# Τεχνικές Βελτιστοποίησης

Εργασία Μαθήματος 2022 - 2023

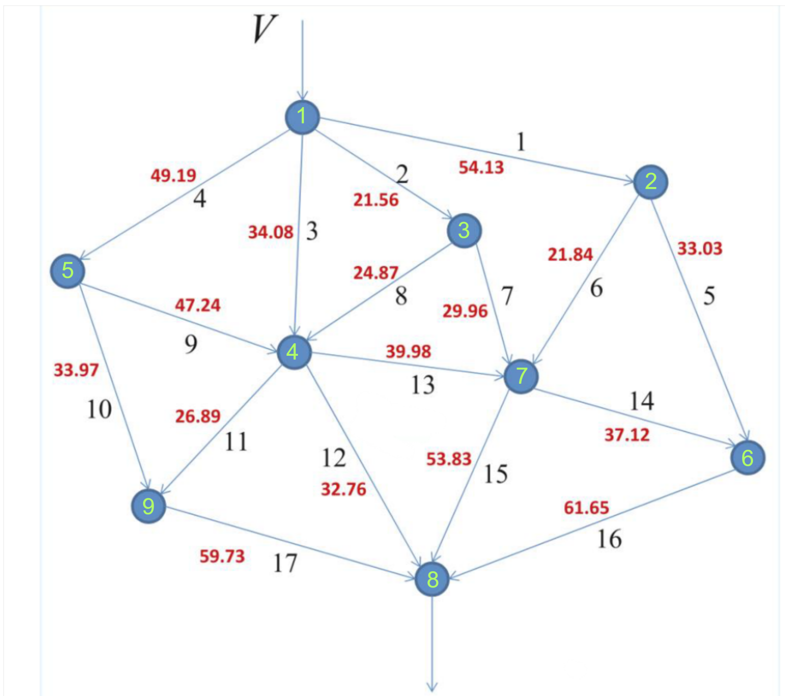
Αλεξόπουλος Δημήτριος AEM 10091
Σιάργκας Χρήστος AEM 9956

# Περιεχόμενα

# Κατάλογος Σχημάτων

# 1 Εισαγωγή

Στην παρούσα εργασία καλούμαστε να επιλύσουμε ένα πρόβλημα ολικής βελτιστοποίησης. Θεωρούμε το οδικό δίκτυο του παρακάτω σχήματος, στο οποίο οι κόμβοι παριστάνουν οδικές διασταυρώσεις και τα βέλη κυκλοφοριακές κατευθύνσεις. Οι αριθμοί με μαύρο χρώμα ορίζουν την αρίθμηση των ακμών, ενώ με λαχανί χρώμα την αρίθμηση των κόμβων, προς διευκόλυνση της ανάλυσής μας.




Σχήμα 1.1: Το οδικό δίκτυο

Αν υπάρχουν λίγα οχήματα στους δρόμους οι χρόνοι κίνησης μεταξύ των κόμβων θεωρούνται σταθεροί. Καθώς, όμως, τα οχήματα αυξάνονται στο δίκτυο, οι χρόνοι κίνησης αυξάνονται δραματικά. Έστω $t_i(min)$ ο σταθερός χρόνος που απαιτείται για να κινηθούμε στο δρόμο $i$ όταν η κίνηση είναι ασθενής. Έστω, επίσης, $x_i(o\chi./min)$ ο ρυθμός διέλευσης οχημάτων στο δρόμο $i$ και $c_i(o\chi./min)$ ο μέγιστος δυνατός ρυθμός διέλευσης οχημάτων από τον ίδιο δρόμο. Ο χρόνος κίνησης στο δρόμο $i$ συναρτήσει του αριθμού των οχημάτων $x_i$ είναι:

$$T_i(x_i) = t_i + a_i \frac{x_i}{1 - \frac{x_i}{c_i}} (min) \tag{1.1}$$

Παρατηρούμε ότι απουσία κίνησης, δηλαδή όταν $x_i \to 0$, ο χρόνος κίνησης $T_i$ ισούται με τον σταθερό χρόνο $t_i$, ενώ όταν ο ρυθμός διέλευσης τείνει στο μέγιστο όριό του ο χρόνος κίνησης τείνει να απειριστεί, δηλαδή ισχύει $\lim_{x_i \to c_i} T_i(x_i) = \infty$.

Στόχος μας στην παρακάτω μελέτη είναι να ελαχιστοποιήσουμε ως προς $x_i$ τον συνολικό χρόνο διάσχισης του δικτύου του Σχ. 1.1 ανά όχημα για ρυθμό εισερχόμενων οχημάτων ίσο με $V(o\chi./min)$. Για να αποφύγουμε την συγκέντρωση οχημάτων στους κόμβους του δικτύου είναι επιθυμητό όσα οχήματα εισέρχονται σε κάθε κόμβο τόσα και να εξέρχονται.

Οι τιμές των μεγίστων ρυθμών διέλευσης $c_i$ για κάθε δρόμο $i$ σημειώνονται με κόκκινο χρώμα σαν βάρη στον γράφο του οδικού δικτύου. Επίσης, θεωρούμε τις σταθερές $a_i = 1.25(min^2/o\chi.)$ για $i = 1,2,...,5$, $a_i = 1.5(min^2/o\chi.)$ για $i = 6,7,...,10$ και $a_i = 1(min^2/o\chi.)$ για $i = 11,12,...,17$, ενώ τον ρυθμό εισροής στο δίκτυο ως $V = 100(o\chi./min)$. Οι σταθερές $t_i$ μπορούν να οριστούν από τον χρήστη.

Για την επίλυση του προβλήματος βελτιστοποίησης είναι απαραίτητη, καταρχάς, η μαθηματική διατύπωση του προβλήματος. Αυτό θα επιλυθεί στη συνέχεια με την χρήση αλγορίθμων ολικής βελτιστοποίησης και συγκεκριμένα με τρεις παραλλαγές ενός γενετικού αλγορίθμου. Θα ακολουθήσει σχολιασμός και σύγκριση των μεθόδων, ενώ θα ελεγχθεί και η ευρωστία του αλγορίθμου με την εισαγωγή στοχαστικών διαταραχών στην ροή εισόδου του δικτύου.

# 2 Μαθηματική Διατύπωση του Προβλήματος

Όπως αναφέραμε παραπάνω, στόχος μας στο πρόβλημα βελτιστοποίησης είναι να ελαχιστοποιήσουμε ως προς $x_i$ τον συνολικό χρόνο διάσχισης του δικτύου του Σχ. 1.1 ανά όχημα για ένα τυχαίο όχημα που εισέρχεται σε αυτό και για ρυθμό εισερχόμενων στο δίκτυο οχημάτων ίσο με $V(o\chi./min)$:

$$\underset{x}{minimize}: \ f(x) = \sum_{i \in E} T(x(i)) \tag{2.1}$$

, όπου $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ η αντικειμενική συνάρτηση προς βελιστοποίηση.

Είναι σημαντικό στη συνέχεια να προσέξουμε ότι οι ροές των οχημάτων θα πρέπει να διατηρούνται στους κόμβους, δηλαδή θα πρέπει σε μία διασταύρωση όσα οχήματα εισέρχονται, τόσα και να εξέρχονται. Αυτό το εξασφαλίζουμε με την εισαγωγή ισοτικών περιορισμών, οι οποίοι θα πρέπει υποχρεωτικά να τηρούνται κατά την ελαχιστοποίηση της αντικειμενικής συνάρτησης:

$$\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= V \\
x_1 - x_5 - x_6 &= 0 \\
x_2 - x_7 - x_8 &= 0 \\
x_3 + x_8 + x_9 - x_{13} - x_{12} - x_{11} &= 0 \\
x_4 - x_9 - x_{10} &= 0 \\
x_5 + x_{14} - x_{16} &= 0 \\
x_6 + x_7 + x_{13} - x_{14} - x_{15} &= 0 \\
x_{10} + x_{11} - x_{17} &= 0 \\
x_{12} + x_{17} + x_{16} + x_{15} &= V
\end{aligned}$$

Ορίσαμε ως $X \subset R^n$, $n = 17$ το σύνολο στο οποίο ανήκουν οι μεταβλητές μας $x_i$. Τα εφικτά σημεία του προβλήματος, εκτός από τους παραπάνω περιορισμούς, θα πρέπει να τηρούν ακόμη:

$$0 \leq x_i \leq c_i, \text{ με } i = 1, 2, ..., 17,$$

δηλαδή θα πρέπει οι ρόες των οχημάτων να είναι μη αρνητικές κάτι που προκύπτει από την φυσική σημασία του προβλήματος, καθώς και για κάθε δρόμο να μην ξεπερνούν το ανώτατο όριο ρυθμού διέλευσης που έχει οριστεί.

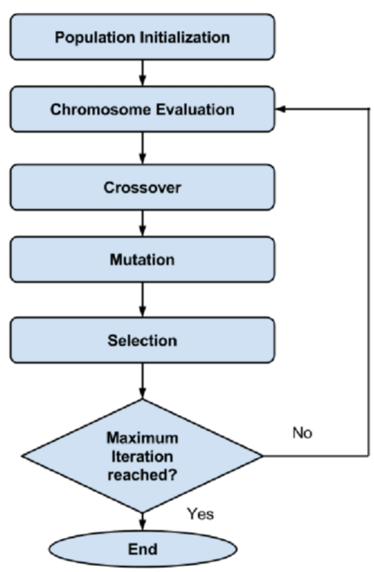
Για ευκολία μπορούμε τους παραπάνω ισότικους περιορισμούς να τους φέρουμε σε μορφή στην οποία εξισώνονται με το μηδέν και να τους ονομάσουμε $h_i(x) = 0$ με $i = 1, 2, ..., 9$. Αντίστοιχα τους ανισοτικούς περιορισμούς μπορούμε να τους φέρουμε σε μορφή $g_j(x) \leq 0$ με $j = 1, 2$. Έχουμε διατυπώσει, πλέον, πλήρως το θεωρητικό μας πρόβλημα σαν μαθηματικό μοντέλο.

# 3 Υλοποίηση Γενετικού Αλγορίθμου

Το πρόβλημα που μελετάμε δεν είναι κυρτό, καθώς η αντικειμενική συνάρτηση είναι μη-κυρτή συνάρτηση και ο χώρος αναζήτησης μη-κυρτό σύνολο. Επιπλέον, το πλήθος των μεταβλητών και η φύση των περιορισμών τους καθιστά απρόσιτη την χρήση ενός αλγορίθμου τοπικής βελτιστοποίησης. Για τον λόγο αυτό επιλέγουμε την χρήση Γενετικού Αλγορίθμου (Γ.Α.) ως αλγόριθμο ολικής βελτιστοποίησης.

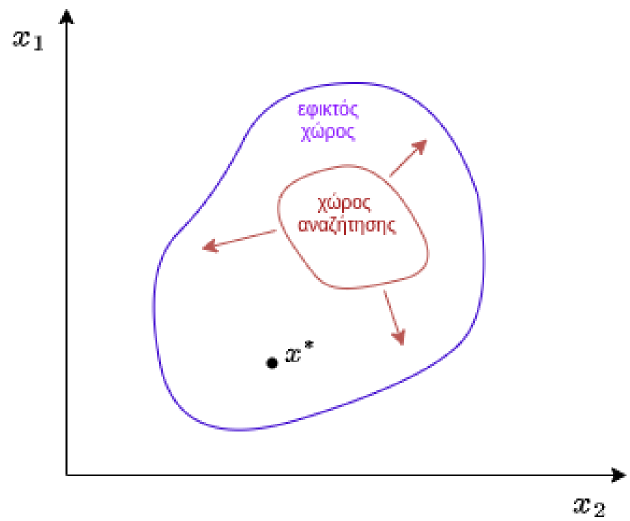
Ο τρόπος λειτουργίας του Γ.Α. είναι εμπνευσμένος από την βιολογία. Χρησιμοποιεί την ιδέα της εξέλιξης μέσω γενετικής μετάλλαξης, φυσικής επιλογής και διασταύρωσης. Διατηρεί, λοιπόν, έναν πληθυσμό πιθανών λύσεων, του προβλήματος που μας ενδιαφέρει, σε αντίθεση με άλλες μεθόδους αναζήτησης που επεξεργάζονται ένα μόνο σημείο του διαστήματος αναζήτησης. Έτσι, ο Γενετικός Αλγόριθμος πραγματοποιεί αναζήτηση σε πολλές κατευθύνσεις και υποστηρίζει καταγραφή και ανταλλαγή πληροφοριών μεταξύ αυτών των κατευθύνσεων.

Ο πληθυσμός των λύσεων υφίσταται μια προσομοιωμένη γενετική εξέλιξη χρησιμοποιώντας γενετικούς τελεστές, όπως η επιλογή, η διασταύρωση και η μετάλλαξη. Οι λύσεις βρίσκονται κωδικοποιημένες σαν γονίδια ενός χρωμοσώματος, δηλαδή σαν μια σειρά δυαδικών ψηφίων και οι πιο ικανές από αυτές για ένα συγκεκριμένο πρόβλημα συνεχίζουν να εξελίσσονται και ανασυνδυάζονται τυχαία, ώσπου να επιβιώσουν οι καλύτερες. Η επιλογή αυτή γίνεται μέσω μιας συνάρτησης που δίνει το μέτρο ικανότητας της λύσης και η οποία ονομάζεται Συνάρτηση Ικανότητας (Σ.Ι). Η σχηματική αναπαράσταση του αλγορίθμου φαίνεται στο διάγραμμα ροής του Σχήματος 3.1.




Σχήμα 3.1: Διάγραμμα ροής του γενετικού αλγορίθμου

Η δυσκολία του συγκεκριμένου προβλήματος έγκειται στη βελτιστοποίηση της μη γραμμικής μη-κυρτής αντικειμενικής συνάρτησης $f(x)$ με την παράλληλη ικανοποίηση των περιορισμών. Οι περιορισμοί αυτοί παράγουν έναν εφικτό χώρο ο οποίος πρέπει να μεταφραστεί με τον καλύτερο δυνατό τρόπο, ώστε ο γενετικός αλγόριθμος να μπορεί να κινηθεί στη μεγαλύτερη δυνατή έκταση του και να αναζητήσει την καλύτερη πιθανή λύση. Με λίγα λόγια, επιθυμούμε να προσαρμόσουμε όσο καλύτερα γίνεται τον χώρο αναζήτησης στον εφικτό χώρο όπως φαίνεται στο σχ. 3.2.




Σχήμα 3.2: Ο χώρος αναζήτησης πρέπει να αναπαριστά ικανοποιητικά τον εφικτό χώρο

Παρακάτω παρουσιάζονται αναλυτικά τα συστατικά μέρη του Γενετικού Αλγορίθμου και ο τρόπους που αυτά υλοποιήθηκαν συγκεκριμένα για την βελτιστοποίηση του προβλήματος του οδικού δικτύου του Σχήματος 1.1.

## 3.1 Συνάρτηση Ικανότητας

Το πιο σύνθετο ίσως ερώτημα της βελτιστοποίησης του ζητούμενου προβλήματος είναι ο σχεδιασμός της κατάλληλης συνάρτησης ικανότητας, η οποία θα επιτρέπει την επιλογή των βέλτιστων χρωμοσωμάτων του πληθυσμού κάθε γενιάς τηρώντας, παράλληλα, όλους τους επιμέρους περιορισμούς που έχουν οριστεί.

Για τον σκοπό αυτό θα δοκιμαστούν τρεις διαφορετικοί μέθοδοι ορισμού της συνάρτησης ικανότητας, μία με την αξιοποίηση της Μεθόδου Ποινής (Penalty Method), μία με την χρήση της Μεθόδου Προβολής (Projection Method) και μία με την Μείωση του Χώρου Αναζήτησης (Search Space Reduction). Στην περιπτωσή μας η συνάρτηση ικανότητας θα είναι μια συνάρτηση κόστους. το οποίο και θέλουμε να ελαχιστοποιήσουμε. Με άλλα λόγια, πιο 'ικανά' χρωμοσώματα θα κριθούν αυτά που δίνουν το μικρότερο κόστος.

### 3.1.1 Μέθοδος Ποινής (**Penalty Method**)

Σε αυτή τη μέθοδο απλοποιούμε το πρόβλημα και χαλαρώνουμε την ακριβή ικανοποίηση των περιορισμών που σχετίζονται με τη διατήρηση των ροών. Το φραγμένο πρόβλημα μετατρέπεται σε μη-φραγμένο εισάγοντας τους περιορισμούς στην αντικειμενική συνάρτηση μέσω συναρτήσεων ποινής. Γενικά η μέθοδος ποινής διατυπώνεται ως εξής:

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε τους εξής $m$ περιορισμούς και το εξής πρόβλημα βελτιστοποίησης:

$$\min_x f(x) \quad s.t.\ g_j(x) \leq 0,\ j = 1, \cdots, m \tag{3.1}$$

Ύστερα επαναδιατυπώνοντας το πρόβλημα σε μία μη-φραγμένη μορφή, η νέα αντικειμενική συνάρτηση $F$ προς βελτιστοποίηση εκφράζεται ως εξής:

$$F(x) = f(x) + \sum_{j=1}^{m} R_j \max\left[0, g_j(x)\right]^{\beta} \tag{3.2}$$

Ωστόσο εδώ οι περιορισμοί είναι ισοτικοί $h_k(x) = 0$ και όχι ανισοτικοί. Φυσικά μπορούν να εκφραστούν ως ανισοτικοί χωρίζοντας τους σε 2 ανισότητες της μορφής:

$$h_j(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} g_{2j}(x) & = \ \ h_j(x)\ \leq 0 \\ g_{2j+1}(x) & = -h_j(x)\ \leq 0 \end{cases},\ \text{για}\ j = \{1, \cdots, m\} \tag{3.3}$$

Έτσι η $F$ μπορεί να γίνει με απλοποιήσεις:

$$F(x) = f(x) + \sum_{j=1}^{m} R_j |h_j(x)|^{\beta} F(x) = f(x) + R \sum_{j=1}^{m} |h_j(x)|^{\beta} \tag{3.4}$$

Καθώς μας ενδιαφέρουν όλοι οι περιορισμοί το ίδιο, επιλέγουμε όλους τους συντελεστές ποινής να είναι ίσοι $R_j = R$. Το $R$ και το $\beta$ μπορούν να εκφραστούν με πολλούς τρόπους για να λύσουμε το πρόβλημα. Αν βέβαια οι συντελεστές ποινής είναι πολύ μεγάλοι η πίεση που ασκείται για να ωθήσει τα άτομα μέσα στον εφικτό χώρο θα είναι πολύ ισχυρή, εμποδίζοντάς τα να κατευθυνθούν προς περισσότερο υποσχόμενες περιοχές. Από την άλλη πλευρά, πολύ χαμηλοί παράγοντες ποινής μπορεί να οδηγήσουν σε εξαντλητική αναζήτηση στο ανέφικτο χώρο, επισκεπτόμενοι περιοχές όπου η αντικειμενική συνάρτηση είναι πολύ χαμηλή αλλά παραβιάζει έντονα τους περιορισμούς.

Έτσι, ο όρος ποινής $R$ επιλέγεται να είναι κατά προτίμηση αρκετά χαμηλός στην αρχή της αναζήτησης, προκειμένου να εξερευνηθεί μια ευρεία περιοχή του χώρου αναζήτησης, ενώ στο τέλος της εκτέλεσης, είναι πιο σημαντικό να υπάρχει ένας υψηλός όρος ποινής, ώστε να εντατικοποιηθεί η αναζήτηση σε αυτές τις ζώνες, αναγκάζοντας τα άτομα να ικανοποιούν τους περιορισμούς. Οπότε, σε μια γενική μορφή, το $R$ ορίζεται δυναμικά σε σχέση με τη γενιά $\tau$ ως $R(\tau) = (\frac{\tau}{2})^{\alpha}$.

### 3.1.2 Μέθοδος Προβολής (**Projection Method**)

Ένας άλλος τρόπος να διασφαλίσουμε την τήρηση των περιορισμών των μεταβλητών μας είναι η μέθοδος της προβολής. Διατηρούμε ως Συνάρτηση Ικανότητας την συνάρτηση (;;) και όποτε οι μεταβλητές του προβλήματος βγαίνουν εκτός του εφικτού χώρου, η μέθοδος αυτή θα τις 'προβάλλει' πάνω σε αυτόν. Ο κανόνας που χρησιμοποιήσαμε στο συγκεκριμένο πρόβλημα για την διατήρηση των ροών $x_i$ στους κόμβους $j$ του δικτύου είναι ένας κανόνας μετασχηματισμού των μεταβλητών, δηλαδή:

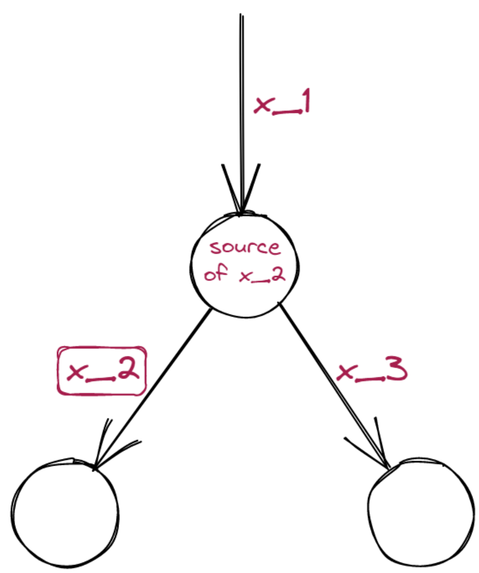
$$x_i' = x_i \frac{\sum_{k \in IN(source_i)} x_k'}{\sum_{\lambda \in OUT(source_i)} x_\lambda} \tag{3.5}$$

όπου $x_i'$ με $i = 1, 2, ..., 17$ είναι η μετασχηματισμένη ροή του δρόμου $i$, $x_i$ είναι η αρχική ροή υπολογισμένη από το χρωμόσωμα του Γενετικού Αλγορίθμου, $IN(source_i)$ είναι το σύνολο των ροών που εισέρχονται στην πηγή (κόμβο) του δρόμου $i$, από τις οποίες παίρνουμε τις μετασχηματισμένες ροές $x_k'$ με $k \in IN(source_i)$ και, τέλος, $OUT(source_i)$ είναι το σύνολο των ροών που εξέρχονται από την πηγή (κόμβο) του δρόμου $i$, τις οποίες παίρνουμε ως έχει, $x_\lambda$ με $\lambda \in OUT(source_i)$.

Με αυτόν τον τρόπο εξασφαλίζεται ότι για κάθε διασταύρωση (κόμβο) $j$ του δικτύου θα ισχύει:

$$\sum_{k \in IN(j)} x_k = \sum_{\lambda \in OUT(j)} x_\lambda \tag{3.6}$$

Για να γίνει πιο κατανοητός ο κανόνας (3.5) φέρνουμε για παράδειγμα το απλοποιημένο δίκτυο του παρακάτω σχήματος:




Σχήμα 3.3: Απλοποιημένο δίκτυο

Επιθυμούμε να μετασχηματίσουμε την ροή $x_2$ του δρόμου 2, ώστε να έγκειται στους περιορισμούς. Σύμφωνα με την σχέση (3.5) θα έχουμε:

$$x_2' = x_2 \frac{x_1'}{x_2 + x_3}$$

Θα επιβεβαιώσουμε τώρα ότι η διατήρηση των ροών της σχέσης (3.6) ικανοποιείται. Υπολογίζουμε την μετασχηματισμένη ροή και του δρόμου 3, ο οποίος επίσης εξέρχεται από την πηγή του δρόμου 2:

$$x_3' = x_3 \frac{x_1'}{x_2 + x_3}$$

Έτσι, αν αθροίσουμε τις δύο αυτές ροές περιμένουμε να πάρουμε την ροή που εισέρχεται στην πηγή του δρόμου 2. Πράγματι:

$$x_2' + x_3' = (x_2 + x_3) \frac{x_1'}{x_2 + x_3} = x_1'.$$

Έχουμε καταφέρει, λοιπόν, να απαλείψουμε τους περιορισμούς του προβλήματος μετασχηματίζοντας τις μεταβλητές που περιέχουν τα χρωμοσώματα σε μεταβλητές που ικανοποιούν αυτόματα τους περιορισμούς μας. Η λειτουργία του Γ.Α. τότε έγκειται στην βελτιστοποίηση των μετασχηματισμένων μεταβλητών για την εύρεση του ελαχίστου.

### 3.1.3 Μείωση του Χώρου Αναζήτησης (**Search Space Reduction**)

Μια ακόμη μέθοδος που διατηρεί την μορφή της Συνάρτησης Ικανότητας της σχέσης (;;) περιλαμβάνει την μείωση του χώρου αναζήτησης των εφικτών σημείων του προβλήματος. Η συλλογιστική που ακολουθούμε σε αυτήν την περίπτωση περιγράφεται παρακάτω:

1. Έστω $n = 17$ οι μεταβλητές μας, δηλαδή οι ρυθμοί διέλευσης για κάθε δρόμο του οδικού δικτύου, και οι οποίες κωδικοποιούνται σαν γονίδια σε κάθε χρωμόσωμα του πληθυσμού.
2. Έστω, επίσης, $m = 8$ οι ισοτικοί περιορισμοί που αναφέρθηκαν στην Ενότητα 2, εάν τους φέρουμε με την βοήθεια της απαλειφής Gauss σε μορφή όπου οι γραμμές του πίνακα του συστήματος είναι γραμμικά ανεξάρτητες.
3. Τότε, λύνοντας το γραμμικό σύστημα $8 \times 17$ θα βρούμε $n - m = 9$ ελεύθερες μεταβλητές και $m = 8$ δεσμευμένες μεταβλητές. Αυτές προκύπτουν:

$$
\begin{aligned}
-x_1 - x_2 - x_3 + V &= x_4 \\
x_1 - x_5 &= x_6 \\
x_2 - x_7 &= x_8 \\
-x_1 - x_2 - x_3 - x_9 + V &= x_{10} \\
x_2 + x_3 - x_7 + x_9 - x_{11} - x_{12} &= x_{13} \\
x_1 + x_2 + x_3 - x_5 + x_9 - x_{11} - x_{12} - x_{14} &= x_{15} \\
x_5 + x_{14} &= x_{16} \\
-x_1 - x_2 - x_3 - x_9 + x_{11} + V &= x_{17}
\end{aligned}
$$

4. Στόχος, πλέον, του Γ.Α. είναι η εύρεση των 9 ελεύθερων μεταβλητών που δίνουν το ελάχιστο κόστος από την Συνάρτηση Ικανότητας. Οι υπόλοιπες 8 δεσμευμένες μεταβλητές καθορίζονται με βάση τις παραπάνω σχέσεις και δεν επηρεάζονται από τον Γ.Α.

5. Για την διευκόλυνση της υλοποίησης του αλγορίθμου έγινε μετονομασία των ελεύθερων μεταβλητών με δείκτες από το 1 έως το 9 και των δεσμευμένων μεταβλητών με δείκτες από το 10 έως το 17. Η αντιστοίχιση. αναλυτικά, ορίζεται:

| | | | |
|---|---|---|---|
| $x_1 \leftrightarrow x_1$ | $x_2 \leftrightarrow x_2$ | $x_3 \leftrightarrow x_3$ | $x_4 \leftrightarrow x_{10}$ |
| $x_5 \leftrightarrow x_4$ | $x_6 \leftrightarrow x_{11}$ | $x_7 \leftrightarrow x_5$ | $x_8 \leftrightarrow x_{12}$ |
| $x_9 \leftrightarrow x_6$ | $x_{10} \leftrightarrow x_{13}$ | $x_{11} \leftrightarrow x_7$ | $x_{12} \leftrightarrow x_8$ |
| $x_{13} \leftrightarrow x_{14}$ | $x_{14} \leftrightarrow x_9$ | $x_{15} \leftrightarrow x_{15}$ | $x_{16} \leftrightarrow x_{16}$ |
| $x_{17} \leftrightarrow x_{17}$ | | | |

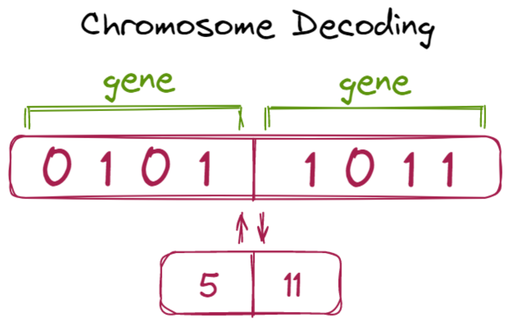
6. Μετά την εύρεση της βέλτιστης λύσης από τον Γ.Α. και για να διατηρήσουμε το πρόβλημα στην αρχική του μορφή επαναφέρουμε τις ονομασίες των μεταβλητών στην αρχική τους κατάσταση βάσει του παραπάνω πίνακα αντιστοίχισης.

Έτσι, έχουμε καταφέρει να απαλείψουμε τους ισοτικούς περιορισμούς του προβλήματος μειώνοντας την διάσταση του χώρου αναζήτησης. Για τους ανισοτικούς περιορισμούς των δεσμευμένων μεταβλητών, δηλαδή τους περιορισμούς $0 \leq x_i \leq c_i$ για $i = 10, 11, ..., 17$, μπορούμε να εφαρμόσουμε και πάλι μια μέθοδο ποινής (π.χ. Death Penalty) όπως αναφέρθηκε παραπάνω.

## 3.2 Αποκωδικοποίηση Χρωμοσωμάτων (**Decoding**)

Όπως έχουμε αναφέρει, οι μεταβλητές του προβλήματός μας, δηλαδή οι ρυθμοί διέλευσης οχημάτων των δρόμων του δικτύου, βρίσκονται κωδικοποιημένες σαν δυαδικές λέξεις (γονίδια) στο κάθε χρωμόσωμα του πληθυσμού. Η Συνάρτηση Ικανότητας που χρησιμοποιούμε, ωστόσο, απαιτεί οι δυαδικές αυτές λέξεις να μετατραπούν σε δεκαδικοί αριθμοί, ώστε να γίνει ο υπολογισμός του κόστους του κάθε χρωμοσώματος.

Για τον σκοπό αυτό, κατασκευάζουμε μια συνάρτηση αποκωδικοποίησης των χρωμοσωμάτων, η οποία δέχεται σαν όρισμα έναν πίνακα δυαδικών αριθμών, το χρωμόσωμα, και δίνει ως έξοδο το ίδιο χρωμόσωμα σε δεκαδική αναπαράσταση, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



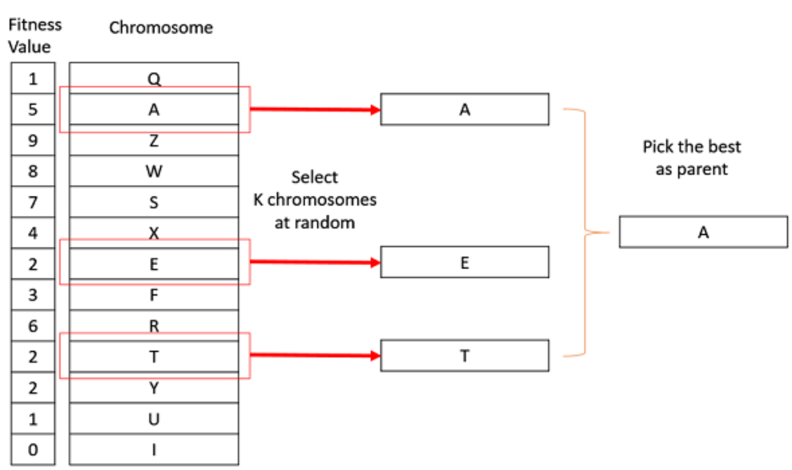

Σχήμα 3.4: Αποκωδικοποίηση χρωμοσώματος

Έτσι, υπολογίζονται τα κόστη όλων των χρωμοσωμάτων του πληθυσμού μέσω της Συνάρτησης Ικανότητας και μπορεί να ακολουθήσει η διαδικασία επιλογής των επικρατέστερων χρωμοσωμάτων.

## 3.3 Επιλογή Χρωμοσωμάτων (**Selection**)

Η διαδικασία επιλογής των επικρατέστερων χρωμοσωμάτων μπορεί να πραγματοποιηθεί με πολλούς τρόπους, ωστόσο για τα δεδομένα του προβλήματος επιλέχθηκε η διαδικασία επιλογής 'τουρνουά' (Tournament Selection Strategy).

Σύμφωνα με αυτήν επιλέγουμε τυχαία $k$ χρωμοσώματα από τον πληθυσμό και συγκρίνοντας τα κόστη τους διαλέγουμε το καλύτερο από αυτά για να γίνει γονέας. Η ίδια διαδικασία επαναλαμβάνεται για την επιλογή του επόμενου γονέα μέχρι να επικρατήσουν στον πληθυσμό τα βέλτιστα γονίδια. Η διαδικασία απεικονίζεται στο παρακάτω σχήμα:

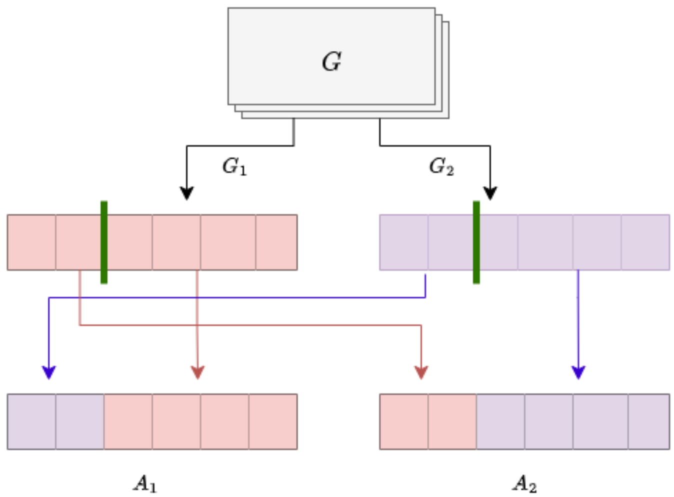



Σχήμα 3.5: Διαδικασία επιλογής 'τουρνουά'

Παρ΄όλα αυτά, βλέπουμε ότι η διαδικασία επιλογής λειτουργεί στοχαστικά, συνεπώς κανένα χρωμόσωμα του πληθυσμού, όσο ικανό κι αν είναι, δεν περνάει στην επόμενη γενεά με βεβαιότητα. Αυτό βρίσκεται σε συμφωνία με τη φύση όπου κι εκεί το πιο ικανό άτομο έχει υψηλή πιθανότητα επιβίωσης, αλλά καμία εξασφάλιση. Ο λόγος που διατηρούμε αυτήν την ιδιότητα στους γενετικούς αλγορίθμους είναι η αποφυγή εγκλωβισμού του αλγορίθμου σε μια περιοχή τοπικού ακροτάτου.

## 3.4 Τελεστής Διασταύρωσης (**Crossover**)

Η διασταύρωση αποτελεί τον κυρίαρχο τελεστή στους γενετικούς αλγορίθμους. Σύμφωνα με αυτήν τα χρωμοσώματα δύο γονέων χωρίζονται σε δύο τμήματα, τα οποία και διασταυρώνονται δημιουργώντας, έτσι, δύο νέους απογόνους, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:

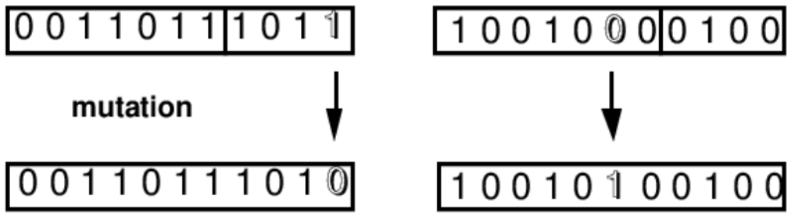



Σχήμα 3.6: Τελεστής διασταύρωσης

Η πιθανότητα τέλεσης της διασταύρωσης είναι μεγάλη, ενώ το σημείο τομής που χωρίζει σε δύο τμήματα τα χρωμοσώματα των γονέων προσδιορίζεται τυχαία με την προϋπόθεση να παραμένουν ακέραια όλα τα γονίδια των χρωμοσωμάτων.

## 3.5 Τελεστής Μετάλλαξης (**Mutation**)

Η μετάλλαξη είναι ένας τελεστής που εκτελείται με μικρότερη πιθανότητα στους γενετικούς αλγορίθμους απ΄ ό,τι ο τελεστής της διασταύρωσης. Κύριος σκοπός του είναι να εμποδίσει τον γενετικό αλγόριθμο από το να εγκλωβιστεί σε περιοχές του χώρου αναζήτησης με το να διαταράσσει ελαφρά το χρωμόσωμα. Αυτό επιτυγχάνεται με την τυχαία εναλλαγή ενός ψηφίου των γονιδίων του χρωμοσώματος απο '0' σε '1' και αντίστροφα. Η διαδικασία αυτή απεικονίζεται στο παρακάτω σχήμα:

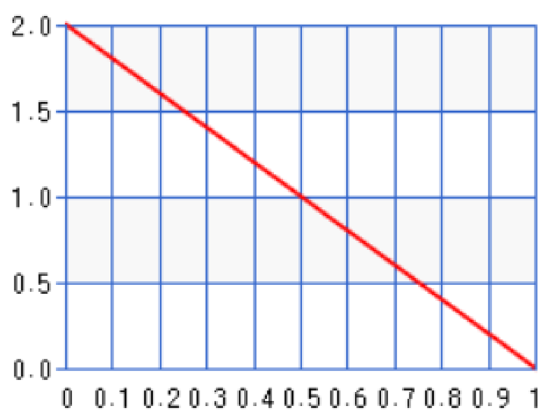



Σχήμα 3.7: Τελεστής μετάλλαξης

Δεδομένου, ωστόσο, ότι όλα τα ψηφία ενός γονιδίου δεν έχουν την ίδια σημαντικότητα, η ισοπίθανη τυχαία μεταβολή των ψηφίων του γονιδίου προκαλεί με την ίδια πιθανότητα τεράστιες μεταβολές και πολύ μικρές μεταβολές. Για να αποφευχθεί αυτό χρησιμοποιούμε μια συνάρτηση πιθανότητας που θα εξασφαλίζει την μεταβολή της πιθανότητας μετάλλαξης σε σχέση με τη σημαντικότητα του ψηφίου. Έτσι, όσο λιγότερο σημαντικό είναι ένα ψηφίο του γονιδίου, τόσο μεγαλύτερη είναι η πιθανότητα μετάλλαξής του. Για τα δεδομένα του προβλήματός μας χρησιμοποιήθηκε η κατανομή Beta, με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας:

$$p(x) = \frac{x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{\mathrm{B}(\alpha,\beta)} \tag{3.7}$$

όπου $0 \leq x \leq 1$ είναι μια τυχαία μεταβλητή και $\alpha, \beta > 0$ είναι παράμετροι ‘σχήματος’. Ακόμη, η συνάρτηση $\mathrm{B}(\alpha,\beta)$ είναι η Beta Function που κανονικοποιεί την συνάρτηση πιθανότητας, ώστε να εξασφαλίζει ότι το συνολικό εμβαδόν κάτω από την καμπύλη παραμένει ίσο με 1. Για τους σκοπούς του προβλήματός μας χρησιμοποιήθηκε η κατανομή Beta με παραμέτρους $\alpha = 1$ και $\beta = 2$, η οποία έχει την εξής μορφή:




Σχήμα 3.8: Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της κατανομής *Beta*

# 4 Έλεγχος Ευρωστίας

Επιθυμούμε, τώρα, να ελέγξουμε την ευρωστία του αλγορίθμου, δηλαδή την αντοχή του σε διαταραχές της εισερχόμενης στο δίκτυο ροής οχημάτων. Για τον σκοπό αυτό μεταβάλλουμε την παράμετρο $V$ στο εύρος $\pm 15\%$ της αρχικής του τιμής. Ο Γενετικός Αλγόριθμος εντοπίζει τότε μία βέλτιστη λύση, η οποία θεωρητικά θα πρέπει να λαμβάνει υπόψην τις διακυμάνσεις της εισόδου. Για να εξετάσουμε την αποτελεσματικότητα του αλγορίθμου στην διαχείριση των διαταραχών δοκιμάζουμε την βέλτιστη λύση για ενδεικτικές εισόδους $V$ στο εύρος που αναφέραμε.

Συγκεκριμένα, θεωρούμε ότι οι ροές της βέλτιστης λύσης δείχνουν το ποσοστό των οχημάτων σε κάθε δρόμο. Έτσι, αν θεωρήσουμε ως $\boldsymbol{\lambda} = [0.85, 1.15]$ τον συντελεστή με τον οποίο πολλαπλασιάζεται το διαταραγμένο $V$, τότε τα νέα ποσοστά οχημάτων στους δρόμους θα είναι $x' = \boldsymbol{\lambda} x$, το οποίο και εισάγουμε στην Συνάρτηση Ικανότητας, ώστε να εκτιμήσουμε την αποτελεσματικότητα του αλγορίθμου στα νέα δεδομένα. Μια ακόμα παράμετρος που εισάγουμε για την μελέτη της ευρωστίας του αλγορίθμου είναι αυτή του constraint violation rate, η οποία δίνει μια εκτίμηση της παραβίασης των περιορισμών από τον αλγόριθμο.

Μας προβληματίζει ότι με ακραίες μεταβολές της εισόδου μπορεί κάποιες ροές να ξεπεράσουν το επιτρεπόμενο άνω όριο κι έτσι να οδηγηθούμε σε σφάλμα. Αυτό είναι αναμενόμενο όμως, καθώς ο αλγόριθμος λόγω της τυχαιότητας στην μεταβολή της εισερχόμενης ροής, δεν εκπαιδεύεται επαρκώς για τις οριακές τιμές μεταβολής αυτής.