

# Εργασία Συστημάτων Αυτομάτου Ελέγχου ΙΙΙ

Δημήτρης Αλεξόπουλος 10091  
aadimitri@ece.auth.gr

# Περιεχόμενα

|     |  |    |
|-----|--|----|
| 1   | Εισαγωγή   | 4  |
| 2   | Μέρος Α  | 5  |
| 2.1 | Φασικό Πορτραίτο . . . . .                           | 5  |
| 2.2 | Μελέτη Ευστάθειας . . . . .                          | 6  |
| 2.3 | Προσομοίωση Συστήματος . . . . .                     | 7  |
| 2.4 | Χρόνος Ηρεμίας . . . . .                             | 10 |
| 3   | Μέρος Β  | 14 |
| 3.1 | Ελεγκτής με Μέθοδο Ολίσθησης . . . . .               | 14 |
| 3.2 | Ελεγκτής με Μέθοδο Επανασχεδίασης Lyapunov . . . . . | 17 |
| 3.3 | Προσομοίωση των Ελεγκτών . . . . .                   | 21 |
| 3.4 | Σύγκριση Υλοποιήσεων Εισόδου Ελέγχου . . . . .       | 27 |

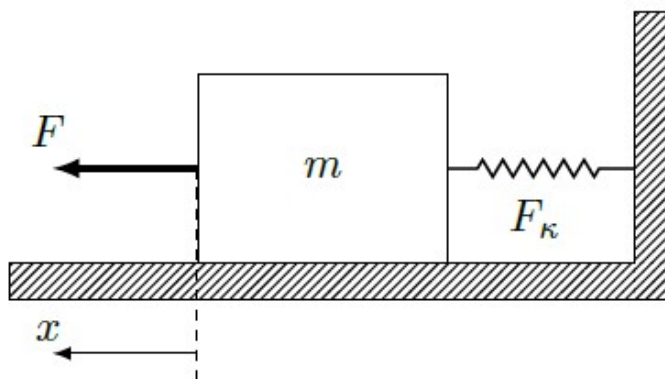
## Κατάλογος Σχημάτων

|      |   |    |
|------|---|----|
| 1.1  | Μηχανικό σύστημα . . . . .  | 4  |
| 2.1  | Φασικό Πορτραίτο . . . . .  | 6  |
| 2.2  | Θέση και Ταχύτητα συναρτήσει του χρόνου για $(x_0, \dot{x}_0) = (-5, 0)$ . . . . .              | 8  |
| 2.3  | Απεικόνιση λύσης στο φασικό επίπεδο για $(x_0, \dot{x}_0) = (-5, 0)$ . . . . .                  | 8  |
| 2.4  | Θέση και Ταχύτητα συναρτήσει του χρόνου για $(x_0, \dot{x}_0) = (3, 0)$ . . . . .               | 8  |
| 2.5  | Απεικόνιση λύσης στο φασικό επίπεδο για $(x_0, \dot{x}_0) = (3, 0)$ . . . . .                   | 8  |
| 2.6  | Θέση και Ταχύτητα συναρτήσει του χρόνου για $(x_0, \dot{x}_0) = (0, -5)$ . . . . .              | 9  |
| 2.7  | Απεικόνιση λύσης στο φασικό επίπεδο για $(x_0, \dot{x}_0) = (0, -5)$ . . . . .                  | 9  |
| 2.8  | Θέση και Ταχύτητα συναρτήσει του χρόνου για $(x_0, \dot{x}_0) = (-6, 6)$ . . . . .              | 9  |
| 2.9  | Απεικόνιση λύσης στο φασικό επίπεδο για $(x_0, \dot{x}_0) = (-6, 6)$ . . . . .                  | 9  |
| 2.10 | Θέση και Ταχύτητα συναρτήσει του χρόνου για $(x_0, \dot{x}_0) = (4, 6)$ . . . . .               | 10 |
| 2.11 | Απεικόνιση λύσης στο φασικό επίπεδο για $(x_0, \dot{x}_0) = (4, 6)$ . . . . .                   | 10 |
| 3.1  | Παρακολούθηση Τροχιάς με Μεθοδο Ολίσθησης για $(-5, 0)$ - Σενάριο 1 <sup>ο</sup> . . . . .      | 22 |
| 3.2  | Παρακολούθηση Τροχιάς με Μεθοδο Ολίσθησης για $(-5, 0)$ - Σενάριο 2 <sup>ο</sup> . . . . .      | 22 |
| 3.3  | Παρακολούθηση Τροχιάς με Μεθοδο Επαν. Lyapunov για $(-5, 0)$ - Σενάριο 1 <sup>ο</sup> . . . . . | 23 |
| 3.4  | Παρακολούθηση Τροχιάς με Μεθοδο Επαν. Lyapunov για $(-5, 0)$ - Σενάριο 2 <sup>ο</sup> . . . . . | 23 |
| 3.5  | Παρακολούθηση Τροχιάς με Μεθοδο Ολίσθησης για $(3, 0)$ - Σενάριο 1 <sup>ο</sup> . . . . .       | 23 |
| 3.6  | Παρακολούθηση Τροχιάς με Μεθοδο Ολίσθησης για $(3, 0)$ - Σενάριο 2 <sup>ο</sup> . . . . .       | 23 |
| 3.7  | Παρακολούθηση Τροχιάς με Μεθοδο Επαν. Lyapunov για $(3, 0)$ - Σενάριο 1 <sup>ο</sup> . . . . .  | 24 |
| 3.8  | Παρακολούθηση Τροχιάς με Μεθοδο Επαν. Lyapunov για $(3, 0)$ - Σενάριο 2 <sup>ο</sup> . . . . .  | 24 |
| 3.9  | Παρακολούθηση Τροχιάς με Μεθοδο Ολίσθησης για $(0, -5)$ - Σενάριο 1 <sup>ο</sup> . . . . .      | 24 |
| 3.10 | Παρακολούθηση Τροχιάς με Μεθοδο Ολίσθησης για $(0, -5)$ - Σενάριο 2 <sup>ο</sup> . . . . .      | 24 |
| 3.11 | Παρακολούθηση Τροχιάς με Μεθοδο Επαν. Lyapunov για $(0, -5)$ - Σενάριο 1 <sup>ο</sup> . . . . . | 25 |
| 3.12 | Παρακολούθηση Τροχιάς με Μεθοδο Επαν. Lyapunov για $(0, -5)$ - Σενάριο 2 <sup>ο</sup> . . . . . | 25 |
| 3.13 | Παρακολούθηση Τροχιάς με Μεθοδο Ολίσθησης για $(-6, 6)$ - Σενάριο 1 <sup>ο</sup> . . . . .      | 25 |
| 3.14 | Παρακολούθηση Τροχιάς με Μεθοδο Ολίσθησης για $(-6, 6)$ - Σενάριο 2 <sup>ο</sup> . . . . .      | 25 |
| 3.15 | Παρακολούθηση Τροχιάς με Μεθοδο Επαν. Lyapunov για $(-6, 6)$ - Σενάριο 1 <sup>ο</sup> . . . . . | 26 |
| 3.16 | Παρακολούθηση Τροχιάς με Μεθοδο Επαν. Lyapunov για $(-6, 6)$ - Σενάριο 2 <sup>ο</sup> . . . . . | 26 |
| 3.17 | Παρακολούθηση Τροχιάς με Μεθοδο Ολίσθησης για $(4, 6)$ - Σενάριο 1 <sup>ο</sup> . . . . .       | 26 |
| 3.18 | Παρακολούθηση Τροχιάς με Μεθοδο Ολίσθησης για $(4, 6)$ - Σενάριο 2 <sup>ο</sup> . . . . .       | 26 |
| 3.19 | Παρακολούθηση Τροχιάς με Μεθοδο Επαν. Lyapunov για $(4, 6)$ - Σενάριο 1 <sup>ο</sup> . . . . .  | 27 |
| 3.20 | Παρακολούθηση Τροχιάς με Μεθοδο Επαν. Lyapunov για $(4, 6)$ - Σενάριο 2 <sup>ο</sup> . . . . .  | 27 |

# 1 Εισαγωγή

Στην παρούσα εργασία θα μελετήσουμε την ευστάθεια και την συμπεριφορά ενός μηχανικού συστήματος και θα σχεδιάσουμε έναν ελεγκτή ώστε το σύστημα να παρακολουθεί μια επιθυμητή τροχιά. Στον σχεδιασμό του ελεγκτή θα ακολουθήσουμε διάφορες τεχνικές, οι οποίες θα συγκριθούν ως προς την χρηστικότητα και την αποτελεσματικότητά τους.

Το μηχανικό σύστημα που θα μελετήσουμε φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



Σχήμα 1.1: Μηχανικό σύστημα

Η εργασία χωρίζεται σε δύο μέρη. Στο πρώτο μέρος θα διερευνήσουμε την συμπεριφορά του συστήματος για διάφορες αρχικές συνθήκες και θα εξετάσουμε το σύνολο των σημείων ισορροπίας του και την ευστάθεια αυτού. Η μελέτη αυτή θα γίνει κατανοητή μέσα από προσομοιώσεις στο MATLAB, οι οποίες θα πλαισιώσουν την θεωρητική ανάλυση.

Στο δεύτερο μέρος της εργασίας, θα επιχειρήσουμε να ελέγξουμε το μηχανικό μας σύστημα με την θεωρητική σχεδίαση κι έπειτα υλοποίηση ενός ελεγκτή που θα επιτρέπει στο σύστημά μας την παρακολούθηση κάποιας επιθυμητής τροχιάς. Για την σχεδίαση του ελεγκτή θα χρησιμοποιηθούν οι τεχνικές **Sliding** και **Lyapunov Redesign**.

## 2 Μέρος Α

Στο παραπάνω σχήμα, με  $x$  ορίζουμε τη θέση του αντικειμένου, όπου για  $x = 0$  το ελατήριο βρίσκεται στο φυσικό του μήκος. Στο Μέρος Α της εργασίας θεωρούμε ότι το ελατήριο είναι γραμμικό με  $F_k = kx$ , όπου  $k$  είναι η σταθερά του ελατηρίου. Μεταξύ του αντικειμένου και του εδάφους αναπτύσσεται τριβή της μορφής  $F_{fr} = \mu F_N \text{sign}(\dot{x})$ , όπου  $F_N$  είναι η κάθετη δύναμη με το μέτρο της να είναι ίσο με  $mg$ . Με  $m$  και  $g$  συμβολίζουμε τη μάζα του αντικειμένου και την επιτάχυνση της βαρύτητας. Η παράμετρος  $\mu$  αποτελεί το συντελεστή τριβής μεταξύ του σώματος και το εδάφους. Θεωρούμε, επίσης, ότι η δύναμη  $F$  είναι μηδενική. Η συνάρτηση  $\text{sign}(\dot{x})$  ορίζεται ως:

$$\text{sign}(\dot{x}) = \begin{cases} 1, & \dot{x} > 0 \\ -1, & \dot{x} < 0 \\ \text{απροσδιόριστο}, & \dot{x} = 0 \end{cases}$$

Έτσι, η δυναμική του συστήματος περιγράφεται από την εξίσωση:

$$m\ddot{x} + \mu mg \text{sign}(\dot{x}) + kx = 0$$

### 2.1 Φασικό Πορτραίτο

Αρχικά, θα υπολογίσουμε τις τροχιές του συστήματος για  $\dot{x} > 0$  και για  $\dot{x} < 0$  και θα τις απεικονίσουμε επάνω στο φασικό επίπεδο, σχηματίζοντας έτσι το φασικό πορτραίτο του συστήματός μας. Για να το πετύχουμε αυτό, ορίζουμε δύο νέες μεταβλητές κατάστασης:

$$x_1 = x \text{ και } x_2 = \frac{\dot{x}}{\omega},$$

όπου με  $\omega$  χαρακτηρίζουμε τη συχνότητα ταλάντωσης για  $\mu = 0$ . Το σύστημά μας, λοιπόν, γράφεται τώρα:

$$\dot{x}_1 = \omega x_2 \quad (2.1)$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{\mu g}{\omega} \text{sign}(\omega x_2) - \frac{k}{\omega m} x_1 \quad (2.2)$$

με

$$\text{sign}(\omega x_2) = \begin{cases} 1, & \omega x_2 > 0 \Rightarrow x_2 > 0 \\ -1, & \omega x_2 < 0 \Rightarrow x_2 < 0 \\ \text{undefined}, & \omega x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = 0 \end{cases}$$

Για την εύρεση των τροχιών του συστήματος, θεωρούμε τις δύο περιπτώσεις:

- Αν  $\dot{x} > 0 \Rightarrow x_2 > 0$  έχουμε:

$$\frac{\frac{dx_1}{dt}}{\frac{dx_2}{dt}} = \frac{dx_1}{dx_2} = \frac{\omega x_2}{-\frac{\mu g}{\omega} - \frac{k}{\omega m} x_1} \Rightarrow (\mu g + \frac{k}{m} x_1) dx_1 = -\omega^2 x_2 dx_2 \Rightarrow \int (\mu g + \frac{k}{m} x_1) dx_1 = -\int \omega^2 x_2 dx_2 \Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{k}{m} x_1^2 + \omega^2 x_2^2 + 2\mu g x_1 - c = 0} \quad (2.3)$$

όπου  $c$  είναι η σταθερά ολοκλήρωσης.

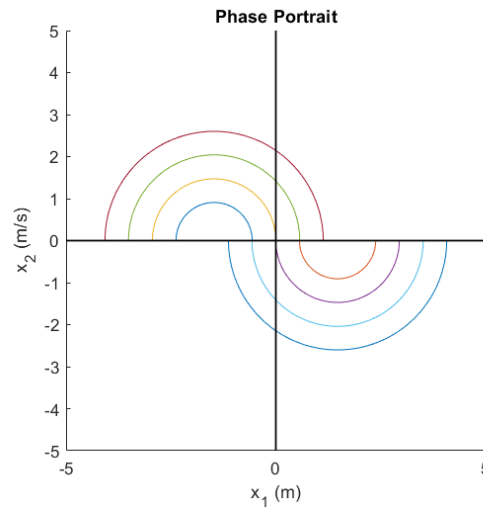
- Αν  $\dot{x} < 0 \Rightarrow x_2 < 0$  έχουμε:

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{dx_1}{dx_2} = \frac{\frac{\omega x_2}{\omega} - \frac{k}{\omega m} x_1}{\omega} \Rightarrow (\mu g - \frac{k}{m} x_1) dx_1 = \omega^2 x_2 dx_2 \Rightarrow \int (\mu g - \frac{k}{m} x_1) dx_1 = \int \omega^2 x_2 dx_2 \Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{k}{m} x_1^2 + \omega^2 x_2^2 - 2\mu g x_1 - c = 0} \quad (2.4)$$

όπου  $c$  είναι η σταθερά ολοκλήρωσης.

Κάθε μία από τις δύο τροχιές είναι ένα ημικύκλιο, στην περίπτωση που  $x_2 > 0$  στο πάνω φασικό ημιεπίπεδο, ενώ στην περίπτωση που  $x_2 < 0$  στο κάτω. Με την βοήθεια του MATLAB σχεδιάζουμε το φασικό πορτραίτο, ενδεικτικά για διάφορες τιμές της σταθεράς ολοκλήρωσης. Αυτό φαίνεται παρακάτω:



Σχήμα 2.1: Φασικό Πορτραίτο

Από την σχέση (2.1) μπορούμε να δούμε ότι για θετικό  $x_2$  το  $x_1$  αυξάνεται, ενώ για αρνητικό  $x_2$  το  $x_1$  μειώνεται. Επομένως, η φορά κίνησης πάνω στο φασικό πορτραίτο είναι ωρολογιακή τόσο στο πάνω ημιεπίπεδο, όσο και στο κάτω.

## 2.2 Μελέτη Ευστάθειας

Στο παραπάνω μηχανικό σύστημα σώματος-ελατηρίου βλέπουμε ότι η δύναμη της τριβής είναι απροσδιόριστη όταν  $\dot{x} = 0$ , δηλαδή όταν η ταχύτητα του σώματος είναι μηδενική. Αυτό συμβαίνει διότι η μηδενική ταχύτητα από μόνη της δεν είναι ικανή συνθήκη για να προσδιορίσει το μέτρο και την κατεύθυνση της τριβής, αλλά απαιτείται και η γνώση της θέσης του σώματος.

Συγκεκριμένα, εάν το σώμα βρίσκεται στιγμιαία σταματημένο σε θέση όπου η δύναμη του ελατηρίου υπερβαίνει το μέγιστο όριο της στατικής τριβής (θεωρούμε ότι αυτό ταυτίζεται με το μέτρο της τριβής ολίσθησης  $\mu mg$ ), τότε το σώμα θα συνεχίσει να κινείται και η δύναμη τριβής θα είναι τριβής ολίσθησης και αντίθετη προς την κίνηση.

Σε αντίθετη περίπτωση που η δύναμη του ελατηρίου δεν υπερβαίνει το μέγιστο όριο της στατικής τριβής, το σώμα θα ηρεμήσει και η δύναμη της τριβής θα είναι στατική και θα έχει μέτρο και κατεύθυνση ανάλογα της δύναμης του ελατηρίου στην τρέχουσα θέση του σώματος.

Για να υπολογίσουμε, λοιπόν, το σύνολο των σημείων ισορροπίας του συστήματος εκμεταλλευόμαστε την φυσική του συστήματος και την παραπάνω συνθήκη κι έχουμε:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 0 \Rightarrow \boxed{x_2 = 0} \\ \dot{x}_2 = 0 \Rightarrow \text{ισορροπεί εάν } |F_k| < F_{Nmax} \Rightarrow |kx_1| < \mu mg \Rightarrow \boxed{-\frac{\mu mg}{k} < x_1 < \frac{\mu mg}{k}} \end{cases}$$

Δηλαδή, το σύνολο ισορροπίας μπορεί να γραφεί ως  $(x_1^*, x_2^*) = ([-\frac{\mu mg}{k}, \frac{\mu mg}{k}], 0)$ .

Από τα παραπάνω, οι εξισώσεις κατάστασης του συστήματος μπορούν να εκφραστούν με την αναλυτική μορφή:

$$\dot{x}_1 = \omega x_2 \quad (2.5)$$

$$\dot{x}_2 = \begin{cases} -\frac{\mu g}{\omega} - \frac{k}{\omega m} x_1, & \text{αν } x_2 > 0 \text{ ή } (x_2 = 0 \text{ και } x_1 < -\frac{\mu mg}{k}) \\ \frac{\mu g}{\omega} - \frac{k}{\omega m} x_1, & \text{αν } x_2 < 0 \text{ ή } (x_2 = 0 \text{ και } x_1 > \frac{\mu mg}{k}) \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases} \quad (2.6)$$

Για να κρίνουμε την ευστάθεια, τώρα, του συνόλου ισορροπίας του συστήματός μας μπορούμε να παρατηρήσουμε το φασικό πορτραίτο του. Συγκεκριμένα, βλέπουμε ότι ξεκινώντας από ένα τυχαίο σημείο και ακολουθώντας την ωρολογιακή φορά, όπως αναφέραμε παραπάνω, το σύστημα μεταβαίνει σε καταστάσεις όλο και μικρότερης ενέργειας. Ακολουθώντας αυτήν την τροχιά, το σύστημα τελικά θα ισορροπήσει όταν βρεθεί πάνω στον άξονα των  $x_1$  (μηδενική ταχύτητα) και εντός του διαστήματος  $[-\frac{\mu mg}{k}, \frac{\mu mg}{k}]$  στον άξονα των  $x_2$  (μηδενική επιτάχυνση). Έτσι λοιπόν, συμπεραίνουμε ότι το σύνολο ισορροπίας του συστήματος είναι ασυμπτωτικά ευσταθές. Το συμπέρασμα αυτό συνάδει με την διαίσθησή μας, καθώς περιμένουμε από ένα σώμα που βρίσκεται σε ταλάντωση λόγω ελατηρίου πάνω σε τραχύ δάπεδο, να ισορροπήσει σε πεπερασμένο χρόνο.

## 2.3 Προσομοίωση Συστήματος

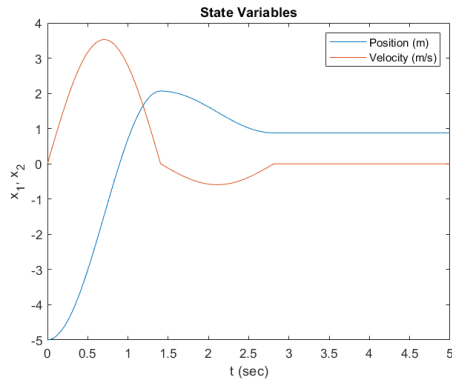
Σε αυτήν την ενότητα θα προσομοιώσουμε το σύστημά μας με την βοήθεια του **MATLAB**. Συγκεκριμένα, θα σχεδιάσουμε τα διαγράμματα θέσης και ταχύτητας του σώματος για χρονική διάρκεια 5 δευτερολέπτων και για 5 ενδεικτικές τιμές αρχικών συνθηκών ταχύτητας και θέσης. Για τις προσομοιώσεις μας θα χρησιμοποιήσουμε τις τιμές των παραμέτρων, όπως ορίζονται από τον παρακάτω πίνακα:

| Παράμετρος | Περιγραφή                | Τιμή        |
|------------|--------------------------|-------------|
| $k$        | Σταθερά Ελατηρίου        | $5N/m$      |
| $m$        | Μάζα Αντικειμένου        | $1kg$       |
| $\mu$      | Συντελεστής Τριβής       | $0.75$      |
| $g$        | Επιτάχυνση της Βαρύτητας | $9.81m/s^2$ |

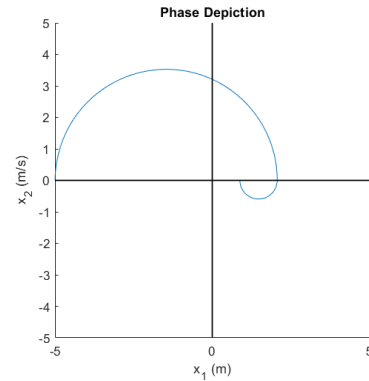
Πίνακας 2.1: Τιμές Παραμέτρων Συστήματος

### 2.3.1 Αρχική Κατάσταση $(x_0, \dot{x}_0) = (-5, 0)$

Το διάγραμμα θέσης και ταχύτητας σε συνάρτηση με το χρόνο, δεδομένων των αρχικών συνθηκών, φαίνεται παρακάτω. Δίπλα βλέπουμε την απεικόνιση της λύσης της προσομοίωσης πάνω στο φασικό επίπεδο.



Σχήμα 2.2: Θέση και Ταχύτητα συναρτήσει του χρόνου για  $(x_0, \dot{x}_0) = (-5, 0)$

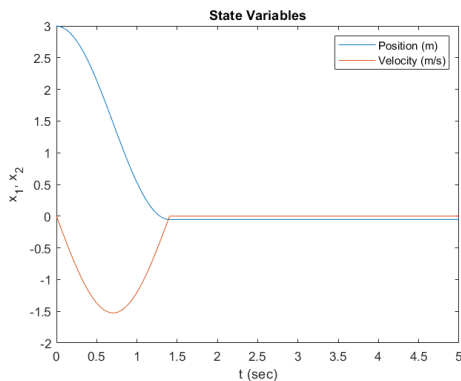


Σχήμα 2.3: Απεικόνιση λύσης στο φασικό επίπεδο για  $(x_0, \dot{x}_0) = (-5, 0)$

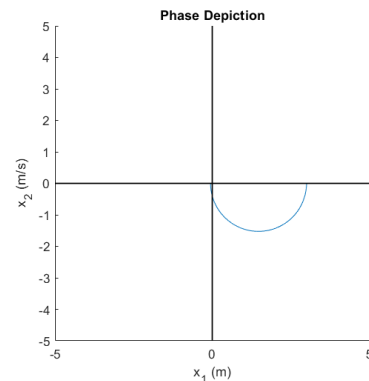
Στην φασική απεικόνιση, παρατηρούμε ότι πράγματι με την πάροδο του χρόνου η ενέργεια του συστήματος μειώνεται ακολουθώντας ωρολογιακή τροχιά, μέχρι που το σύστημα φτάνει σε ηρεμία. Ο χρόνος για να φτάσει εκεί υπολογίζεται 2.81sec.

### 2.3.2 Αρχική Κατάσταση $(x_0, \dot{x}_0) = (3, 0)$

Το διάγραμμα θέσης και ταχύτητας σε συνάρτηση με το χρόνο, δεδομένων των αρχικών συνθηκών, φαίνεται παρακάτω. Δίπλα βλέπουμε την απεικόνιση της λύσης της προσομοίωσης πάνω στο φασικό επίπεδο.



Σχήμα 2.4: Θέση και Ταχύτητα συναρτήσει του χρόνου για  $(x_0, \dot{x}_0) = (3, 0)$



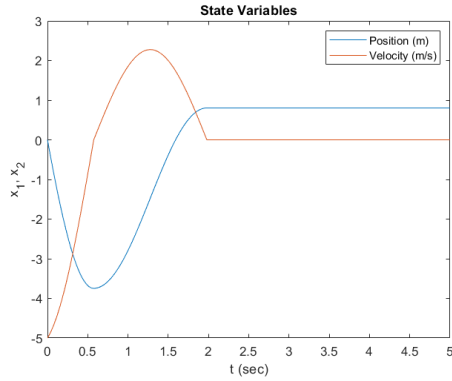
Σχήμα 2.5: Απεικόνιση λύσης στο φασικό επίπεδο για  $(x_0, \dot{x}_0) = (3, 0)$

Και πάλι στην φασική απεικόνιση, παρατηρούμε ότι πράγματι με την πάροδο του χρόνου η ενέργεια του συστήματος μειώνεται ακολουθώντας ωρολογιακή τροχιά, μέχρι που το σύστημα φτάνει σε ηρεμία. Ο χρόνος για να φτάσει εκεί υπολογίζεται 1.41sec.

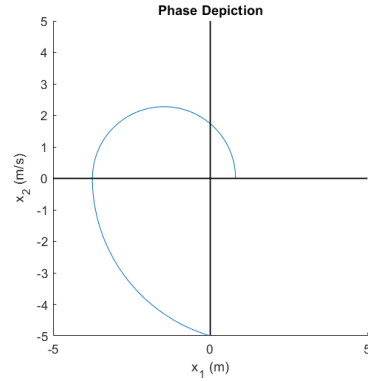


### 2.3.3 Αρχική Κατάσταση $(x_0, \dot{x}_0) = (0, -5)$

Το διάγραμμα θέσης και ταχύτητας σε συνάρτηση με το χρόνο, δεδομένων των αρχικών συνθηκών, φαίνεται παρακάτω. Δίπλα βλέπουμε την απεικόνιση της λύσης της προσομοίωσης πάνω στο φασικό επίπεδο.



Σχήμα 2.6: Θέση και Ταχύτητα συναρτήσει του χρόνου για  $(x_0, \dot{x}_0) = (0, -5)$

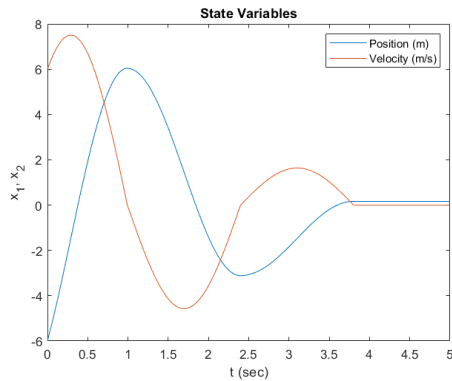


Σχήμα 2.7: Απεικόνιση λύσης στο φασικό επίπεδο για  $(x_0, \dot{x}_0) = (0, -5)$

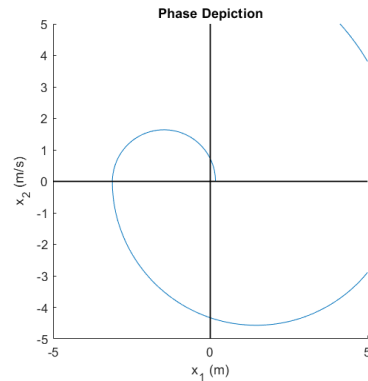
Και πάλι στην φασική απεικόνιση, παρατηρούμε ότι πράγματι με την πάροδο του χρόνου η ενέργεια του συστήματος μειώνεται ακολουθώντας ωρολογιακή τροχιά, μέχρι που το σύστημα φτάνει σε ηρεμία. Ο χρόνος για να φτάσει εκεί υπολογίζεται  $1.98\text{sec}$ .

### 2.3.4 Αρχική Κατάσταση $(x_0, \dot{x}_0) = (-6, 6)$

Το διάγραμμα θέσης και ταχύτητας σε συνάρτηση με το χρόνο, δεδομένων των αρχικών συνθηκών, φαίνεται παρακάτω. Δίπλα βλέπουμε την απεικόνιση της λύσης της προσομοίωσης πάνω στο φασικό επίπεδο.



Σχήμα 2.8: Θέση και Ταχύτητα συναρτήσει του χρόνου για  $(x_0, \dot{x}_0) = (-6, 6)$

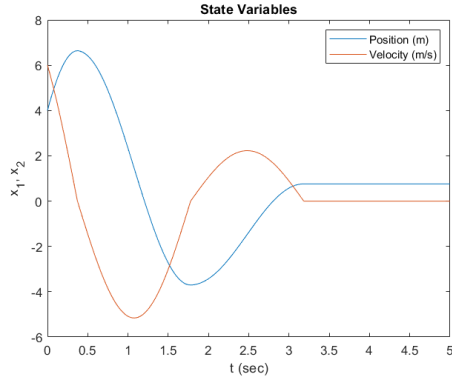


Σχήμα 2.9: Απεικόνιση λύσης στο φασικό επίπεδο για  $(x_0, \dot{x}_0) = (-6, 6)$

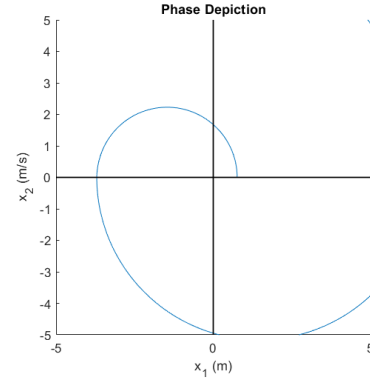
Και πάλι στην φασική απεικόνιση, παρατηρούμε ότι πράγματι με την πάροδο του χρόνου η ενέργεια του συστήματος μειώνεται ακολουθώντας ωρολογιακή τροχιά, μέχρι που το σύστημα φτάνει σε ηρεμία. Ο χρόνος για να φτάσει εκεί υπολογίζεται  $3.81\text{sec}$ .

2.3.5 Αρχική Κατάσταση  $(x_0, \dot{x}_0) = (4, 6)$ 

Το διάγραμμα θέσης και ταχύτητας σε συνάρτηση με το χρόνο, δεδομένων των αρχικών συνθηκών, φαίνεται παρακάτω. Δίπλα βλέπουμε την απεικόνιση της λύσης της προσομοίωσης πάνω στο φασικό επίπεδο.



Σχήμα 2.10: Θέση και Ταχύτητα συναρτήσει του χρόνου για  $(x_0, \dot{x}_0) = (4, 6)$



Σχήμα 2.11: Απεικόνιση λύσης στο φασικό επίπεδο για  $(x_0, \dot{x}_0) = (4, 6)$

Και πάλι στην φασική απεικόνιση, παρατηρούμε ότι πράγματι με την πάροδο του χρόνου η ενέργεια του συστήματος μειώνεται ακολουθώντας ωρολογιακή τροχιά, μέχρι που το σύστημα φτάνει σε ηρεμία. Ο χρόνος για να φτάσει εκεί υπολογίζεται  $3.19\text{sec}$ .

Από όλα τα παραπάνω φασικά διαγράμματα βλέπουμε ότι επαληθεύεται η ανάλυσή μας σχετικά με την ευστάθεια των σημείων ισορροπίας.

## 2.4 Χρόνος Ηρεμίας

Θα προτείνουμε έναν αναλυτικό τρόπο υπολογισμού του χρόνου που χρειάζεται το σύστημα για να φτάσει σε ηρεμία, με την χρήση της διαφορικής εξίσωσης του συστήματος. Διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις:

- Αν  $\dot{x}_0 > 0$ :

Η διαφορική του συστήματος γράφεται ως:

$$m\ddot{x} + \mu mg + kx = 0 \text{ με } x_0 = a, \dot{x}_0 = b \quad (2.7)$$

την οποία λύνουμε για να βρούμε την εξίσωση της μετατόπισης του σώματος:

$$x(t) = \frac{\cos(\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{m}}t)(ak + \mu mg) + b\sqrt{k}\sqrt{m}\sin(\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{m}}t) - \mu mg}{k} \quad (2.8)$$

Παραγωγίζουμε την μετατόπιση ως προς τον χρόνο, ώστε να βρούμε την εξίσωση της ταχύτητας του σώματος:

$$\dot{x}(t) = b \cos\left(\frac{\sqrt{k}t}{\sqrt{m}}\right) - \frac{\sin\left(\frac{\sqrt{k}t}{\sqrt{m}}\right)(ak + \mu mg)}{\sqrt{k}\sqrt{m}} \quad (2.9)$$

Μηδενίζουμε την ταχύτητα και βρίσκουμε τον χρόνο στον οποίο το σώμα μας ακινητοποιείται:

$$t_n = \frac{\sqrt{m}(\tan^{-1}\left(\frac{b\sqrt{k}\sqrt{m}}{ak + \mu mg}\right) + \pi n)}{\sqrt{k}} \quad (2.10)$$

Για  $n = 0$  βρίσκουμε τον χρόνο στον οποίο ακινητοποιείται για πρώτη φορά, δηλαδή στον οποίο φτάνει για πρώτη φορά σε σημείο ακροτάτου:

$$t_0 = \frac{\sqrt{m}\tan^{-1}\left(\frac{b\sqrt{k}\sqrt{m}}{ak + \mu mg}\right)}{\sqrt{k}} \quad (2.11)$$

Αντικαθιστούμε τον χρόνο αυτό στην εξίσωση μετατόπισης (2.8) και βρίσκουμε έτσι το σημείο πρώτου ακροτάτου, έστω  $x_0$ .

Βλέποντας και πάλι την αρχική διαφορική του συστήματος:

$$m\ddot{x} + \mu mg \operatorname{sign}(\dot{x}) + kx = 0$$

έχουμε την εξής λύση:

$$x(t) = \left(x_0 - \frac{(2n-1)\mu mg}{k}\right) \cos \omega_n t + \frac{\mu mg}{k} (-1)^{n+1} \quad (2.12)$$

όπου  $n$  είναι ο αριθμός των ακροτάτων και  $\omega_n$  η συχνότητα ταλάντωσης. Θέλουμε να βρούμε, τώρα, των αριθμό  $n$  των ακροτάτων μέχρι στο σώμα τελικά να επέλθει σε ηρεμία. Για να το βρούμε αυτό παίρνουμε την εξής συνθήκη:

$$F_{fr} > F_k \Rightarrow \mu mg > |kx(t)| \Rightarrow \frac{\mu mg}{k} > \left| \left(x_0 - \frac{(2n-1)\mu mg}{k}\right) \cos \omega_n t + \frac{\mu mg}{k} (-1)^{n+1} \right|$$

και τελικά βρίσκουμε τον αριθμό των πλήρων περιόδων στις οποίες κινήθηκε το σώμα ως  $N = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ . Έχουμε, έτσι, ότι  $\omega_n t = N2\pi = 2N\pi$  κι άρα:

$$t = \frac{2N\pi}{\sqrt{\frac{k}{m}}} \quad (2.13)$$

Καταλήγουμε, λοιπόν, στο ότι ο συνολικός χρόνος μέχρι το σώμα να φτάσει σε ηρεμία δίνεται με την βοήθεια των σχέσεων (2.11) και (2.13) από τον παρακάτω τύπο:

$$t_r = t_0 + \frac{2N\pi}{\sqrt{\frac{k}{m}}} \text{ (sec)} \quad (2.14)$$

όπου  $N$  είναι ο αριθμός των πλήρων περιόδων της ταλάντωσης μέχρι να επέλθει η ηρεμία στο σύστημα.

- Αν  $\dot{x}_0 < 0$ :

Ακολουθούμε ακριβώς την ίδια διαδικασία. Η διαφορική του συστήματος γράφεται ως:

$$m\ddot{x} - \mu mg + kx = 0 \text{ με } x_0 = a, \dot{x}_0 = b \quad (2.15)$$

την οποία λύνουμε για να βρούμε την εξίσωση της μετατόπισης του σώματος:

$$x(t) = \frac{\cos(\frac{\sqrt{k}t}{\sqrt{m}})(ak + \mu mg) + b\sqrt{k}\sqrt{m}\sin(\frac{\sqrt{k}t}{\sqrt{m}}) + \mu mg}{k} \quad (2.16)$$

Παραγωγίζουμε την μετατόπιση ως προς τον χρόνο, ώστε να βρούμε την εξίσωση της ταχύτητας του σώματος:

$$\dot{x}(t) = b\cos(\frac{\sqrt{k}t}{\sqrt{m}}) - \frac{\sin(\frac{\sqrt{k}t}{\sqrt{m}})(ak - \mu mg)}{\sqrt{k}\sqrt{m}} \quad (2.17)$$

Μηδενίζουμε την ταχύτητα και βρίσκουμε τον χρόνο στον οποίο το σώμα μας ακινητοποιείται:

$$t_n = \frac{\sqrt{m}(\tan^{-1}(\frac{b\sqrt{k}\sqrt{m}}{ak - \mu mg}) + \pi n)}{\sqrt{k}} \quad (2.18)$$

Για  $n = 0$  βρίσκουμε τον χρόνο στον οποίο ακινητοποιείται για πρώτη φορά, δηλαδή στον οποίο φτάνει για πρώτη φορά σε σημείο ακροτάτου:

$$t_0 = \frac{\sqrt{m}\tan^{-1}(\frac{b\sqrt{k}\sqrt{m}}{ak - \mu mg})}{\sqrt{k}} \quad (2.19)$$

Αντικαθιστούμε τον χρόνο αυτό στην εξίσωση μετατόπισης (2.16) και βρίσκουμε έτσι το σημείο πρώτου ακροτάτου, έστω  $x_0$ .

Από εδώ και στο εξής ακολουθούμε ακριβώς τα ίδια βήματα με την παραπάνω περίπτωση και βρίσκουμε εν τέλει:

$$t_r = t_0 + \frac{2N\pi}{\sqrt{\frac{k}{m}}} \text{ (sec)} \quad (2.20)$$

όπου  $N$  είναι ο αριθμός των πλήρων περιόδων της ταλάντωσης μέχρι να επέλθει η ηρεμία στο σύστημα.

- Αν  $\dot{x}_0 = 0$ :

Σε αυτήν την περίπτωση η αρχική θέση του σώματος είναι και το  $x_0$  της παραπάνω ανάλυσης. Προφανώς η ταλάντωση του σώματος ξεκινάει από ακρότατο, κι άρα  $t_0 = 0$ . Έτσι, με βάση τα παραπάνω έχουμε:

$$t_r = \frac{2N\pi}{\sqrt{\frac{k}{m}}} \text{ (sec)} \quad (2.21)$$

όπου  $N$  είναι ο αριθμός των πλήρων περιόδων της ταλάντωσης μέχρι να επέλθει η ηρεμία στο σύστημα.

Αντικαθιστώντας τις τιμές των παραμέτρων του συστήματος και για τις αρχικές συνθήκες που ερευνήσαμε στην προηγούμενη ενότητα, κατασκευάζουμε τον παρακάτω πίνακα:

| $[x_0, \dot{x}_0]$ | Θεωρητική Τιμή | Τιμή Προσομοίωσης |
|--------------------|----------------|-------------------|
| $[-5, 0]$          | 2.8099sec      | 2.81sec           |
| $[3, 0]$           | 1.4050sec      | 1.41sec           |
| $[0, -5]$          | 1.9799sec      | 1.98sec           |
| $[-6, 6]$          | 3.8099sec      | 3.81sec           |
| $[4, 6]$           | 3.1789sec      | 3.19sec           |

Πίνακας 2.2: Σύγκριση Αποτελεσμάτων Χρόνου Ηρεμίας

Βλέπουμε ότι οι τιμές της θεωρητικής ανάλυσης επιβεβαιώνονται από τις τιμές των προσομοιώσεων.

### 3 Μέρος Β

Στο Μέρος Β της εργασίας θα θεωρήσουμε μη γραμμικό ελατήριο με  $F_k = -f(x)$  και είσοδο ελέγχου  $F = u$ . Τότε η διαφορική εξίσωση του συστήματος γράφεται:

$$m\ddot{x} + \mu m g \operatorname{sign}(\dot{x}) + f(x) = u \quad (3.1)$$

Θα θεωρήσουμε, επίσης, δύο σενάρια. Στο πρώτο σενάριο, η μορφή της δύναμης του ελατηρίου είναι:

$$f(x) = (k + \Delta k(1 - e^{-\beta t}))x(1 + \alpha x^2) \quad (3.2)$$

ενώ στο δεύτερο γνωρίζουμε μόνο ότι:

$$|f(x)| \leq 22|x|^3 \quad (3.3)$$

Οι τιμές των παραμέτρων δεν είναι γνωστές, ωστόσο γνωρίζουμε τα άνω και κάτω φράγματά τους, με βάση τα οποία θεωρούμε για το καθένα μία εκτίμηση, ώστε να ελαχιστοποιήσουμε κατά το δυνατόν το πιθανό σφάλμα. Τα όρια των παραμέτρων και οι εκτιμήσεις τους, που θα χρησιμοποιηθούν για τον σχεδιασμό του ελεγκτή, φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

| Παράμετρος | Όρια                              | Εκτίμηση   |
|------------|-----------------------------------|------------|
| $m$        | $0.5kg \leq m \leq 2kg$           | $1.25kg$   |
| $\mu$      | $0.25 \leq \mu \leq 1$            | $0.625$    |
| $k$        | $4N/m \leq k \leq 10N/m$          | $7N/m$     |
| $\Delta k$ | $0.25N/m \leq \Delta k \leq 1N/m$ | $0.625N/m$ |
| $\alpha$   | $0.5 \leq \alpha \leq 1$          | $0.75$     |
| $\beta$    | $0.01 \leq \beta \leq 0.05$       | $0.05$     |

Πίνακας 3.1: Όρια Παραμέτρων Συστήματος

Στη συνέχεια, θα σχεδιάσουμε ελεγκτές με στόχο ελέγχου την παρακολούθηση από το σύστημα της επιθυμητής τροχιάς  $x_d(t)$  με γνωστές φραγμένες παραγώγους. Θα χρησιμοποιήσουμε δύο μεθόδους για κάθε ένα από τα δύο σενάρια που αναφέρθηκαν, δηλαδή θα σχεδιάσουμε τέσσερις ελεγκτές στο σύνολο.

#### 3.1 Ελεγκτής με Μέθοδο Ολίσθησης

Στόχος της σχεδίασης του ελεγκτή  $u$  είναι ο περιορισμός της λύσης του συστήματος στο αμετάβλητο σύνολο  $s := x_2 + \lambda x_1 = 0$ , με  $\lambda > 0$ . Σχεδιάζουμε τον ελεγκτή για κάθε ένα από τα δύο σενάρια.

3.1.1 Σενάριο 1<sup>ο</sup> - Γνωστή  $F_k$ 

Ορίζουμε, αρχικά, το σφάλμα παρακολούθησης και την παράγωγό του:

$$e = x - x_d \quad (3.4)$$

$$\dot{e} = \dot{x} - \dot{x}_d \quad (3.5)$$

Έπειτα ορίζουμε την επιφάνεια ολίσθησης:

$$s = \dot{e} + \lambda e \quad (3.6)$$

$$\dot{s} = \ddot{e} + \lambda \dot{e} = \ddot{x} - \ddot{x}_d + \lambda \dot{e} = \frac{1}{m}(u - \mu mg \operatorname{sign} \dot{x} - f(x)) - \ddot{x}_d + \lambda \dot{e} \quad (3.7)$$

Θέτουμε:

$$U_{eq} = \mu mg \operatorname{sign} \dot{x} + f(x) + m(\ddot{x}_d - \lambda \dot{e}) \quad (3.8)$$

και την εκτίμησή της:

$$\hat{U}_{eq} = \hat{\mu} \hat{m} g \operatorname{sign} \dot{x} + \hat{f}(x) + \hat{m}(\ddot{x}_d - \lambda \dot{e}) \quad (3.9)$$

Έτσι, έχουμε είσοδο ελέγχου της μορφής:

$$u = \hat{\mu} \hat{m} g \operatorname{sign} \dot{x} + (\hat{k} + \hat{\Delta} k(1 - e^{-\hat{\beta} t}))x(1 + \hat{a}x^2) + \hat{m}(\ddot{x}_d - \lambda \dot{e}) - \rho \operatorname{sign}(s) \quad (3.10)$$

Αντικαθιστώντας, τώρα, στην (3.1) παίρνουμε:

$$m\ddot{x} + \mu mg \operatorname{sign} \dot{x} + (k + \Delta k(1 - e^{-\beta t}))x(1 + ax^2) = \hat{\mu} \hat{m} g \operatorname{sign} \dot{x} + (\hat{k} + \hat{\Delta} k(1 - e^{-\hat{\beta} t}))x(1 + \hat{a}x^2) + \hat{m}(\ddot{x}_d - \lambda \dot{e}) - \rho \operatorname{sign}(s) \Rightarrow$$

$$m\dot{s} = (\hat{\mu} \hat{m} - \mu m)g \operatorname{sign} \dot{x} + (\hat{m} - m)(\ddot{x}_d - \lambda \dot{e}) - \rho \operatorname{sign}(s) + (\hat{k} - k)x + (\hat{k}\hat{a} - ka)x^3 + (\hat{\Delta} k - \Delta k)x + (\hat{\Delta} k\hat{a} - \Delta ka)x^3 + (\Delta ke^{-\beta t} - \hat{\Delta} ke^{-\hat{\beta} t})x + (\Delta kae^{-\beta t} - \hat{\Delta} k\hat{a}e^{-\hat{\beta} t})x^3 \Rightarrow$$

Για τους όρους με τα εκθετικά έχουμε  $\Delta ke^{-\beta t} - \hat{\Delta} ke^{-\hat{\beta} t} = \Delta ke^{-\beta t}(1 - \frac{\hat{\Delta} k}{\Delta k} e^{-(\hat{\beta} - \beta)t})$ , οπότε επιλέγουμε το μέγιστο δυνατό  $\beta$  σαν εκτίμηση, ώστε να μην απειριστεί ο όρος. Έτσι, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι σε μικρό χρονικό διάστημα οι όροι με τα εκθετικά ‘σβήνουν’ κι άρα να τους αγνοήσουμε με ικανοποιητική ακρίβεια. Παρακατω αξιοποιούμε τις τιμές των εκτιμήσεων που θέσαμε στον παραπάνω πίνακα για να ορίσουμε άνω φράγματα των επιμέρους όρων.

$$m\dot{s}\dot{s} \leq |s|(|\hat{\mu}\hat{m} - \mu m||g\text{sign}\dot{x}| + |\hat{m} - m||\ddot{x}_d - \lambda\dot{e}| + |\hat{k} - k||x| + |\hat{k}\hat{a} - ka||x|^3 + |\hat{\Delta}k - \Delta k||x| + |\hat{\Delta}k\hat{a} - \Delta ka||x|^3) - \rho|s| \Rightarrow$$

$$m\dot{s}\dot{s} \leq |s|(0.9375|g\text{sign}\dot{x}| + 0.75|\ddot{x}_d - \lambda\dot{e}| + 3.375|x| + 4.4375|x|^3 - \rho)$$

Επιλέγουμε  $\rho = 0.9375|g\text{sign}\dot{x}| + 0.75|\ddot{x}_d - \lambda\dot{e}| + 3.375|x| + 4.4375|x|^3 + c$ , όπου  $c > 0$  μία σταθερά. Έχουμε, τότε,  $m\dot{s}\dot{s} \leq -c|s| \Rightarrow \dot{s}s \leq -\frac{c}{m}|s| < 0$ , οπότε θεωρώντας θετικά ορισμένη συνάρτηση Lyapunov  $V = \frac{1}{2}s^2$  βρίσκουμε  $\dot{V} = s\dot{s}$  αρνητικά ορισμένη κι άρα έχουμε ασυμπτωτική ευστάθεια της επιφάνειας ολίσθησης. Συνολικά η είσοδος ελέγχου μας γράφεται:

$$u = \hat{\mu}\hat{m}g\text{sign}\dot{x} + (\hat{k} + \hat{\Delta}k(1 - e^{-\hat{\beta}t}))x(1 + \hat{a}x^2) + \hat{m}(\ddot{x}_d - \lambda\dot{e}) - \rho\text{sign}(s) \quad (3.11)$$

με το  $\rho$  να είναι αυτό που επιλέχθηκε παραπάνω.

### 3.1.2 Σενάριο 2<sup>ο</sup> - Γνωστό το Φράγμα της $F_k$

Ακολουθούμε και πάλι την ίδια διαδικασία όπως προηγουμένως μόνο που τώρα γνωρίζουμε ότι  $|f(x)| \leq 22|x|^3 \Rightarrow -22|x|^3 \leq f(x) \leq 22|x|^3 \Rightarrow -f(x) \leq 22|x|^3$ , το οποίο και θα αξιοποιήσουμε στη συνέχεια.

Ορίζουμε, και πάλι, το σφάλμα παρακολούθησης και την παράγωγό του:

$$e = x - x_d \quad (3.12)$$

$$\dot{e} = \dot{x} - \dot{x}_d \quad (3.13)$$

Έπειτα ορίζουμε την επιφάνεια ολίσθησης:

$$s = \dot{e} + \lambda e \quad (3.14)$$

$$\dot{s} = \ddot{e} + \lambda\dot{e} = \ddot{x} - \ddot{x}_d + \lambda\dot{e} = \frac{1}{m}(u - \mu mg\text{sign}\dot{x} - f(x)) - \ddot{x}_d + \lambda\dot{e} \quad (3.15)$$

Θέτουμε:

$$U_{eq} = \mu mg\text{sign}\dot{x} + f(x) + m(\ddot{x}_d - \lambda\dot{e}) \quad (3.16)$$

και την εκτίμησή της:

$$\hat{U}_{eq} = \hat{\mu}\hat{m}g\text{sign}\dot{x} + \hat{f}(x) + \hat{m}(\ddot{x}_d - \lambda\dot{e}) \quad (3.17)$$

Έτσι, έχουμε είσοδο ελέγχου της μορφής:



$$u = \hat{\mu}\hat{m}g\text{sign}\dot{x} + \hat{m}(\ddot{x}_d - \lambda\dot{e}) - \rho\text{sign}(s) \quad (3.18)$$

Αντικαθιστώντας στην (3.1) παίρνουμε:

$$m\ddot{x} + \mu m g \text{sign}\dot{x} + f(x) = \hat{\mu}\hat{m}g\text{sign}\dot{x} + \hat{m}(\ddot{x}_d - \lambda\dot{e}) - \rho\text{sign}(s) \Rightarrow$$

$$m\dot{s} = -f(x) + (\hat{\mu}\hat{m} - \mu m)g\text{sign}\dot{x} + (\hat{m} - m)(\ddot{x}_d - \lambda\dot{e}) - \rho\text{sign}(s) \Rightarrow$$

$$m\dot{s} \leq |s|(22|x|^3 + 0.9375|g\text{sign}\dot{x}| + 0.75|\ddot{x}_d - \lambda\dot{e}| - \rho)$$

Επιλέγουμε  $\boxed{\rho = 22|x|^3 + 0.9375|g\text{sign}\dot{x}| + 0.75|\ddot{x}_d - \lambda\dot{e}| + c}$ , όπου  $c > 0$  μία σταθερά. Έχουμε, τότε,  $m\dot{s} \leq -c|s| \Rightarrow s\dot{s} \leq -\frac{c}{m}|s| < 0$ , οπότε θεωρώντας θετικά ορισμένη συνάρτηση **Lyapunov**  $V = \frac{1}{2}s^2$  βρίσκουμε  $\dot{V} = s\dot{s}$  αρνητικά ορισμένη κι άρα έχουμε ασυμπτωτική ευστάθεια της επιφάνειας ολίσθησης. Συνολικά η είσοδος ελέγχου μας γράφεται:

$$\boxed{u = \hat{\mu}\hat{m}g\text{sign}\dot{x} + \hat{m}(\ddot{x}_d - \lambda\dot{e}) - \rho\text{sign}(s)} \quad (3.19)$$

με το  $\rho$  να είναι αυτό που επιλέχθηκε παραπάνω.

Παρατηρούμε ότι ο πρώτος ελεγκτής περιέχει περισσότερη πληροφορία σχετικά με την δύναμη του ελατηρίου σε σχέση με τον δεύτερο ελεγκτή. Επομένως, αναμένουμε με τον πρώτο ελεγκτή το σύστημα να ακολουθεί καλύτερα την επιθυμητή τροχιά  $x_d$ . Επιπλέον, και στους δύο ελεγκτές ολίσθησης μπορούμε να υπολογίσουμε τις σταθερές  $\lambda$  και  $c$  επιλέγοντας αντίστοιχα την χρονική σταθερά και τον επιθυμητό χρόνο σύγκλισης στην επιφάνεια ολίσθησης, σύμφωνα με τις σχέσεις:

$$\tau = \frac{1}{\lambda} \quad (3.20)$$

$$t_r \leq \frac{|s(0)|}{c} \quad (3.21)$$

### 3.2 Ελεγκτής με Μέθοδο Επανασχεδίασης **Lyapunov**

Στόχος μας και πάλι είναι ο σχεδιασμός εισόδου ελέγχου που να εξασφαλίζει γ.α.ε στο σύστημα με αβέβαιες παραμέτρους.

Από το αρχικό σύστημα (3.1) και θέτοντας ως μεταβλητές κατάστασης, όπως και πριν:

$$x_1 = x \text{ και } x_2 = \dot{x},$$

έχουμε:

$$\dot{x}_1 = \omega x_2 \quad (3.22)$$

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{m\omega}(u - f(x_1) - \mu m g \text{sign}(\omega x_2)) \quad (3.23)$$

Για να ακολουθεί, όμως, το σύστημα την επιθυμητή τροχιά και να είναι σε μορφή που να επιδέχεται επανασχεδίαση **Lyapunov** θα πρέπει να ορίσουμε το σφάλμα θέσης και νέες μεταβλητές κατάστασης βασισμένες στις παραπάνω. Έτσι, ορίζουμε:

$$x_e = x_1 - x_d \text{ και } \dot{x}_e = \dot{x}_1 - \dot{x}_d, \text{ καθώς και} \\ x_{e1} = x_e \text{ και } x_{e2} = \dot{x}_e,$$

Το νέο μας σύστημα, λοιπόν, είναι:

$$\dot{x}_{e1} = x_{e2} \quad (3.24)$$

$$\dot{x}_{e2} = \frac{1}{m}(u - f(x_1) - \mu m g \text{sign}(\omega x_2) - m \ddot{x}_d) \quad (3.25)$$

όπου  $x_1 = x_e + x_d$  και  $\omega x_2 = \dot{x}_e + \dot{x}_d$ . Το σύστημα γράφεται με την μορφή πινάκων ως εξής:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_{e1} \\ \dot{x}_{e2} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} x_{e1} \\ x_{e2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{m}(u - f(x_1) - \mu m g \text{sign}(\omega x_2) - m \ddot{x}_d) \end{pmatrix} \quad (3.26)$$

Σχεδιάζουμε στη συνέχεια τον ελεγκτή για κάθε ένα από τα δύο σενάρια.

### 3.2.1 Σενάριο 1<sup>ο</sup> - Γνωστή $F_k$

Γράφουμε το σύστημα εκ νέου στην μορφή:

$$\dot{x}_e = Ax_e + \frac{1}{m}b(u - \phi(x)) \quad (3.27)$$

όπου  $\phi(x) = f(x_1) + \mu m g \text{sign}(\omega x_2) + m \ddot{x}_d$  και  $b = (0 \ 1)^T$ . Έστω τώρα είσοδος ελέγχου:

$$u = \hat{\phi}(x) + v + \delta v \quad (3.28)$$

όπου  $\hat{\phi}(x)$  είναι η εκτίμηση της  $\phi(x)$ , το  $v$  εισάγεται για να καταστήσει τον πίνακα  $A$  ασυμπτωτικά ευσταθή και το  $\delta v$  είναι μια μεταβλητή που θα οριστεί παρακάτω.

Αντικαθιστώντας την είσοδο ελέγχου στην σχέση (3.27) και για  $\Delta\phi = \hat{\phi}(x) - \phi(x)$  το σύστημα μπορεί να γραφεί ως:

$$\dot{x}_e = \underbrace{\left(A - \frac{1}{m}bF^T\right)}_{\tilde{A}} x_e + \frac{1}{m}b\Delta\phi + \frac{1}{m}b\delta v \quad (3.29)$$

Βρίσκουμε τον πίνακα  $F = (\lambda_1 \quad \lambda_1)^T$  για τον οποίο ο πίνακας  $\tilde{A}$  είναι ασυμπτωτικά ευσταθής, ρυθμίζοντας κατάλληλα τις ιδιοτιμές του. Έχουμε:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{\lambda_1}{m} & -\frac{\lambda_2}{m} \end{pmatrix}$$

οπότε:

$$\det(sI - \tilde{A}) = \begin{vmatrix} s & -1 \\ \frac{\lambda_1}{m} & s + \frac{\lambda_2}{m} \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow s^2 + \frac{\lambda_2}{m}s + \frac{\lambda_1}{m} = 0$$

Έτσι, για ιδιοτιμές  $a_1, a_2 < 0$  της επιλογής μας, έχουμε:

$$\boxed{\lambda_1 = ma_1a_2} \quad (3.30)$$

$$\boxed{\lambda_2 = -m(a_1 + a_2)} \quad (3.31)$$

Βρίσκουμε στη συνέχεια την λύση της εξίσωσης **Lyapunov** με την παρακάτω διαδικασία. Έστω συμμετρικός και θετικά ορισμένος πίνακας  $P$  και συμμετρικός και θετικά ορισμένος πίνακας  $Q = I$ , όπου  $I$  ο μοναδιαίος πίνακας. Λύνουμε την εξίσωση **Lyapunov**  $\tilde{A}^T P + P\tilde{A} = -Q$ :

$$\begin{pmatrix} 0 & -\frac{\lambda_1}{m} \\ 1 & -\frac{\lambda_2}{m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{\lambda_1}{m} & -\frac{\lambda_2}{m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

και βρίσκουμε:

$$\boxed{p_{11} = \frac{\lambda_2}{2\lambda_1} + \frac{\lambda_1 m + \lambda_1^2}{2\lambda_1 \lambda_2}} \quad (3.32)$$

$$\boxed{p_{12} = \frac{m}{2\lambda_1}} \quad (3.33)$$

$$\boxed{p_{22} = \frac{m^2 + m\lambda_1}{2\lambda_1 \lambda_2}} \quad (3.34)$$

Προχωράμε στην εύρεση του  $\delta v$ , ώστε να ολοκληρωθεί η μορφή του ελεγκτή μας. Ορίζουμε την τετραγωνική συνάρτηση **Lyapunov**, η οποία είναι θετικά ορισμένη και την συνέχεια παίρνουμε την παράγωγό της:

$$\begin{aligned} V &= x_e^T P x_e \\ \dot{V} &= \dot{x}_e^T P x_e + x_e^T P \dot{x}_e = x_e^T (\tilde{A}^T P + P\tilde{A}) x_e + \frac{2}{m} (b^T P x_e \Delta\phi + b^T P x_e \delta v) \\ &\leq -x_e^T Q x_e + \frac{2}{m} (|b^T P x_e| |\Delta\phi| + b^T P x_e \delta v) \end{aligned}$$

Όπως ακριβώς και στην μέθοδο ολίσθησης, βρίσκουμε ένα άνω φράγμα του μέτρου του  $\Delta\phi$  με βάση τις εκτιμήσεις και τις παραδοχές που κάναμε στην προηγούμενη υποενότητα:

$$\Delta\phi = \hat{\phi} - \phi = (\hat{\mu}\hat{m} - \mu m)g\text{sign}(\omega x_2) + (\hat{k} - k)x + (\hat{k}\hat{a} - ka)x^3 + (\hat{\Delta}k - \Delta k)x + (\hat{\Delta}k\hat{a} - \Delta ka)x^3 + (\Delta ke^{-\beta t} - \hat{\Delta}ke^{-\hat{\beta}t})x + (\Delta kae^{-\beta t} - \hat{\Delta}k\hat{a}e^{-\hat{\beta}t})x^3 + (\hat{m} - m)\ddot{x}_d \Rightarrow$$

$$|\Delta\phi| \leq \underbrace{0.9375|g\text{sign}(\omega x_2)| + 3.375|x| + 4.4375|x|^3 + 0.75|\ddot{x}_d|}_{\Delta\phi_{\max}}$$

Έτσι, για την παράγωγο της συνάρτησης Lyapunov έχουμε:

$$\dot{V} \leq -x_e^T Q x_e + \frac{2}{m}(|b^T P x_e| \Delta\phi_{\max} + b^T P x_e \delta v)$$

Οπότε, εάν θέσουμε  $\delta v = -\Delta\phi_{\max} \text{sign}(b^T P x_e)$  βρίσκουμε  $\dot{V} \leq -x_e^T Q x_e \leq 0$ , δηλαδή η  $\dot{V}$  είναι αρνητικά ημιορισμένη κι άρα έχουμε ασυμπτωτική ευστάθεια κατά την παρακολούθηση της επιθυμητής μας τροχιάς. Συνολικά, επομένως, ο ελεγκτής μας έχει την μορφή:

$$u = \hat{\phi}(x) - F^T x_e + \delta v \quad (3.35)$$

με τις επιμέρους μεταβλητές και τις παραμέτρους να έχουν οριστεί παραπάνω.

### 3.2.2 Σενάριο 2<sup>ο</sup> - Γνωστό το Φράγμα της $F_k$

Ακολουθούμε και πάλι την ίδια διαδικασία όπως προηγουμένως μόνο που τώρα γνωρίζουμε ότι  $|f(x)| \leq 22|x|^3 \Rightarrow -22|x|^3 \leq f(x) \leq 22|x|^3 \Rightarrow -f(x) \leq 22|x|^3$ . Γράφουμε το σύστημα εκ νέου στην μορφή:

$$\dot{x}_e = Ax_e + \frac{1}{m}b(u - \phi(x) - f(x_1)) \quad (3.36)$$

όπου  $\phi(x) = \mu m g \text{sign}(\omega x_2) + m \ddot{x}_d$  και  $b = (0 \ 1)^T$ . Έστω τώρα είσοδος ελέγχου:

$$u = \hat{\phi}(x) + v + \delta v \quad (3.37)$$

όπου  $\hat{\phi}(x)$  είναι η εκτίμηση της  $\phi(x)$ , το  $v$  εισάγεται για να καταστήσει τον πίνακα  $A$  ασυμπτωτικά ευσταθή και το  $\delta v$  είναι μια μεταβλητή που θα οριστεί παρακάτω.

Αντικαθιστώντας την είσοδο ελέγχου στην σχέση (3.36) και για  $\Delta\phi = \hat{\phi}(x) - \phi(x)$  το σύστημα μπορεί να γραφεί ως:

$$\dot{x}_e = \underbrace{\left(A - \frac{1}{m}bF^T\right)}_{\tilde{A}} x_e + \frac{1}{m}b\Delta\phi + \frac{1}{m}b\delta v - \frac{1}{m}bf(x_1) \quad (3.38)$$

Ο πίνακας  $F = (\lambda_1 \quad \lambda_1)^T$  για τον οποίο ο πίνακας  $\tilde{A}$  είναι ασυμπτωτικά ευσταθής, είναι ακριβώς ο ίδιος με το παραπάνω σενάριο. Ίδια είναι και η λύση  $P$  της εξίσωσης Lyapunov  $\tilde{A}^T P + P \tilde{A} = -Q$ .

Προχωράμε στην εύρεση του  $\delta v$ , ώστε να ολοκληρωθεί η μορφή του ελεγκτή μας. Ορίζουμε την τετραγωνική συνάρτηση Lyapunov, η οποία είναι θετικά ορισμένη και την συνέχεια παίρνουμε την παράγωγό της:

$$\begin{aligned} V &= x_e^T P x_e \\ \dot{V} &= x_e^T P \dot{x}_e + x_e^T P \dot{x}_e = x_e^T (\tilde{A}^T P + P \tilde{A}) x_e + \frac{2}{m} (b^T P x_e \Delta\phi + b^T P x_e \delta v - b^T P x_e f(x_1)) \\ &\leq -x_e^T Q x_e + \frac{2}{m} (|b^T P x_e| |\Delta\phi| + |b^T P x_e| 22|x_1|^3 + b^T P x_e \delta v) \end{aligned}$$

Όπως ακριβώς και στην μέθοδο ολίσθησης, βρίσκουμε ένα άνω φράγμα του μέτρου του  $\Delta\phi$  με βάση τις εκτιμήσεις και τις παραδοχές που κάναμε στην προηγούμενη υποενότητα:

$$\Delta\phi = \hat{\phi} - \phi = (\hat{m} - m) g \text{sign}(\omega x_2) + (\hat{m} - m) \ddot{x}_d \Rightarrow$$

$$|\Delta\phi| \leq \underbrace{0.9375 |g \text{sign}(\omega x_2)| + 0.75 |\ddot{x}_d|}_{\Delta\phi_{\max}}$$

Έτσι, για την παράγωγο της συνάρτησης Lyapunov έχουμε:

$$\dot{V} \leq -x_e^T Q x_e + \frac{2}{m} (|b^T P x_e| \Delta\phi_{\max} + |b^T P x_e| 22|x|^3 + b^T P x_e \delta v)$$

Οπότε, εάν θέσουμε  $\delta v = -(\Delta\phi_{\max} + 22|x|^3) \text{sign}(b^T P x_e)$  βρίσκουμε  $\dot{V} \leq -x_e^T Q x_e \leq 0$ , δηλαδή η  $\dot{V}$  είναι αρνητικά ημιορισμένη κι άρα έχουμε ασυμπτωτική ευστάθεια κατά την παρακολούθηση της επιθυμητής μας τροχιάς. Συνολικά, επομένως, ο ελεγκτής μας έχει την μορφή:

$$u = \hat{\phi}(x) - F^T x_e + \delta v \quad (3.39)$$

με τις επιμέρους μεταβλητές και τις παραμέτρους να έχουν οριστεί παραπάνω.

Παρατηρούμε ότι ο πρώτος ελεγκτής περιέχει περισσότερη πληροφορία σχετικά με την δύναμη του ελατηρίου σε σχέση με τον δεύτερο ελεγκτή. Επομένως, αναμένουμε με τον πρώτο ελεγκτή το σύστημα να ακολουθεί καλύτερα την επιθυμητή τροχιά  $x_d$ .

### 3.3 Προσομοίωση των Ελεγκτών

Στη συνέχεια θα προσομοιώσουμε το σύστημα χρησιμοποιώντας τους ελεγκτές που σχεδιάσαμε. Για τις προσομοιώσεις μας θα χρησιμοποιήσουμε τις τιμές των παραμέτρων που δίνονται στον Πίνακα 2.1 και τη δύναμη ελατηρίου:  $f(x) = (5 + 0.6e^{0.045t})x(1 + 0.9x^2)$ . Ως επιθυμητή

τροχιά θεωρούμε την  $x_d(t) = 2 + \sin 2.5t + 2\cos 1.25t$ . Θεωρούμε, επίσης, αρχικές συνθήκες τις τιμές που αναλύθηκαν και στο Μέρος Α.

Για να αποφύγουμε φαινόμενα **chattering** και για λόγους αριθμητικής ευστάθειας στους ελεγκτές μας, θα χρησιμοποιήσουμε τη συνάρτηση κορεσμού (saturation function) αντί για τη συνάρτηση προσήμου.

Όσον αφορά, επίσης, τις ελεύθερες παραμέτρους των ελεγκτών μας πορευθήκαμε ως εξής:

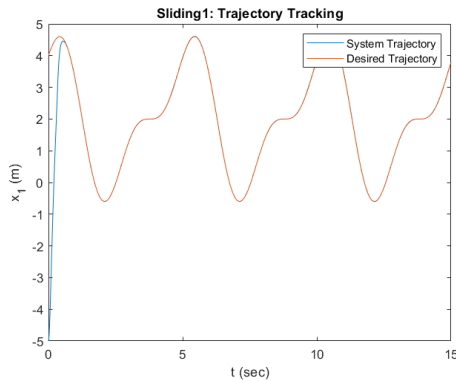
- Στην μέθοδο ολίσθησης θέσαμε  $\lambda = 15$  και  $c = 100$  με την βοήθεια των σχέσεων (3.20) και (3.21). Οι τιμές αυτές δίνουν ικανοποιητικό αποτέλεσμα και επιτρέπουν την σύγκριση των δύο σεναρίων. Με την περαιτέρω αύξηση αυτών των παραμέτρων έχουμε ακόμη καλύτερη απόκριση, ωστόσο αυτό δυσχεραίνει την σύγκριση.
- Στην μέθοδο επανασχεδίασης Lyapunov θέσαμε τις ιδιοτιμές  $\alpha_1 = \alpha_2 = -50$  με την βοήθεια των οποίων μπορούμε να επηρεάσουμε την απόκριση του συστήματος ελέγχου μας. Οι τιμές αυτές δίνουν ικανοποιητικό αποτέλεσμα και επιτρέπουν την σύγκριση των δύο σεναρίων, ωστόσο και πάλι με την περαιτέρω αύξηση (του μέτρου) αυτών των παραμέτρων έχουμε ακόμη καλύτερη απόκριση.

Ακόμη, οι παράμετροι αυτές επιλέχθηκαν ίδιες για όλες τις αρχικές καταστάσεις, ώστε να είναι δυνατή η σύγκρισή τους υπό ίσους όρους.

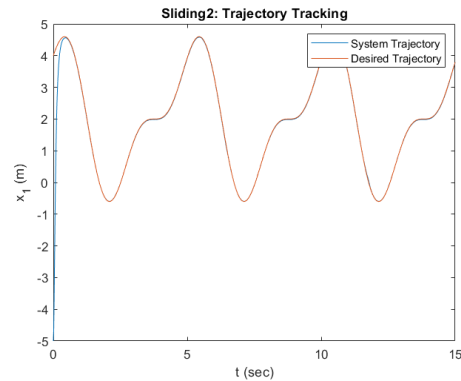
Ακολουθούν οι προσομοιώσεις για κάθε αρχική συνθήκη και για κάθε σενάριο, τόσο της μεθόδου ολίσθησης, όσο και της μεθόδου επανασχεδίασης Lyapunov.

### 3.3.1 Αρχική Κατάσταση $(x_0, \dot{x}_0) = (-5, 0)$

#### 1. Μέθοδος Ολίσθησης

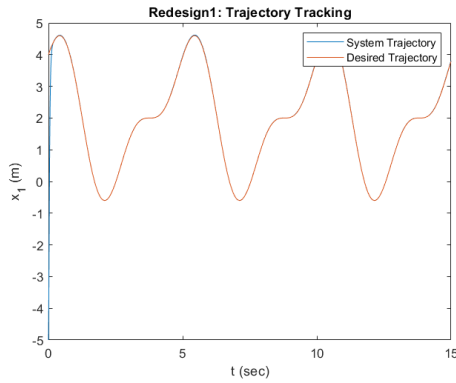


Σχήμα 3.1: Παρακολούθηση Τροχιάς με Μεθοδο Ολίσθησης για  $(-5, 0)$  - Σενάριο 1<sup>ο</sup>

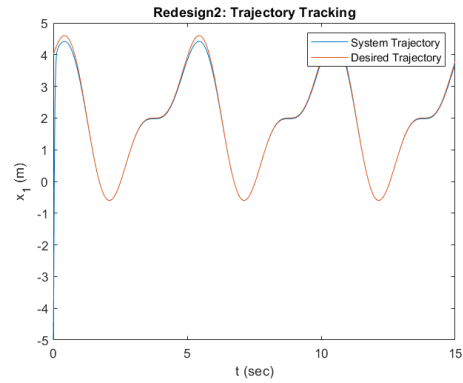


Σχήμα 3.2: Παρακολούθηση Τροχιάς με Μεθοδο Ολίσθησης για  $(-5, 0)$  - Σενάριο 2<sup>ο</sup>

#### 2. Μέθοδος Επανασχεδίασης Lyapunov



Σχήμα 3.3: Παρακολούθηση Τροχιάς με Μεθοδο Επαν. *Lyapunov* για  $(-5, 0)$  - Σε-νάριο 1<sup>ο</sup>

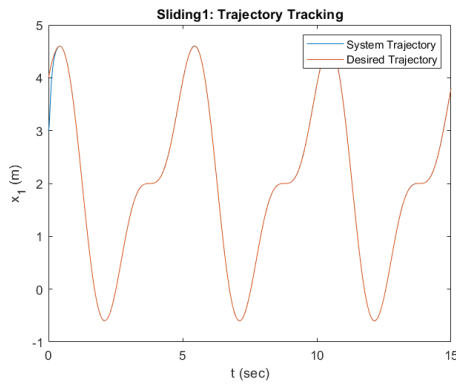


Σχήμα 3.4: Παρακολούθηση Τροχιάς με Μεθοδο Επαν. *Lyapunov* για  $(-5, 0)$  - Σε-νάριο 2<sup>ο</sup>

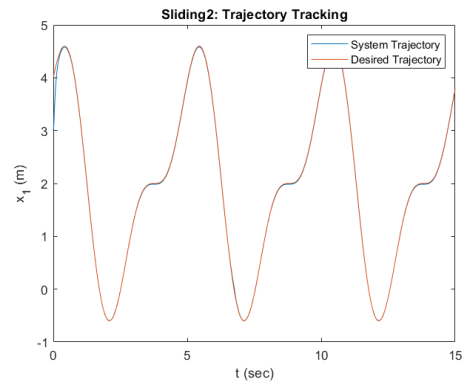
Και με τις δύο μεθόδους παρατηρούμε, όπως αναμέναμε, ότι με τον ελεγκτή του πρώτου σεναρίου το σύστημα ακολουθεί καλύτερα την επιθυμητή τροχιά  $x_d$ , καθώς αυτός περιέχει παραπάνω πληροφορία για την δύναμη ελατηρίου.

### 3.3.2 Αρχική Κατάσταση $(x_0, \dot{x}_0) = (3, 0)$

#### 1. Μέθοδος Ολίσθησης

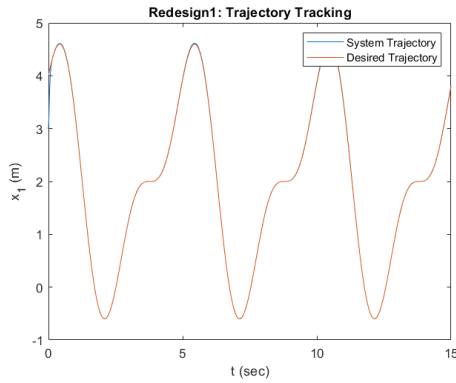


Σχήμα 3.5: Παρακολούθηση Τροχιάς με Μεθοδο Ολίσθησης για  $(3, 0)$  - Σε-νάριο 1<sup>ο</sup>

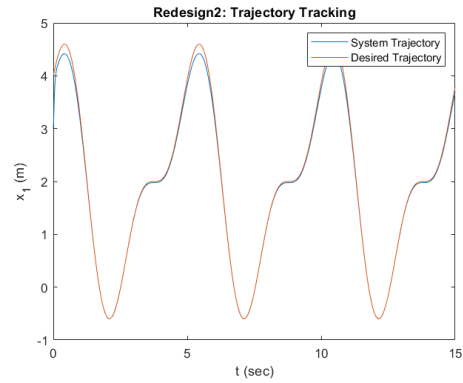


Σχήμα 3.6: Παρακολούθηση Τροχιάς με Μεθοδο Ολίσθησης για  $(3, 0)$  - Σε-νάριο 2<sup>ο</sup>

#### 2. Μέθοδος Επανασχεδίασης *Lyapunov*



Σχήμα 3.7: Παρακολούθηση Τροχιάς με Μεθοδο Επαν. *Lyapunov* για  $(3, 0)$  - Σενάριο 1<sup>ο</sup>

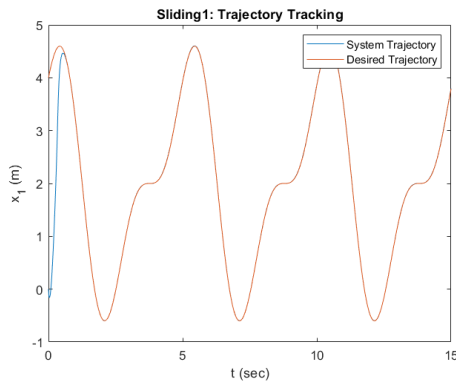


Σχήμα 3.8: Παρακολούθηση Τροχιάς με Μεθοδο Επαν. *Lyapunov* για  $(3, 0)$  - Σενάριο 2<sup>ο</sup>

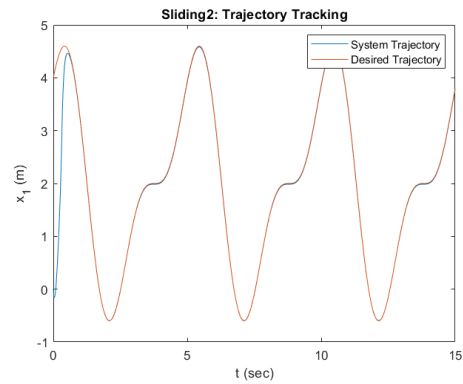
Και με τις δύο μεθόδους παρατηρούμε, όπως αναμέναμε, ότι με τον ελεγκτή του πρώτου σεναρίου το σύστημα ακολουθεί καλύτερα την επιθυμητή τροχιά  $x_d$ , καθώς αυτός περιέχει παραπάνω πληροφορία για την δύναμη ελατηρίου.

### 3.3.3 Αρχική Κατάσταση $(x_0, \dot{x}_0) = (0, -5)$

#### 1. Μέθοδος Ολίσθησης



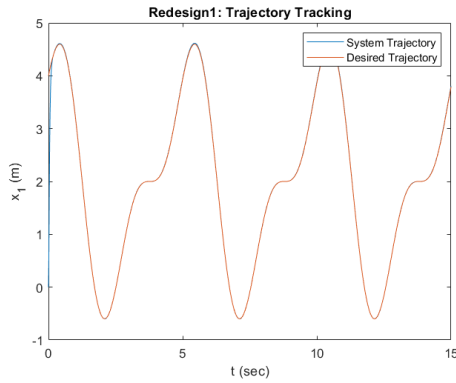
Σχήμα 3.9: Παρακολούθηση Τροχιάς με Μεθοδο Ολίσθησης για  $(0, -5)$  - Σενάριο 1<sup>ο</sup>



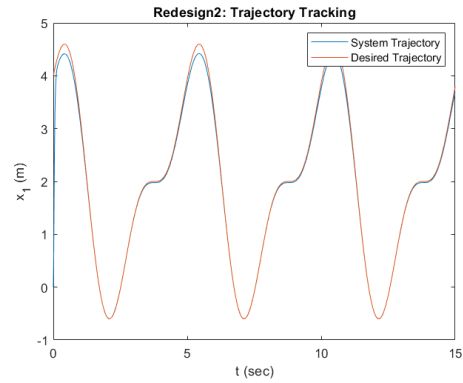
Σχήμα 3.10: Παρακολούθηση Τροχιάς με Μεθοδο Ολίσθησης για  $(0, -5)$  - Σενάριο 2<sup>ο</sup>

#### 2. Μέθοδος Επανασχεδίασης *Lyapunov*





Σχήμα 3.11: Παρακολούθηση Τροχιάς με Μεθοδο Επαν. *Lyapunov* για  $(0, -5)$  - Σενάριο 1<sup>ο</sup>

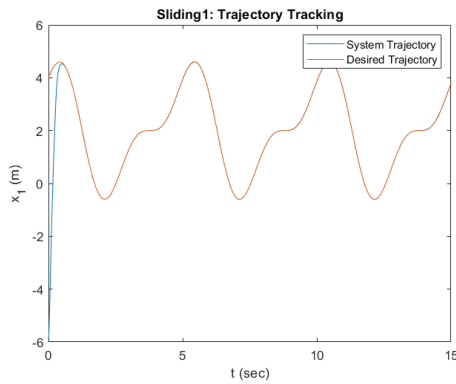


Σχήμα 3.12: Παρακολούθηση Τροχιάς με Μεθοδο Επαν. *Lyapunov* για  $(0, -5)$  - Σενάριο 2<sup>ο</sup>

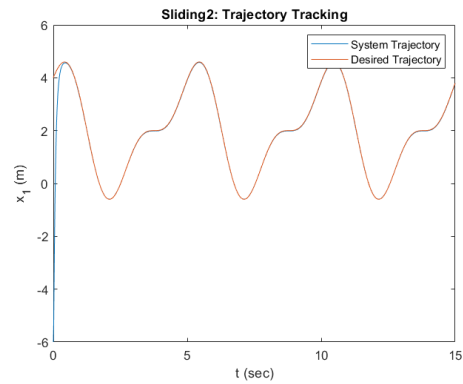
Και με τις δύο μεθόδους παρατηρούμε, όπως αναμέναμε, ότι με τον ελεγκτή του πρώτου σεναρίου το σύστημα ακολουθεί καλύτερα την επιθυμητή τροχιά  $x_d$ , καθώς αυτός περιέχει παραπάνω πληροφορία για την δύναμη ελατηρίου.

### 3.3.4 Αρχική Κατάσταση $(x_0, \dot{x}_0) = (-6, 6)$

#### 1. Μέθοδος Ολίσθησης

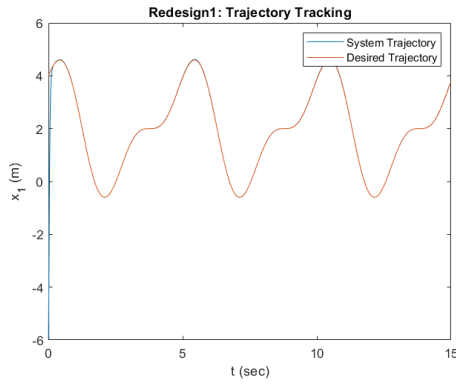


Σχήμα 3.13: Παρακολούθηση Τροχιάς με Μεθοδο Ολίσθησης για  $(-6, 6)$  - Σενάριο 1<sup>ο</sup>

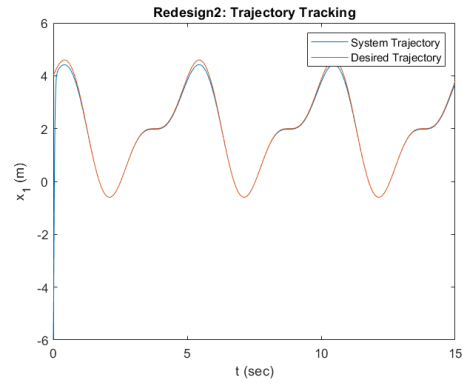


Σχήμα 3.14: Παρακολούθηση Τροχιάς με Μεθοδο Ολίσθησης για  $(-6, 6)$  - Σενάριο 2<sup>ο</sup>

#### 2. Μέθοδος Επανασχεδίασης *Lyapunov*



Σχήμα 3.15: Παρακολούθηση Τροχιάς με Μεθοδο Επαν. *Lyapunov* για  $(-6, 6)$  - Σενάριο 1<sup>ο</sup>

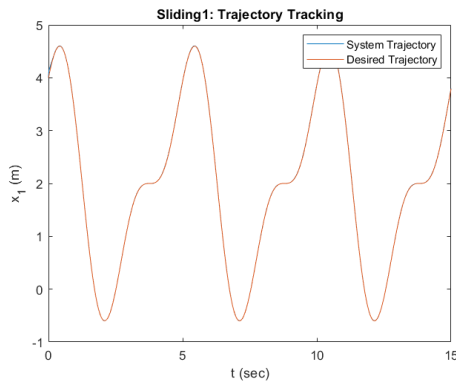


Σχήμα 3.16: Παρακολούθηση Τροχιάς με Μεθοδο Επαν. *Lyapunov* για  $(-6, 6)$  - Σενάριο 2<sup>ο</sup>

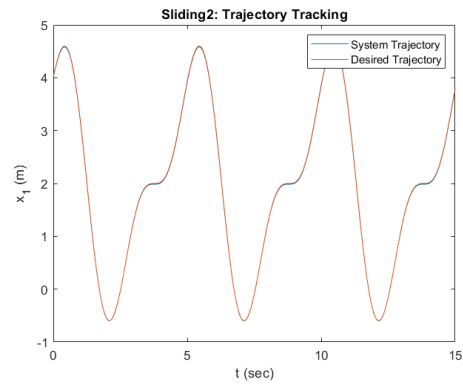
Και με τις δύο μεθόδους παρατηρούμε, όπως αναμέναμε, ότι με τον ελεγκτή του πρώτου σεναρίου το σύστημα ακολουθεί καλύτερα την επιθυμητή τροχιά  $x_d$ , καθώς αυτός περιέχει παραπάνω πληροφορία για την δύναμη ελατηρίου.

### 3.3.5 Αρχική Κατάσταση $(x_0, \dot{x}_0) = (4, 6)$

#### 1. Μέθοδος Ολίσθησης

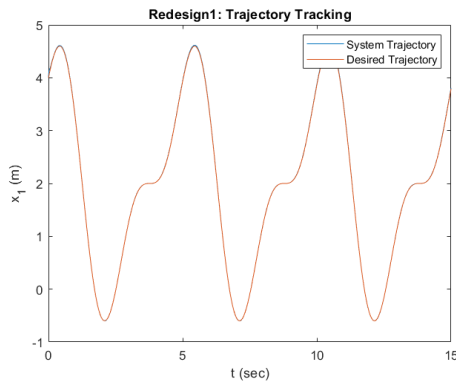


Σχήμα 3.17: Παρακολούθηση Τροχιάς με Μεθοδο Ολίσθησης για  $(4, 6)$  - Σενάριο 1<sup>ο</sup>

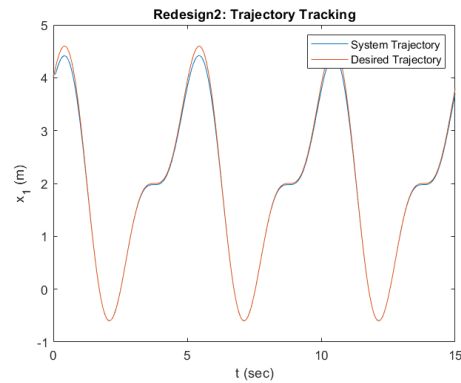


Σχήμα 3.18: Παρακολούθηση Τροχιάς με Μεθοδο Ολίσθησης για  $(4, 6)$  - Σενάριο 2<sup>ο</sup>

#### 2. Μέθοδος Επανασχεδίασης *Lyapunov*



Σχήμα 3.19: Παρακολούθηση Τροχιάς με Μεθοδο Επαν. *Lyapunov* για (4, 6) - Σε-νάριο 1<sup>ο</sup>



Σχήμα 3.20: Παρακολούθηση Τροχιάς με Μεθοδο Επαν. *Lyapunov* για (4, 6) - Σε-νάριο 2<sup>ο</sup>

Και με τις δύο μεθόδους παρατηρούμε, όπως αναμέναμε, ότι με τον ελεγκτή του πρώτου σεναρίου το σύστημα ακολουθεί καλύτερα την επιθυμητή τροχιά  $x_d$ , καθώς αυτός περιέχει παραπάνω πληροφορία για την δύναμη ελατηρίου.

### 3.4 Σύγκριση Υλοποιήσεων Εισόδου Ελέγχου

Από την παραπάνω ανάλυση καταρχάς συμπεραίνουμε ότι το σύνολο των ελεγκτών που υλοποιήσαμε μπορούν να χρησιμοποιηθούν ώστε το σύστημά μας να ακολουθεί με ικανοποιητική ακρίβεια την επιθυμητή τροχιά.

Παρατηρούμε, επίσης, με βάση τις προσομοιώσεις για διάφορες τιμές αρχικών συνθηκών, ότι το σύστημά μας ακολουθεί γρηγορότερα την επιθυμητή τροχιά όταν οι αρχικές του συνθήκες είναι κοντά στις αρχικές συνθήκες της υπό παρακολούθηση τροχιάς.

Επομένως, εάν σκοπεύουμε να χρησιμοποιήσουμε τον ελεγκτή μας για ένα σύστημα στο οποίο οι αρχικές συνθήκες είναι μακριά από τις αρχικές συνθήκες της τροχιάς, τότε ίσως θα πρέπει να προσαρμόσουμε ανάλογα τις ελεύθερους παραμέτρους της σχεδίασής μας, ώστε να αυξήσουμε την ταχύτητα απόκρισης του συστήματος παρακολούθησης.

Όσον αφορά τις δύο μεθόδους σχεδίασης, η μέθοδος ολίσθησης μας δίνει καλύτερο έλεγχο των ελεύθερων παραμέτρων της, καθώς μπορούμε να εφαρμόσουμε τις σχέσεις (3.20) και (3.21) για να πάρουμε μια ακριβή εκτίμηση της χρονικής σταθεράς ή του χρόνου σύγκλισης στην επιφάνεια ολίσθησης.

Αντίθετα, με την μέθοδο επανασχεδίασης *Lyapunov* έχουμε την λιγότερο εύχρηστη λύση της επιλογής των ιδιοτιμών του πίνακα  $\tilde{A}$ . Έτσι λοιπόν, η μέθοδος ολίσθησης είναι πιο εύκολη στην υλοποίηση και προσφέρει μεγαλύτερη ευχέρεια στην σχεδίαση.