

# Προσομοίωση και Μοντελοποίηση Δυναμικών Συστημάτων

1<sup>η</sup> Εργασία Μαθήματος 2022 - 2023

Αλεξόπουλος Δημήτριος AEM 10091  
aadimitri@ece.auth.gr

# Περιεχόμενα

1	Εισαγωγή	4
2	Θέμα 1 <sup>ο</sup>	6
2.1	Γραμμική Παραμετροποίηση . . . . .	6
2.2	Αλγόριθμος Ελαχίστων Τετραγώνων . . . . .	8
2.3	Προσομοίωση στο MATLAB . . . . .	8
3	Θέμα 2 <sup>ο</sup>	11
3.1	Εκτίμηση Πίνακα Μεταφοράς . . . . .	11
3.2	Έλεγχος Ευρωστίας . . . . .	15

## Κατάλογος Σχημάτων

2.1	Σύστημα μάζας-ελατηρίου-αποσβεστήρα . . . . .	6
2.2	Είσοδος - έξοδος συστήματος . . . . .	8
2.3	Σύγκριση εκτιμώμενης - πραγματικής εξόδου . . . . .	9
2.4	Σφάλμα Πρόβλεψης . . . . .	9
3.1	Κύκλωμα <b>RLC</b> . . . . .	11
3.2	Είσοδοι συστήματος . . . . .	13
3.3	Έξοδοι συστήματος . . . . .	13
3.4	Σύγκριση εκτιμώμενης - πραγματικής εξόδου $V_C$ . . . . .	14
3.5	Σφάλμα Πρόβλεψης $V_C$ . . . . .	14
3.6	Σύγκριση εκτιμώμενης - πραγματικής εξόδου $V_R$ . . . . .	14
3.7	Σφάλμα Πρόβλεψης $V_R$ . . . . .	15
3.8	Σύγκριση εκτιμώμενης - πραγματικής εξόδου $V_C$ . . . . .	16
3.9	Σφάλμα Πρόβλεψης $V_C$ . . . . .	16
3.10	Σύγκριση εκτιμώμενης - πραγματικής εξόδου $V_R$ . . . . .	16
3.11	Σφάλμα Πρόβλεψης $V_R$ . . . . .	16

# 1 Εισαγωγή

Στην παρούσα εργαστηριακή άσκηση θα μελετήσουμε δύο φυσικά συστήματα, ένα σύστημα μάζας-ελατηρίου-αποσβεστήρα, κι ένα ηλεκτρικό κύκλωμα **RLC**. Γνωρίζουμε την φυσική των συστημάτων, κι άρα την μορφή των διαφορικών εξισώσεων που τα περιγράφουν, ωστόσο δεν γνωρίζουμε τις παραμέτρους τους. Στόχος μας, λοιπόν, είναι η εκτίμηση των άγνωστων παραμέτρων των συστημάτων. Για να το πετύχουμε αυτό θα παραμετροποιήσουμε γραμμικά τα συστήματά μας και στη συνέχεια θα εφαρμόσουμε την μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων.

Σύμφωνα με αυτήν, έχουμε ένα γραμμικά παραμετροποιημένο μοντέλο που περιγράφεται από την εξίσωση:

$$\hat{y} = \theta^T \phi \quad (1.1)$$

όπου  $\hat{y} \in \mathbb{R}^N$  είναι η εκτιμώμενη έξοδος,  $\phi \in \mathbb{R}^{N \times d}$  το διάνυσμα οπισθοδρόμησης και  $\theta \in \mathbb{R}^d$  το διάνυσμα των αγνώστων παραμέτρων. Επιθυμούμε να ελαχιστοποιήσουμε το σφάλμα της εκτιμώμενης εξόδου από την πραγματική, δηλαδή το σφάλμα πρόβλεψης:

$$e = y(t) - \hat{y}(t) = y(t) - \theta^T \phi(t) \quad (1.2)$$

Για τον σκοπό αυτό εφαρμόζουμε το κριτήριο ελαχιστοποίησης, δηλαδή επιλέγουμε να ελαχιστοποιήσουμε την συνάρτηση:

$$V_N(\theta) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \frac{[y(t) - \theta^T \phi(t)]^2}{2} = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N y^2(t) + \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \frac{\theta^T \phi(t) \phi(t)^T \theta}{2} - \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \theta^T \phi(t) y(t) \quad (1.3)$$

Αυτό συμβαίνει όταν:

$$\frac{\partial V_N(\theta)}{\partial \theta} \Big|_{\theta=\theta_0} = 0 \Rightarrow \left( \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \phi(t) \phi(t)^T \right) \theta_0 = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \phi(t) y(t) \quad (1.4)$$

Στην περίπτωση μάλιστα που ο πίνακας  $\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \phi(t) \phi(t)^T$  είναι αντιστρέψιμος μπορούμε να υπολογίσουμε το διάνυσμα  $\theta_0$ , το οποίο μας δίνει τις εκτιμώμενες παραμέτρους του συστήματος. Έτσι:

$$\theta_0 = \left( \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \phi(t) \phi(t)^T \right)^{-1} \left( \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \phi(t) y(t) \right) \quad (1.5)$$

Σε πρακτικό επίπεδο, τώρα, επιθυμούμε να υπολογίσουμε μια εκτίμηση των παραμέτρων του συστήματος γνωρίζοντας μόνο κάποιες τιμές εισόδων και τις αντίστοιχες εξόδους τους. Θεωρούμε, λοιπόν, ένα δεδομένο διάνυσμα εξόδων  $Y = [y(1) \ y(2) \ \dots \ y(N)]^T$  και τον πίνακα

$\Phi$ , ο οποίος αποτελείται από τις συνιστώσες του διανύσματος οπισθοδρόμησης  $\phi$  για κάθε πειραματική μέτρηση που έχουμε:

$$\Phi = \begin{bmatrix} \phi_1(1) & \phi_2(1) & \dots & \phi_d(1) \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \phi_1(N) & \dots & \dots & \phi_d(N) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{N \times d} \quad (1.6)$$

Το σφάλμα πρόβλεψης του συστήματος μπορεί να γραφεί σε διανυσματική μορφή ως  $e = Y - \Phi\theta$ . Ελαχιστοποιούμε τώρα, παρόμοια με πριν, την συνάρτηση  $V_N = \frac{e^T e}{2} = \frac{|e|^2}{2} = \frac{|Y - \Phi\theta|^2}{2}$  και παίρνουμε την παρακάτω εξίσωση, η οποία αποτελεί και την συνθήκη ελαχιστοποίησης του σφάλματος πρόβλεψης:

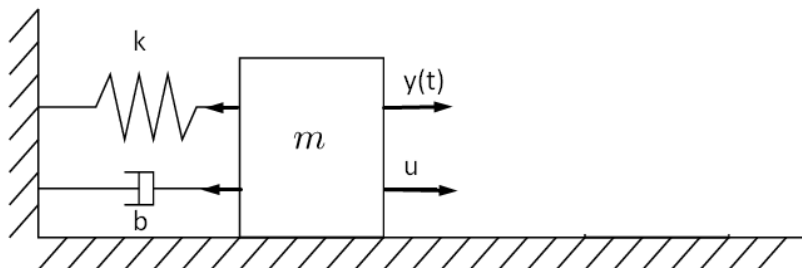
$$\boxed{\theta_0^T (\Phi^T \Phi) = Y^T \Phi} \quad (1.7)$$

Στην περίπτωση και πάλι που ο πίνακας  $(\Phi^T \Phi)$  είναι αντιστρέψιμος μπορούμε να υπολογίσουμε το διάνυσμα των αγνώστων παραμέτρων ως εξής:

$$\theta_0^T = Y^T \Phi (\Phi^T \Phi)^{-1} \quad (1.8)$$

## 2 Θέμα 1<sup>ο</sup>

Το πρώτο σύστημα που θα μελετήσουμε είναι το σύστημα μάζας-ελατηρίου-αποσβεστήρα του παρακάτω σχήματος:



Σχήμα 2.1: Σύστημα μάζας-ελατηρίου-αποσβεστήρα

όπου  $b$  είναι η σταθερά απόσβεσης,  $k$  είναι η σταθερά του ελατηρίου,  $u$  μια εξωτερική δύναμη και  $y(t)$  είναι η μετατόπιση της μάζας  $m$  εξαιτίας της δύναμης που εφαρμόζεται πάνω της.

### 2.1 Γραμμική Παραμετροποίηση

Το σύστημά μας, σύμφωνα με την φυσική του προβλήματος, περιγράφεται από την διαφορική εξίσωση:

$$m\ddot{y} + b\dot{y} + ky = u \Rightarrow \ddot{y} + \frac{b}{m}\dot{y} + \frac{k}{m}y = \frac{1}{m}u \quad (2.1)$$

όπου  $m, b, k$  οι παράμετροι που παρουσιάστηκαν παραπάνω.

Η εξίσωση 2.1 μπορεί να έρθει εύκολα στην μορφή  $y^{(2)} = \theta^* T \Delta$ , όπου  $\theta^* = [\frac{b}{m} \quad \frac{k}{m} \quad \frac{1}{m}]^T$  και  $\Delta = [-\Delta_1^T y \quad \Delta_0^T u]^T$  με  $\Delta_i(s) = [s^i \quad s^{i-1} \quad \dots \quad 1]^T$  στο πεδίο της συχνότητας.

Δεδομένου, όμως, ότι έχουμε στην διάθεσή μας μόνο τα σήματα εισόδου  $u$  και εξόδου  $y$  με απαγορευτική την χρήση της παραγωγισής, η παραπάνω μορφή δεν μπορεί να υλοποιηθεί. Το πρόβλημα αυτό αντιμετωπίζεται εισάγωντας ένα ευσταθές φίλτρο  $\frac{1}{\Lambda(s)}$  2<sup>ης</sup> τάξης, δηλαδή ένα φίλτρο:

$$\Lambda(s) = s^2 + \lambda_{11}s + \lambda_2 \text{ με } \lambda_1 = p_1 + p_2 \text{ και } \lambda_2 = p_1 p_2 \quad (2.2)$$

όπου  $p_1, p_2$  είναι οι πόλοι του πολυωνύμου, οι οποίοι για λόγους ευστάθειας τοποθετούνται στο αριστερό μιγαδικό ημιεπίπεδο. Αυτό που πρέπει να προσέξουμε στην επιλογή των παραμέτρων (πόλων) του φίλτρου είναι η συχνότητα αποκοπής του να είναι τέτοια ώστε να μην αποκόπτει τις συχνότητες στις οποίες κυμαίνεται η έξοδος του συστήματός μας. Την επιλογή τους θα την διεξάγουμε πειραματικά, παρατηρώντας την επιδρασή τους στην εκτιμώμενη έξοδο του συστήματος.

Χρησιμοποιώντας, λοιπόν, το παραπάνω φίλτρο προκύπτει η μορφή της εξίσωσης:

$$\boxed{z = \theta^{*T} \zeta}, \text{ όπου:}$$

$$z = \frac{1}{\Lambda(s)} y^{(2)} = \frac{s^2}{\Lambda(s)} y,$$

$$\zeta = \begin{bmatrix} -\frac{\Delta_1^T(s)}{\Lambda(s)} y & \frac{\Delta_0^T(s)}{\Lambda(s)} u \end{bmatrix},$$

$$\Lambda(s) = s^2 + \lambda^T \Delta_1(s), \quad \lambda = [\lambda_1 \quad \lambda_2]^T = [p_1 + p_2 \quad p_1 p_2]^T$$

Συνεπώς, έχουμε:

$$\zeta = \frac{s^2}{\Lambda(s)} y = \frac{\Lambda(s) - \lambda^T \Delta_1(s)}{\Lambda(s)} y = y - \frac{\lambda^T \Delta_1(s)}{\Lambda(s)} y$$

Κι άρα:

$$y = z + \frac{\lambda^T \Delta_1(s)}{\Lambda(s)} y \quad (2.3)$$

Χωρίζοντας το διάνυσμα  $z$  με βάση τις παραμέτρους που αφορούν την είσοδο και την έξοδο αντίστοιχα, θα έχουμε:

$$z = \theta^{*T} \zeta = \theta_1^{*T} \zeta_1 + \theta_2^{*T} \zeta_2$$

όπου:

$$\theta_1^* = \begin{bmatrix} \frac{b}{m} & \frac{k}{m} \end{bmatrix}^T \text{ και } \theta_2^* = \frac{1}{m}$$

Έτσι, λοιπόν, η εξίσωση 2.3 γράφεται:

$$\boxed{y = \theta_\lambda^{*T} \zeta} \quad (2.4)$$

όπου:

$$\theta_\lambda^* = [\theta_1^{*T} - \lambda^T \quad \theta_2^{*T}]^T = \begin{bmatrix} \frac{b}{m} - (p_1 + p_2) & \frac{k}{m} - p_1 p_2 & \frac{1}{m} \end{bmatrix}^T \text{ και}$$

$$\zeta = \begin{bmatrix} \frac{[s \quad 1]}{s^2 + (p_1 + p_2)s + p_1 p_2} y & \frac{1}{s^2 + (p_1 + p_2)s + p_1 p_2} u \end{bmatrix}^T$$

## 2.2 Αλγόριθμος Ελαχίστων Τετραγώνων

Προκειμένου να εκτιμήσουμε τις άγνωστες παραμέτρους  $m$ ,  $b$ ,  $k$  του συστήματος, όταν μετράμε μόνο την μετατόπιση  $y$  και την εξωτερική δύναμη  $u$  που εφαρμόζεται στην μάζα, θα εφαρμόσουμε την μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων που αναλύθηκε στην εισαγωγή. Συγκεκριμένα, σχηματίζουμε τον πίνακα  $\Phi$  της σχέσης 1.8 με την βοήθεια του  $\zeta$  της σχέσης 2.4 ως εξής:

$$\Phi = \begin{bmatrix} \zeta_1(1) & \zeta_2(1) & \zeta_3(1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \zeta_1(N) & \zeta_2(N) & \zeta_3(N) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{N \times 3} \quad (2.5)$$

όπου  $\zeta_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  είναι οι συνιστώσες του διανύσματος  $\zeta$ . Έτσι, κατασκευάζοντας και τον πίνακα  $Y$  από τις μετρήσεις της εξόδου για διάφορες τιμές της εισόδου, μπορούμε να υπολογίσουμε μέσω της σχέσης 1.8 τον πίνακα  $\theta_0$ , ο οποίος και μας δίνει τις εκτιμήσεις των παραμέτρων, σύμφωνα με τις σχέσεις:

$$\hat{m} = \frac{1}{\theta_0(3)} \quad (2.6)$$

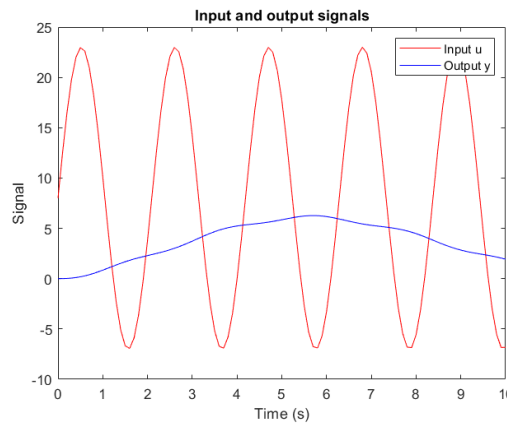
$$\hat{k} = \hat{m}(\theta_0(2) + p_1 p_2) \quad (2.7)$$

$$\hat{b} = \hat{m}(\theta_0(1) + p_1 + p_2) \quad (2.8)$$

Η εκτιμώμενη έξοδος υπολογίζεται από την σχέση  $\hat{y} = \theta_0^T \Phi$ .

## 2.3 Προσομοίωση στο MATLAB

Θεωρούμε ότι  $m = 10 \text{ kg}$ ,  $b = 0.5 \text{ kg/s}$ ,  $k = 2.5 \text{ kg/s}^2$  και  $u = 12\sin(3t) + 8 \text{ N}$ , ώστε δειγματοληπτώντας κάθε  $0.1\text{sec}$  και για συνολικό χρονικό διάστημα  $10\text{sec}$ , να συλλέξουμε αρκετά δεδομένα για την πλήρωση των πινάκων  $Y$  και  $\Phi$  σύμφωνα με την παραπάνω διαδικασία.



Σχήμα 2.2: Είσοδος - έξοδος συστήματος

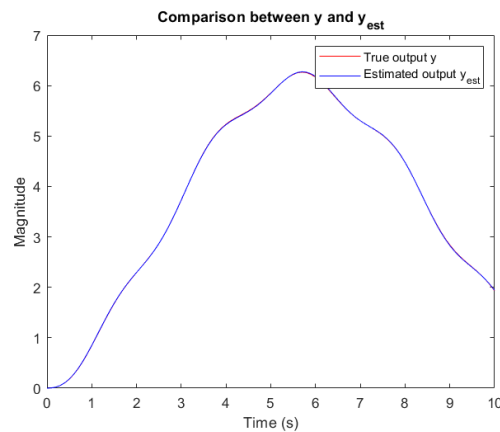


Παραπάνω βλέπουμε σε κοινό διάγραμμα την γραφική παράσταση της εισόδου και της αντίστοιχης εξόδου σύμφωνα με τις υποθέσεις που κάναμε προηγουμένως.

Με βάση τις εξισώσεις 2.6, 2.7 και 2.8 υπολογίζουμε τις εκτιμήσεις των αγνώστων παραμέτρων. Επιλέχθηκαν πειραματικά οι πόλοι στο -1:

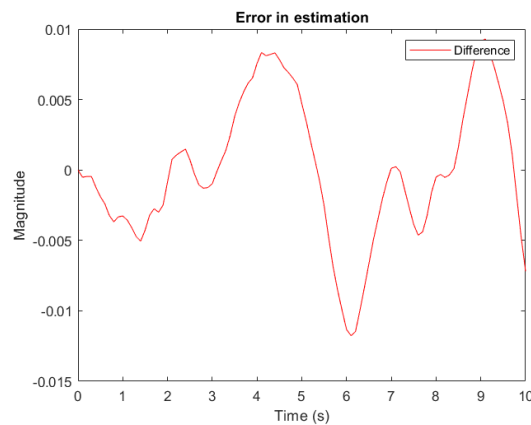
Παράμετρος	Πραγμ. Τιμή	Εκτιμ. Τιμή	Απόκλιση (%)
m	10	9.9468	0.532
b	0.5	0.4631	7.38
k	2.5	2.5076	0.304

Παίρνουμε, έτσι, το κοινό διάγραμμα της πραγματικής εξόδου και τις εκτιμώμενης εξόδου, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



Σχήμα 2.3: Σύγκριση εκτιμώμενης - πραγματικής εξόδου

Βλέπουμε απειροελάχιστη απόκλιση στις δύο γραφικές παραστάσεις, γεγονός που επιβεβαιώνεται κι από το παρακάτω διάγραμμα του σφάλματος πρόβλεψης:



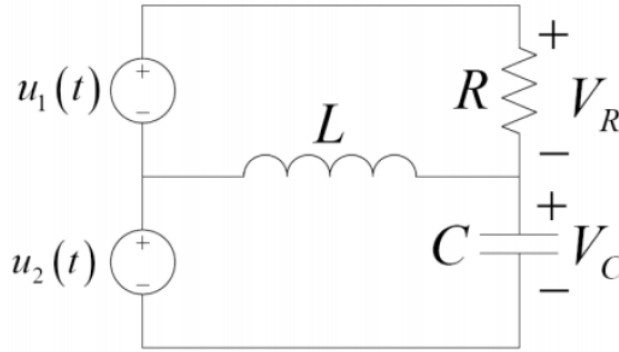
Σχήμα 2.4: Σφάλμα Πρόβλεψης

Από τα παραπάνω πειραματικά δεδομένα εξάγουμε τα εξής συμπεράσματα - παρατηρήσεις:

- Χρησιμοποιήσαμε την συνάρτηση `ode45` του **MATLAB** για `nonstiff` διαφορικές εξισώσεις, καθώς αυτή ήταν η αποδοτικότερη χρονικά επιλογή.
- Ανάλογα με την επιλογή των πόλων πετυχαίνουμε καλύτερη ή χειρότερη εκτίμηση των παραμέτρων. Επιπλέον, εκτιμώντας με μεγαλύτερη ακρίβεια μία από τις παραμέτρους, χάνουμε σε ακρίβεια από τις υπόλοιπες. Αυτό φαίνεται κι από τον παραπάνω πίνακα των παραμέτρων. Παρατηρούμε, ωστόσο, ικανοποιητική ακρίβεια στις εκτιμήσεις, ιδιαίτερα στην έξοδο του συστήματος.
- Το συγκεκριμένο σύστημα από την φυσική του γνωρίζουμε ότι έχει φυσική συχνότητα  $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = 0.365\text{Hz}$  κι επομένως είναι αναμενόμενο η βέλτιστη επιλογή των πόλων να επιτυγχάνεται κοντά στον φανταστικό άξονα όπου οι συχνότητες αποκοπής είναι χαμηλές, όπως και η συχνότητα του συστήματός μας.

### 3 Θέμα 2<sup>ο</sup>

Το δεύτερο υπό μελέτη σύστημα είναι το RLC κύκλωμα του παρακάτω σχήματος:



Σχήμα 3.1: Κύκλωμα RLC

όπου  $u_1(t) = 2\sin(4t)$  V και  $u_2(t) = 4$  V. Μπορούμε να μετρήσουμε μόνο τις τάσεις  $V_R, V_C$  στα άκρα της αντίστασης και του πυκνωτή αντίστοιχα.

#### 3.1 Εκτίμηση Πίνακα Μεταφοράς

Στόχος μας είναι να φέρουμε και πάλι την δυναμική του κυκλώματος σε γραμμικά παραμετροποιημένη μορφή, ώστε να εφαρμόσουμε την μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων και να εκτιμήσουμε, έτσι, τον πίνακα μεταφοράς του. Από τους γνωστούς νόμους του Kirchhoff βρίσκουμε:

$$u_1(t) = V_R + L \frac{di_L}{dt} \quad (3.1)$$

$$u_2(t) = V_C - L \frac{di_C}{dt} \quad (3.2)$$

από τις οποίες προκύπτει η παρακάτω διαφορική εξίσωση, θεωρώντας ότι  $V_R = u_1 + u_2 - V_C$ :

$$\ddot{V}_C + \frac{1}{RC} \dot{V}_C + \frac{1}{LC} V_C = \frac{1}{RC} \dot{u}_1 + \frac{1}{RC} \dot{u}_2 + \frac{1}{LC} u_2 \xrightarrow{y=V_C} \quad (3.3)$$

$$\ddot{y} + \frac{1}{RC} \dot{y} + \frac{1}{LC} y = \frac{1}{RC} \dot{u}_1 + \frac{1}{RC} \dot{u}_2 + \frac{1}{LC} u_2 \quad (3.4)$$

Εργαζόμαστε ακριβώς όπως και στο πρώτο θέμα. Επιλέγουμε ένα ευσταθές φίλτρο δεύτερης τάξης  $\Lambda(s) = s^2 + \lambda^T \Delta_1(s)$  με  $\lambda = [p_1 + p_2 \quad p_1 p_2]^T$  και φέρνουμε το σύστημα στην μορφή:

$$y = \theta_\lambda^{*T} \zeta \quad (3.5)$$

όπου:

$$\theta_\lambda^* = \begin{bmatrix} \frac{1}{RC} - (p_1 + p_2) & \frac{1}{LC} - p_1 p_2 & \frac{1}{RC} & 0 & \frac{1}{RC} & \frac{1}{LC} \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

και:

$$\zeta = \begin{bmatrix} \frac{[s \ 1]}{s^2 + (p_1 + p_2)s + p_1 p_2} y & \frac{[s \ 1]}{s^2 + (p_1 + p_2)s + p_1 p_2} u_1 & \frac{[s \ 1]}{s^2 + (p_1 + p_2)s + p_1 p_2} u_2 \end{bmatrix}^T \quad (3.7)$$

Προκειμένου να εκτιμήσουμε τώρα τις άγνωστες παραμέτρους  $RC$  και  $LC$  του συστήματος θα εφαρμόσουμε και πάλι την μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων που αναλύθηκε στην εισαγωγή. Συγκεκριμένα, σχηματίζουμε τον πίνακα  $\Phi$  της σχέσης 1.8 με την βοήθεια του  $\zeta$  της σχέσης 2.4 ως εξής:

$$\Phi = \begin{bmatrix} \zeta_1(1) & \zeta_2(1) & \zeta_3(1) & \zeta_4(1) & \zeta_5(1) & \zeta_6(1) \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \zeta_1(N) & \zeta_2(N) & \zeta_3(N) & \zeta_4(N) & \zeta_5(N) & \zeta_6(N) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{N \times 6} \quad (3.8)$$

όπου  $\zeta_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, 6$  είναι οι συνιστώσες του διανύσματος  $\zeta$ . Έτσι, κατασκευάζοντας και τον πίνακα  $Y$  από τις μετρήσεις της εξόδου για διάφορες τιμές της εισόδου, μπορούμε να υπολογίσουμε μέσω της σχέσης 1.8 τον πίνακα  $\theta_0$ , ο οποίος και μας δίνει τις εκτιμήσεις των παραμέτρων:

$$\theta_0 = \begin{bmatrix} \frac{1}{RC} & \frac{1}{LC} & \frac{1}{RC} & 0 & \frac{1}{RC} & \frac{1}{LC} \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

Παρατηρούμε ότι οι παράμετροι αυτές βρίσκονται σε παραπάνω από ένα στοιχεία του διανύσματος κι επομένως στόχος μας είναι να βρούμε πειραματικά τους κατάλληλους πόλους ώστε οι τιμές αυτές να συμβαδίζουν όσο το δυνατόν καλύτερα. Παράλληλα φροντίζουμε ώστε το σφάλμα που περιγράφεται από την σχέση 1.2 να ελαχιστοποιηθεί.

Αφού, λοιπόν, έχουμε εκτιμήσει τις παραμέτρους  $RC, LC$  μπορούμε να προχωρήσουμε στην εύρεση του πίνακα μεταφοράς του συστήματος. Αυτός μας δίνει τις επιμέρους συναρτήσεις μεταφοράς για την εκάστοτε είσοδο κι έξοδο του συστήματος εάν αυτές θεωρηθούν ανεξάρτητες. Έτσι, εφαρμόζουμε τον μετασχηματισμό Laplace στην διαφορική εξίσωση 3.4 κι έχουμε:

$$V_C(s) \left( s^2 + \frac{s}{RC} + \frac{1}{LC} \right) = \frac{s}{RC} U_1(s) + \left( \frac{s}{RC} + \frac{1}{LC} \right) U_2(s) \quad (3.10)$$

από την οποία:

- για  $U_2(s) = 0$ :

$$G_{C1} = \frac{V_C(s)}{U_1(s)} = \frac{\frac{s}{RC}}{s^2 + \frac{s}{RC} + \frac{1}{LC}}$$

- για  $U_1(s) = 0$ :

$$G_{C2} = \frac{V_C(s)}{U_2(s)} = \frac{\frac{s}{RC} + \frac{1}{LC}}{s^2 + \frac{s}{RC} + \frac{1}{LC}}$$

Γνωρίζοντας τώρα ότι  $V_R = u_1 + u_2 - V_C$  βρίσκουμε με παρόμοιο τρόπο:

$$V_R(s) \left( s^2 + \frac{s}{RC} + \frac{1}{LC} \right) = \left( s^2 + \frac{1}{LC} \right) U_1(s) + s^2 U_2(s) \quad (3.11)$$

από την οποία:

- για  $U_2(s) = 0$ :

$$G_{R1} = \frac{V_R(s)}{U_1(s)} = \frac{s^2 + \frac{1}{LC}}{s^2 + \frac{s}{RC} + \frac{1}{LC}}$$

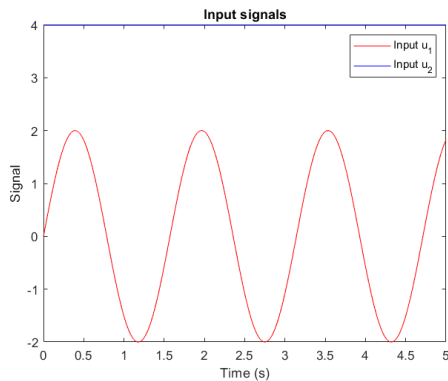
- για  $U_1(s) = 0$ :

$$G_{R2} = \frac{V_R(s)}{U_2(s)} = \frac{s^2}{s^2 + \frac{s}{RC} + \frac{1}{LC}}$$

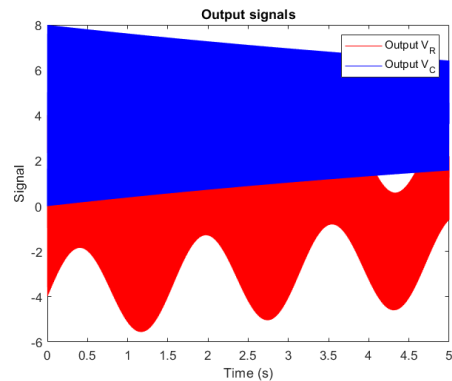
Έτσι, λοιπόν, ο πίνακας μεταφοράς του κυκλώματος περιγράφεται από την σχέση:

$$\begin{bmatrix} V_R \\ V_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{R1} & G_{R2} \\ G_{C1} & G_{C2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

Όσον αφορά, τώρα, τις προσομοιώσεις στο **MATLAB** δουλεύουμε όπως και στο πρώτο θέμα. Παρακάτω βλέπουμε σε κοινό διάγραμμα την γραφική παράσταση των εισόδων και των αντίστοιχων εξόδων:

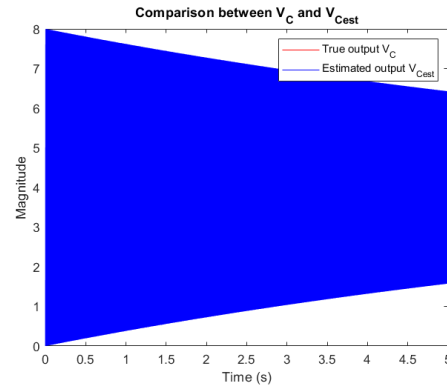


Σχήμα 3.2: Είσοδοι συστήματος

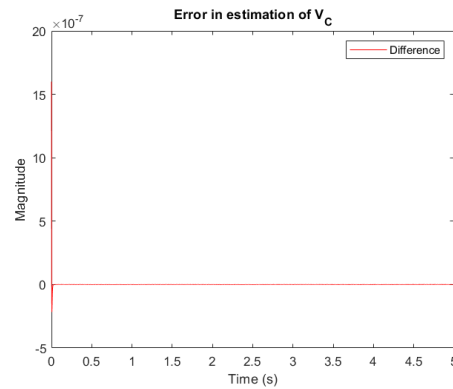


Σχήμα 3.3: Έξοδοι συστήματος

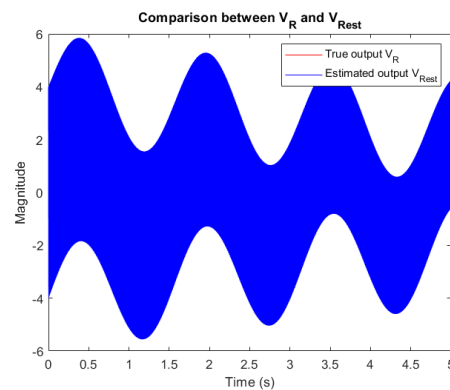
Παίρνουμε, στη συνέχεια, το κοινό διάγραμμα της πραγματικής εξόδου  $V_C$  και τις εκτιμώμενης, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:

Σχήμα 3.4: Σύγκριση εκτιμώμενης - πραγματικής εξόδου  $V_C$ 

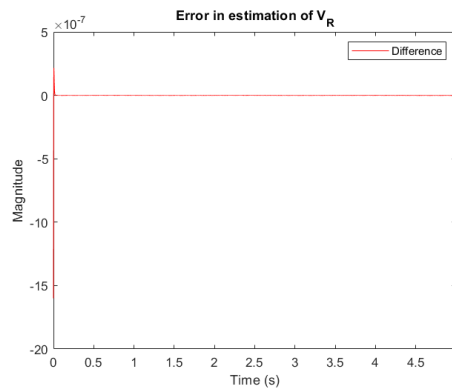
Βλέπουμε απειροελάχιστη απόκλιση στις δύο γραφικές παραστάσεις, γεγονός που επιβεβαιώνεται κι από το παρακάτω διάγραμμα του σφάλματος πρόβλεψης:

Σχήμα 3.5: Σφάλμα Πρόβλεψης  $V_C$ 

Όμοια παίρνουμε το κοινό διάγραμμα της πραγματικής εξόδου  $V_R$  και τις εκτιμώμενης, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:

Σχήμα 3.6: Σύγκριση εκτιμώμενης - πραγματικής εξόδου  $V_R$

Βλέπουμε απειροελάχιστη απόκλιση στις δύο γραφικές παραστάσεις, γεγονός που επιβεβαιώνεται κι από το παρακάτω διάγραμμα του σφάλματος πρόβλεψης:



Σχήμα 3.7: Σφάλμα Πρόβλεψης  $V_R$

Με την επιλογή των πόλων στο -400 έχουμε τα παραπάνω πολύ ικανοποιητικά αποτελέσματα και οι τιμές των παραμέτρων εκτιμώνται ως  $RC = 7.5026$  και  $LC = 10^{-6}$ .

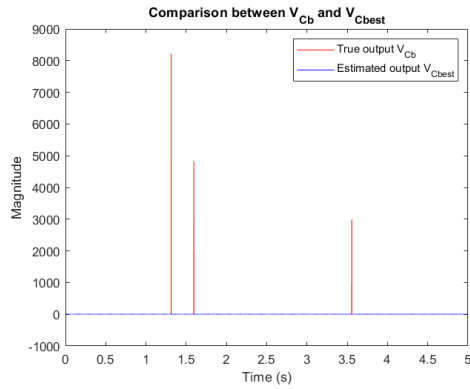
Συμπεράσματα - παρατηρήσεις:

- Χρησιμοποιήσαμε την συνάρτηση `lsim` του **MATLAB** για το φιλτράρισμα του σήματος εξόδου όπως περιγράφηκε στην 3.5.
- Ανάλογα με την επιλογή των πόλων πετυχαίνουμε καλύτερη ή χειρότερη εκτίμηση των παραμέτρων. Το συγκεκριμένο σύστημα έχει μεγάλη συχνότητα γι' αυτό και για να πετύχουμε ικανοποιητικές εκτιμήσεις θα πρέπει να λάβουμε με μεγάλη συχνότητα και τα δείγματα εισόδων-εξόδων. Για τον ίδιο λόγο επιλέγουμε και τους πόλους μας αρκετά μακριά από τον φανταστικό άξονα. Εξαιτίας αυτού τα διαγράμματα των σημάτων μας εκφυλίζονται σε επιφάνειες, ενώ στην πραγματικότητα εάν μεγενθυθούν θα διαπιστωθεί ότι πρόκειται για καμπύλες.

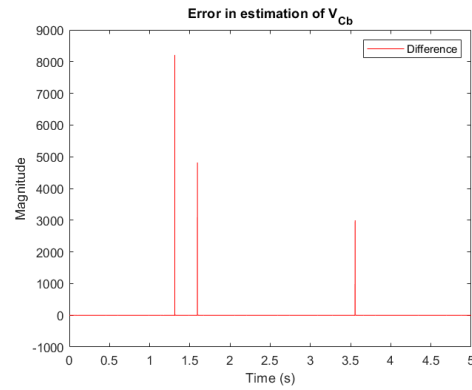
## 3.2 Έλεγχος Ευρωστίας

Προκειμένου να εξετάσουμε την αντοχή της μεθόδου μας στην είσοδο διαταραχών θεωρούμε ότι οι μετρήσεις  $V_R, V_C$  λαμβάνονται εσφαλμένα, παράγοντας τα σήματα όπως πριν και προσθέτοντας σε 3 τυχαίες χρονικές στιγμές κάποιους τυχαίους αριθμούς πολύ μεγαλύτερης τάξης μεγέθους από τις κανονικές τιμές.

Βλέπουμε παρακάτω το κοινό διάγραμμα της πραγματικής εξόδου  $V_C$  και τις εκτιμώμενης, καθώς και το αντίστοιχο σφάλμα πρόβλεψης:

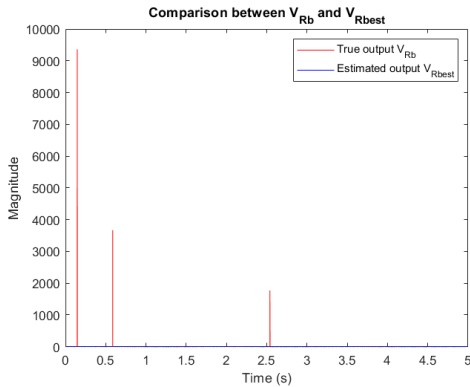


Σχήμα 3.8: Σύγκριση εκτιμώμενης - πραγματικής εξόδου  $V_C$

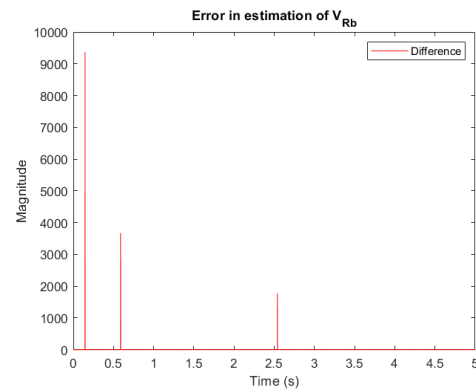


Σχήμα 3.9: Σφάλμα Πρόβλεψης  $V_C$

Ομοίως βλέπουμε το κοινό διάγραμμα της πραγματικής εξόδου  $V_R$  και τις εκτιμώμενες, καθώς και το αντίστοιχο σφάλμα πρόβλεψης:



Σχήμα 3.10: Σύγκριση εκτιμώμενης - πραγματικής εξόδου  $V_R$



Σχήμα 3.11: Σφάλμα Πρόβλεψης  $V_R$

Οι τιμές των παραμέτρων εκτιμώνται ως  $RC = 0.0167$  και  $LC = 10^{-6}$ , δηλαδή με μεγάλη απόκλιση σε σχέση με την προηγούμενη εκτίμηση.

Συμπεράσματα - παρατηρήσεις:

- Χρησιμοποιήσαμε την συνάρτηση `lsim` του **MATLAB** για το φιλτράρισμα του σήματος εξόδου όπως περιγράφηκε στην 3.5.
- Οι παραπάνω τιμές δείχνουν ότι τα αποτελέσματα έχουν αποκτήσει μεγάλη απόκλιση από τις αναμενόμενες τιμές, όταν συγκρίνονται με τα αποτελέσματα χωρίς θόρυβο. Ουσιαστικά, η προσθήκη θορύβου στα δεδομένα οδηγεί σε μία «μεροληψία» του αλγορίθμου, η οποία οφείλεται στις ακραίες τιμές και μπορεί να οδηγήσει σε αλλαγή του σημείου ελαχίστου. Αυτό αποτελεί ένα γνωστό πρόβλημα της μεθόδου ελαχίστων τετραγώνων, γι' αυτό και τέτοιες ακραίες τιμές στα δεδομένα μας, εάν είναι δυνατόν, θα πρέπει να αποβάλλονται.