

Γραφική με Υπολογιστές

2^η Εργασία Μαθήματος 2022 - 2023

Αλεξόπουλος Δημήτριος AEM 10091

aadimitri@ece.auth.gr

Περιεχόμενα

1	Εισαγωγή: Μετασχηματισμοί και Προβολές	4
2	Υλοποίηση	5
2.1	Συνάρτηση Υπολογισμού Πίνακα Περιστροφής	5
2.2	Συνάρτηση Περιστροφής και Μετατόπισης 3Δ Σημείου	5
2.3	Συνάρτηση Αλλαγής Συστήματος Συντεταγμένων	6
2.4	Συνάρτηση Προβολής σε Pinhole Camera	6
2.5	Συνάρτηση Προβολής - Φωτογραφικός Προσανατολισμός Κάμερας	7
2.6	Συνάρτηση Απεικόνισης	8
2.7	Συνάρτηση Φωτογράφισης	8
3	Αποτελέσματα - Σχολιασμοί	10
3.1	Αρχική Θέση του Αντικειμένου	10
3.2	Μετατόπιση κατά t_1	10
3.3	Περιστροφή κατά Γωνία ϕ περί Άξονα Παράλληλο προς Διάνυσμα u	11
3.4	Μετατόπιση κατά t_2	11
	Βιβλιογραφία	13

Κατάλογος Σχημάτων

3.1	Αρχική θέση του αντικειμένου	10
3.2	Μετατόπιση αντικειμένου κατά t_1	11
3.3	Περιστροφή αντικειμένου κατά ϕ	11
3.4	Μετατόπιση αντικειμένου κατά t_2	12

1 Εισαγωγή: Μετασχηματισμοί και Προβολές

Αντικείμενο της παρούσας εργασίας είναι η εφαρμογή μετασχηματισμών και η προβολή ενός 3Δ αντικειμένου στο 2Δ επίπεδο υπό την οπτική μιας κάμερας. Το αντικείμενο ως έχει στις τρεις διαστάσεις αφορά τον φυσικό κόσμο και, προκειμένου να αποτυπωθεί στην οθόνη και να υποστεί επεξεργασία σαν εικόνα, απαιτείται να προβληθεί στις δύο διαστάσεις.

Τόσο στις 3Δ, όμως, όσο και στις 2Δ, τα αντικείμενα προσδιορίζονται μέσω των θέσεων που καταλαμβάνουν τα σημεία από τα οποία αποτελούνται στον τρισδιάστατο και το διδιάστατο χώρο αντίστοιχα. Επομένως, θα χειριστούμε τα αντικείμενα διανυσματικά και θα προχωρήσουμε την ανάλυσή μας μέσω πράξεων και τελεστών που αντιστοιχούν στις συνήθεις έννοιες της μετατόπισης, περιστροφής, προβολής διανυσμάτων.

Ο εικονικός αυτός κόσμος που δημιουργείται με την προβολή του αντικειμένου στις δύο διαστάσεις υπακούει προφανώς στην αρχή του παρατηρητή: Μέσα σε κάθε εικονικό κόσμο ο παρατηρητής - δημιουργός ή/και χρήστης - ορίζει ένα αυθαίρετο αλλά βασικό σύστημα συντεταγμένων και χρησιμοποιεί πολλά άλλα (δευτερεύοντα) γνωρίζοντας πάντα τις αντιστοιχίες τους με το βασικό. Το εν λόγω κύριο σύστημα συντεταγμένων ονομάζεται σύστημα συντεταγμένων του κόσμου (**World Coordinate System - WCS**).

Η αποτύπωση του αντικειμένου μέσα από την οπτική μιας κάμερας με συγκεκριμένο κέντρο και άξονα κατεύθυνσης στο σύστημα συντεταγμένων του κόσμου δημιουργεί την ανάγκη για την δημιουργία ενός τέτοιου δευτερεύοντος συστήματος συντεταγμένων, που έχει ως κέντρο την κάμερα κι ονομάζεται σύστημα συντεταγμένων της κάμερας (**Camera Coordinate System - CCS**). Προφανώς, εφόσον η κάμερα ανάλογα με τον φακό, την εστίαση, το πέτασμα ή τον προσανατολισμό και την θέση της, συλλαμβάνει διαφορετικό μέρος του φυσικού κόσμου, γίνεται αποκοπή του από το οπτικό πεδίο της κάμερας.

Παρακάτω, θα υλοποιήσουμε σε *python* τις βασικές συναρτήσεις που θα χρησιμοποιηθούν για την προβολή του 3Δ αντικειμένου μας στις δύο διαστάσεις και την εφαρμογή μετασχηματισμών που θα απεικονιστούν σε αυτή.

2 Υλοποίηση

Στόχος μας είναι να κατασκευάσουμε τις συναρτήσεις που θα μας επιτρέψουν την προβολή του αντικειμένου μας σε **pinhole camera**, καθώς και τις συναρτήσεις που θα το απεικονίσουν και θα το φωτογραφίσουν στο επίπεδο που ορίζει ο φακός της κάμερας. Έπειτα μπορούμε να πειραματιστούμε με μετασχηματισμούς μετατόπισης και περιστροφής του αντικειμένου μέσα από το οπτικό πεδίο της κάμερας.

2.1 Συνάρτηση Υπολογισμού Πίνακα Περιστροφής

Υλοποιούμε, αρχικά, την συνάρτηση $R = \text{rotmat}(\theta, u)$, η οποία υπολογίζει τον πίνακα περιστροφής R που αντιστοιχεί σε ωρολογιακή περιστροφή κατά γωνία θ (rads) περί του άξονα με κατεύθυνση που δίνεται από το μοναδιαίο διάνυσμα u . Έχει τα εξής ορίσματα κι εξόδους:

- θ : η γωνία περιστροφής
- u : το μοναδιαίο διάνυσμα κατεύθυνσης του άξονα περιστροφής
- R : ο πίνακας μετασχηματισμού περιστροφής

Σημειώνουμε ότι ο άξονας περιστροφής είναι ευθεία που διέρχεται από την αρχή του συστήματος συντεταγμένων (WCS). Για την εύρεση, λοιπόν, του πίνακα περιστροφής χρησιμοποιούμε τον τύπο του *Rodrigues* με διάνυσμα περιστροφής που περνάει από την αρχή του συστήματος συντεταγμένων. Σύμφωνα με αυτόν:

$$R = I + \sin(\theta)K + (1 - \cos(\theta))K^2 \quad (2.1)$$

όπου I είναι ο μοναδιαίος πίνακας διάστασης 3 και K είναι ο skew-symmetric matrix που ορίζεται ως:

$$K = \begin{bmatrix} 0 & -u_z & u_y \\ u_z & 0 & -u_x \\ -u_y & u_x & 0 \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

με u_x, u_y, u_z να είναι οι συντεταγμένες του μοναδιαίου διανύσματος u .

2.2 Συνάρτηση Περιστροφής και Μετατόπισης 3Δ Σημείου

Κατασκευάζουμε, στη συνέχεια, την συνάρτηση $cq = \text{rotate_translate}(cp, \theta, u, A, t)$, η οποία ανάλογα με τα ορίσματά της πραγματοποιεί τον *affine* μετασχηματισμό της μετατόπισης ή/και της περιστροφής στις τρεις διαστάσεις. Τα ορίσματα αυτά και οι έξοδοί της είναι τα παρακάτω:

- *cp*: το σημείο ή το σύνολο των σημείων του 3Δ χώρου που θα υποστεί τον μετασχηματισμό
- *theta*: η γωνία περιστροφής
- *u*: το μοναδιαίο διάνυσμα κατεύθυνσης του άξονα περιστροφής
- *A*: το σημείο από το οποίο διέρχεται ο άξονας περιστροφής
- *t*: το διάνυσμα μετατόπισης
- *cq*: το μετασχηματισμένο σημείο ή σύνολο σημείων

Η συνάρτηση αυτή λειτουργεί τόσο για είσοδο ενός σημείου, αλλά και για είσοδο ενός πίνακα σημείων στον 3Δ χώρο. Μας επιτρέπει, έτσι, να μετασχηματίσουμε έναν πίνακα με τις συντεταγμένες των σημείων που αποτελούν το αντικείμενο των 3Δ, έτσι ώστε να το μετατοπίσουμε/περιστρέψουμε πριν από το *rendering* του.

2.3 Συνάρτηση Αλλαγής Συστήματος Συντεταγμένων

Υλοποιούμε την βοηθητική συνάρτηση $dp = change_coordinate_system(cp, R, c0)$, η οποία αλλάζει τις συντεταγμένες ενός σημείου ή ενός συνόλου σημείων ορίζοντάς τα ως προς ένα άλλο σύστημα συντεταγμένων που μπορεί να είναι μετατοπισμένο ή/και περιστραμμένο σε σχέση με το αρχικό (WCS). Τα ορίσματα και οι έξοδοι της συνάρτησης είναι τα εξής:

- *cp*: το σημείο ή το σύνολο των σημείων του 3Δ χώρου όσον αφορά το παλιό σύστημα συντεταγμένων
- *R*: ο πίνακας περιστροφής του συστήματος συντεταγμένων
- *c0*: το διάνυσμα μετατόπισης της αρχής του συστήματος συντεταγμένων
- *dp*: το σημείο ή το σύνολο των σημείων του 3Δ χώρου όσον αφορά το νέο μετασχηματισμένο σύστημα συντεταγμένων

Η συνάρτηση αυτή λειτουργεί, επίσης, τόσο για είσοδο ενός σημείου, αλλά και για είσοδο ενός πίνακα σημείων στον 3Δ χώρο. Θα μας επιτρέψει να ορίσουμε τα σημεία του αντικειμένου ως προς το σύστημα συντεταγμένων της κάμερας (CCS).

2.4 Συνάρτηση Προβολής σε **Pinhole Camera**

Υλοποιούμε την συνάρτηση $p2d, depth = pin_hole(f, cv, cx, cy, cz, p3d)$, η οποία παράγει την προβολή του αντικειμένου στο επίπεδο από την οπτική μιας προοπτικής κάμερας. Έχει τα παρακάτω ορίσματα κι εξόδους:

- *f*: η απόσταση του πετάσματος από το κέντρο (μετρημένη στις μονάδες που χρησιμοποιεί το σύστημα συντεταγμένων της κάμερας)

- *cn*: οι συντεταγμένες του διανύσματος μετατόπισης του κέντρου της κάμερας ως προς το *WCS*
- *cx,cy,cz*: οι συντεταγμένες των μοναδιαίων διανυσμάτων που ορίζουν το σύστημα συντεταγμένων της κάμερας ως προς το *WCS*
- *p3d*: το σύνολο των σημείων που ορίζουν το αντικείμενο στις τρεις διαστάσεις
- *p2d*: το σύνολο των σημείων που ορίζουν το αντικείμενο στην προβολή του στις δύο διαστάσεις
- *depth*: το βάθος κάθε σημείου πριν την προβολή του στις δύο διαστάσεις

Η συνάρτηση υπολογίζει, αρχικά, τον πίνακα στροφής *R* του συστήματος συντεταγμένων της κάμερας ως προς το *WCS* με την βοήθεια των συντεταγμένων *cx,cy,cz*. Υπολογίζει, ακόμη, την μετατόπιση της αρχής του νέου συστήματος συντεταγμένων ως προς το αρχικό και έπειτα μετασχηματίζει τις συντεταγμένες των σημείων του αντικειμένου στον 3Δ χώρο ορίζοντάς τις ως προς το σύστημα συντεταγμένων της κάμερας καλώντας την συνάρτηση *change_coordinate_system()* που ορίσαμε παραπάνω.

Στη συνέχεια παράγει την προβολή των τρισδιάστατων σημείων του πίνακα *p3d* πάνω στο επίπεδο από την οπτική της κάμερας και σύμφωνα με την εστιακή της απόσταση. Επιστρέφει, λοιπόν, τον πίνακα *p2d* με τις προβολές των σημείων του αντικειμένου, κι έναν πίνακα *depth* με το βάθος του κάθε αντικειμένου, έτσι ώστε να μην χαθεί αυτή η πληροφορία όταν περάσουμε από τις τρεις διαστάσεις στις δύο.

2.5 Συνάρτηση Προβολής - Φωτογραφικός Προσανατολισμός Κάμερας

Υλοποιούμε, με βάση την προηγούμενη συνάρτηση, την συνάρτηση *p2d, depth = camera_looking_at(f, cn, ck, cup, p3d)*, η οποία έχει τα εξής ορίσματα κι εξόδους:

- *f*: η απόσταση του πετάσματος από το κέντρο (μετρημένη στις μονάδες που χρησιμοποιεί το σύστημα συντεταγμένων της κάμερας)
- *cn*: οι συντεταγμένες του διανύσματος μετατόπισης του κέντρου της κάμερας ως προς το *WCS*
- *ck*: οι συντεταγμένες του σημείου στόχου της κάμερας
- *cup*: οι συντεταγμένες του μοναδιαίου διανύσματος *up vector* που δείχνει την κατεύθυνση προς τα πάνω για το σύστημα συντεταγμένων της κάμερας
- *p3d*: το σύνολο των σημείων που ορίζουν το αντικείμενο στις τρεις διαστάσεις
- *p2d*: το σύνολο των σημείων που ορίζουν το αντικείμενο στην προβολή του στις δύο διαστάσεις
- *depth*: το βάθος κάθε σημείου πριν την προβολή του στις δύο διαστάσεις

Η συνάρτηση αυτή παράγει, επίσης, την προβολή των τρισδιάστατων σημείων του πίνακα $p3d$ πάνω στο επίπεδο από την οπτική της κάμερας και σύμφωνα με την εστιακή της απόσταση. Επιστρέφει τον πίνακα $p2d$ με τις προβολές των σημείων του αντικειμένου, κι έναν πίνακα $depth$ με το βάθος του κάθε αντικειμένου.

Για να το πετύχει αυτό, η συνάρτηση καλεί την συνάρτηση `pin_hole()` αφού υπολογίσει πρώτα τις συντεταγμένες cx, cy, cz με την βοήθεια των διανυσμάτων ck και cup . Φροντίζει, ακόμη, για την κανονικοποίηση των τριών αυτών διανυσμάτων, ώστε να γίνουν μοναδιαία κι άρα κατάλληλα ορισμένα για την κλήση της συνάρτησης προβολής.

2.6 Συνάρτηση Απεικόνισης

Υλοποιούμε την συνάρτηση απεικόνισης $n2d = rasterize(p2d, rows, cols, H, W)$, η οποία έχει τα παρακάτω ορίσματα κι εξόδους:

- $p2d$: το σύνολο των σημείων που ορίζουν το αντικείμενο στην προβολή του στις δύο διαστάσεις
- $rows$: ο αριθμός των γραμμών του πίνακα $n2d$
- $cols$: ο αριθμός των στηλών του πίνακα $n2d$
- H, W : το ύψος και το πλάτος αντίστοιχα του πετάσματος της κάμερας
- $n2d$: ο πίνακας με τα διατεγμένα ζεύγη συντεταγμένων των σημείων του $p2d$ τοποθετημένα πάνω στα $pixels$ της εικόνας

Η συνάρτηση αυτή απεικονίζει τις συντεταγμένες των σημείων από το σύστημα μιας κάμερας με πέτασμα διάστασης $H \times W$ (σε ίντσες), σε ακέραιες θέσεις ($pixels$) της εικόνας, διάστασης $rows \times cols$, που παράγεται σαν έξοδος από την κάμερα κατά την φωτογράφιση.

Για να το πετύχει αυτό υπολογίζει τους συντελεστές κλιμάκωσης της κάθε διάστασης του καμβά της εικόνας και αντιστοιχίζει το κάθε ζεύγος συντεταγμένων του πίνακα $p2d$ σε κάποιο $pixel$ της εικόνας, το οποίο ορίζεται από την γραμμή και την στήλη στην οποία ανήκει κι όχι από κάποιο σύστημα συντεταγμένων.

Σημειώνουμε ότι ο άξονας της κάμερας περνάει από το κέντρο του ορθογωνίου διάστασης $H \times W$, ενώ η αρίθμηση του $rows \times cols$ πίνακα της εικόνας ξεκινά από τα κάτω προς τα πάνω και από τα αριστερά προς τα δεξιά.

2.7 Συνάρτηση Φωτογράφισης

Υλοποιούμε, τέλος, την συνάρτηση φωτογράφισης `img=render_object(p3d, faces, vcolors, H, W, rows, cols, f, cv, ck, cup)`, η οποία χρησιμοποιεί κατάλληλα τις παραπάνω συναρτήσεις για να υλοποιήσει όλο το *pipeline* της απεικόνισης ενός αντικειμένου. Έχει τα εξής ορίσματα κι εξόδους:

- $p3d$: το σύνολο των σημείων που ορίζουν το αντικείμενο στις τρεις διαστάσεις

- *faces*: ο πίνακας που περιέχει τις κορυφές των K τριγώνων. Η i -στη γραμμή του πίνακα δηλώνει τις τρεις κορυφές που σχηματίζουν το τρίγωνο (με αναφορά σε κορυφές του πίνακα $p2d$ και αρίθμηση που ξεκινά από το 0)
- *ncolors*: ο πίνακας με τα χρώματα των κορυφών. Η i -στη γραμμή του πίνακα δηλώνει τις χρωματικές συνιστώσες της αντίστοιχης κορυφής
- H, W : το ύψος και το πλάτος αντίστοιχα του πετάσματος της κάμερας
- *rows*: ο αριθμός των γραμμών του πίνακα $n2d$
- *cols*: ο αριθμός των στηλών του πίνακα $n2d$
- f : η απόσταση του πετάσματος από το κέντρο (μετρημένη στις μονάδες που χρησιμοποιεί το σύστημα συντεταγμένων της κάμερας)
- cn : οι συντεταγμένες του διανύσματος μετατόπισης του κέντρου της κάμερας ως προς το WCS
- ck : οι συντεταγμένες του σημείου στόχου της κάμερας
- cup : οι συντεταγμένες του μοναδιαίου διανύσματος **up vector** που δείχνει την κατεύθυνση προς τα πάνω για το σύστημα συντεταγμένων της κάμερας
- *img*: η εικόνα που παράγεται από το *rendering* του αντικειμένου

Η συνάρτηση αυτή υλοποιεί το *pipeline* της απεικόνισης ενός αντικειμένου. Υπολογίζει τους πίνακες *p2d*, *depth* καλώντας την συνάρτηση *camera_looking_at()* με τα κατάλληλα ορίσματα, κι έπειτα κατασκευάζει τον πίνακα συντεταγμένων *n2d* με την βοήθεια της συνάρτησης *rasterize* που αναλύσαμε παραπάνω.

Ως τελευταίο βήμα, η συνάρτηση *render_object()* καλεί τη συνάρτηση πλήρωσης *render()* της προηγούμενης εργασίας για να χρωματίσει το αντικείμενο με τη μέθοδο **Gouraud shading**, ολοκληρώνοντας, έτσι, την διαδικασία απεικόνισης ενός 3Δ αντικειμένου του φυσικού κόσμου πάνω στο επίπεδο και μέσα από την οπτική μιας προοπτικής κάμερας.

3 Αποτελέσματα - Σχολιασμοί

Παρακάτω θα παρουσιάσουμε τα ενδεικτικά αποτελέσματα της φωτογράφισης του 3Δ αντικειμένου από τον φακό της κάμερας και των μετασχηματισμών που θα του υποβάλλουμε. Οι εικόνες που παρατίθενται προκύπτουν από την εκτέλεση του αρχείου *demo.py*.

3.1 Αρχική Θέση του Αντικειμένου

Ως είσοδο χρησιμοποιούμε τον πίνακα *verts3d* που παίρνουμε από το αρχείο δεδομένων *h2.npy* και περιέχει τις τρισδιάστατες συντεταγμένες των K κορυφών των τριγώνων που αποτελούν το αντικείμενο. Όλες οι υπόλοιπες γνωστές παράμετροι της κάμερας (και διανύσματα μετατόπισης, άξονες περιστροφής κτλ.) βρίσκονται, επίσης, από το αρχείο αυτό των δεδομένων.



Σχήμα 3.1: Αρχική θέση του αντικειμένου

Παραπάνω βλέπουμε την εικόνα που προκύπτει από την φωτογράφιση του αντικειμένου στην αρχική του θέση. Καλούμε τη συνάρτηση *render_object()* με παραμέτρους κάμερας c_{org} , c_{lookat} , c_{up} και το χρωματίζουμε καλώντας τη συνάρτηση *render()* της πρώτης εργασίας με τη χρήση Gouraud shading.

3.2 Μετατόπιση κατά t_1

Καλούμε τώρα την συνάρτηση *rotate_translate()* με παραμέτρους $\phi = 0$, $A = (0,0,0)$ και u, t_1 που δίνονται από το αρχείο των δεδομένων. Η επόμενη φωτογράφιση του αντικειμένου μας δίνει το παρακάτω αποτέλεσμα:

Σχήμα 3.2: Μετατόπιση αντικειμένου κατά t_1

Παρατηρούμε ότι το αντικείμενο έχει μετατοπιστεί κατά τον άξονα z , όπως ακριβώς ορίζει το διάνυσμα $t_1 = (0, 0, -15000)$, γι' αυτό και το αντικείμενο φαίνεται σαφώς μικρότερο σε μέγεθος, αλλά δεν έχει αλλάξει η θέση του κέντρου του πάνω στο επίπεδο (x, y) της εικόνας.

3.3 Περιστροφή κατά Γωνία ϕ περί Άξονα Παράλληλο προς Διάνυσμα u

Καλούμε στη συνέχεια την συνάρτηση `rotate_translate()` με παραμέτρους $t = (0, 0, 0)$, $A = (0, 0, 0)$ και u, ϕ που δίνονται από το αρχείο των δεδομένων. Η επόμενη φωτογράφιση του αντικειμένου μας δίνει το παρακάτω αποτέλεσμα:

Σχήμα 3.3: Περιστροφή αντικειμένου κατά ϕ

Παρατηρούμε ότι το αντικείμενο έχει περιστραφεί κατά γωνία ϕ και γύρω από τον άξονα περιστροφής y , όπως ακριβώς ορίζει το διάνυσμα $u = (0, 1, 0)$. Λόγω της απεικόνισης στο επίπεδο (x, y) δεν φαίνεται έντονα η περιστροφή του αντικειμένου, παρά μόνο η μετατόπισή του προς τα αριστερά του καμβά. Ωστόσο, με μια πιο λεπτομερή ματιά αντιλαμβανόμαστε ότι το αντικείμενο έχει περιστραφεί ωρολογιακά με αποτέλεσμα να έχει έρθει πιο 'μπροστά' στην οθόνη και γι' αυτό εμφανίζεται προς τα αριστερά του πεδίου της κάμερας.

3.4 Μετατόπιση κατά t_2

Τέλος, καλούμε την συνάρτηση `rotate_translate()` με παραμέτρους $\phi = 0$, $A = (0, 0, 0)$ και u, t_2 που δίνονται από το αρχείο των δεδομένων. Η επόμενη φωτογράφιση του αντικειμένου μας δίνει το παρακάτω αποτέλεσμα:

Σχήμα 3.4: Μετατόπιση αντικειμένου κατά t_2

Παρατηρούμε ότι το αντικείμενο έχει μετατοπιστεί κατά τον άξονα y και z , όπως ακριβώς ορίζει το διάνυσμα $t_2 = (0, 500, -10000)$, γι' αυτό και το αντικείμενο φαίνεται σαφώς μικρότερο σε μέγεθος, αλλά και το κέντρο του ελαφρώς μετατοπισμένο προς τα δεξιά πάνω στο επίπεδο (x, y) της εικόνας.

Σχόλια:

- Το παραπάνω *pipeline* που αναλύθηκε λειτουργεί για κάθε αντικείμενο που ικανοποιεί τις απαιτήσεις της εκφώνησης. Επιπλέον, υποβάλλοντάς το σε άλλους δοκιμαστικούς μετασχηματισμούς συμπεριφέρεται όπως αναμένεται.
- Για όλες τις συντεταγμένες των διανυσμάτων και των σημείων που αναφέρθηκαν, χρησιμοποιήθηκαν μη-ομογενείς συντεταγμένες.

Βιβλιογραφία

[1] Σημειώσεις του μαθήματος