

Αριθμητική Ανάλυση - 2^η Υποχρεωτική Εργασία

Δημήτριος Αθανασιάδης - 3724

Άσκηση 5

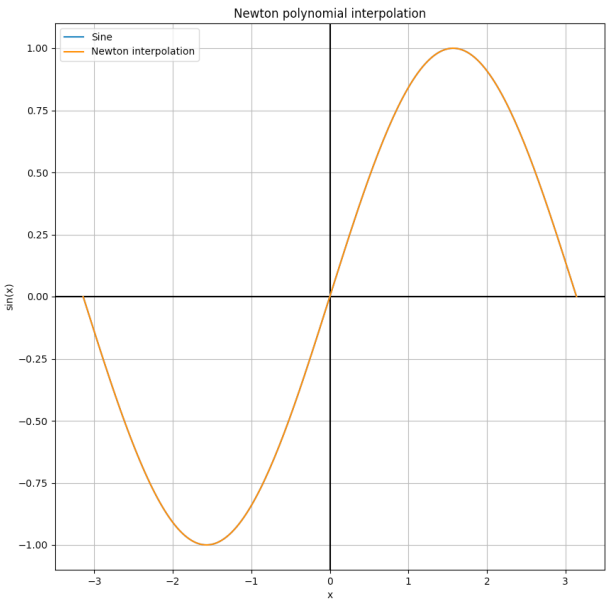
Στην άσκηση 5, υλοποιήθηκαν σε python τρεις διαφορετικές συναρτήσεις, οι οποίες προσεγγίζουν το ημίτονο με: α) πολυωνυμική προσέγγιση, β) splines, γ) μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων. Για τη δημιουργία των συναρτήσεων, χρησιμοποιήθηκαν τα εξής 10 ομοιόμορφα κατανεμημένα σημεία τα οποία βρίσκονται στο $[-\pi, \pi]$:

x	y
-3.14159265	-1.2246467991473532e-16
-2.44346095	-0.6427876096865395
-1.74532925	-0.984807753012208
-1.04719755	-0.8660254037844387
-0.34906585	-0.34202014332566877
0.34906585	0.34202014332566877
1.04719755	0.8660254037844385
1.74532925	0.9848077530122081
2.44346095	0.6427876096865395
3.14159265	1.2246467991473532e-16

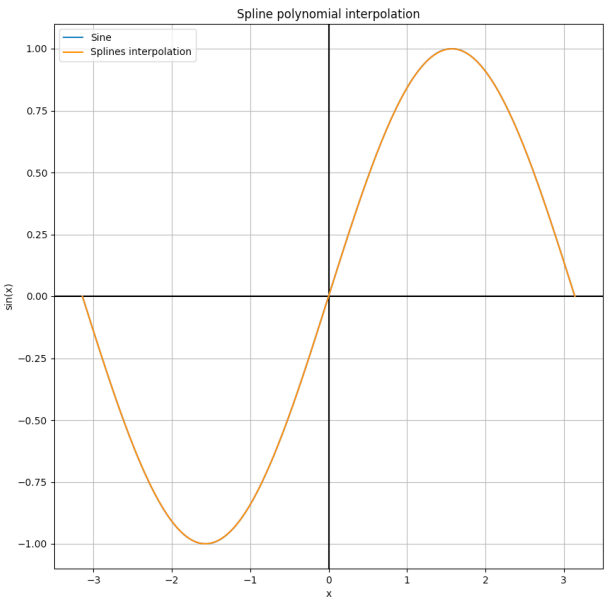
Στη πολυωνυμική προσέγγιση, χρησιμοποιήθηκε η μέθοδος Newton, η οποία για τα 10 σημεία που δόθηκαν, παράγει ένα πολυώνυμο 9^{ου} βαθμού. Για τη δεύτερη προσέγγιση με splines, χρησιμοποιήθηκαν splines 3^{ου} βαθμού (cubic splines). Τέλος, για την μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων χρησιμοποιήθηκε ένα πολυώνυμο 10^{ου} βαθμού.

Τρέχοντας το script “askisi5.py” (με python3) εμφανίζονται διαδοχικά τα 4 παρακάτω διαγράμματα, από τα οποία τα πρώτα τρία είναι οι γραφικές παραστάσεις των προσεγγίσεων, ενώ το τελευταίο συγκρίνει τα σφάλματα των διαφορετικών μεθόδων. Επιπλέον, εμφανίζονται πληροφορίες σχετικά με τα σφάλματα της κάθε μεθόδου, όπως ελάχιστο και μέγιστο σφάλμα και το Root Mean Squared Error (RMSE) που θα χρησιμοποιηθεί παρακάτω για να συγκρίνουμε την ακρίβεια των μεθόδων.

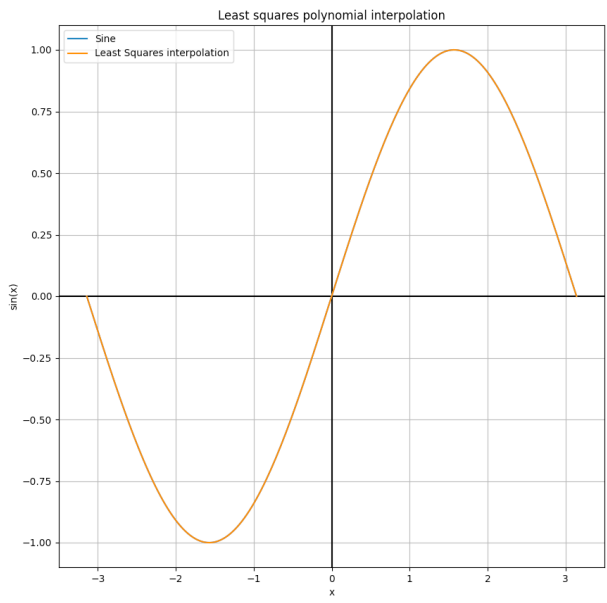
Πολυωνυμική προσέγγιση:



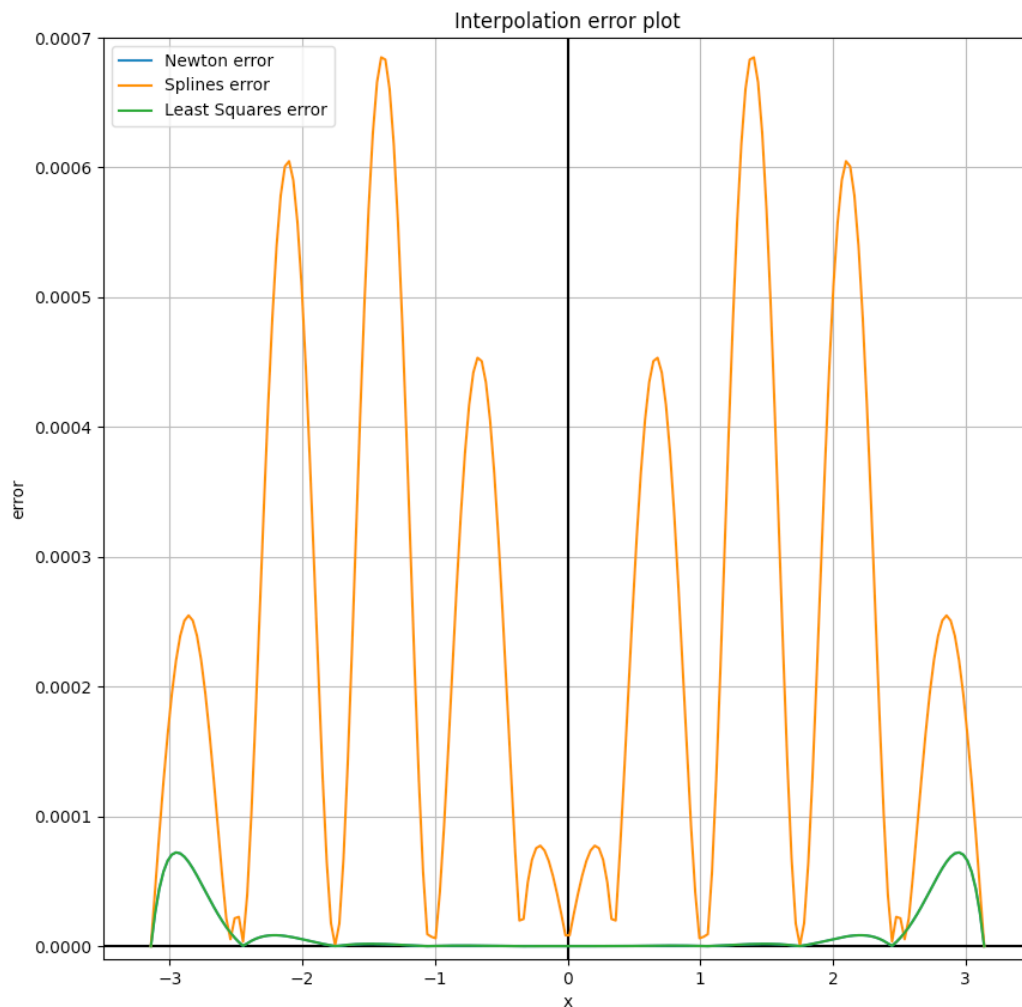
Προσέγγιση με splines:



Προσέγγιση με μέθοδο
ελαχίστων τετραγώνων:



Διάγραμμα σφαλμάτων:



```
$ python3 askisi5.py
Newton method errors:
Min error:0.0
Max error:7.222558022343395e-05
Newton RMSE: 2.2268335781934217e-05

Spline method errors:
Min error:0.0
Max error:0.0006848621257224963
Splines RMSE: 0.00032050904311424174

Least squares method errors:
Min error:2.9386895431969836e-16
Max error:7.222557516234351e-05
Least squares RMSE: 2.226833403697536e-05
```

Παρατηρώντας το διάγραμμα των σφαλμάτων και συγκρίνοντας το RMSE της κάθε μεθόδου, συμπεραίνουμε πως η μέθοδος ελαχίστων τετραγώνων είναι αυτή που προσεγγίζει το ημίτονο με τη μεγαλύτερη ακρίβεια. Πολύ κοντά στην μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων βρίσκεται η πολυωνυμική μέθοδος Newton, ενώ τα κυβικά splines είναι η μέθοδος με την μεγαλύτερη απόκλιση.

Άσκηση 6

Στην άσκηση 6, υλοποιήθηκαν σε python δύο διαφορετικές συναρτήσεις, οι οποίες υπολογίζουν το ολοκλήρωμα του ημιτόνου και το σφάλμα προσέγγισης με τις μεθόδους: α) Simpson, β) τραπεζίου. Για τον υπολογισμό χρησιμοποιήθηκαν τα εξής 11 ομοιόμορφα κατανομημένα σημεία τα οποία βρίσκονται στο $[0, \pi/2]$:

x
0
0.15707963
0.31415927
0.4712389
0.62831853
0.78539816
0.9424778
1.09955743
1.25663706
1.41371669
1.57079633

Παρακάτω βλέπουμε το output του script “askisi6.py” (python3).

```
$ python3 askisi6.py
Actual intergration value: 0.9999999999999999

Intergration with Simpson method: 1.0000033922209004
Simpson method theoretical error: 5.312841749744469e-06
Simpson method actual error: 3.392220900511056e-06

Intergration with Trapezoid method: 0.9979429863543572
Trapezoid method theoretical error: 0.0032298204875312307
Trapezoid method actual error: 0.0020570136456427024
```

Άσκηση 7

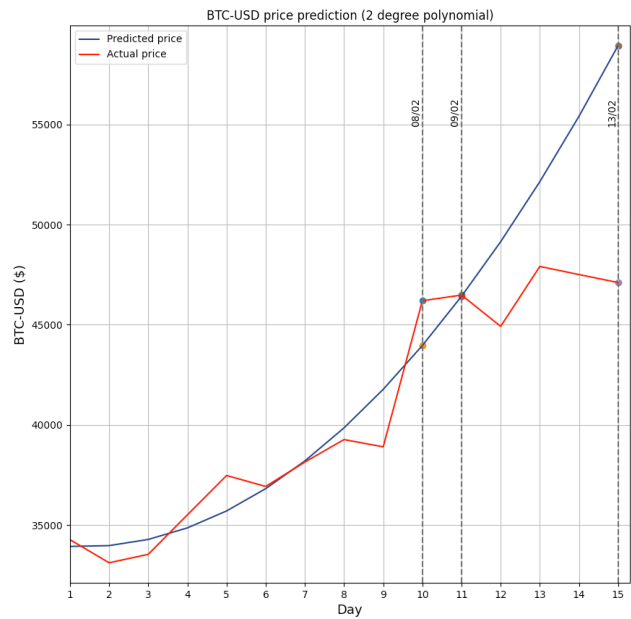
Για την άσκηση 7, επιλέχθηκαν οι ισοτιμίες των κρυπτονομισμάτων Bitcoin (BTC-USD) και Ethereum (ETH-USD), γύρω από την ημερομηνία 08/02/2021. Οι τιμές κλεισίματος που χρησιμοποιήθηκαν για τις 10 προηγούμενες συνεδριάσεις είναι:

Ημερομηνία	Τιμή κλεισίματος
30/01/2021	34269.52
31/01/2021	33114.36
01/02/2021	33537.18
02/02/2021	35510.29
03/02/2021	37472.09
04/02/2021	36926.07
05/02/2021	38144.31
06/02/2021	39266.01
07/02/2021	38903.44
08/02/2021	46196.46

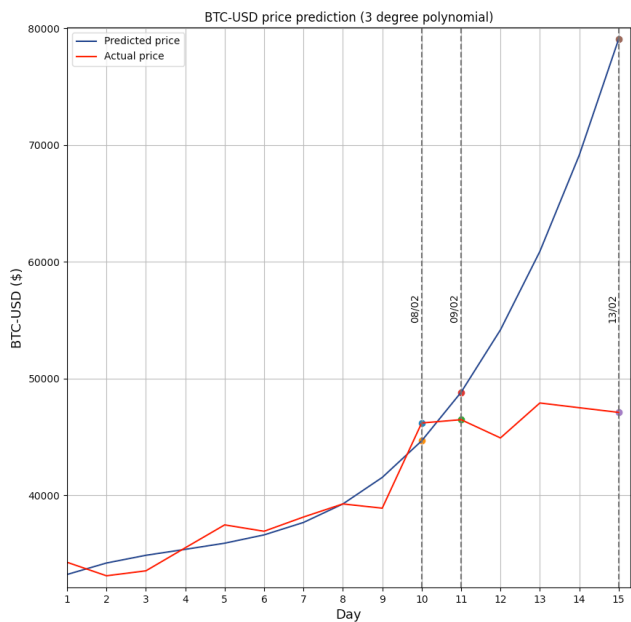
Εκτελώντας το script “askisi7.py” (με python3) εμφανίζονται διαδοχικά 6 διαγράμματα, από τα οποία τα πρώτα τρία αφορούν την πρόβλεψη της τιμής του Bitcoin, ενώ τα επόμενα τρία την πρόβλεψη της τιμής του Ethereum, για τις ημερομηνίες 09/02/2021 (επόμενη μέρα) μέχρι και 13/02/2021 (πέντε μέρες μετά). Η προσέγγιση της συνάρτησης τιμής κλεισίματος γίνεται χρησιμοποιώντας πολυώνυμα 2^{ου}, 3^{ου} και 4^{ου} βαθμού με τη μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων.

Ακολουθούν τα 6 διαγράμματα:

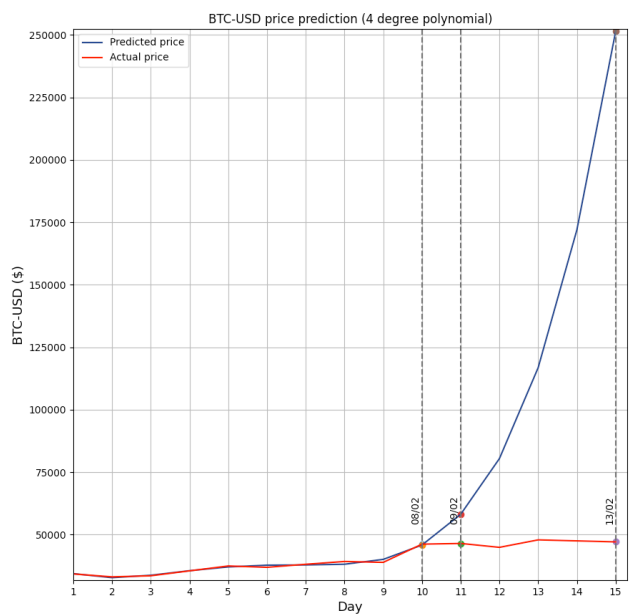
Bitcoin, προσέγγιση με πολυώνυμο
2^{ου} βαθμού:



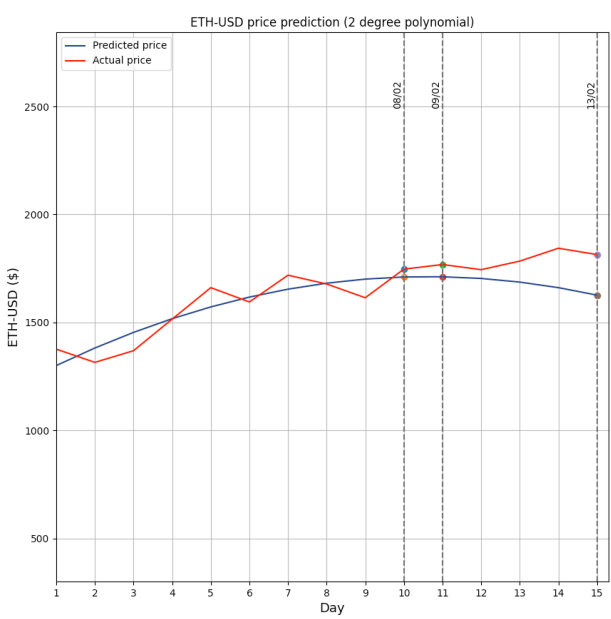
Bitcoin, προσέγγιση με πολυώνυμο
3^{ου} βαθμού:



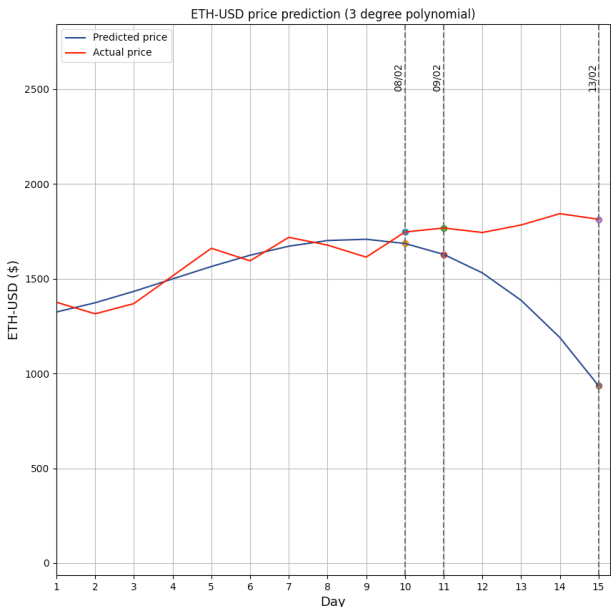
Bitcoin, προσέγγιση με πολυώνυμο
4^{ου} βαθμού:



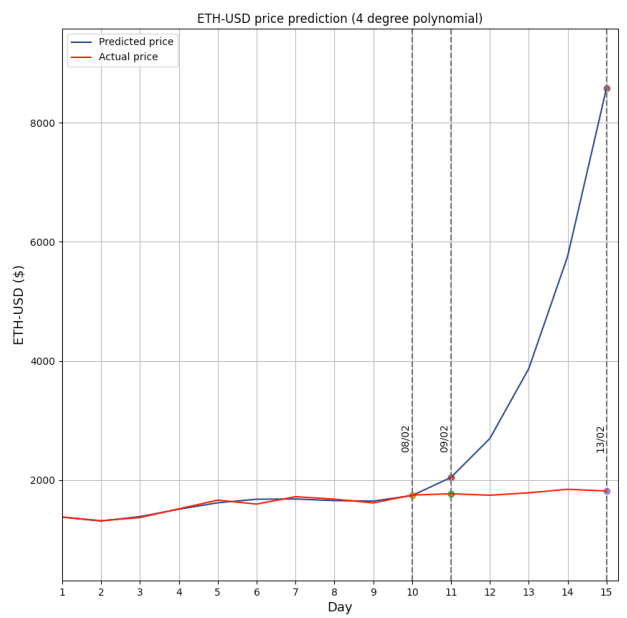
Ethereum, προσέγγιση με
πολυώνυμο 2^{ου} βαθμού:



Ethereum, προσέγγιση με
πολυώνυμο 3^{ου} βαθμού:



Ethereum, προσέγγιση με
πολυώνυμο 4^{ου} βαθμού:



Bitcoin (BTC-USD)

Συγκρίνοντας τα αποτελέσματα, παρατηρούμε πως η προσέγγιση χρησιμοποιώντας πολυώνυμο 2^{ου} βαθμού είναι αυτή που βρίσκεται πιο κοντά στις πραγματικές τιμές. Ακολουθεί πίνακας με τα συγκεντρωτικά αποτελέσματα για τις τιμές του Bitcoin για τις πέντε μέρες (08/02-13/02):

	08/02/2021	09/02/2021	10/02/2021	11/02/2021	12/02/2021	13/02/2021
Πραγματική τιμή κλεισίματος	46196.46	46481.11	44918.18	47909.33	47504.85	47105.52
Πρόβλεψη (πολυώνυμο 2 ^{ου} βαθμού)	43960.86	46418.83	49145.53	52140.95	55405.10	58937.98
Πρόβλεψη (πολυώνυμο 3 ^{ου} βαθμού)	44667.09	48823.38	54173.22	60884.76	69126.16	79065.56
Πρόβλεψη (πολυώνυμο 4 ^{ου} βαθμού)	45840.69	58147.00	80448.89	116826.51	172012.03	251389.62

Ethereum (ETH-USD)

Συγκρίνοντας τα αποτελέσματα, παρατηρούμε πως η προσέγγιση χρησιμοποιώντας πολυώνυμο 2^{ου} βαθμού είναι και πάλι αυτή που βρίσκεται πιο κοντά στις πραγματικές τιμές. Ακολουθεί πίνακας με τα συγκεντρωτικά αποτελέσματα για τις τιμές του Ethereum για τις πέντε μέρες (08/02-13/02):

	08/02/2021	09/02/2021	10/02/2021	11/02/2021	12/02/2021	13/02/2021
Πραγματική τιμή κλεισίματος	1746.62	1768.04	1744.24	1783.80	1843.53	1814.11
Πρόβλεψη (πολυώνυμο 2 ^{ου} βαθμού)	1710.39	1711.40	1703.49	1686.68	1660.95	1626.32
Πρόβλεψη (πολυώνυμο 3 ^{ου} βαθμού)	1686.16	1628.89	1530.99	1386.67	1190.17	935.72
Πρόβλεψη (πολυώνυμο 4 ^{ου} βαθμού)	1738.22	2042.54	2696.72	3868.55	5754.74	8580.94