

Προσομοίωση και Μοντελοποίηση Δυναμικών Συστημάτων

2^η Εργασία Μαθήματος 2022 - 2023

Αλεξόπουλος Δημήτριος AEM 10091
aadimitri@ece.auth.gr

Περιεχόμενα

| | | |
|-------|----------------------------------|----|
| 1 | Εισαγωγή | 4 |
| 2 | Θέμα 1 ^ο | 5 |
| 2.1 | Θεωρητική Ανάλυση | 5 |
| 2.2 | Προσομοίωση Συστήματος | 7 |
| 2.2.1 | Σταθερή Είσοδος | 8 |
| 2.2.2 | Ημιτονοειδής Είσοδος | 8 |
| 3 | Θέμα 2 ^ο | 10 |
| 3.1 | Παράλληλη Δομή | 10 |
| 3.2 | Μικτή Δομή | 12 |
| 3.3 | Ευρωστία | 14 |
| 3.4 | Προσομοίωση Συστήματος | 14 |
| 3.4.1 | Παράλληλη Δομή | 14 |
| 3.4.2 | Μικτή Δομή | 15 |
| 4 | Θέμα 3 ^ο | 18 |
| 4.1 | Θεωρητική Ανάλυση | 18 |
| 4.2 | Προσομοίωση Συστήματος | 20 |

Κατάλογος Σχημάτων

| | | |
|-----|--|----|
| 2.1 | Σφάλμα αναγνώρισης για σταθερή είσοδο | 8 |
| 2.2 | Εκτίμηση παραμέτρων για σταθερή είσοδο | 8 |
| 2.3 | Σφάλμα αναγνώρισης για ημιτονοειδή είσοδο | 9 |
| 2.4 | Εκτίμηση παραμέτρων για ημιτονοειδή είσοδο | 9 |
| 3.1 | Τοπολογία παράλληλης δομής | 10 |
| 3.2 | Τοπολογία μιστής δομής | 12 |
| 3.3 | Παράλληλη Δομή χωρίς θόρυβο | 15 |
| 3.4 | Παράλληλη Δομή με θόρυβο | 15 |
| 3.5 | Μιστή Δομή χωρίς θόρυβο | 16 |
| 3.6 | Μιστή Δομή με θόρυβο | 16 |
| 3.7 | Παράλληλη Δομή με υψηλής συχνότητας θόρυβο | 17 |
| 3.8 | Μιστή Δομή με υψηλής συχνότητας θόρυβο | 17 |
| 4.1 | Εκτίμηση διανύσματος εξόδου | 20 |
| 4.2 | Σφάλμα αναγνώρισης εξόδου | 21 |
| 4.3 | Εκτίμηση των παραμέτρων του A | 21 |
| 4.4 | Εκτίμηση των παραμέτρων του B | 21 |

1 Εισαγωγή

Στην παρούσα εργαστηριακή άσκηση θα μελετήσουμε την on-line εκτίμηση άγνωστων παραμέτρων με τη μέθοδο της κλίσης και τη μέθοδο Lyapunov. Οι μέθοδοι αυτές αποσκοπούν στην εκτίμηση των παραμέτρων κατά την διάρκεια της λειτουργίας του συστήματος, γι' αυτό και οι αλγόριθμοι που χρησιμοποιούνται στις περιπτώσεις αυτές πρέπει να είναι υπολογιστικά απλοί.

Έτσι, εγγυόμαστε ότι η επεξεργασία των μετρήσεων του συστήματος που λαμβάνονται μια χρονική στιγμή θα έχει ολοκληρωθεί με βεβαιότητα πριν λάβει χώρα η επόμενη δειγματοληψία. Διαφορετικά, η κατασκευή του μοντέλου δεν θα μπορούσε να αντιμετωπίσει τον ρυθμό εισροής πληροφοριών.

2 Θέμα 1^ο

Το πρώτο σύστημα που θα μελετήσουμε περιγράφεται από την παρακάτω διαφορική εξίσωση:

$$\dot{x} = -ax + bu, \quad x(0) = 0 \quad (2.1)$$

όπου x είναι η κατάσταση του συστήματος, u είναι η είσοδος και a, b σταθερές αλλά άγνωστες παράμετροι, τις οποίες θέλουμε να εκτιμήσουμε *on-line*.

2.1 Θεωρητική Ανάλυση

Αρχικά, θα χρησιμοποιήσουμε την μέθοδο κλίσης (gradient) για την εκτίμηση των παραμέτρων του συστήματος (2.1). Για την εφαρμογή της μεθόδου αυτής θα πρέπει πρώτα να φέρουμε το σύστημά μας σε γραμμικά παραμετρική μορφή. Καθώς είναι πρώτης τάξης σύστημα θα χρησιμοποιήσουμε ένα ευσταθές φίλτρο επίσης πρώτης τάξης $1/\Lambda(s)$ με $\Lambda(s) = s + a_m$ και $a_m > 0$. Προσθαφαιρούμε, λοιπόν, στην (2.1) τον όρο a_mx και παίρνοντας μετασχηματισμό Laplace και στα δύο μέλη της εξίσωσης έχουμε:

$$\dot{x} + a_mx = -ax + a_mx + bu \Rightarrow \quad (2.2)$$

$$(s + a_m)x = (a_m - a)x + bu \Rightarrow \quad (2.3)$$

$$x = \frac{1}{s + a_m} [(a_m - a)x + bu] \quad (2.4)$$

Έτσι, έχουμε φέρει πλέον το σύστημά μας στην γραμμικά παραμετρική μορφή $\boxed{x = \theta^* \phi}$, όπου:

$$\theta^* = [a_m - a \quad b] \quad (2.5)$$

$$\phi = \left[\frac{1}{(s + a_m)}x \quad \frac{1}{(s + a_m)}u \right]^T \quad (2.6)$$

Θεωρούμε το σύστημα αναγνώρισης $\hat{x} = \hat{\theta} \phi$, όπου $\hat{\theta}$ είναι το διάνυσμα με τις εκτιμήσεις των αγνώστων παραμέτρων. Ορίζουμε, επίσης, το σφάλμα αναγνώρισης του συστήματος ως εξής:

$$e = x - \hat{x} = x - \hat{\theta} \phi = (\theta^* - \hat{\theta}) \phi \Rightarrow \quad (2.7)$$

$$e = -\tilde{\theta} \phi \quad (2.8)$$

όπου $\tilde{\theta} = \hat{\theta} - \theta^*$ είναι το παραμετρικό σφάλμα του συστήματος.

Η μέθοδος της κλίσης που θα χρησιμοποιήσουμε στηρίζεται για την εύρεση της αναδρομικής εκτίμησης $\hat{\theta}$ του θ^* στην ελαχιστοποίηση ως προς $\hat{\theta}$ κατάλληλα ορισμένης συνάρτησης κόστους του σφάλματος e . Χρησιμοποιούμε την συνάρτηση κόστους:

$$K(\hat{\theta}) = \frac{e^2}{2} = \frac{(x - \hat{\theta}\phi)^2}{2} \quad (2.9)$$

Σύμφωνα, λοιπόν, με την μέθοδο αυτή κι επειδή η $K(\hat{\theta})$, όπως ορίστηκε, είναι κυρτή $\forall t \geq 0$, κάθε τοπικό ελάχιστο της $K(\hat{\theta})$ θα είναι και ολικό και θα ικανοποιεί την εξίσωση $\nabla K(\hat{\theta})|_{\hat{\theta}=\theta^*} = 0$. Έτσι, για την εκτίμηση των παραμέτρων θα έχουμε:

$$\dot{\hat{\theta}} = -\gamma \nabla K(\hat{\theta}) \text{ με } \nabla K(\hat{\theta}) = -(x - \hat{\theta}\phi)\phi = -e\Phi \quad (2.10)$$

δηλαδή, $\dot{\hat{\theta}} = \gamma e\phi$ με $\gamma > 0$ και $\hat{\theta}(0) = [0 \ 0]^T$ της επιλογής μας.

Για την πλήρη περιγραφή, λοιπόν, του αρχικού συστήματος και του συστήματος αναγνώρισης που κατασκευάσαμε, μπορούμε να καταγράψουμε τις παρακάτω εξισώσεις:

$$\begin{cases} \dot{x} = -ax + bu, & x(0) = 0 \\ \dot{\phi} = a_m\phi + x, & \phi(0) = [0 \ 0]^T \\ \dot{\hat{\theta}} = \gamma e\phi, & \hat{\theta}(0) = [0 \ 0]^T \end{cases} \quad (2.11)$$

και επιλύοντας το παραπάνω σύστημα, οι άγνωστες παράμετροι που αναζητούμε προκύπτουν:

$$\hat{\theta} = \begin{cases} \hat{\theta}_1 = a_m - \hat{a} \\ \hat{\theta}_2 = \hat{b} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \hat{a} = a_m - \hat{\theta}_1 \\ \hat{b} = \hat{\theta}_2 \end{cases} \quad (2.12)$$

Επιθυμούμε, τώρα, να μελετήσουμε την ευστάθεια της μεθόδου κλίσης και την συνθήκη που θα πρέπει να ικανοποιεί η διέγερση του συστήματος, ώστε να παρέχει την απαραίτητη πληροφορία για την on-line εκτίμηση των παραμέτρων.

Αν παραγωγίσουμε το παραμετρικό σφάλμα $\tilde{\theta}$ ως προς τον χρόνο προκύπτει ότι:

$$\dot{\tilde{\theta}} = \dot{\hat{\theta}} - \dot{\theta}^* = \gamma e\phi \quad (2.13)$$

και χρησιμοποιώντας την (2.8) έχουμε:

$$\dot{\tilde{\theta}} = -\gamma \tilde{\theta}\phi^2, \text{ με } \tilde{\theta}(0) = \hat{\theta}(0) - \theta^* \quad (2.14)$$

Η ανάλυση της ευστάθειας του συστήματος ανάγεται, έτσι, στην ανάλυση ευστάθειας της (2.14) και για τον σκοπό αυτό θεωρούμε την συνάρτηση Lyapunov:

$$V = \frac{\tilde{\theta}^2}{2} \geq 0 \text{ με χρονική παράγωγο} \quad (2.15)$$

με χρονική παράγωγο:

$$\dot{V} = \tilde{\theta} \dot{\tilde{\theta}} = -\gamma \phi^2 \tilde{\theta}^2 = -\gamma e^2 \leq 0 \quad (2.16)$$

Συμπεραίνουμε, έτσι, ότι το παραμετρικό σφάλμα $\tilde{\theta}$ είναι ομοιόμορφα φραγμένο ή $\tilde{\theta} \in L_\infty$. Επειδή $\tilde{\theta} = \hat{\theta} - \theta^*$ και θ^* σταθερό, έχουμε και $\hat{\theta} \in L_\infty$. Η V είναι κάτω φραγμένη από το μηδέν και φθίνουσα, επομένως $\lim_{t \rightarrow \infty} V(\tilde{\theta}(t)) = V_\infty$ υπάρχει. Ολοκληρώνοντας και τα δύο μέλη της (2.16) βρίσκουμε:

$$\int_0^\infty e^2 d\tau = -\frac{1}{\gamma} \int_0^\infty \dot{V}(\tau) d\tau = -\frac{1}{\gamma} [V_\infty - V(0)] \text{ με } V(0) = \frac{\tilde{\theta}^2(0)}{2} \quad (2.17)$$

Προκύπτει, λοιπόν, ότι $e \in L_2$. Λαμβάνοντας υπόψη ότι $\hat{x} = \hat{\theta} \phi$ με $\hat{\theta}, \phi \in L_\infty$ θα είναι $\hat{x} \in L_\infty$ και $e = x - \hat{x} \in L_\infty$. Λόγω γινομένου ομοιόμορφα φραγμένων συναρτήσεων έχουμε κι ότι $\dot{e} = -\dot{\tilde{\theta}} \phi - \tilde{\theta} \dot{\phi} \in L_\infty$ κι επομένως από το Λήμμα του Barbalat μπορούμε να συμπεράνουμε ότι $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$. Επειδή $\dot{\hat{\theta}} = -\gamma e \phi$ θα έχουμε και $\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\hat{\theta}} = 0$ ως γινόμενο συνάρτησης που έχει όριο το μηδέν, με ομοιόμορφα φραγμένη.

Συμπεραίνουμε, έτσι, ότι για εισόδους που ικανοποιούν $u, \dot{u} \in L_\infty$, ο αναδρομικός νόμος μεταβολής των εκτιμώμενων παραμέτρων εξασφαλίζει ότι η εκτιμώμενη έξοδος $\hat{x}(t)$ του συστήματος αναγνώρισης $\hat{x} = \hat{\theta} \phi$ θα συγκλίνει ασυμπτωματικά στην έξοδο $x(t)$ του πραγματικού συστήματος $x(t) = \theta^* \phi(t)$. Αυτό, όμως, δεν σημαίνει κι ότι το διάνυσμα των εκτιμώμενων παραμέτρων $\hat{\theta}(t)$ θα συγκλίνει στο διάνυσμα των πραγματικών παραμέτρων θ^* . Όπως θα δούμε και παρακάτω για να εγγυηθούμε αυτή τη σύγκλιση θα πρέπει να τηρείται η Συνθήκη Επιμέρους Διέγερσης (ΣΕΔ) σύμφωνα με την οποία ένα τμηματικά συνεχές διανυσματικό σήμα $\phi(t) : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ θα λέγεται ότι ικανοποιεί την ΣΕΔ με επίπεδο διέγερσης $\alpha_0 > 0$, αν υπάρχουν σταθερές $\alpha_1, T_0 > 0$ τέτοιες ώστε:

$$\alpha_1 I \geq \frac{1}{T_0} \int_t^{t+T_0} \phi(\tau) \phi^T(\tau) d\tau \geq \alpha_0 I, \quad \forall t \geq 0 \quad (2.18)$$

με I τον μοναδιαίο πίνακα.

Η παραπάνω συνθήκη είναι δύσχρηστη, ωστόσο για την περίπτωση των γραμμικών συστημάτων, η ΣΕΔ απλοποιείται σε μία ισοδύναμη απαίτηση για την είσοδο u του συστήματος. Συγκεκριμένα, εάν το $\phi \in \mathbb{R}_n$ προκύπτει ως $\phi = H(s)u, u \in \mathbb{R}$, όπου το $H(s)$ είναι ένα διάνυσμα που απαρτίζεται από αυστηρά κανονικές συναρτήσεις μεταφοράς και έχουν όλες ευσταθείς πόλους, και $H(j\omega_1), H(j\omega_2), \dots, H(j\omega_n)$ γραμμικά ανεξάρτητα $\forall \omega_1, \dots, \omega_n \in \mathbb{R}, \omega_i \neq \omega_j, i \neq j$, τότε το ϕ ικανοποιεί τη ΣΕΔ αν και μόνον αν το u είναι ικανά πλούσιο τάξεως n .

Ένα σήμα $u \in \mathbb{R}$ θα λέγεται ικανά πλούσιο τάξεως n εάν περιέχει τουλάχιστον $\frac{n}{2}$ μη μηδενικές διακριτές συχνότητες.

Στη συνέχεια, θα γίνει εμφανής η σημασία της ΣΕΔ, καθώς θα προσομοιώσουμε το σύστημα μας και το σύστημα αναγνώρισης που σχεδιάσαμε για δύο διαφορετικές εισόδους.

2.2 Προσομοίωση Συστήματος

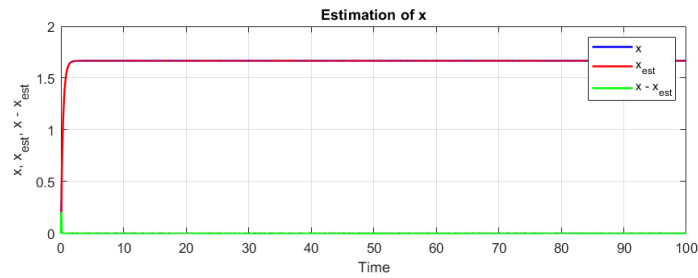
Θα χρησιμοποιήσουμε το MATLAB για την προσομοίωση τόσο του πραγματικού υπό μελέτη συστήματος, όσο και του συστήματος αναγνώρισης που κατασκευάσαμε στην παραπάνω

θεωρητική ανάλυση. Για τον σκοπό αυτό αρκεί να επιλύσουμε το σύστημα (2.11) με τιμές πραγματικών παραμέτρων ίσες με $a = 3$ και $b = 0.5$.

2.2.1 Σταθερή Είσοδος

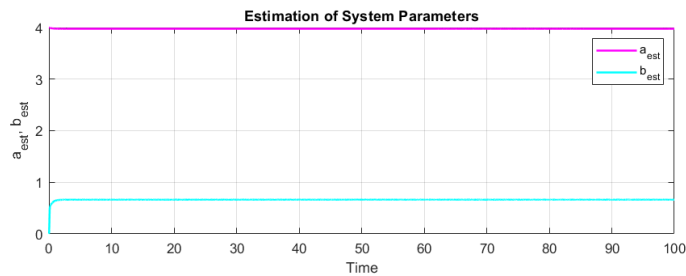
Αρχικά θεωρούμε σαν είσοδο του συστήματος την $u = 10$ με την οποία θα επιχειρήσουμε να εκτιμήσουμε τις παραμέτρους του συστήματος. Δοκιμάζουμε διάφορες τιμές για τις παραμέτρους της επιλογής μας γ και a_m , ωστόσο παρατηρούμε ότι η εκτίμηση των παραμέτρων a και b του συστήματος αποτυγχάνει ανεξάρτητα της επιλογής, παρόλο που η εκτιμώμενη έξοδος του συστήματος αναγνώρισης συγκλίνει στην πραγματική έξοδο.

Πράγματι, παρακάτω βλέπουμε την πραγματική και την εκτιμώμενη έξοδο, καθώς και την διαφορά τους ως σφάλμα αναγνώρισης:



Σχήμα 2.1: Σφάλμα αναγνώρισης για σταθερή είσοδο

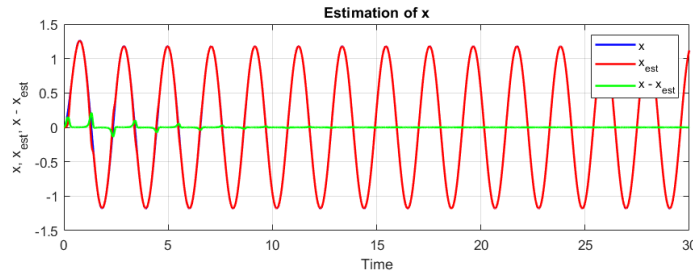
Ωστόσο οι τιμές των παραμέτρων που εκτιμώνται μέσω του συστήματος αναγνώρισης που κατασκευάσαμε δεν συγκλίνουν στις πραγματικές τιμές του συστήματος και μάλιστα εξαρτώνται από την επιλογή του a_m :



Σχήμα 2.2: Εκτίμηση παραμέτρων για σταθερή είσοδο

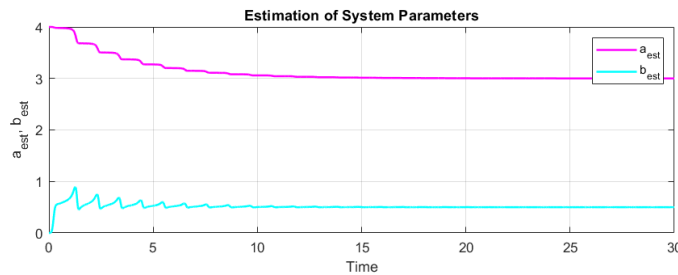
2.2.2 Ημιτονοειδής Είσοδος

Θεωρούμε έπειτα σαν είσοδο του συστήματος την $u = 10\sin(3t)$ με την οποία θα επιχειρήσουμε και πάλι να εκτιμήσουμε τις παραμέτρους του συστήματος. Δοκιμάζουμε διάφορες τιμές για τις παραμέτρους της επιλογής μας γ και a_m . Παρακάτω βλέπουμε για ενδεικτικές τιμές παραμέτρων την πραγματική και την εκτιμώμενη έξοδο, καθώς και την διαφορά τους ως σφάλμα αναγνώρισης:



Σχήμα 2.3: Σφάλμα αναγνώρισης για ημιτονοειδή είσοδο

Οι τιμές των παραμέτρων που εκτιμώνται μέσω του συστήματος αναγνώρισης που κατασκευάσαμε συγκλίνουν στις πραγματικές τιμές του συστήματος και μάλιστα ανεξάρτητα από την επιλογή του a_m :



Σχήμα 2.4: Εκτίμηση παραμέτρων για ημιτονοειδή είσοδο

Συμπεράσματα - Παρατηρήσεις:

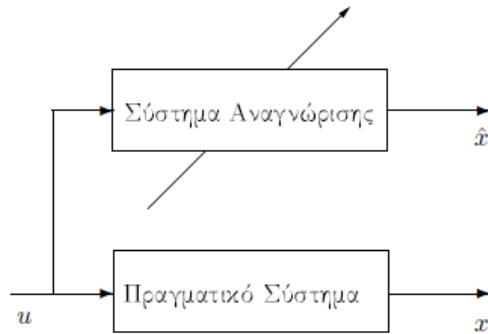
- Τα παραπάνω διαγράμματα παρουσιάζονται με ενδεικτικές τιμές παραμέτρων της επιλογής μας ίσες με $a_m = 4$ και $\gamma = 50$. Δοκιμάζοντας κι άλλες τιμές των παραμέτρων αυτών διαπιστώνουμε ότι όσο μεγαλύτερη είναι η τιμή του γ τόσο γρηγορότερη είναι η σύγκλιση στην τελική τιμή που λαμβάνει η εκτίμηση. Το ίδιο ισχύει και για τιμές της παραμέτρου a_m που είναι κοντά στην πραγματική τιμή της παραμέτρου a του συστήματος.
- Στην περίπτωση της σταθερής εισόδου παρατηρήσαμε ότι η εκτίμηση των παραμέτρων a και b του συστήματος αποτυγχάνει ανεξάρτητα της επιλογής των a_m, γ , παρόλο που η εκτιμώμενη έξοδος του συστήματος αναγνώρισης συγκλίνει στην πραγματική έξοδο. Αυτό είναι αναμενόμενο, καθώς σύμφωνα με την ανάλυση που προηγήθηκε η σταθερή είσοδος $u = 10$ δεν ικανοποιεί την ΣΕΔ (2.18). Πράγματι, το σήμα της εισόδου δεν είναι ικανά πλούσιο τάξεως $n = 2$, καθώς περιέχει μόνο την μηδενική συχνότητα.
- Στην περίπτωση, αντίθετα, της εισόδου $u = 10\sin(3t)$ η ΣΕΔ ικανοποιείται, καθώς έχουμε $n/2 = 1$ συχνότητα διάφορη του μηδενός κι επομένως η διέγερση περιέχει την απαραίτητη πληροφορία για την εκτίμηση των δύο παραμέτρων του συστήματός μας.

3 Θέμα 2^ο

Στη συνέχεια θα μελετήσουμε μια δεύτερη μέθοδο on-line εκτίμησης των παραμέτρων του συστήματος, τη μέθοδο κατά Lyapunov. Θεωρούμε και πάλι το σύστημα (2.1) του θέματος 1, ωστόσο αυτή τη φορά με μοναδική είσοδο $u = 10\sin(3t)$. Θα κατασκευάσουμε δύο συστήματα αναγνώρισης, ένα στηριζόμενο στην παράλληλη δομή κι ένα στην μικτή δομή, ενώ θα μελετήσουμε και την επίδραση του θορύβου σε κάθε μία από αυτές.

3.1 Παράλληλη Δομή

Η Παράλληλη Δομή στην on-line εκτίμηση των παραμέτρων κατά Lyapunov χρησιμοποιεί αποκλειστικά σήματα που παράγονται από το σύστημα αναγνώρισης και έχει την παρακάτω τοπολογία:



Σχήμα 3.1: Τοπολογία παράλληλης δομής

Ξαναγράφουμε την (2.1) στην παρακάτω μορφή, θεωρώντας ότι $\theta_1^* = a$ και $\theta_2^* = b$:

$$\dot{x} = -\theta_1^* x + \theta_2^* u, \text{ με } x(0) = 0 \quad (3.1)$$

Ορίζουμε, έπειτα, το σύστημα αναγνώρισης ως:

$$\dot{\hat{x}} = -\hat{\theta}_1 \hat{x} + \hat{\theta}_2 u, \text{ με } \hat{x}(0) = 0 \quad (3.2)$$

και το σφάλμα εκτίμησης ως:

$$e = x - \hat{x} \quad (3.3)$$

από το οποίο παραγωγίζοντας ως προς τον χρόνο παίρνουμε:

$$\dot{e} = \dot{x} - \dot{\hat{x}} = -\theta_1^* x + \hat{\theta}_1 \hat{x} - (\hat{\theta}_2 - \theta_2^*) u \quad (3.4)$$

Προσθαφαιρούμε τον όρο $\theta_1^* \hat{x}$ κι έχουμε:

$$\dot{e} = -\theta_1^*(x - \hat{x}) + (\hat{\theta}_1 - \theta_1^*)\hat{x} - (\hat{\theta}_2 - \theta_2^*)u = -\theta_1^*e + \tilde{\theta}_1\hat{x} - \tilde{\theta}_2u \quad (3.5)$$

όπου $\tilde{\theta}_1 = \hat{\theta}_1 - \theta_1^*$ και $\tilde{\theta}_2 = \hat{\theta}_2 - \theta_2^*$ ορίζονται τα παραμετρικά σφάλματα.

Για να προχωρήσουμε στην ανάλυσή μας θεωρούμε την συνάρτηση Lyapunov:

$$V = \frac{1}{2}e^2 + \frac{1}{2\gamma_1}\tilde{\theta}_1^2 + \frac{1}{2\gamma_2}\tilde{\theta}_2^2 \geq 0 \text{ με } \gamma_1, \gamma_2 > 0 \quad (3.6)$$

με χρονική παράγωγο:

$$\dot{V} = e\dot{e} + \frac{1}{\gamma_1}\tilde{\theta}_1\dot{\tilde{\theta}}_1 + \frac{1}{\gamma_2}\tilde{\theta}_2\dot{\tilde{\theta}}_2 = -\theta_1^*e^2 - \tilde{\theta}_2eu + \tilde{\theta}_1e\hat{x} + \frac{1}{\gamma_1}\tilde{\theta}_1\dot{\hat{\theta}}_1 + \frac{1}{\gamma_2}\tilde{\theta}_2\dot{\hat{\theta}}_2 \quad (3.7)$$

αφού $\dot{\tilde{\theta}}_1 = \dot{\hat{\theta}}_1$ και $\dot{\tilde{\theta}}_2 = \dot{\hat{\theta}}_2$.

Επιλέγουμε:

$$\dot{\hat{\theta}}_1 = -\gamma_1 e\hat{x} \quad (3.8)$$

$$\dot{\hat{\theta}}_2 = \gamma_2 eu \quad (3.9)$$

και η (3.7) γίνεται:

$$\dot{V} = -\theta_1^*e^2 \leq 0 \quad (3.10)$$

Έπειτα, εργαζόμαστε όπως ακριβώς και στο θέμα 1 και συμπεραίνουμε ότι $e, \tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2 \in L_\infty$ κι ότι η V είναι κάτω φραγμένη από το μηδέν και φθίνουσα. Επομένως $\lim_{t \rightarrow \infty} V = V_\infty$ υπάρχει. Ολοκληρώνοντας και τα δύο μέλη της (3.22) βρίσκουμε:

$$\theta_1^* \int_0^\infty e^2 d\tau = - \int_0^\infty \dot{V} d\tau = -[V_\infty - V(0)] \quad (3.11)$$

Προκύπτει, λοιπόν, ότι $e \in L_2$. Λαμβάνοντας υπόψη ότι $u \in L_\infty, x \in L_\infty$ και $e = x - \hat{x} \in L_\infty$ συνεπάγεται ότι $\hat{x} \in L_\infty$. Λόγω γινομένου ομοιόμορφα φραγμένων συναρτήσεων έχουμε κι ότι $\dot{e} \in L_\infty$ κι επομένως από το Λήμμα του Barbalat μπορούμε να συμπεράνουμε ότι $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$ και $\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\hat{\theta}}_1 = \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\hat{\theta}}_2 = 0$ ως γινόμενο συνάρτησης που έχει όριο το μηδέν, με ομοιόμορφα φραγμένη.

Συμπεραίνουμε, έτσι, ότι για εισόδους που ικανοποιούν $u \in L_\infty$, ο αναδρομικός νόμος μεταβολής των εκτιμώμενων παραμέτρων εξασφαλίζει ότι η εκτιμώμενη έξοδος \hat{x} του συστήματος αναγνώρισης θα συγχλίνει ασυμπτωματικά στην έξοδο x του πραγματικού συστήματος. Αυτό, όμως, δεν σημαίνει κι ότι το διάνυσμα των εκτιμώμενων παραμέτρων $\hat{\theta}(t)$ θα συγχλίνει στο διάνυσμα των πραγματικών παραμέτρων θ^* . Για να το εγγυηθούμε αυτό θα πρέπει να επικαλεστούμε και πάλι την ΣΕΔ, όπως την ορίσαμε παραπάνω.

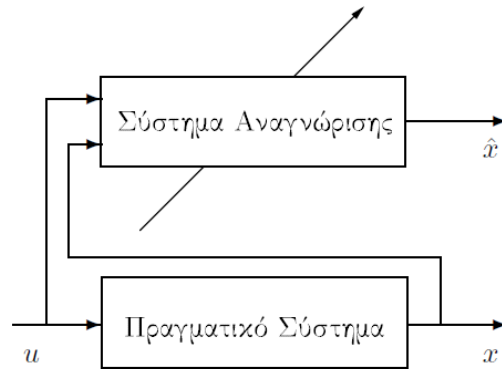
Έτσι, για την πλήρη περιγραφή του αρχικού συστήματος και του συστήματος αναγνώρισης που κατασκευάσαμε με την παράλληλη δομή, μπορούμε να καταγράψουμε τις παρακάτω εξισώσεις:

$$\begin{cases} \dot{x} = -\theta_1^* x + \theta_2^* u, & x(0) = 0 \\ \dot{\hat{\theta}}_1 = -\gamma_1 e \hat{x}, & \hat{\theta}_1(0) = 0 \\ \dot{\hat{\theta}}_2 = \gamma_2 e u, & \hat{\theta}_2(0) = 0 \\ \dot{\hat{x}} = -\hat{\theta}_1 \hat{x} + \hat{\theta}_2 u, & \hat{x}(0) = 0 \end{cases} \quad (3.12)$$

με $\hat{a} = \hat{\theta}_1$ και $\hat{b} = \hat{\theta}_2$.

3.2 Μικτή Δομή

Η Μικτή Δομή στην on-line εκτίμηση των παραμέτρων κατά Lyapunov χρησιμοποιεί σήματα που παράγονται τόσο από το σύστημα αναγνώρισης, όσο και από το πραγματικό σύστημα, και έχει την παρακάτω τοπολογία:



Σχήμα 3.2: Τοπολογία μικτής δομής

Ξαναγράφουμε την (2.1) στην παρακάτω μορφή, θεωρώντας ότι $\theta_1^* = a$ και $\theta_2^* = b$:

$$\dot{x} = -\theta_1^* x + \theta_2^* u, \text{ με } x(0) = 0 \quad (3.13)$$

Ορίζουμε, έπειτα, το σύστημα αναγνώρισης ως:

$$\dot{\hat{x}} = -\hat{\theta}_1 \hat{x} + \hat{\theta}_2 u + \theta_m (x - \hat{x}), \text{ με } \hat{x}(0) = 0 \text{ και } \theta_m > 0 \quad (3.14)$$

και το σφάλμα εκτίμησης ως:

$$e = x - \hat{x} \quad (3.15)$$

από το οποίο παραγωγίζοντας ως προς τον χρόνο παίρνουμε:

$$\dot{e} = \dot{x} - \dot{\hat{x}} = -\theta_m e + (\hat{\theta}_1 - \theta_1^*)x - (\hat{\theta}_2 - \theta_2^*)u \Rightarrow \quad (3.16)$$

$$\dot{e} = -\theta_m e + \tilde{\theta}_1 x - \tilde{\theta}_2 u \quad (3.17)$$

όπου $\tilde{\theta}_1 = \hat{\theta}_1 - \theta_1^*$ και $\tilde{\theta}_2 = \hat{\theta}_2 - \theta_2^*$ ορίζονται τα παραμετρικά σφάλματα.

Για να προχωρήσουμε στην ανάλυσή μας θεωρούμε την συνάρτηση Lyapunov:

$$V = \frac{1}{2}e^2 + \frac{1}{2\gamma_1}\tilde{\theta}_1^2 + \frac{1}{2\gamma_2}\tilde{\theta}_2^2 \geq 0 \text{ με } \gamma_1, \gamma_2 > 0 \quad (3.18)$$

με χρονική παράγωγο όμοια με παραπάνω:

$$\dot{V} = -\theta_m e^2 + \tilde{\theta}_1 e x - \tilde{\theta}_2 e u + \frac{1}{\gamma_1}\tilde{\theta}_1 \dot{\tilde{\theta}}_1 + \frac{1}{\gamma_2}\tilde{\theta}_2 \dot{\tilde{\theta}}_2 \quad (3.19)$$

αφού $\dot{\tilde{\theta}}_1 = \dot{\hat{\theta}}_1$ και $\dot{\tilde{\theta}}_2 = \dot{\hat{\theta}}_2$.

Επιλέγουμε:

$$\dot{\tilde{\theta}}_1 = -\gamma_1 e x \quad (3.20)$$

$$\dot{\tilde{\theta}}_2 = \gamma_2 e u \quad (3.21)$$

και η (3.19) γίνεται:

$$\dot{V} = -\theta_m e^2 \leq 0 \quad (3.22)$$

Έπειτα, εργαζόμαστε όπως ακριβώς και προηγουμένως και συμπεραίνουμε ότι $e, \tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2 \in L_\infty$ κι ότι η V είναι κάτω φραγμένη από το μηδέν και φθίνουσα. Επομένως $\lim_{t \rightarrow \infty} V = V_\infty$ υπάρχει. Ολοκληρώνοντας και τα δύο μέλη της (3.22) βρίσκουμε:

$$\theta_m \int_0^\infty e^2 d\tau = - \int_0^\infty \dot{V} d\tau = -[V_\infty - V(0)] \quad (3.23)$$

Προκύπτει, λοιπόν, ότι $e \in L_2$. Λαμβάνοντας υπόψη ότι $u \in L_\infty, x \in L_\infty$ και $e = x - \hat{x} \in L_\infty$ συνεπάγεται ότι $\hat{x} \in L_\infty$. Λόγω γινομένου ομοιόμορφα φραγμένων συναρτήσεων έχουμε κι ότι $\dot{e} \in L_\infty$ κι επομένως από το Λήμμα του Barbalat μπορούμε να συμπεράνουμε ότι $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$ και $\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\tilde{\theta}}_1 = \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\tilde{\theta}}_2 = 0$ ως γινόμενο συνάρτησης που έχει όριο το μηδέν, με ομοιόμορφα φραγμένη.

Συμπεραίνουμε, έτσι, ότι για εισόδους που ικανοποιούν $u \in L_\infty$, ο αναδρομικός νόμος μεταβολής των εκτιμώμενων παραμέτρων εξασφαλίζει ότι η εκτιμώμενη έξοδος \hat{x} του συστήματος αναγνώρισης θα συγκλίνει ασυμπτωματικά στην έξοδο x του πραγματικού συστήματος. Αυτό, όμως, δεν σημαίνει κι ότι το διάνυσμα των εκτιμώμενων παραμέτρων $\hat{\theta}(t)$ θα συγκλίνει

στο διάνυσμα των πραγματικών παραμέτρων θ^* . Για να το εγγυηθούμε αυτό θα πρέπει να επικαλεστούμε και πάλι την ΣΕΔ, όπως την ορίσαμε παραπάνω.

Έτσι, για την πλήρη περιγραφή του αρχικού συστήματος και του συστήματος αναγνώρισης που κατασκευάσαμε με την μικτή δομή, μπορούμε να καταγράψουμε τις παρακάτω εξισώσεις:

$$\begin{cases} \dot{x} = -\theta_1^* x + \theta_2^* u, & x(0) = 0 \\ \dot{\hat{\theta}}_1 = -\gamma_1 ex, & \hat{\theta}_1(0) = 0 \\ \dot{\hat{\theta}}_2 = \gamma_2 eu, & \hat{\theta}_2(0) = 0 \\ \dot{\hat{x}} = -\hat{\theta}_1 x + \hat{\theta}_2 u + \theta_m(x - \hat{x}), & \hat{x}(0) = 0 \end{cases} \quad (3.24)$$

με $\hat{a} = \hat{\theta}_1$ και $\hat{b} = \hat{\theta}_2$.

3.3 Ευρωστία

Επιθυμούμε να ελέγξουμε πώς ανταποκρίνονται οι δύο δομές που αναλύσαμε στην παρουσία θορύβου κατά την μέτρηση της πραγματικής εξόδου x . Παρατηρούμε τους νόμους που δίνουν την εκτίμηση $\hat{\theta}_1(t)$. Πράγματι:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\theta}}_1 &= -e\hat{x} = -(x - \hat{x})\hat{x} = \hat{x}^2 - x\hat{x} \text{ (Παράλληλη Δομή)} \\ \dot{\hat{\theta}}_1 &= -ex = -(x - \hat{x})x = x^2 - x\hat{x} \text{ (Μικτή Δομή)} \end{aligned}$$

Αν υποθέσουμε ότι η έξοδος του πραγματικού συστήματος έχει διαβρωθεί από προσθετικό θόρυβο $\eta(t)$, αν δηλαδή αντί του x στις παραπάνω εξισώσεις βάλουμε το $x + \eta$, θα παρατηρήσουμε ότι στην Μικτή Δομή η εκτίμηση $\hat{\theta}_1$ θα εξαρτάται τόσο από τη $\eta(t)^2$ όσο και από το $\eta(t)$. Αντίθετα στην Παράλληλη Δομή εξαρτάται μόνο από το $\eta(t)$. Συνεπώς, αναμένουμε η Μικτή Δομή να είναι πιο ευαίσθητη στην παρουσία θορύβου σε σχέση με την Παράλληλη Δομή.

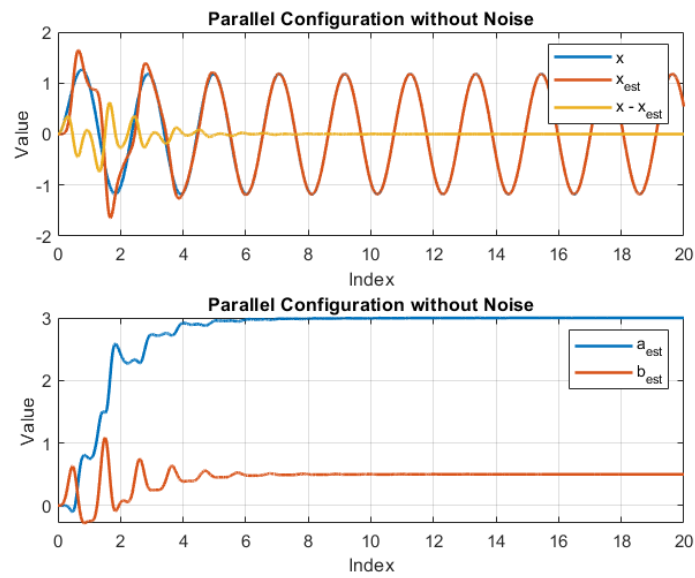
3.4 Προσομοίωση Συστήματος

Θα χρησιμοποιήσουμε και πάλι το **MATLAB** για την προσομοίωση τόσο του πραγματικού υπό μελέτη συστήματος, όσο και του συστήματος αναγνώρισης που κατασκευάσαμε στην παραπάνω θεωρητική ανάλυση. Για τον σκοπό αυτό αρκεί να επιλύσουμε το σύστημα (3.24) με τιμές πραγματικών παραμέτρων ίσες με $a = 3$ και $b = 0.5$.

3.4.1 Παράλληλη Δομή

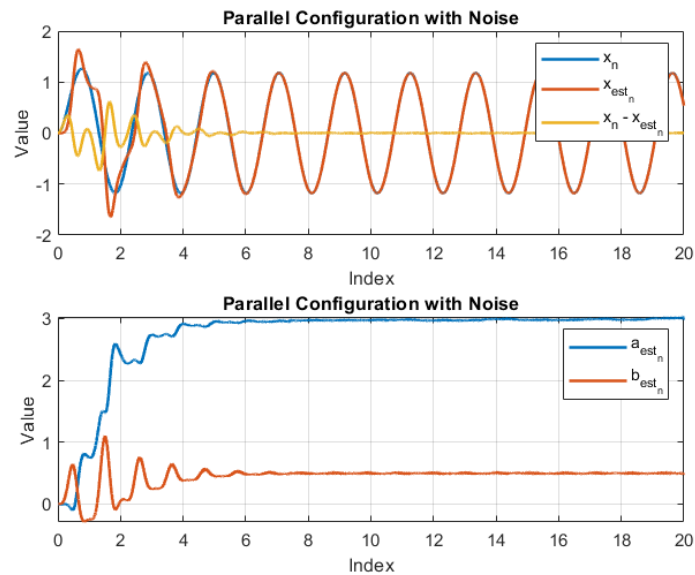
Παρακάτω βλέπουμε για ενδεικτικές τιμές των παραμέτρων την πραγματική και την εκτιμώμενη έξοδο στην περίπτωση της Παράλληλης Δομής. Βλέπουμε, επίσης την διαφορά τους ως σφάλμα αναγνώρισης, αλλά και την σύγκλιση των εκτιμήσεων στις πραγματικές τους τιμές. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

- Χωρίς παρουσία θορύβου:



Σχήμα 3.3: Παράλληλη Δομή χωρίς θόρυβο

- Με παρουσία θορύβου:



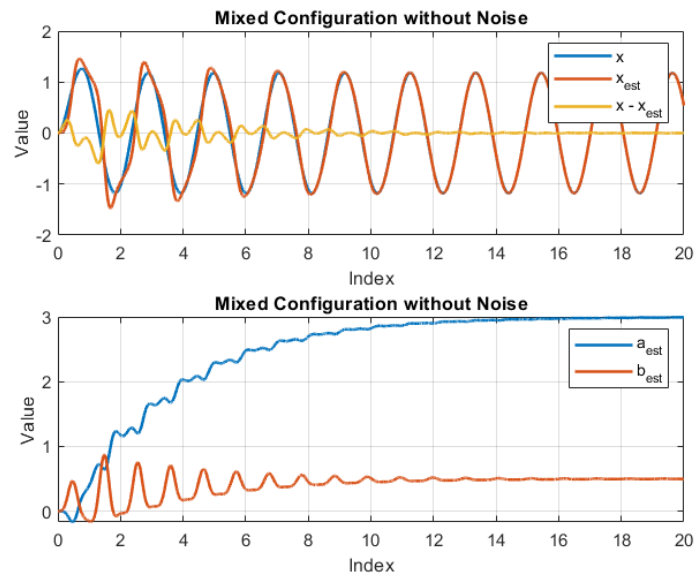
Σχήμα 3.4: Παράλληλη Δομή με θόρυβο

3.4.2 Μικτή Δομή

Παρακάτω βλέπουμε για ενδεικτικές τιμές των παραμέτρων την πραγματική και την εκτιμώμενη έξοδο στην περίπτωση της Μικτής Δομής. Βλέπουμε, επίσης την διαφορά τους ως

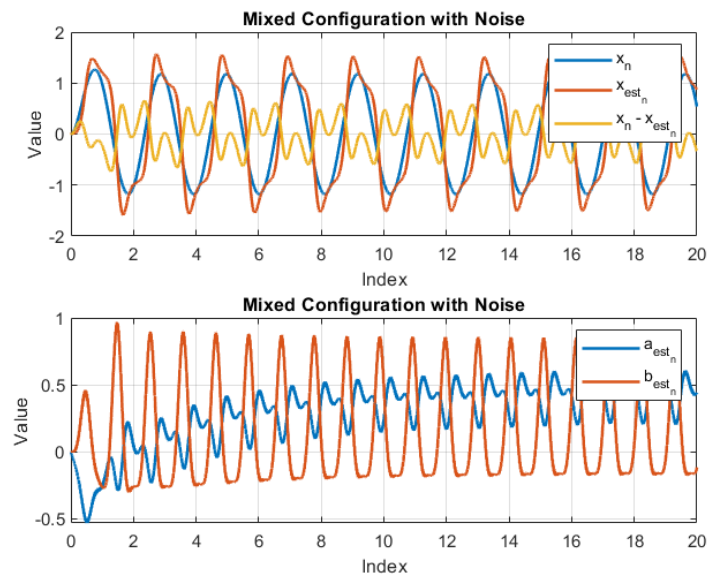
σφάλμα αναγνώρισης, αλλά και την σύγκλιση των εκτιμήσεων στις πραγματικές τους τιμές. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

- Χωρίς παρουσία θορύβου:



Σχήμα 3.5: Μικτή Δομή χωρίς θόρυβο

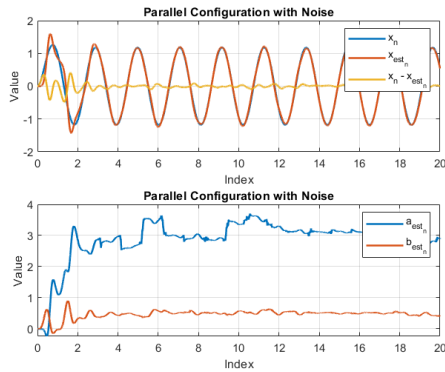
- Με παρουσία θορύβου:



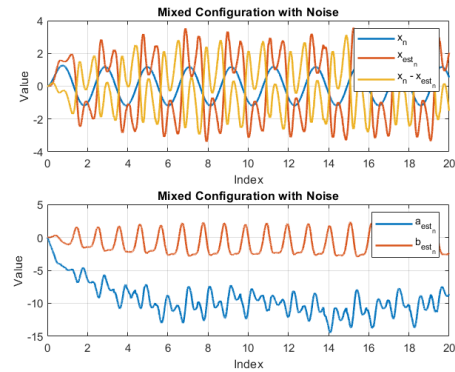
Σχήμα 3.6: Μικτή Δομή με θόρυβο

Συμπεράσματα - Παρατηρήσεις:

- Τα παραπάνω διαγράμματα παρουσιάζονται με ενδεικτικές τιμές παραμέτρων της επιλογής μας ίσες με $\theta_m = 3$, $\gamma_1 = 6$ και $\gamma_2 = 1$. Δοκιμάζοντας κι άλλες τιμές των παραμέτρων αυτών διαπιστώνουμε, αρχικά, ότι όσο μικρότερο γίνεται το θ_m , τόσο γρηγορότερα γίνεται η σύγκλιση στην Μικτή Δομή. Παρόλα αυτά, όταν το $\theta_m < 2$, αρχίζουμε κι έχουμε overshoot. Το ίδιο φαίνεται να ισχύει και για μεγαλύτερες τιμές των παραμέτρων γ_1 και γ_2 , ενώ και για $\gamma < 1$ έχουμε μεγάλη υπερύψωση.
- Επιβεβαιώνοντας τα συμπεράσματα που βγάλαμε στον έλεγχο ευρωστίας παραπάνω, παρατηρούμε ότι, πράγματι, η Μικτή Δομή είναι πολύ πιο ευαίσθητη στις επιδράσεις του θορύβου στην μέτρηση της κατάστασης εξόδου x με αποτέλεσμα να αποτυγχάνει η σύγκλιση των εκτιμώμενων παραμέτρων στις πραγματικές, αλλά και η εκτίμηση της εξόδου να παρουσιάζει σημαντικό σφάλμα.
- Ειδικότερα για $\eta_0 > 1$ η Παράλληλη Δομή υπερτερεί κατά πολύ της Μικτής, καθώς και για μεγαλύτερες συχνότητες f . Μεγάλες συχνότητες επηρεάζουν σημαντικά την εκτίμηση της εξόδου και των παραμέτρων, εισάγωντας σημαντικές ταλαντώσεις στις κυματομορφές. Ενδεικτικά, για $\eta_0 = 1$ και $f = 400$ βλέπουμε:



Σχήμα 3.7: Παράλληλη Δομή με υψηλής συχνότητας θόρυβο



Σχήμα 3.8: Μικτή Δομή με υψηλής συχνότητας θόρυβο

Είναι ξεκάθαρο ότι η Παράλληλη Δομή έχει πολύ μεγαλύτερη ευρωστία απέναντι στον θόρυβο, παρόλο που και στις δύο περιπτώσεις η επίδραση του θορύβου είναι συντριπτική.

4 Θέμα 3^ο

Στη συνέχεια θα μελετήσουμε την μέθοδο on-line εκτίμησης παραμέτρων κατά Lyapunov σε ένα σύστημα μεγαλύτερης διάστασης. Συγκεκριμένα, θεωρούμε το σύστημα δεύτερης τάξης:

$$\dot{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix}}_A x + \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}}_B u, \text{ με } x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

όπου x είναι οι καταστάσεις, $u = 3.5\sin(7.2t) + 2\sin(11.7t)$ είναι η είσοδος του συστήματος και $A < 0$, B σταθεροί αλλά άγνωστοι πίνακες.

Σκοπός μας είναι ο σχεδιασμός ενός εκτιμητή πραγματικού χρόνου Μικτής Δομής των αγνώστων παραμέτρων με την μέθοδο Lyapunov, καθώς και η προσομοίωση της λειτουργίας του.

4.1 Θεωρητική Ανάλυση

Το ΓΧΑ σύστημα που ορίσαμε στην (4.1) έχει την μορφή:

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (4.2)$$

όπου τόσο η κατάσταση $x \in \mathbb{R}^2$, όσο και η είσοδος $u \in \mathbb{R}$ είναι μετρήσιμα μεγέθη. Οι πίνακες $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ και $B \in \mathbb{R}^2$ είναι σταθεροί αλλά άγνωστοι. Επιπλέον, ο A είναι αρνητικά ημιορισμένος και $u \in L_\infty$. Συνεπώς και $x \in L_\infty$. Θα χρησιμοποιήσουμε την Μικτή Δομή κι επομένως ορίζουμε το εξής σύστημα αναγνώρισης:

$$\dot{\hat{x}} = \hat{A}x + \hat{B}u + \Gamma(x - \hat{x}) \quad (4.3)$$

όπου \hat{x} είναι η εκτίμηση της εξόδου x του πραγματικού συστήματος, \hat{A}, \hat{B} οι εκτιμήσεις των πινάκων A, B αντίστοιχα και $\Gamma \in \mathbb{R}_{2 \times 2}$ είναι ένας θετικά ορισμένος πίνακας της επιλογής μας.

Ορίζουμε το σφάλμα αναγνώρισης:

$$e = x - \hat{x} \quad (4.4)$$

και παραγωγίζοντας ως προς τον χρόνο έχουμε:

$$\dot{e} = Ax + Bu - \hat{A}x - \hat{B}u - \Gamma(x - \hat{x}) = -\Gamma e - (\hat{A} - A)x - (\hat{B} - B)u \Rightarrow \quad (4.5)$$

$$\dot{e} = -\Gamma e - \tilde{A}x - \tilde{B}u \quad (4.6)$$

όπου $\tilde{A} = \hat{A} - A$ και $\tilde{B} = \hat{B} - B$ ορίζονται ως τα παραμετρικά σφάλματα.

Θεωρούμε τώρα την συνάρτηση Lyapunov:

$$V = \frac{1}{2}e^T e + \frac{1}{2}tr\left\{\frac{1}{\gamma_1}\tilde{A}^T \tilde{A}\right\} + \frac{1}{2}tr\left\{\frac{1}{\gamma_2}\tilde{B}^T \tilde{B}\right\} \quad (4.7)$$

όπου με $tr\{\cdot\}$ συμβολίζουμε το ίχνος (trace) ενός πίνακα. Παραγωγίζουμε, έπειτα, την V ως προς τον χρόνο και από την (4.6) έχουμε:

$$\dot{V} = e^T \dot{e} + tr\left\{\frac{1}{\gamma_1}\tilde{A}^T \dot{\tilde{A}}\right\} + tr\left\{\frac{1}{\gamma_2}\tilde{B}^T \dot{\tilde{B}}\right\} = \quad (4.8)$$

$$= -e^T \Gamma e - e^T \tilde{A}x - e^T \tilde{B}u + tr\left\{\frac{1}{\gamma_1}\tilde{A}^T \dot{\tilde{A}}\right\} + tr\left\{\frac{1}{\gamma_2}\tilde{B}^T \dot{\tilde{B}}\right\} = \quad (4.9)$$

$$= -e^T \Gamma e + tr\left\{\frac{1}{\gamma_1}\tilde{A}^T \dot{\tilde{A}} + \frac{1}{\gamma_2}\tilde{B}^T \dot{\tilde{B}} - \tilde{A}xe^T - \tilde{B}ue^T\right\} \quad (4.10)$$

αφού από τις ιδιότητες του trace ενός πίνακα γνωρίζουμε ότι:

$$e^T \tilde{A}x = tr\{\tilde{A}xe^T\}$$

$$e^T \tilde{B}u = tr\{\tilde{B}ue^T\}$$

Επιλέγουμε, λοιπόν:

$$\dot{\tilde{A}} = \gamma_1 ex^T \quad (4.11)$$

$$\dot{\tilde{B}} = \gamma_2 eu^T \quad (4.12)$$

και η παράγωγος της V γράφεται:

$$\dot{V} = -e^T \Gamma e \leq 0 \quad (4.13)$$

Ακολουθώντας τα ίδια βήματα με την πρωτοτάξια περίπτωση, μπορούμε να δείξουμε ότι $\hat{A}, \hat{B} \in L_\infty$, $e \in L_\infty \cap L_2$, $\dot{e} \in L_\infty$ αφού ολοκληρώνοντας τα δύο μέλη της (4.13) έχουμε:

$$\int_0^\infty e^T \Gamma e d\tau = - \int_0^\infty \dot{V} d\tau = -[V_\infty - V(0)] \quad (4.14)$$

Άρα, από το Λήμμα του Barbalat έχουμε ότι $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\tilde{A}}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\tilde{B}}(t) = 0$. Συμπεραίνουμε, δηλαδή, ότι για εισόδους που ικανοποιούν $u \in L_\infty$, ο αναδρομικός νόμος μεταβολής των εκτιμώμενων παραμέτρων εξασφαλίζει ότι η εκτιμώμενη έξοδος \hat{x} του συστήματος αναγνώρισης θα συγκλίνει ασυμπτωματικά στην έξοδο x του πραγματικού συστήματος. Αυτό, όμως, δεν εγγυάται την σύγκλιση των παραμετρικών σφαλμάτων στο μηδέν. Για να το εγγυηθούμε αυτό θα πρέπει να επικαλεστούμε και πάλι την ΣΕΔ, όπως την ορίσαμε παραπάνω στην (2.18).

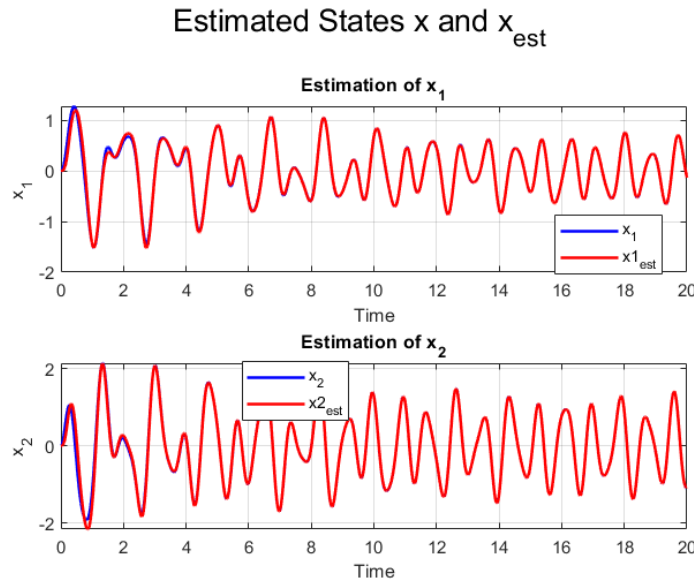
Για την πλήρη περιγραφή, λοιπόν, του αρχικού συστήματος και του συστήματος αναγνώρισης που κατασκευάσαμε με την Μικτή Δομή, μπορούμε να καταγράψουμε τις παρακάτω εξισώσεις:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu, & x(0) = 0_{2 \times 1} \\ \dot{\hat{x}} = \hat{A}x + \hat{B}u + \Gamma(x - \hat{x}), & \hat{x}(0) = 0_{2 \times 1} \\ \dot{\hat{A}} = \gamma_1 e x^T, & \hat{A}(0) = 0_{2 \times 2} \\ \dot{\hat{B}} = \gamma_2 e u^T, & \hat{B}(0) = 0_{2 \times 1} \end{cases} \quad (4.15)$$

4.2 Προσομοίωση Συστήματος

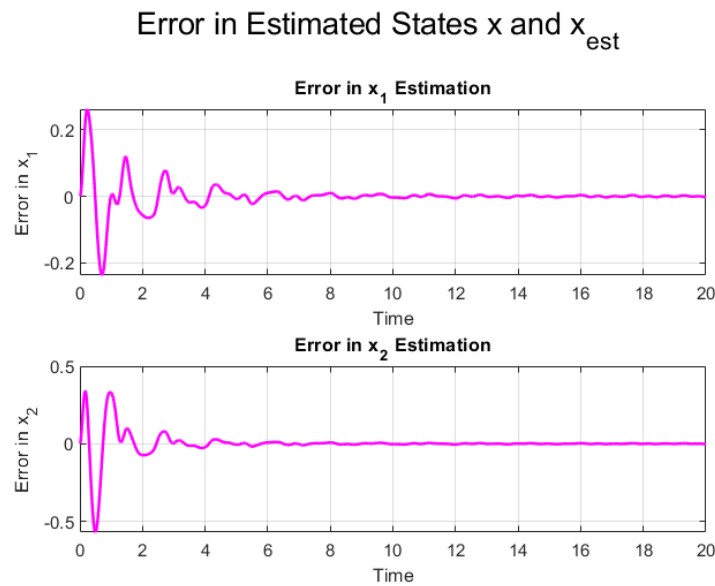
Θα χρησιμοποιήσουμε και πάλι το **MATLAB** για την προσομοίωση τόσο του πραγματικού υπό μελέτη συστήματος, όσο και του συστήματος αναγνώρισης που κατασκευάσαμε στην παραπάνω θεωρητική ανάλυση. Για τον σκοπό αυτό αρκεί να επιλύσουμε το σύστημα (4.15) με τιμές πραγματικών παραμέτρων ίσες με $a_{1,1} = -0.25$, $a_{1,2} = 3$, $a_{2,1} = -5$, $a_{2,2} = 0$, $b_1 = 0.5$ και $b_2 = 1.5$.

Βλέπουμε, αρχικά, τα διαγράμματα της πραγματικής και της εκτιμώμενης εξόδου για κάθε μία συνιστώσα του διανύσματος x ξεχωριστά:



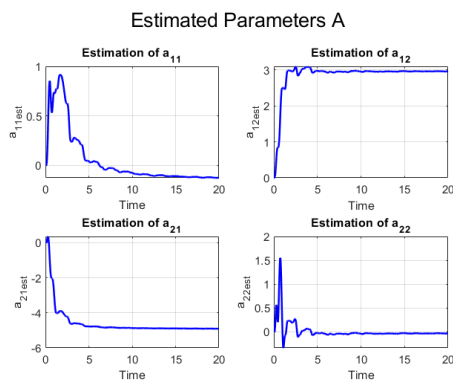
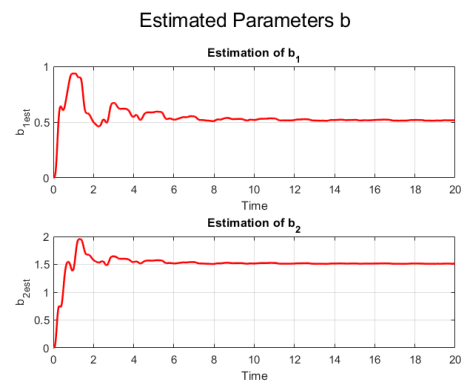
Σχήμα 4.1: Εκτίμηση διανύσματος εξόδου

καθώς και το σφάλμα αναγνώρισης που προκύπτει από αυτές. Παρατηρούμε κάποια μεταβατικά φαινόμενα στην αρχή, ωστόσο έπειτα το σφάλμα γίνεται αμελητέο:



Σχήμα 4.2: Σφάλμα αναγνώρισης εξόδου

Στη συνέχεια μπορούμε να παρατηρήσουμε και τις εκτιμήσεις των άγνωστων παραμέτρων που αποτελούν τα στοιχεία του πίνακα A και του πίνακα B αντίστοιχα. Παρατηρούμε κάποια μεταβατικά φαινόμενα στην αρχή:

Σχήμα 4.3: Εκτίμηση των παραμέτρων του A Σχήμα 4.4: Εκτίμηση των παραμέτρων του B

Συμπεράσματα - Παρατηρήσεις:

- Το σύστημά μας ικανοποιεί την ΣΕΔ, καθώς η διέγερση $u = 3.5\sin(7.2t) + 2\sin(11.7t)$ περιέχει δύο διακριτές διάφορες του μηδενός συχνότητες κι επομένως σύμφωνα με την ανάλυση που προηγήθηκε είναι ικανά πλούσια τάξεως $n = 4$ και το διάνυσμα H θα είναι διάστασης 3.
- Τα διαγράμματα που παρουσιάστηκαν παραπάνω είναι ενδεικτικά με επιλογή των παραμέτρων $\gamma = [15 \ 3]$ και $\Gamma = [10 \ 0; \ 0 \ 10]$. Διαφορετικές τιμές των παραμέτρων οδηγούν

σε υπερυψώσεις, ταλαντώσεις ή σημαντικά σφάλματα κατά την εκτίμηση των παραμέτρων. Για τον λόγο αυτό απαιτείται **tuning** των επιλεγόμενων παραμέτρων, ώστε να πληρούνται οι εκάστοτε προδιαγραφές.