: A = 10

Kada se vrednost A poveća na 10, što znači da svake godine 10 novih pasa postaju uličnim primetićemo da se broj uličnih pasa znatno povećava u odnosu na prethodne scenarije. To je očekivano, jer dodatni napušteni psi povećavaju populaciju i doprinose njenom bržem rastu. Medjutim, s obzirom na granični kapacitet staništa i procenat eutanazije, koji sprečavaju beskonačan rast ponovo će doći do stabilizacije.
U ovom slučaju nakon 100 godina za $\epsilon = 0.36$, $\epsilon = 0.25$, $\epsilon = 0.14$, broj pasa na ulicama će redom iznositi 53, 90 i 161.

U opštem slučaju, kada razmatramo različite vrednosti za ϵ i različite vrednosti za A(broj napustenih pasa koji postanu ulični) mozes se desiti sledece:

1. Ako su prirodni priraštaj i priliv napuštenih pasa u zbiru veci od stope eutanazije, populacija ce imati tendenciju rasta. Veličina populacije će se povećavati s vremenom, dostići će neku stabilnu veličinu i ostati na toj njoj dugoročno.

2. Ako je stopa eutanazije veca od prirodnog priraštaja i priliva napuštenih pasa(u zbiru) veličina populacije će se smanjivati tokom vremena. Populacija će težiti prema smanjenju, a na kraju će se približiti nuli ili nekoj stabilnoj veličini bliskoj nuli.

Važno je napomenuti da asimptotsko ponašanje zavisi o konkretnim vrednostima parametara (prirodni priraštaj, priliv novih pasa, stopa eutanazije). Promena ovih parametara može rezultirati različitim ishodima u pogledu rasta populacije, stabilnosti ili smanjenja.

4 Zaključak

U ovom seminarskom radu istražen je logistički model promene broja uličnih pasa i i njihovo suzbijanje šinterima, uz granicu kapaciteta staništa od 250 pasa po km2. Analiza pokazuje da se suzbijanjem populacije uličnih pasa putem šinterske službe može kontrolisati broj pasa. Uključivanje pasa koji postaju ulični psi predstavlja izazov za dugoročno rešavanje problema prenaseljenosti.
Možemo da zaključimo da ovo istraživanje pokazuje da je suzbijanje populacije uličnih pasa kompleksan problem koji zahteva kompletan pristup.

5 Ograničenja

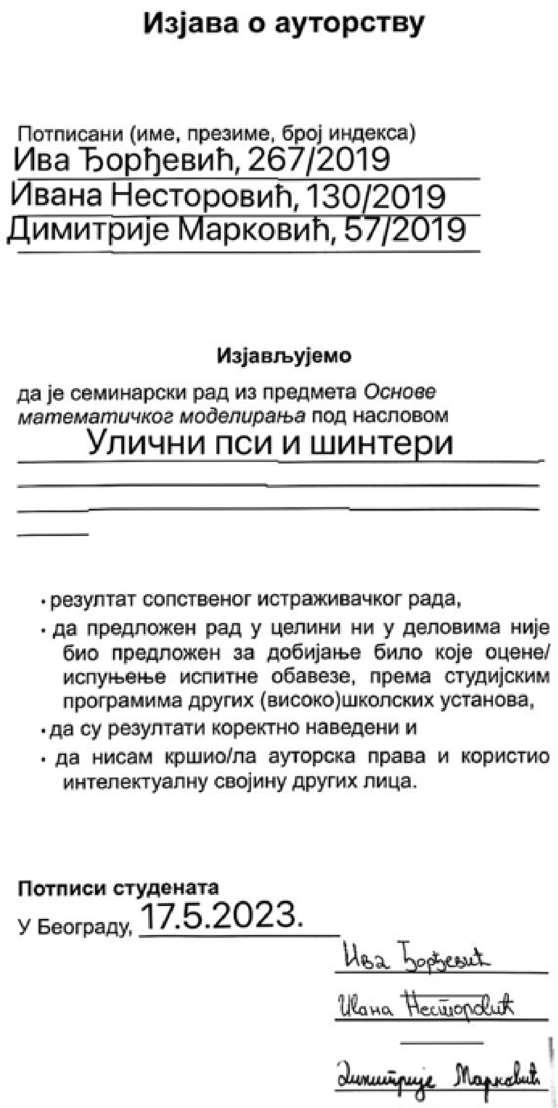
Jedno ograničenje naših modela je da oni pretpostavljaju konstantan kapacitet staništa i priraštaja tokom vremena. U stvarnosti, ovi faktori mogu biti pod uticajem raznih socijalnih i faktora sredine koji se mogu menjati vremenom kao sto su promene u staništu, količina i dostupnost hrane i vode i uticaj čoveka.
Još jedno ograničenje je to što modeli ne uzimaju u obzir genetičku raznolikost populacije, što može uticati na njenu prilagodljivost i otpornost na stresore iz okoline. Ovo je posebno relevantno za populacije uličnih pasa, koji mogu biti izloženi gladovanju i smanjenoj genetičkoj raznovrsnosti.

6 Budući rad

Budući rad bi mogao obuhvatiti usavršavanje modela kako bi se bolje uzeli u obzir varijabilnost nosivosti i stope rasta, kao i genetska raznolikost populacije. To bi moglo uključivati prikupljanje više podataka o činiocima koji utiču na ove varijable i razvijanje složenijih modela koji mogu uhvatiti njihovu dinamiku tokom vremena.
Druga mogućnost za budući rad je istraživanje alternativnih strategija upravljanja koje uzimaju u obzir društvene i etičke aspekte upravljanja populacijama napuštenih pasa. To bi moglo uključivati više pristupa utemeljenih na zajednici koji uključuju edukaciju i saradnju, kao i programe kastracije i sterilizacije pasa radi smanjenja njihove veličine populacije na human i održiv način.
Problem pasa lutalica mogao bi da se reši i udomljavanjam postojećih pasa lutalica i smanjivanjem broja napuštanja pasa.

7 Literatura

- M.Dražić, Matematičko modeliranje, Univerzitet u Beogradu Matematički fakultet
- Materijali sa časa



Изјава о ауторству

Потписани (име, презиме, број индекса)
Ива Ђорђевић, 267/2019
Ивана Несторовић, 130/2019
Димитрије Марковић, 57/2019

Изјављујемо

да је семинарски рад из предмета *Основе математичког моделирања* под насловом
Улични пси и шинтери

- резултат сопственог истраживачког рада,
- да предложен рад у целини ни у деловима није био предложен за добијање било које оцене/испуњење испитне обавезе, према студијским програмима других (високо)школских установа,
- да су резултати коректно наведени и
- да нисам кршио/ла ауторска права и користио интелектуалну својину других лица.

Потписи студената
У Београду, 17.5.2023.

Ива Ђорђевић
Ивана Несторовић
Димитрије Марковић

Figure 4: Izjava o autorstvu.