

1^η Εργασία Τεχνικών Βελτιστοποίησης

Αλεξόπουλος Δημήτριος AEM 10091

10 Νοεμβρίου 2022

Εισαγωγή

Στην ακόλουθη εργασία ζητούμενο είναι η ελαχιστοποίηση μιας δοσμένης κυρτής συνάρτησης $f(x)$ όταν $x \in [a, b]$. Το πρόβλημα αυτό θα αναλυθεί στην απλουστευμένη του μορφή, αλλά αποτελεί την βάση των αλγορίθμων εύρεσης ελαχίστου συναρτήσεων με περισσότερες μεταβλητές. Οι αλγόριθμοι που θα υλοποιηθούν είναι:

1. Μέθοδοι αναζήτησης ελαχίστου χωρίς την χρήση παραγώγων:

- Μέθοδος της Διχοτόμου,
- Μέθοδος του Χρυσού Τομέα,
- Μέθοδος Fibonacci.

2. Μέθοδοι αναζήτησης με χρήση παραγώγων:

- Μέθοδος της Διχοτόμου με χρήση παραγώγου.

Σε όλες τις παραπάνω μεθόδους ξεκινάμε από ένα αρχικό διάστημα $[a, b]$ μέσα στο οποίο βρίσκεται το ελάχιστο x^* της $f(x)$. Με τη χρησιμοποίηση ενός ακολουθιακού αλγόριθμου καταλήγουμε σε ένα διάστημα $[\alpha_k, \beta_k]$ με προδιαγεγραμμένη ακρίβεια $l > 0$, δηλαδή $\beta_k - \alpha_k \leq l$.

Θα χρησιμοποιήσουμε σαν αρχικό διάστημα το $[-1, 3]$ και οι συναρτήσεις που θα ελαχιστοποιηθούν είναι οι:

- $f_1(x) = (x - 2)^2 + x * \log(x + 3)$
- $f_2(x) = 5^x + (2 - \cos(x))^2$
- $f_3(x) = e^x * (x^3 - 1) + (x - 1) * \sin(x)$

Ακολουθούν οι αλγόριθμοι εύρεσης ελαχίστου με ανάλυση και παρουσίαση αποτελεσμάτων σε κατάλληλα διαγράμματα.

1 Μέθοδος της Διχοτόμου

Στην μέθοδο της διχοτόμου, το διάστημα αναζήτησης χωρίζεται σε τρία ανισομερή υπό-διαστήματα με τη βοήθεια δύο εσωτερικών σημείων $x_1, x_2 \in [a, b]$.

1.1 Σταθερό ϵ - μεταβαλλόμενο l

Αρχικά, κρατώντας σταθερό το τελικό εύρος αναζήτησης $l = 0.01$, μελετάμε τη μεταβολή των υπολογισμών της αντικειμενικής συνάρτησης $f_i(x)$, $i = 1, 2, 3$, καθώς μεταβάλλουμε τη σταθερά $\epsilon > 0$ με $\epsilon \in \{10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}, 10^{-5}, 10^{-6}\}$.

ϵ	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}
$f_1(x)$	0.10385	0.000967	0.0001088	8.52e-05	8.74e-05
$f_2(x)$	0.12858	0.0007955	0.0001075	0.0001271	0.0001038
$f_3(x)$	0.13934	0.0010388	0.0001145	0.0001615	0.0001217

Πίνακας 1: Χρόνος εκτέλεσης σε δευτερόλεπτα.

ϵ	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}
$f_1(x)$	-	10	10	10	10
$f_2(x)$	-	10	10	10	10
$f_3(x)$	-	10	10	10	10

Πίνακας 2: Επαναλήψεις μέχρι τον τερματισμό.

Παραπάνω βλέπουμε τους πίνακες με τον χρόνο εκτέλεσης του αλγορίθμου σε δευτερόλεπτα για κάθε ϵ και για κάθε συνάρτηση, καθώς και τον αριθμό επαναλήψεων μέχρι τον τερματισμό του αλγορίθμου.

Παρατηρούμε πολύ μικρό αριθμό επαναλήψεων μέχρι τον τερματισμό του αλγορίθμου και γρήγορη απόκριση. Με πολύ μεγάλο l ο αλγόριθμος δεν τερματίζει ποτέ.

Έπειτα, ο επόμενος πίνακας 3 δείχνει τα διαστήματα στα οποία εκτιμήθηκαν τα ελάχιστα.

ϵ	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}
$f_1(x)$	not found	[1.1474 1.1572]	[1.1483 1.1563]	[1.1484 1.1563]	[1.1484 1.1563]
$f_2(x)$	not found	[-0.40655 -0.39674]	[-0.40628 -0.39827]	[-0.40625 -0.39842]	[-0.40625 -0.39844]
$f_3(x)$	not found	[0.51487 0.52468]	[0.51555 0.52356]	[0.51562 0.52345]	[0.51562 0.52344]

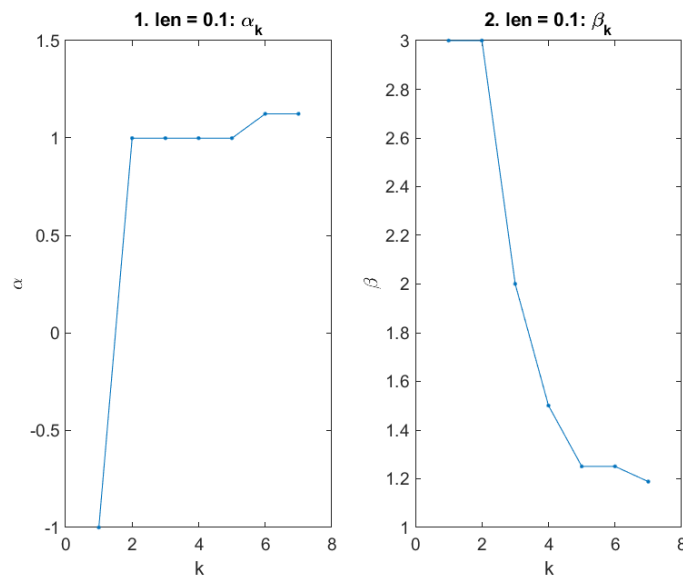
Πίνακας 3: Διαστήματα εκτίμησης θέσης ελαχίστου.

Παρατηρούμε ότι με μικρότερο ϵ γίνεται όλο και στενότερο το διάστημα ελαχίστου.

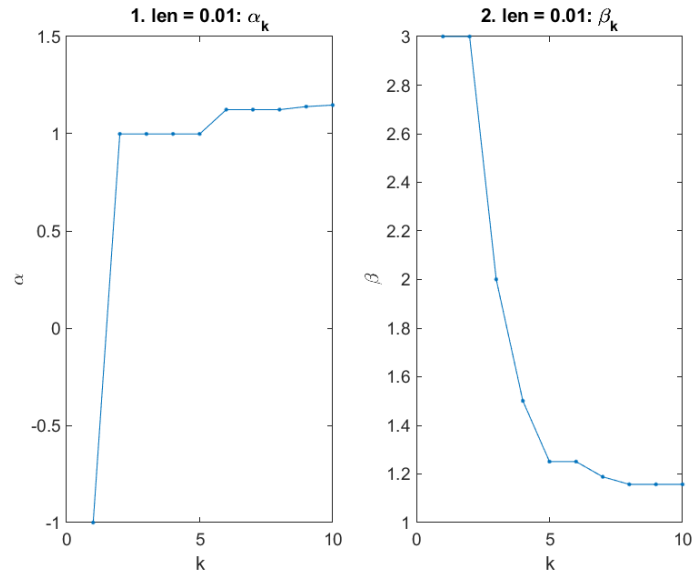
1.2 Σταθερό l - μεταβαλλόμενο ϵ

Στο επόμενο βήμα, κρατάμε το ϵ σταθερό με την τιμή $\epsilon = 0.001$ και μελετάμε την μεταβολή του διαστήματος $[a_k, b_k]$ και των συναρτήσεων. Χρησιμοποιούμε $l = \{0.1, 0.01, 0.005, 0.0025\}$. Έχοντας απεικονίσει την μεταβολή του παραπάνω διαστήματος με την χρήση του MATLAB, μπορούμε να δούμε στις παρακάτω εικόνες πως μεταβάλλεται ακολουθώντας το κάτω όριο του διαστήματος a_k και το άνω όριο b_k .

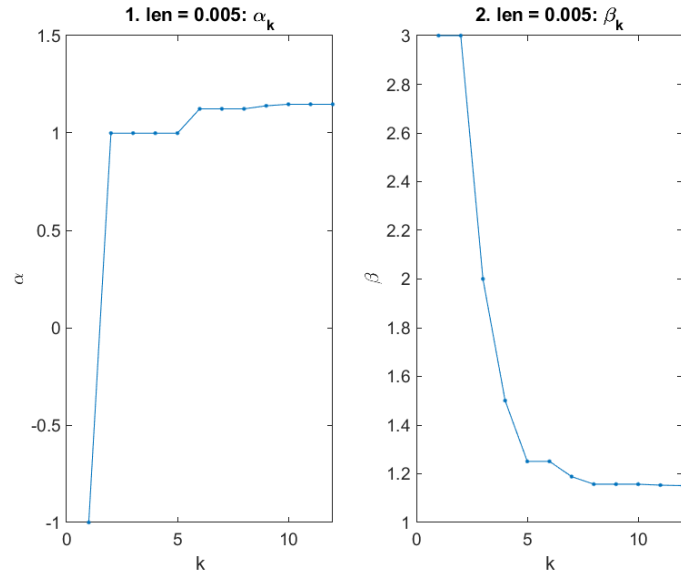
Για την f_1 :



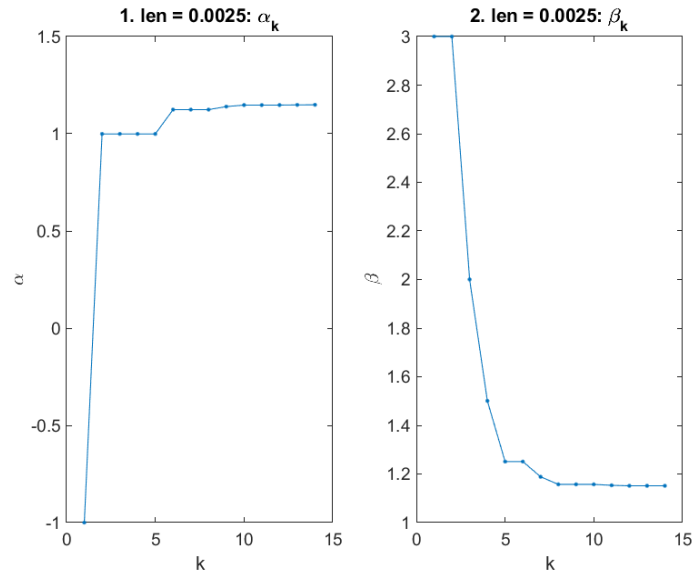
Σχήμα 1: Για $l = 0.1$, η μεταβολή των a_k, b_k .



Σχήμα 2: Για $l = 0.01$, η μεταβολή των a_k, b_k .

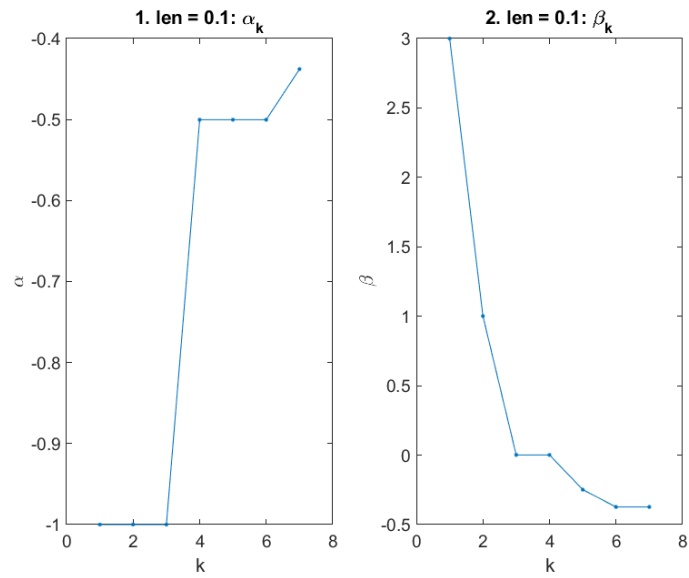


Σχήμα 3: Για $l = 0.005$, η μεταβολή των a_k, b_k .

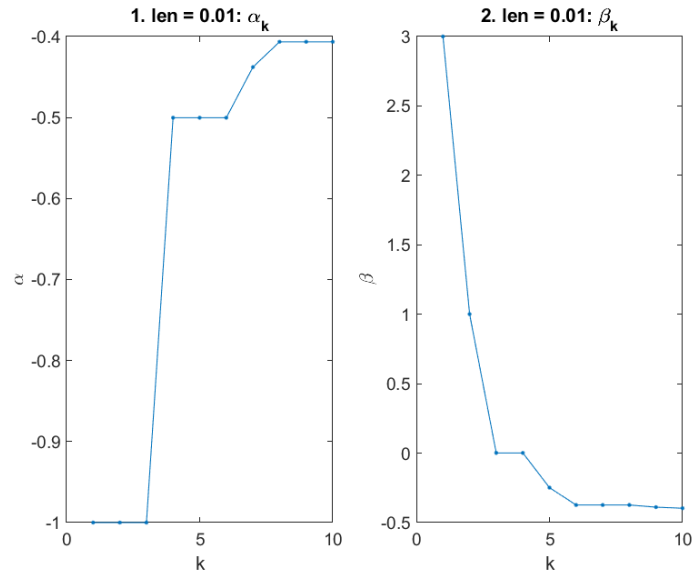


Σχήμα 4: Για $l = 0.0025$, η μεταβολή των a_k, b_k .

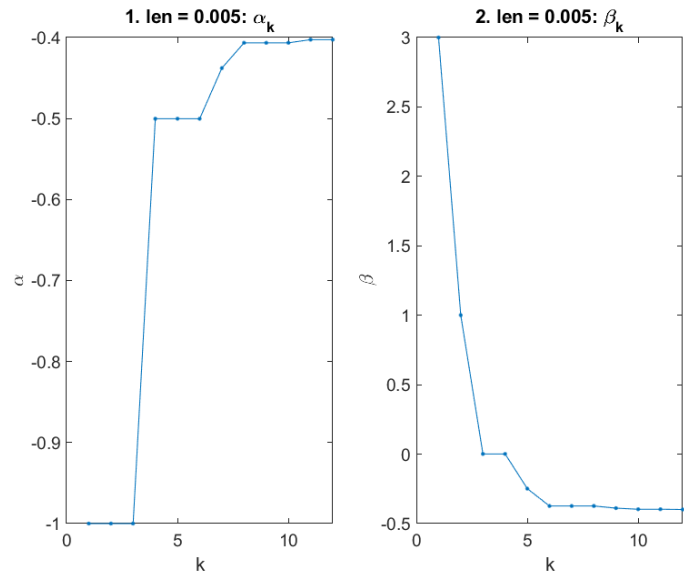
Για την f_2 :



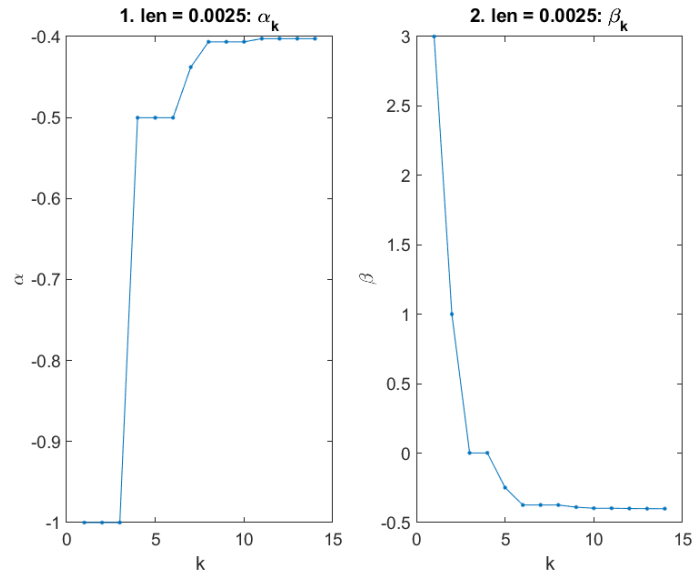
Σχήμα 5: Για $l = 0.1$, η μεταβολή των a_k, b_k .



Σχήμα 6: Για $l = 0.01$, η μεταβολή των a_k , b_k .

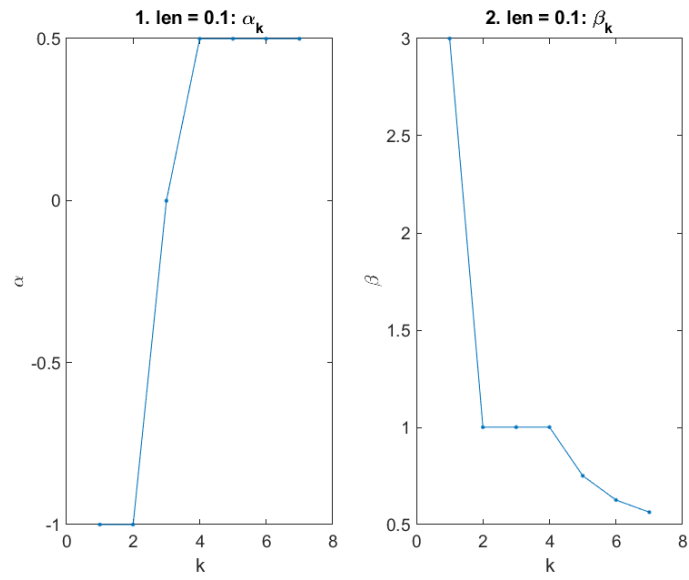


Σχήμα 7: Για $l = 0.005$, η μεταβολή των a_k , b_k .

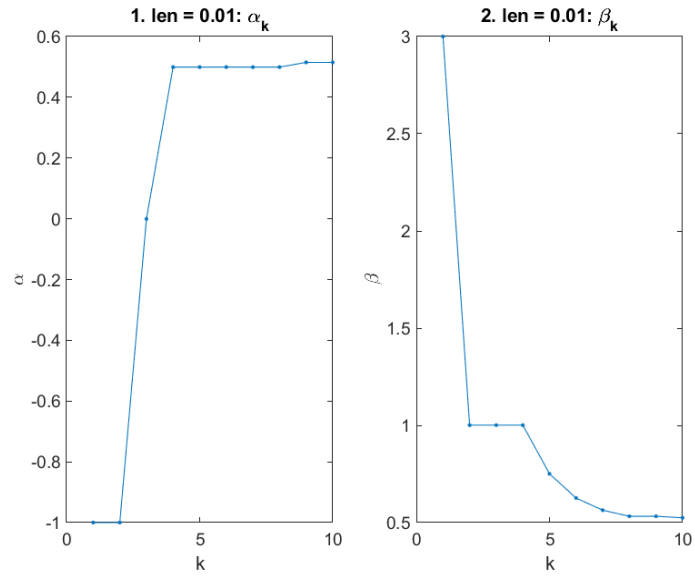


Σχήμα 8: Για $l = 0.0025$, η μεταβολή των a_k, b_k .

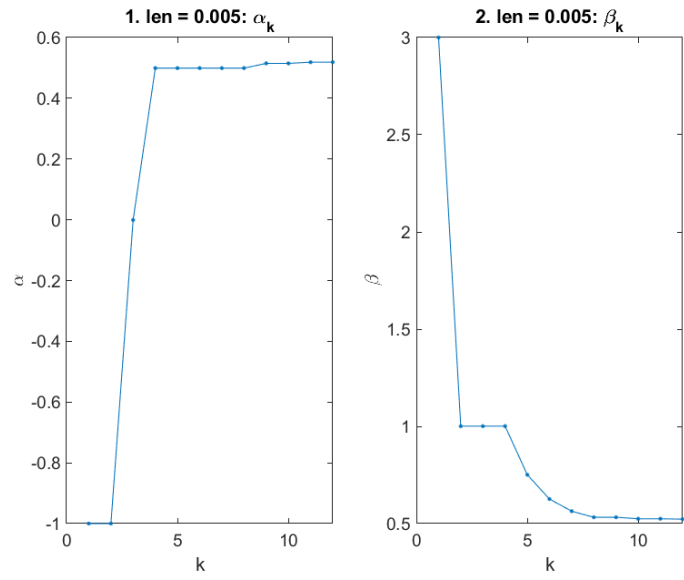
Για την f_3 :



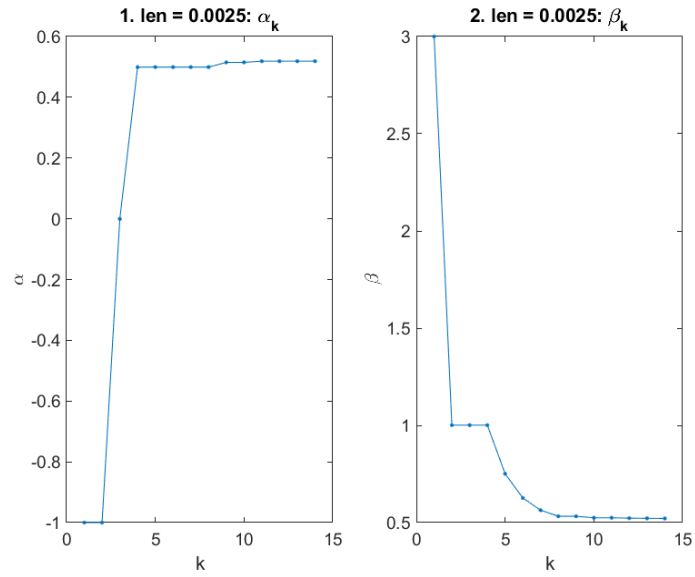
Σχήμα 9: Για $l = 0.1$, η μεταβολή των a_k, b_k .



Σχήμα 10: Για $l = 0.01$, η μεταβολή των a_k , b_k .

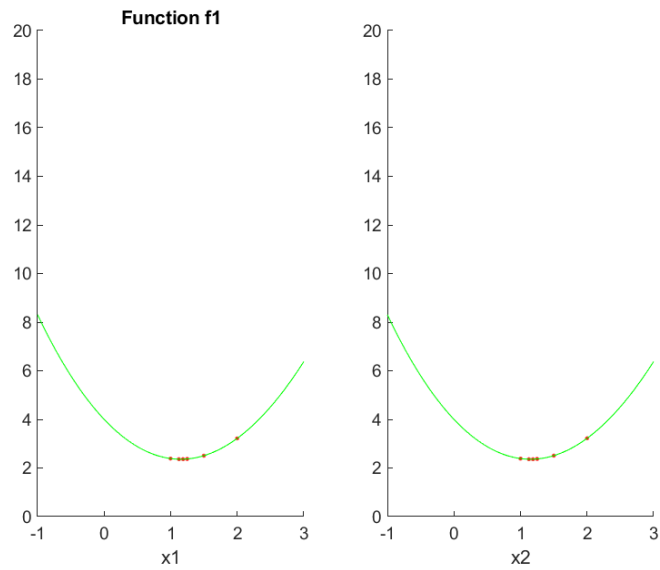


Σχήμα 11: Για $l = 0.005$, η μεταβολή των a_k , b_k .

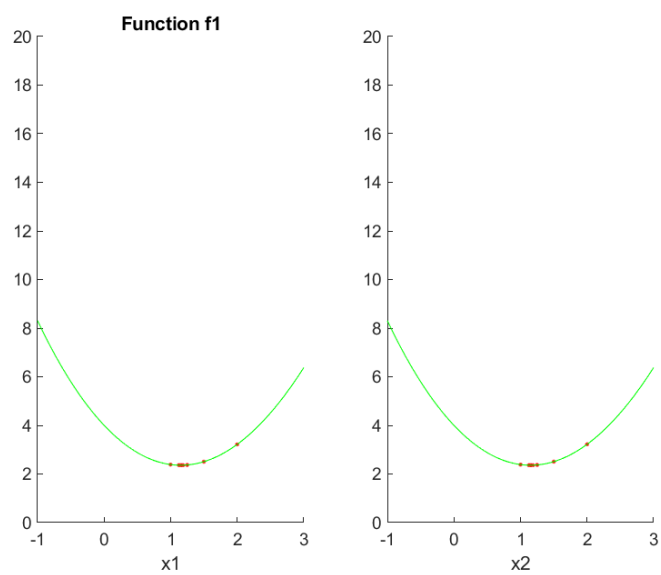


Σχήμα 12: Για $l = 0.0025$, η μεταβολή των a_k, b_k .

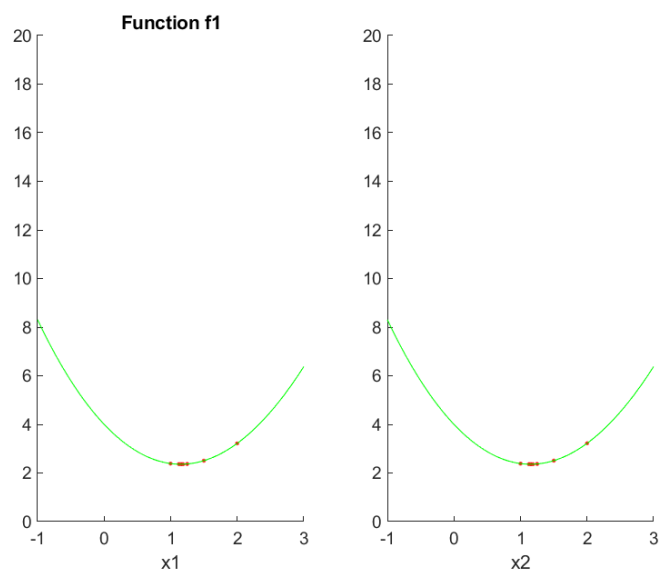
Παρατηρούμε ότι όσο πιο μικρό είναι το ε τόσο πιο πολλά βήματα απαιτεί ο αλγόριθμος, κάτι που αναμένουμε. Τα a_k, b_k μεταβάλλονται, με την μεταβολή και των δύο να είναι σχεδόν πανομοιότυπη για κάθε ε .



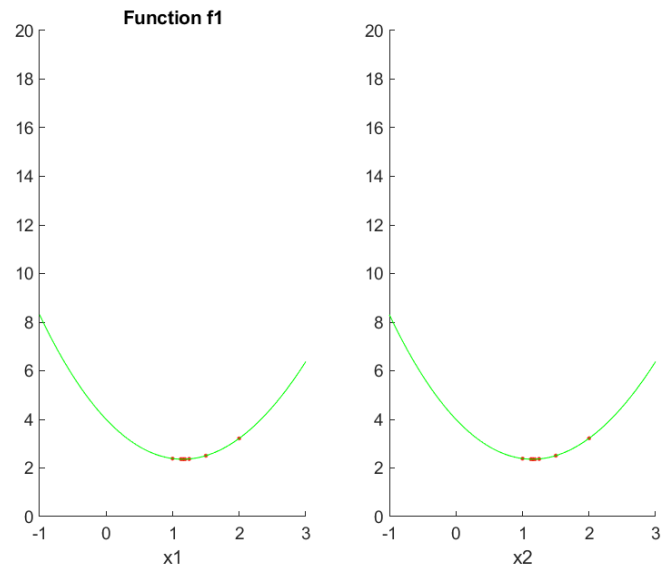
Σχήμα 13: Για $l = 0.1$, η μεταβολή των x_1, x_2 .



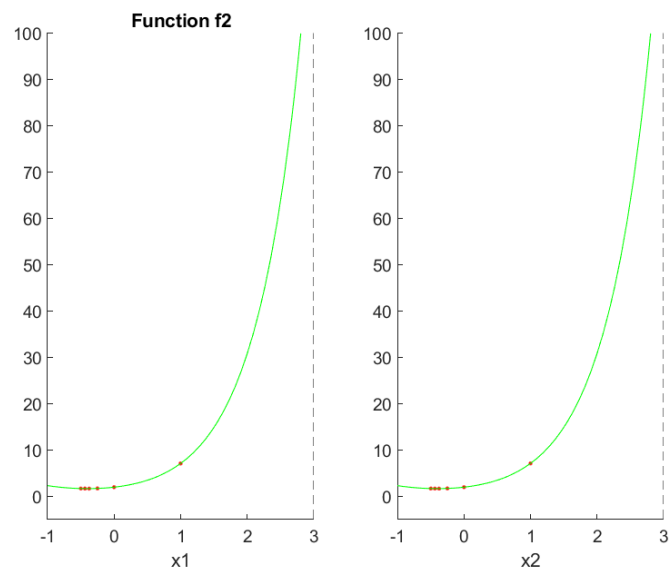
Σχήμα 14: Για $l = 0.01$, η μεταβολή των x_1, x_2 .



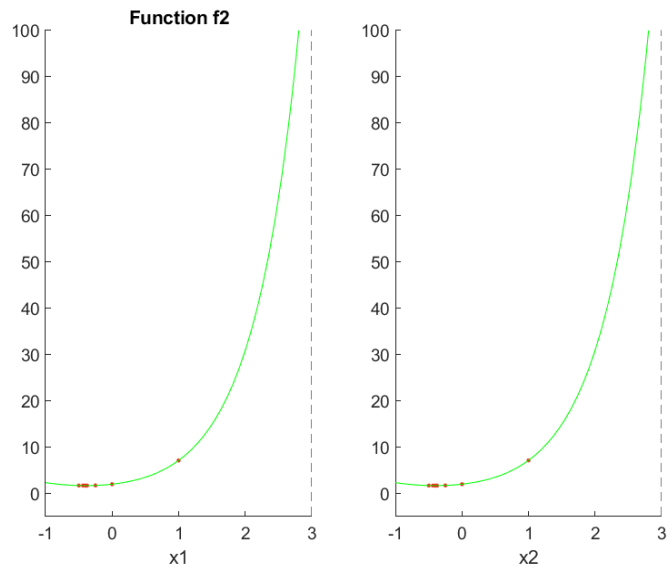
Σχήμα 15: Για $l = 0.005$, η μεταβολή των x_1, x_2 .



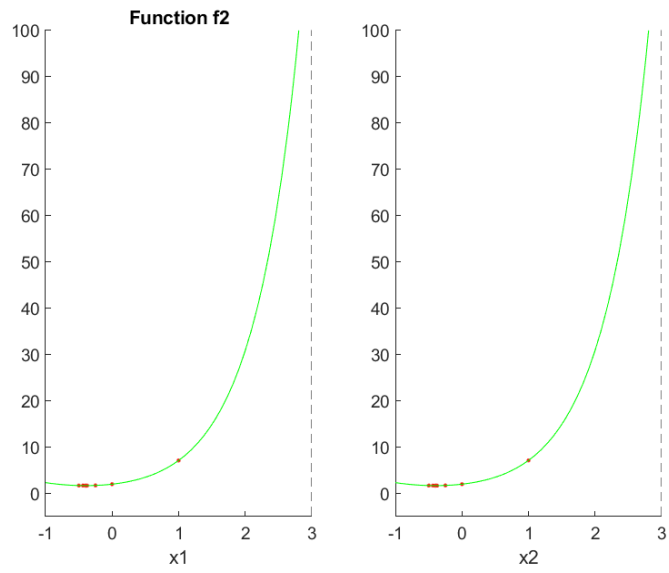
Σχήμα 16: Για $l = 0.0025$, η μεταβολή των x_1, x_2 .



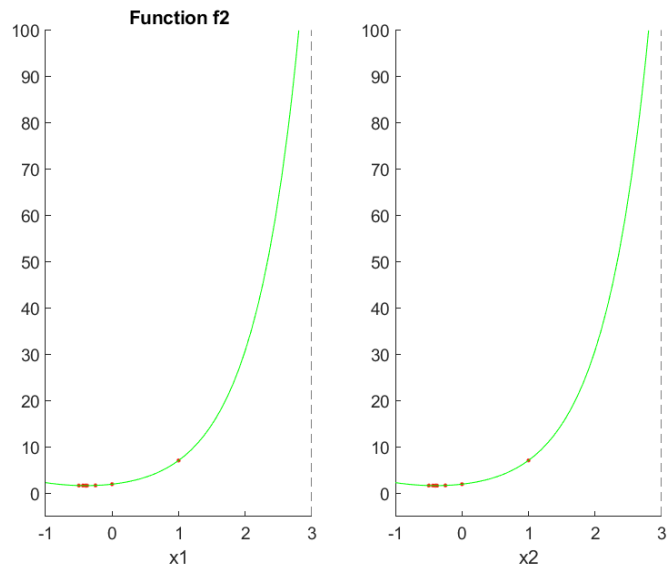
Σχήμα 17: Για $l = 0.1$, η μεταβολή των x_1, x_2 .



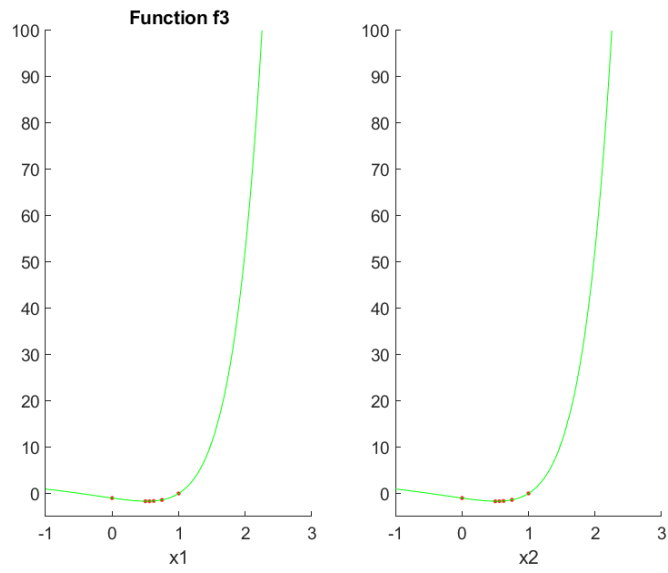
Σχήμα 18: Για $l = 0.01$, η μεταβολή των x_1, x_2 .



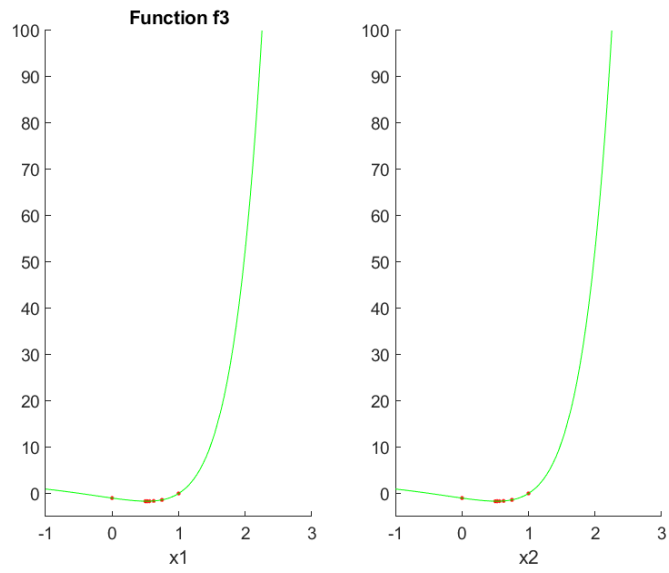
Σχήμα 19: Για $l = 0.005$, η μεταβολή των x_1, x_2 .



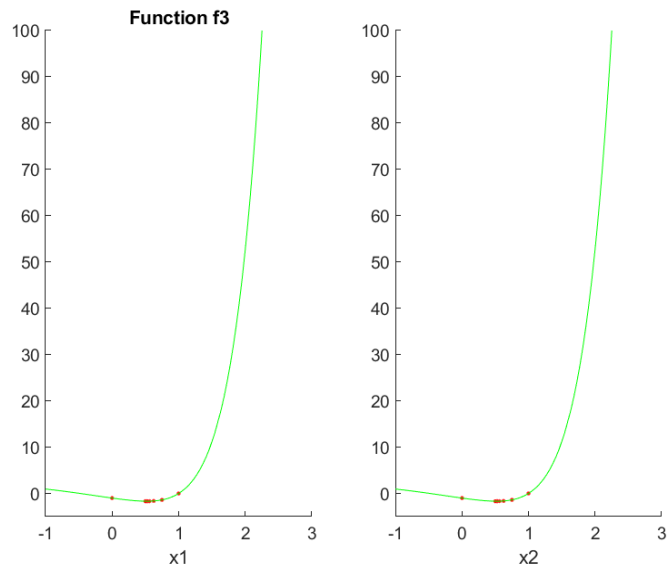
Σχήμα 20: Για $l = 0.0025$, η μεταβολή των x_1, x_2 .



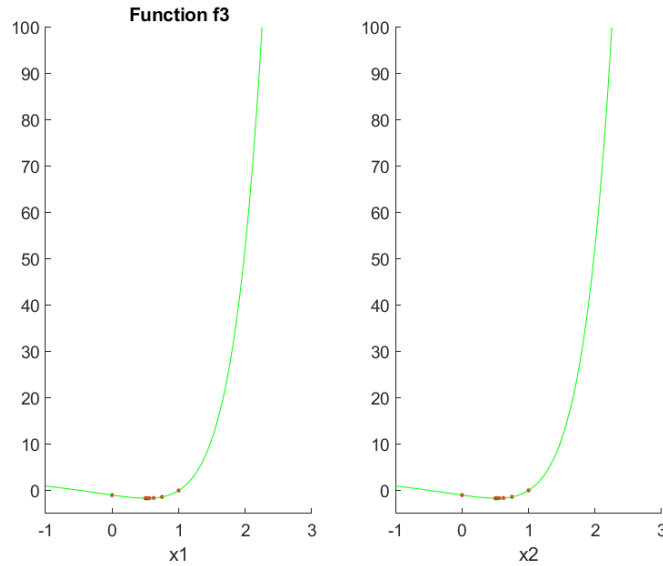
Σχήμα 21: Για $l = 0.1$, η μεταβολή των x_1, x_2 .



Σχήμα 22: Για $l = 0.01$, η μεταβολή των x_1, x_2 .



Σχήμα 23: Για $l = 0.005$, η μεταβολή των x_1, x_2 .



Σχήμα 24: Για $l = 0.0025$, η μεταβολή των x_1, x_2 .

Παράλληλα παρατηρούμε τις μεταβολές των συναρτήσεων ανάλογα με τα x_k . Η γραφική παράσταση κάθε συνάρτησης φαίνεται στα παραπάνω σχήματα.

2 Μέθοδος Χρυσού Τομέα

Στη μέθοδο του χρυσού τομέα, τα σημεία x_1, x_2 επιλέγονται έτσι ώστε το εύρος του νέου υπό-διαστήματος αναζήτησης να συνδέεται με το προηγούμενο με μια σταθερά αναλογίας γ .

Μελετάμε την μεταβολή του διαστήματος $[a_k, b_k]$ και των αντικειμενικών συναρτήσεων για μεταβολή του l στο σύνολο τιμών $\{0.01, 0.001, 0.0001, 0.00001\}$.

l	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}
$f_1(x)$	0.014742	0.0057015	0.000897	0.0007976
$f_2(x)$	0.0088517	0.0011427	0.0005424	0.0004378
$f_3(x)$	0.013388	0.0003491	0.0002865	0.0006965

Πίνακας 4: Χρόνος εκτέλεσης σε δευτερόλεπτα.

Βλέπουμε τους πίνακες με τον χρόνο εκτέλεσης του αλγορίθμου σε δευτερόλεπτα για κάθε l και για κάθε συνάρτηση, καθώς και τον αριθμό επαναλήψεων μέχρι τον τερματισμό του αλγορίθμου.

l	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}
$f_1(x)$	14	19	24	28
$f_2(x)$	14	19	23	27
$f_3(x)$	14	19	24	26

Πίνακας 5: Επαναλήψεις μέχρι τον τερματισμό.

Παρατηρούμε πολύ μικρό αριθμό επαναλήψεων μέχρι τον τερματισμό του αλγορίθμου και γρήγορη απόκριση.

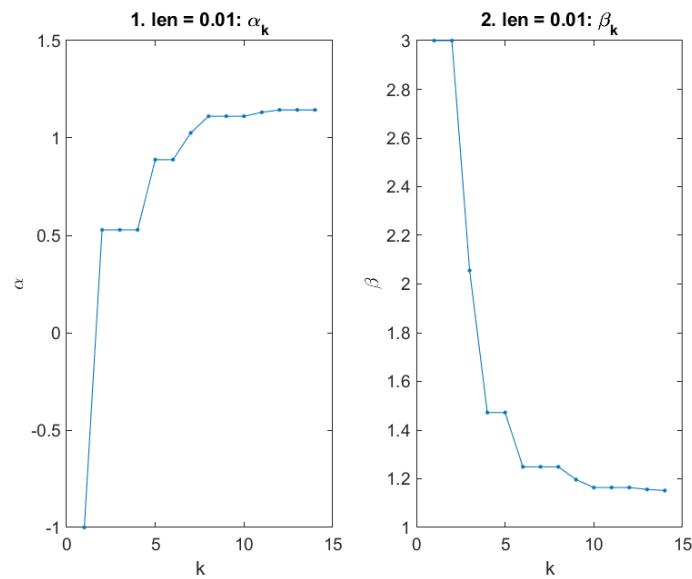
Έπειτα, ο επόμενος πίνακας δείχνει τα διαστήματα στα οποία εκτιμήθηκαν τα ελάχιστα. Παρατηρούμε ότι με μικρότερο l γίνεται όλο και στενότερο το διάστημα ελαχίστου, όπως ήταν αναμενόμενο.

l	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}
$f_1(x)$	[1.1441 1.1516]	[1.1495 1.1501]	[1.1499 1.1499]	[1.1499 1.1499]
$f_2(x)$	[-0.4039 -0.39628]	[-0.40168 -0.40101]	[-0.40146 -0.40137]	[-0.40141 -0.4014]
$f_3(x)$	[0.5154 0.52319]	[0.51951 0.52028]	[0.52002 0.5201]	[0.5201 0.5201]

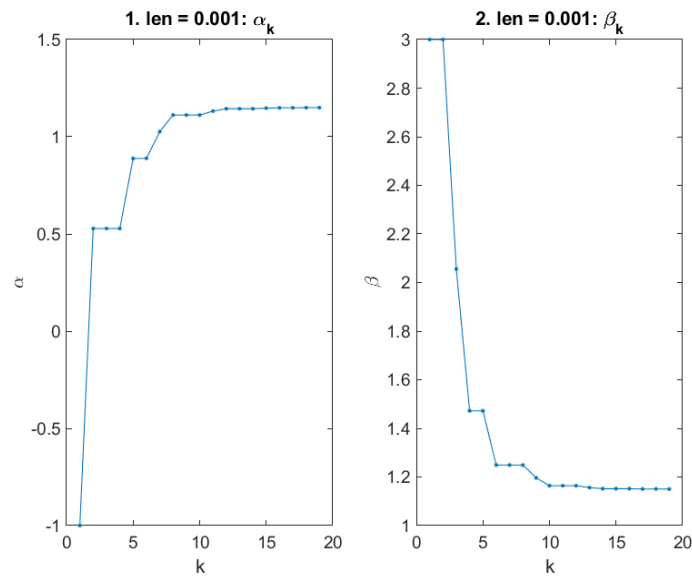
Πίνακας 6: Διαστήματα εκτίμησης θέσης ελαχίστου.

Στη συνέχεια, έχοντας απεικονίσει την μεταβολή του παραπάνω διαστήματος με την χρήση του MATLAB, μπορούμε να δούμε στις παρακάτω εικόνες πως μεταβάλλεται ακολουθώντας το κάτω όριο του διαστήματος a_k και το άνω όριο b_k .

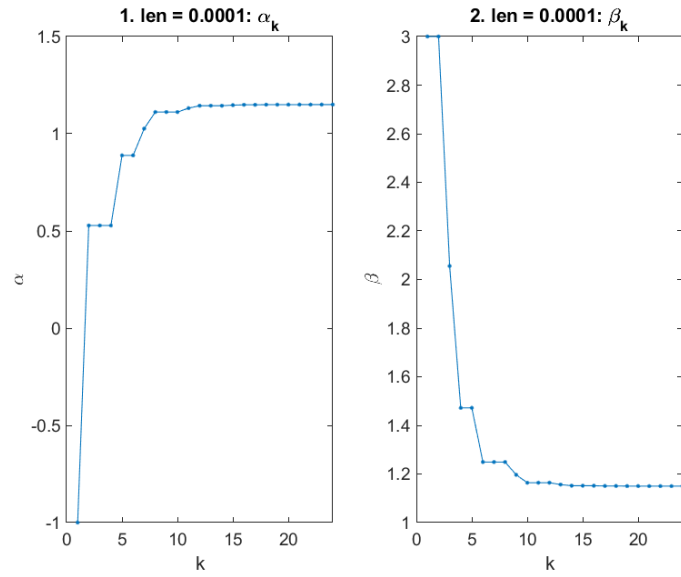
Για την f_1 :



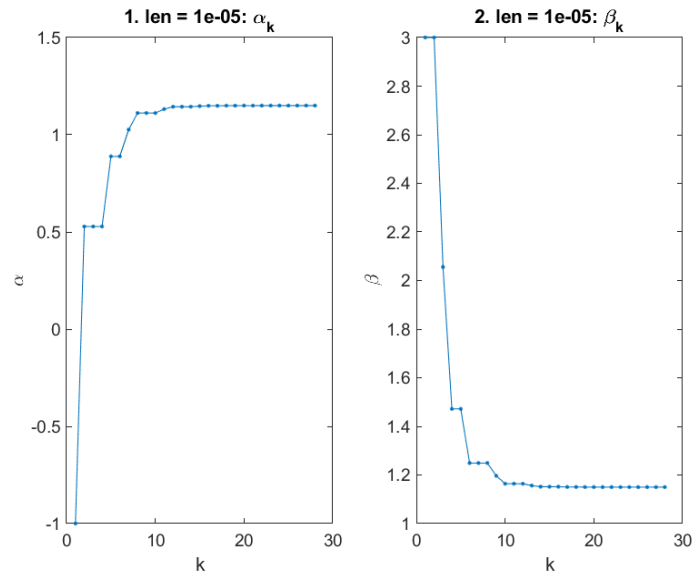
Σχήμα 25: Για $l = 0.01$, η μεταβολή των a_k , b_k .



Σχήμα 26: Για $l = 0.001$, η μεταβολή των a_k , b_k .

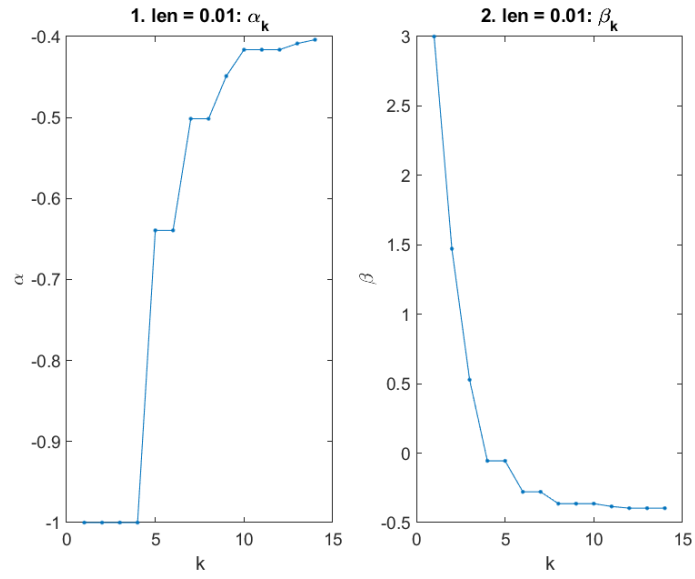


Σχήμα 27: Για $l = 0.0001$, η μεταβολή των a_k, b_k .

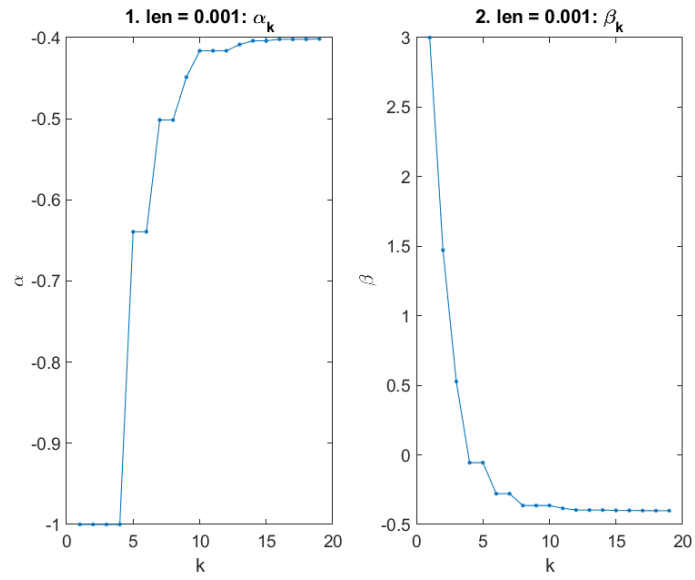


Σχήμα 28: Για $l = 0.00001$, η μεταβολή των a_k, b_k .

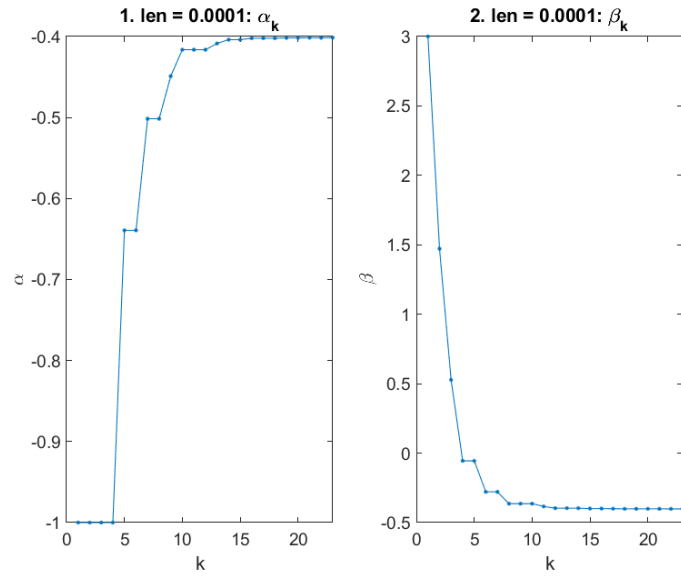
Για την f_2 :



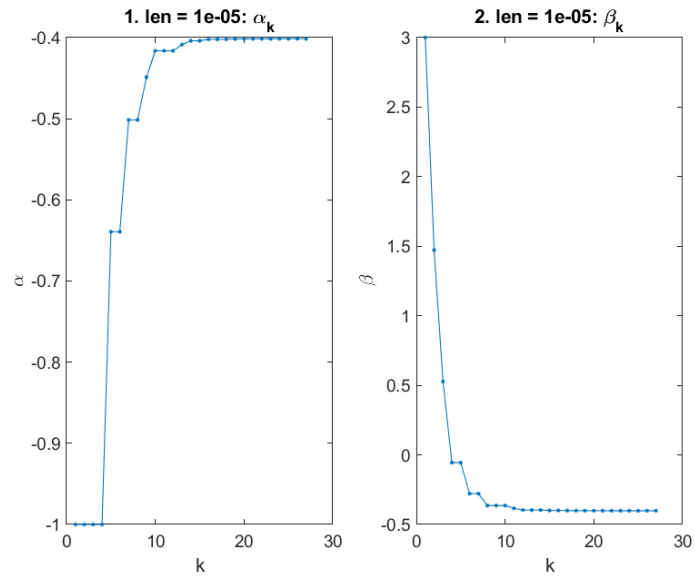
Σχήμα 29: Για $l = 0.01$, η μεταβολή των a_k, b_k .



Σχήμα 30: Για $l = 0.001$, η μεταβολή των a_k, b_k .

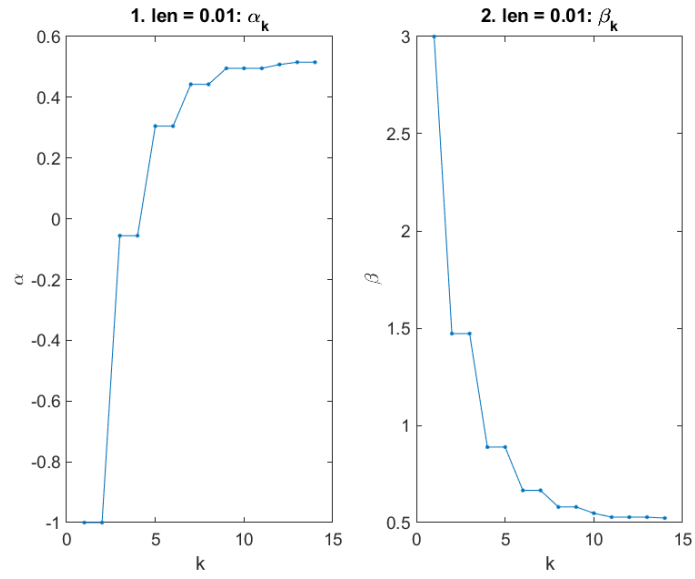


Σχήμα 31: Για $l = 0.0001$, η μεταβολή των a_k, b_k .

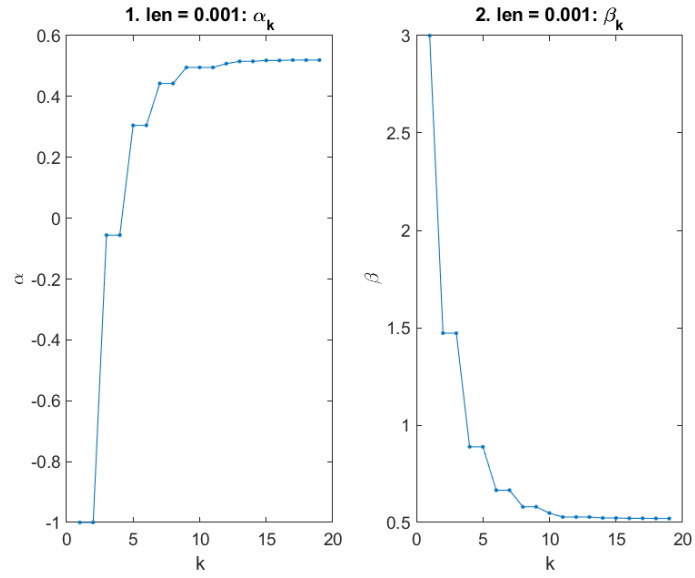


Σχήμα 32: Για $l = 0.00001$, η μεταβολή των a_k, b_k .

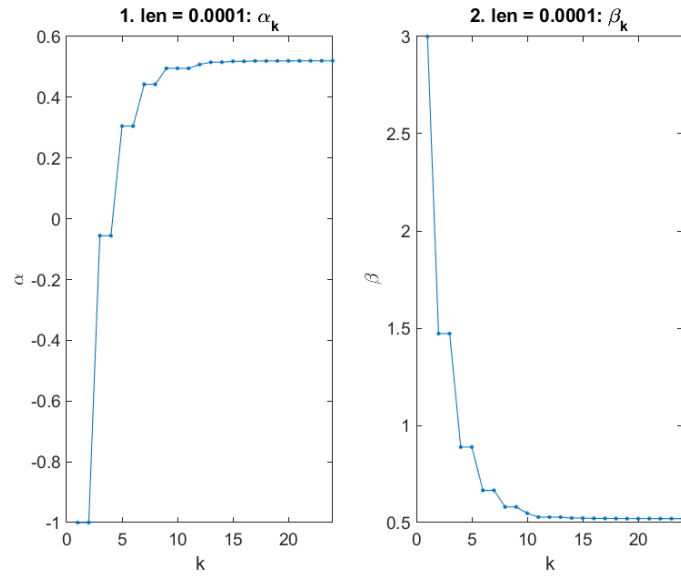
Για την f_3 :



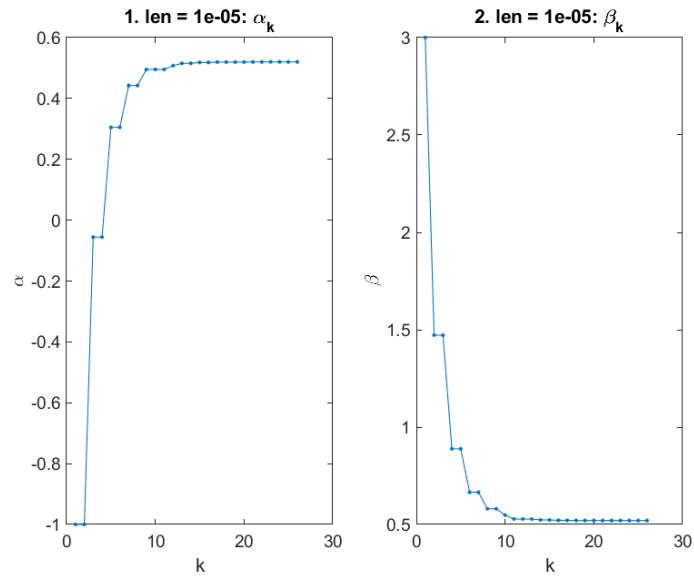
Σχήμα 33: Για $l = 0.01$, η μεταβολή των a_k, b_k .



Σχήμα 34: Για $l = 0.001$, η μεταβολή των a_k, b_k .

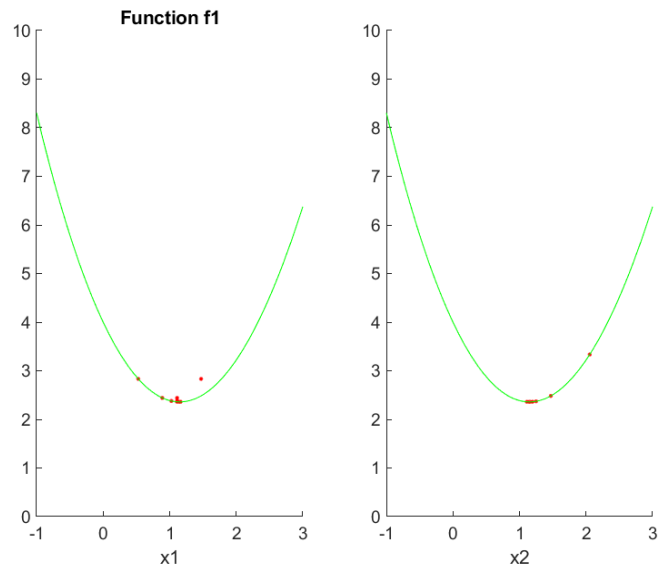


Σχήμα 35: Για $l = 0.0001$, η μεταβολή των a_k, b_k .

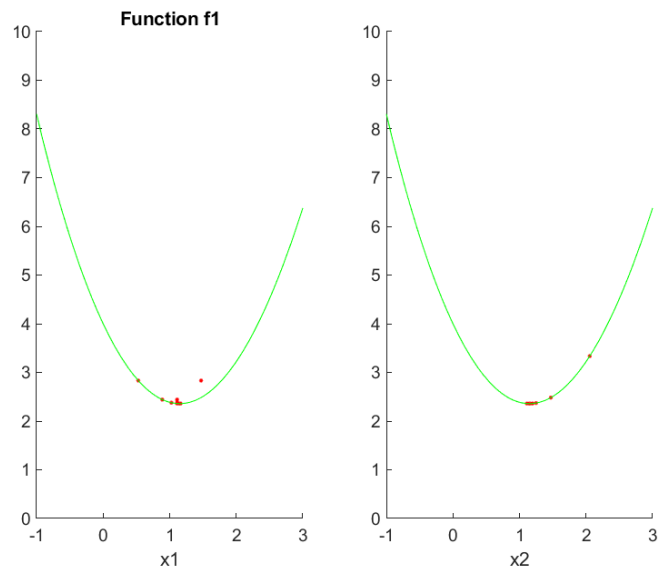


Σχήμα 36: Για $l = 0.00001$, η μεταβολή των a_k, b_k .

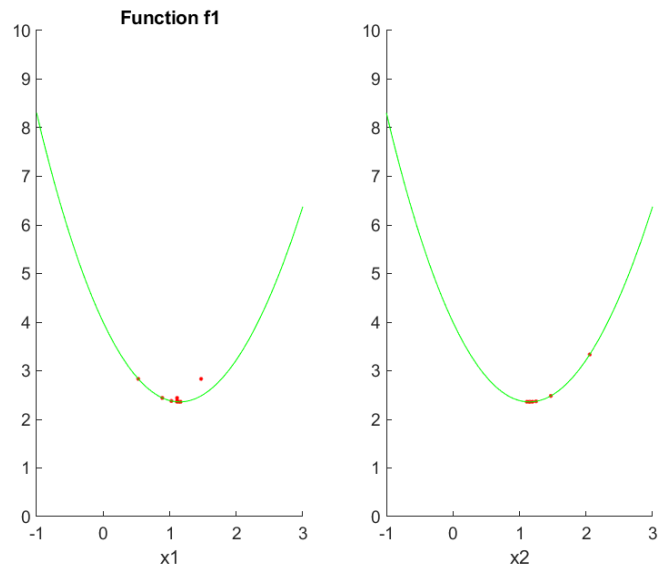
Παρατηρούμε ότι όσο πιο μικρό είναι το l τόσο πιο πολλά βήματα απαιτεί ο αλγόριθμος, κάτι που αναμέναμε. Τα a_k, b_k μεταβάλλονται, με την μεταβολή και των δύο να είναι σχεδόν πανομοιότυπη για κάθε l .



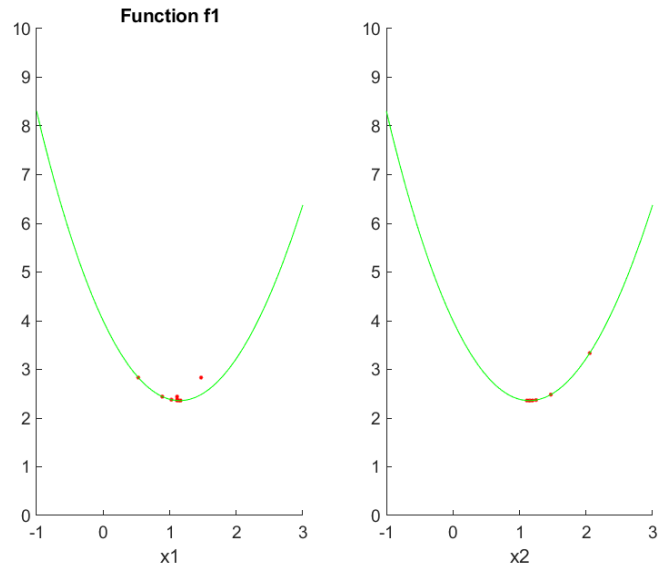
Σχήμα 37: Για $l = 0.01$, η μεταβολή των x_1, x_2 .



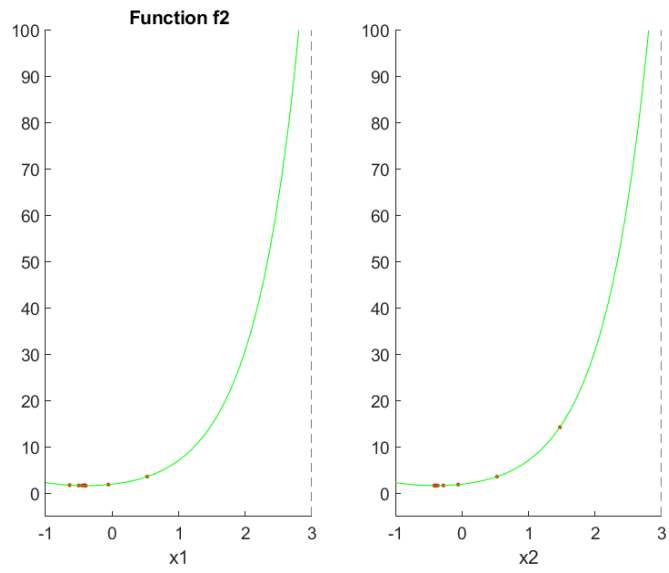
Σχήμα 38: Για $l = 0.001$, η μεταβολή των x_1, x_2 .



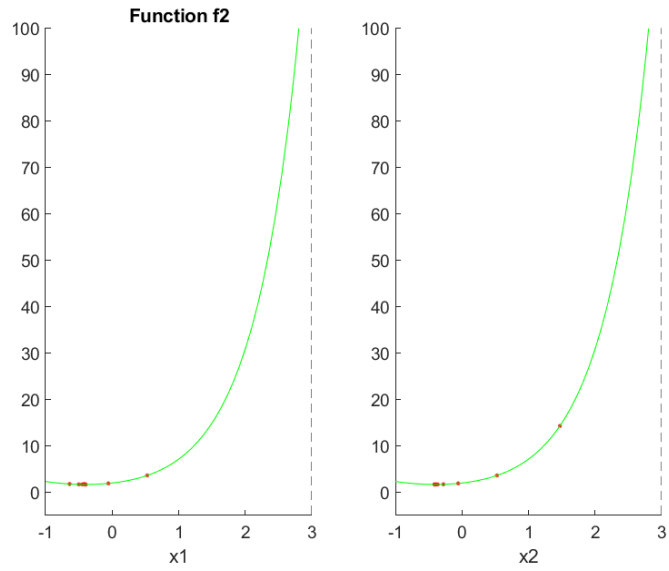
Σχήμα 39: Για $l = 0.0001$, η μεταβολή των x_1, x_2 .



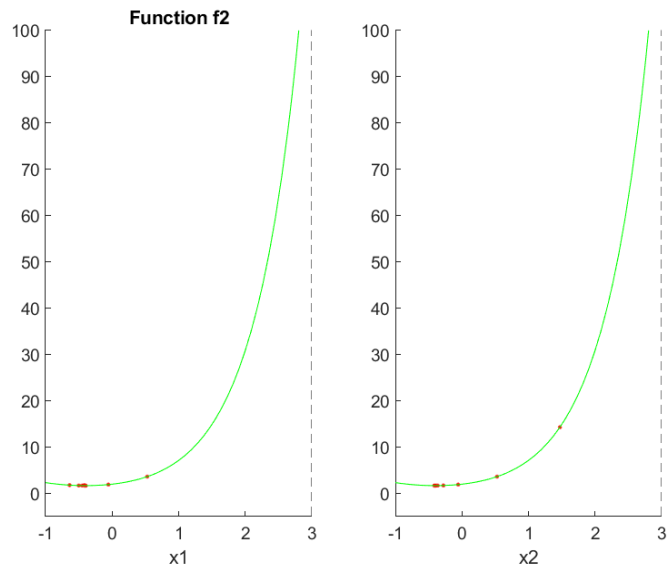
Σχήμα 40: Για $l = 0.00001$, η μεταβολή των x_1, x_2 .



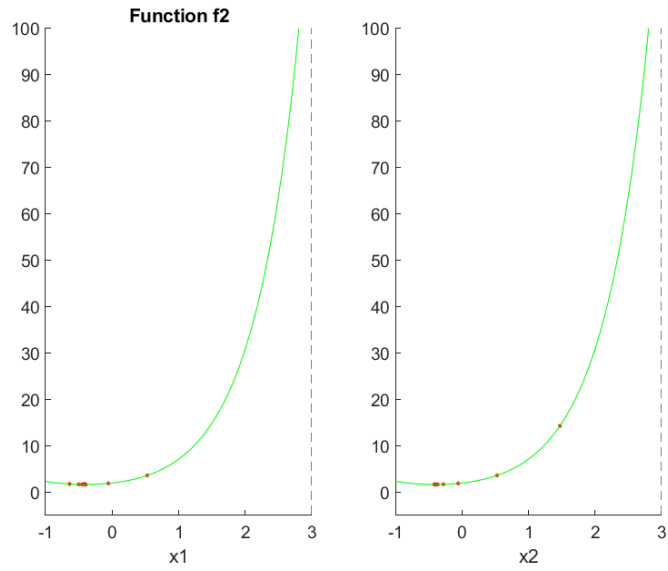
Σχήμα 41: Για $l = 0.01$, η μεταβολή των x_1, x_2 .



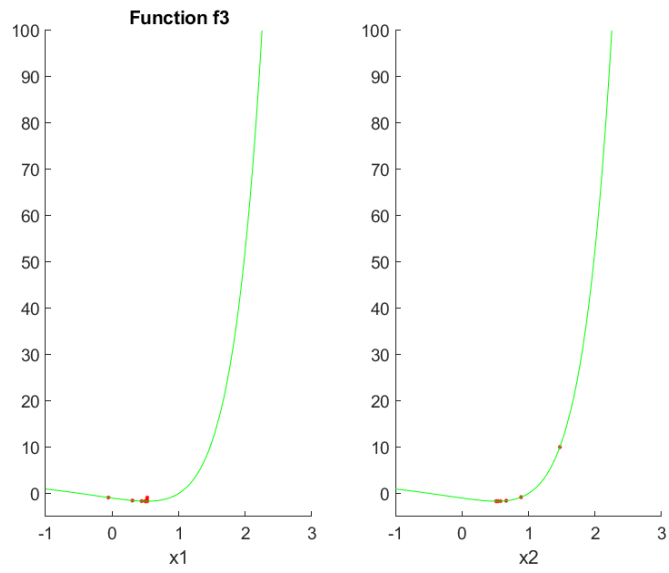
Σχήμα 42: Για $l = 0.001$, η μεταβολή των x_1, x_2 .



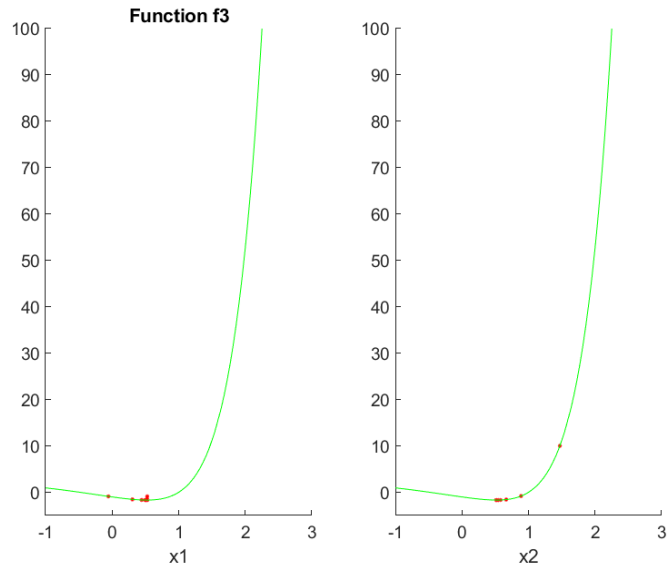
Σχήμα 43: Για $l = 0.0001$, η μεταβολή των x_1, x_2 .



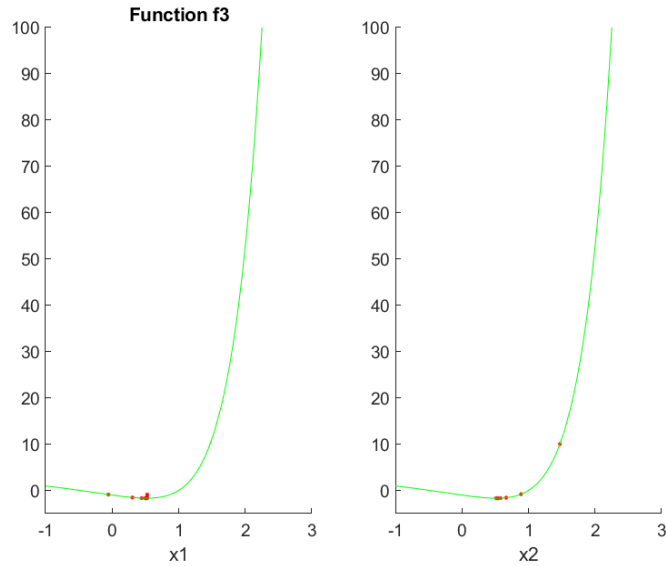
Σχήμα 44: Για $l = 0.00001$, η μεταβολή των x_1, x_2 .



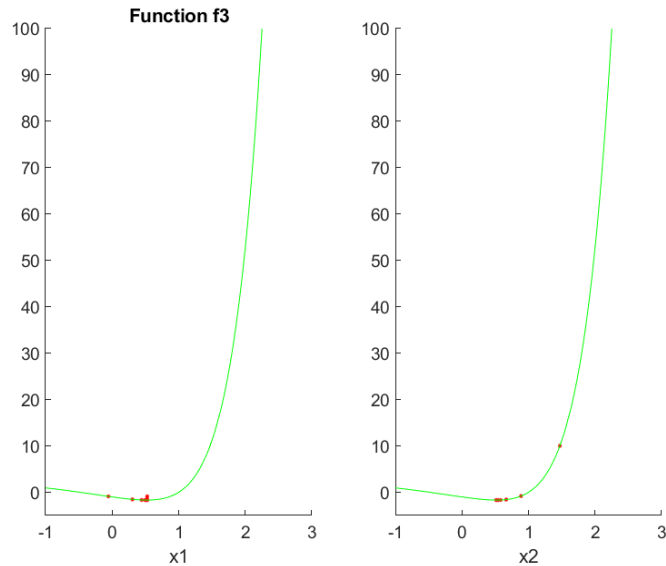
Σχήμα 45: Για $l = 0.01$, η μεταβολή των x_1, x_2 .



Σχήμα 46: Για $l = 0.001$, η μεταβολή των x_1, x_2 .



Σχήμα 47: Για $l = 0.0001$, η μεταβολή των x_1, x_2 .



Σχήμα 48: Για $l = 0.00001$, η μεταβολή των x_1, x_2 .

Παράλληλα παρατηρούμε τις μεταβολές των συναρτήσεων ανάλογα με τα x_k . Η γραφική παράσταση κάθε συνάρτησης φαίνεται στα παραπάνω σχήματα.

3 Μέθοδος Fibonacci

Η μέθοδος Fibonacci μοιάζει με τη μέθοδο του χρυσού τομέα, απαιτεί όμως έναν επιπλέον υπολογισμό της αντικειμενικής συνάρτησης μετά τη δεύτερη επανάληψη. Το υπό-διάστημα αναζήτησης μεταβάλλεται από επανάληψη σε επανάληψη με την χρήση της ακολουθίας Fibonacci.

Μελετάμε την μεταβολή του διαστήματος $[a_k, b_k]$ και των αντικειμενικών συναρτήσεων για μεταβολή του l στο σύνολο τιμών $\{0.01, 0.001, 0.0001, 0.00001\}$.

l	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}
$f_1(x)$	0.58838	0.70014	0.89265	1.0261
$f_2(x)$	0.58481	0.96841	2.0613	1.9509
$f_3(x)$	0.55656	0.70465	0.8851	1.0767

Πίνακας 7: Χρόνος εκτέλεσης σε δευτερόλεπτα.

Βλέπουμε τους πίνακες με τον χρόνο εκτέλεσης του αλγορίθμου σε δευτερόλεπτα για κάθε l και για κάθε συνάρτηση, καθώς και τον αριθμό επαναλήψεων μέχρι τον τερματισμό του αλγορίθμου. Παρατηρούμε πως ο χρόνος εκτέλεσης είναι πολύ μεγαλύτερος από τους προηγούμενους αλγορίθμους. Αυτό θα μπορούσε να αποφευχθεί με την χρήση δυναμικού προγραμματισμού για την εύρεση των όρων της ακολουθίας Fibonacci.

l	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}
$f_1(x)$	13	17	22	27
$f_2(x)$	13	17	22	27
$f_3(x)$	13	17	22	27

Πίνακας 8: Επαναλήψεις μέχρι τον τερματισμό.

Παρατηρούμε πολύ μικρό αριθμό επαναλήψεων μέχρι τον τερματισμό του αλγορίθμου. Έπειτα, ο επόμενος πίνακας δείχνει τα διαστήματα στα οποία εκτιμήθηκαν τα ελάχιστα.

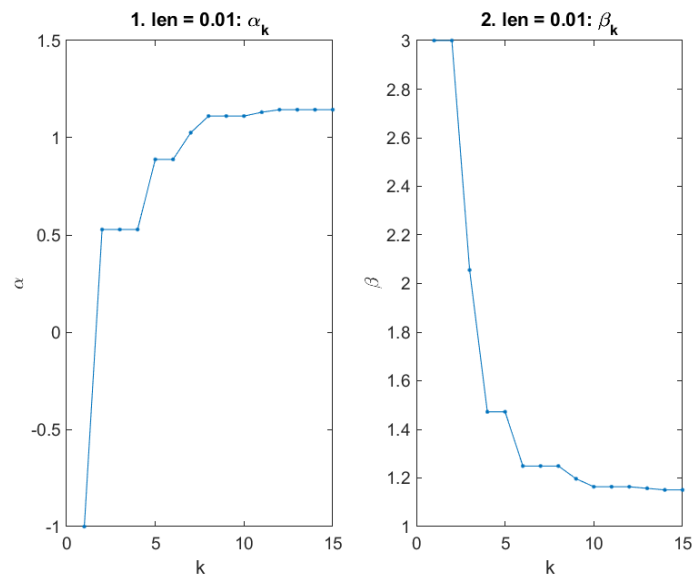
l	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}
$f_1(x)$	[1.1443 1.1508]	[1.1488 1.1497]	[1.1498 1.1508]	[1.1499 1.1509]
$f_2(x)$	[-0.40984 -0.40328]	[-0.40206 -0.4011]	[-0.40148 -0.40048]	[-0.40141 -0.40041]
$f_3(x)$	[0.51475 0.52131]	[0.51925 0.52021]	[0.5201 0.5211]	[0.52008 0.52108]

Πίνακας 9: Διαστήματα εκτίμησης θέσης ελαχίστου.

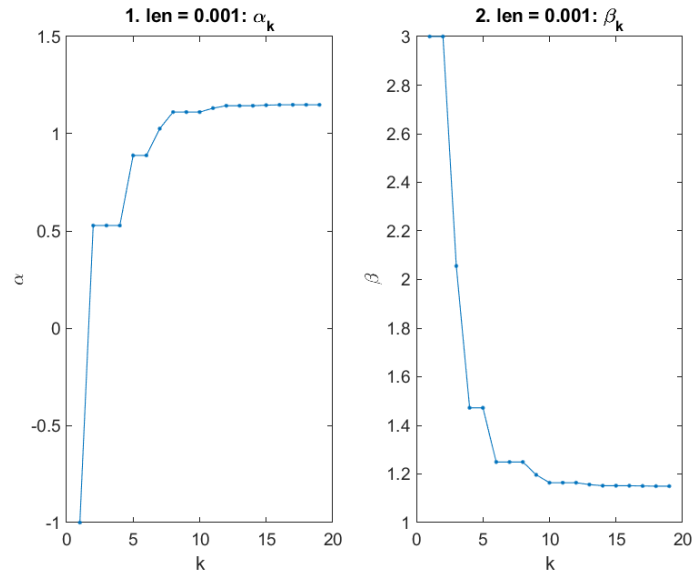
Παρατηρούμε ότι με μικρότερο l γίνεται όλο και στενότερο το διάστημα ελαχίστου, όπως ήταν αναμενόμενο.

Στη συνέχεια, έχοντας απεικονίσει την μεταβολή του παραπάνω διαστήματος με την χρήση του MATLAB, μπορούμε να δούμε στις παρακάτω εικόνες πως μεταβάλλεται ακολουθώντας το κάτω όριο του διαστήματος a_k και το άνω όριο b_k .

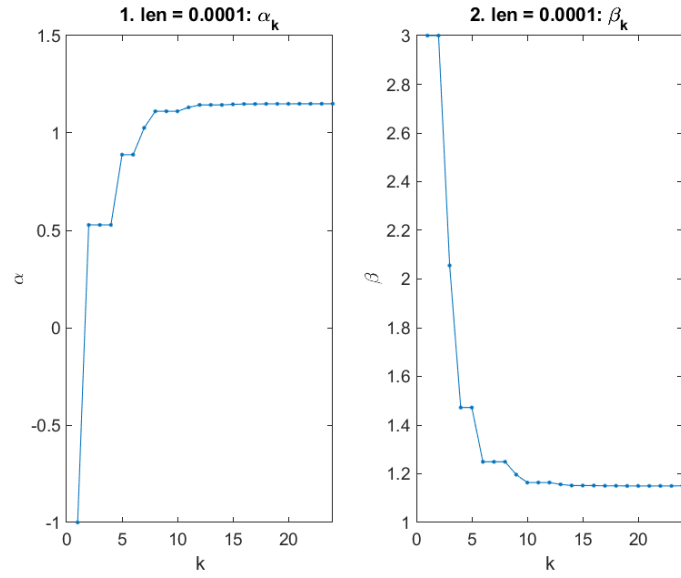
Για την f_1 :



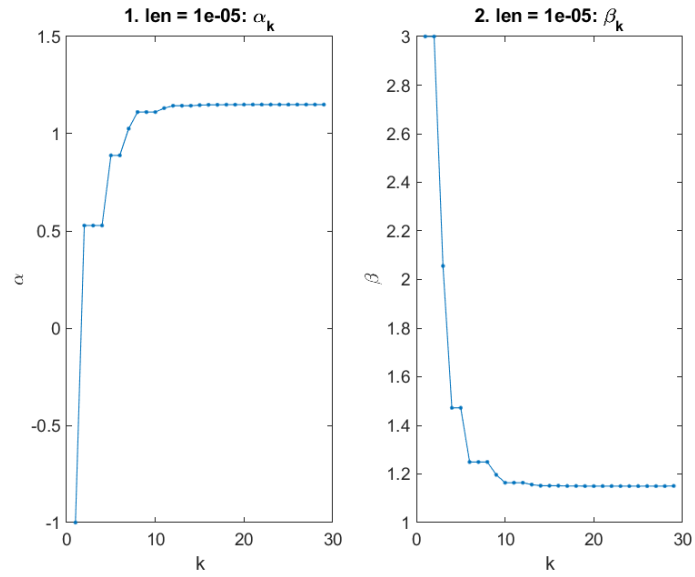
Σχήμα 49: Για $l = 0.01$, η μεταβολή των a_k , b_k .



Σχήμα 50: Για $l = 0.001$, η μεταβολή των a_k, b_k .

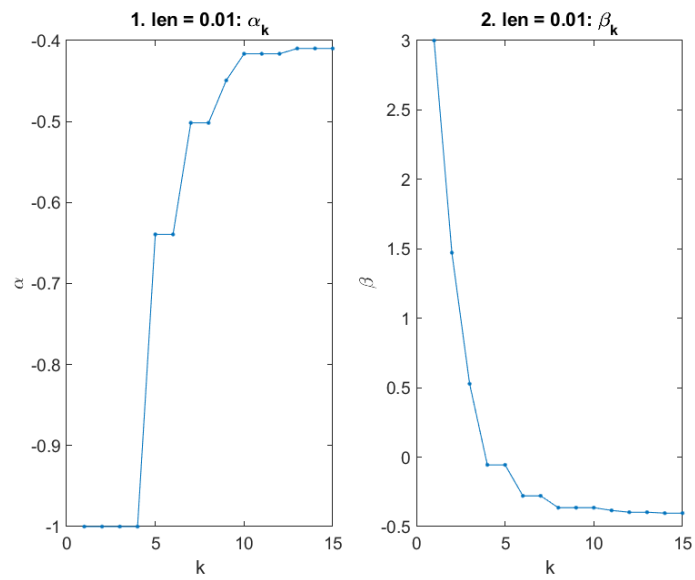


Σχήμα 51: Για $l = 0.0001$, η μεταβολή των a_k, b_k .

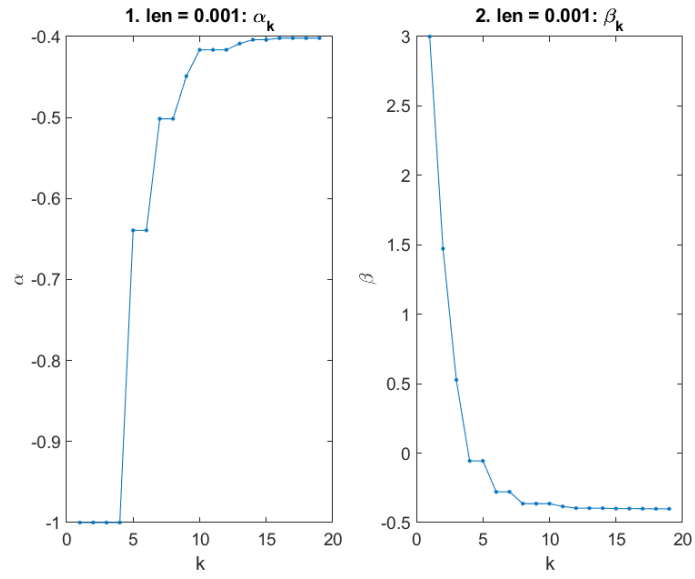


Σχήμα 52: Για $l = 0.00001$, η μεταβολή των a_k, b_k .

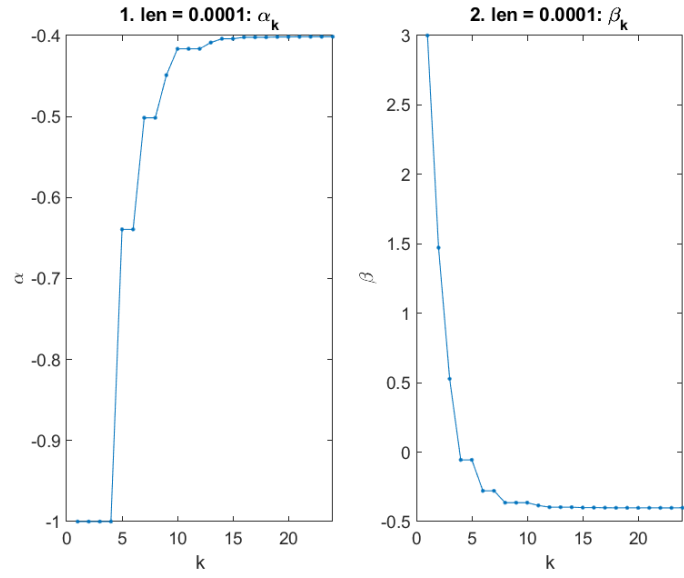
Για την f_2 :



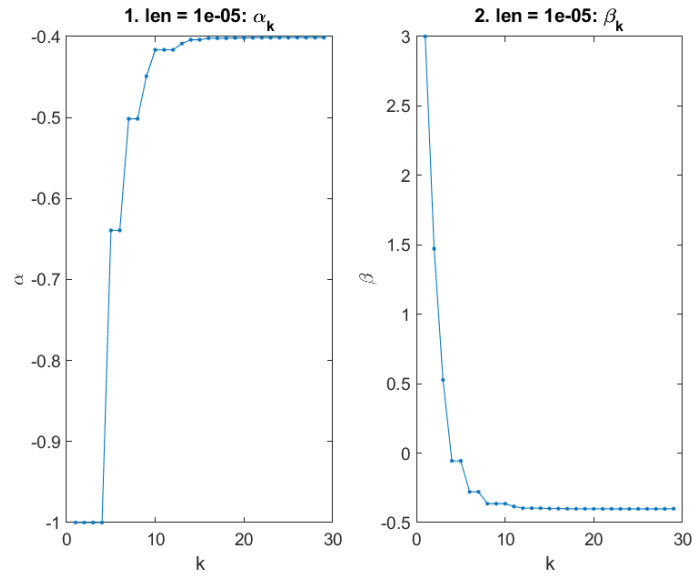
Σχήμα 53: Για $l = 0.01$, η μεταβολή των a_k, b_k .



Σχήμα 54: Για $l = 0.001$, η μεταβολή των a_k, b_k .

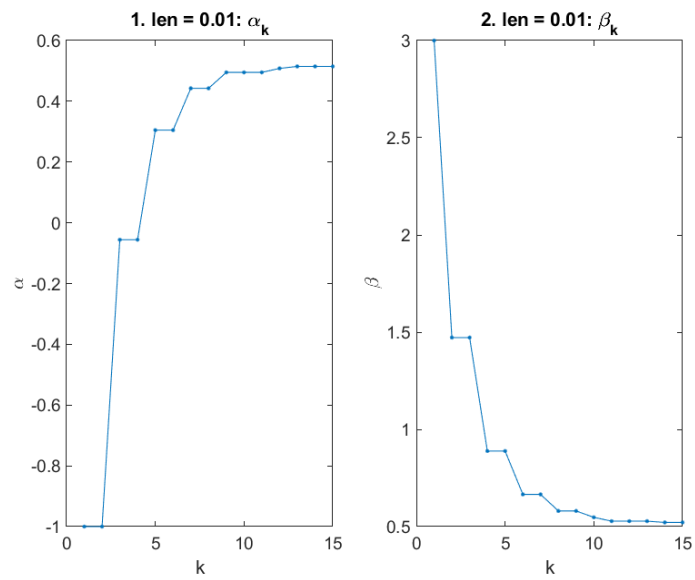


Σχήμα 55: Για $l = 0.0001$, η μεταβολή των a_k, b_k .

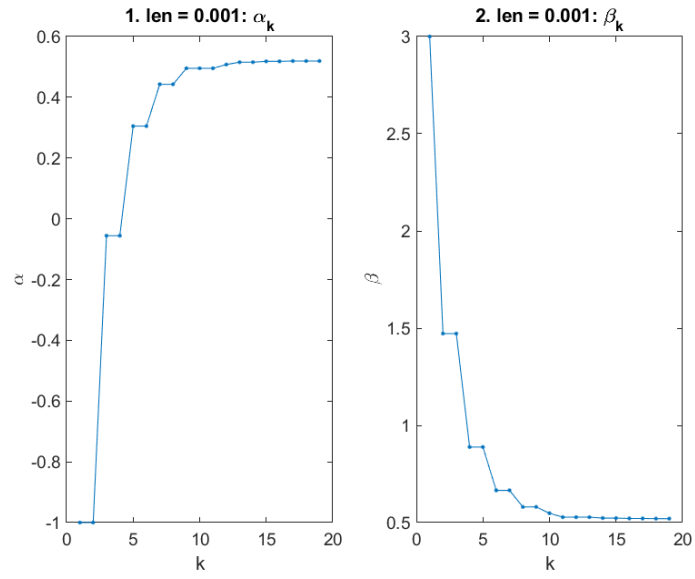


Σχήμα 56: Για $l = 0.00001$, η μεταβολή των a_k, b_k .

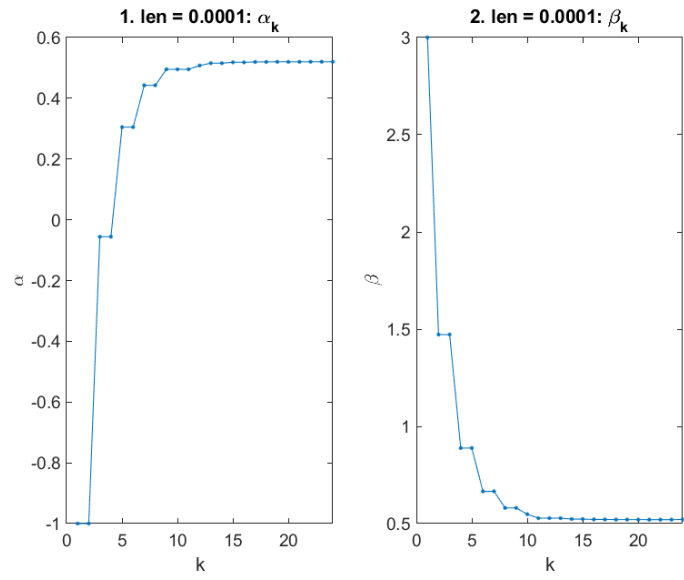
Για την f_3 :



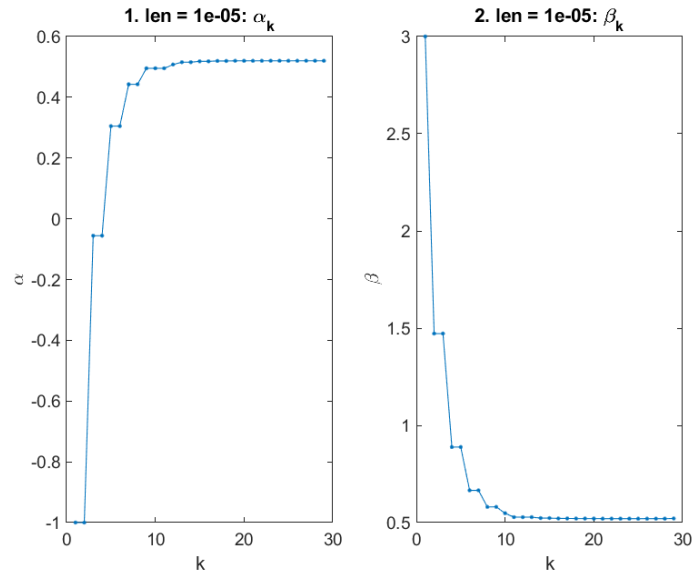
Σχήμα 57: Για $l = 0.01$, η μεταβολή των a_k, b_k .



Σχήμα 58: Για $l = 0.001$, η μεταβολή των a_k, b_k .

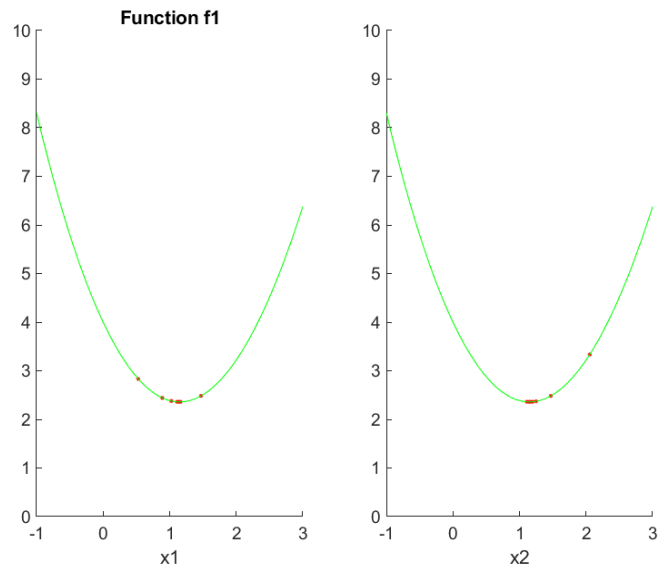


Σχήμα 59: Για $l = 0.0001$, η μεταβολή των a_k, b_k .

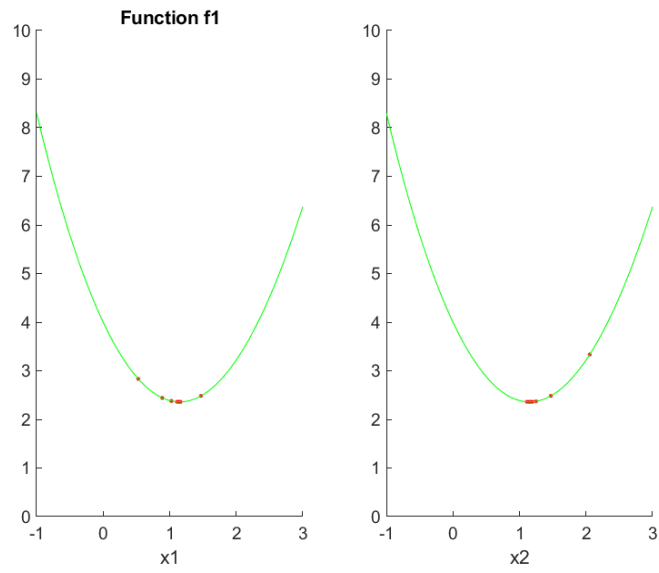


Σχήμα 60: Για $l = 0.00001$, η μεταβολή των a_k, b_k .

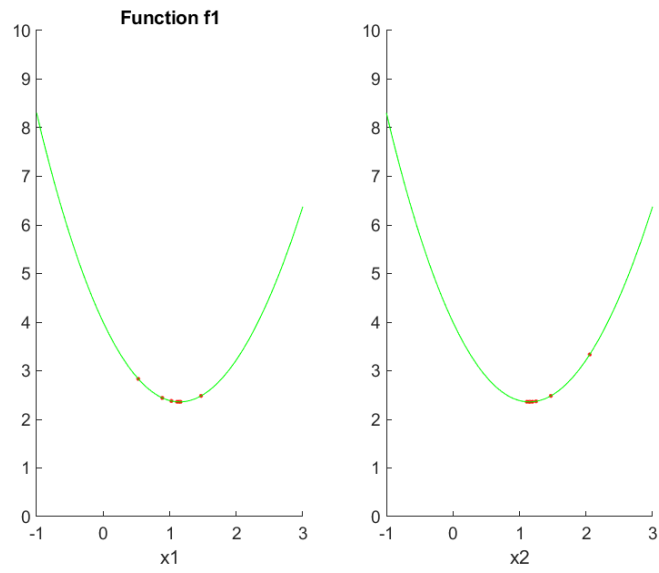
Παρατηρούμε ότι όσο πιο μικρό είναι το l τόσο πιο πολλά βήματα απαιτεί ο αλγόριθμος, κάτι που αναμένουμε. Τα a_k, b_k μεταβάλλονται, με την μεταβολή και των δύο να είναι σχεδόν πανομοιότυπη για κάθε l .



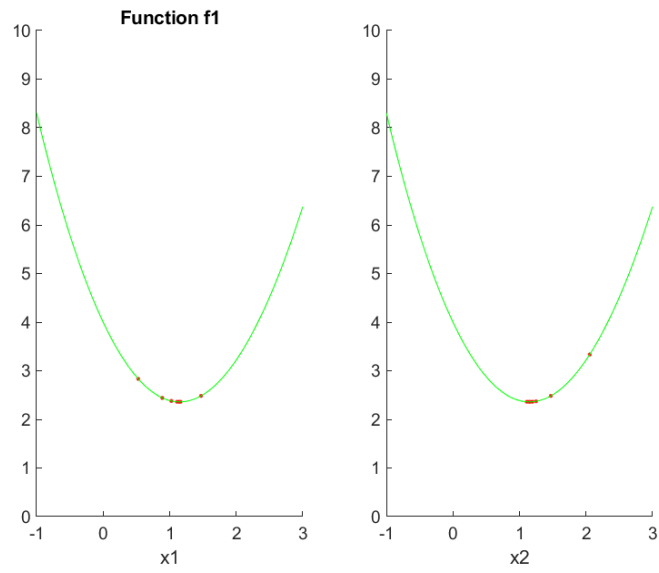
Σχήμα 61: Για $l = 0.01$, η μεταβολή των x_1, x_2 .



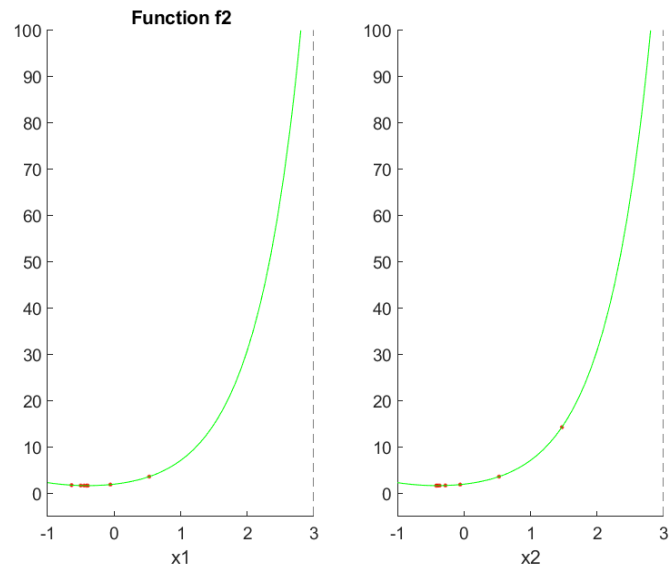
Σχήμα 62: Για $l = 0.001$, η μεταβολή των x_1, x_2 .



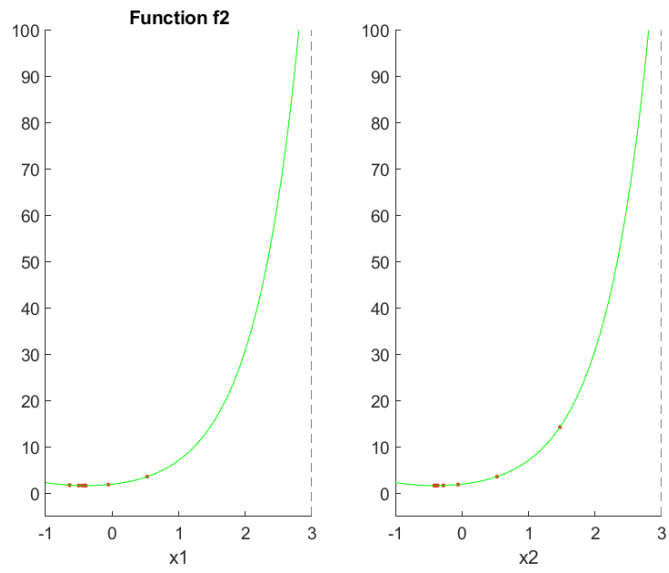
Σχήμα 63: Για $l = 0.0001$, η μεταβολή των x_1, x_2 .



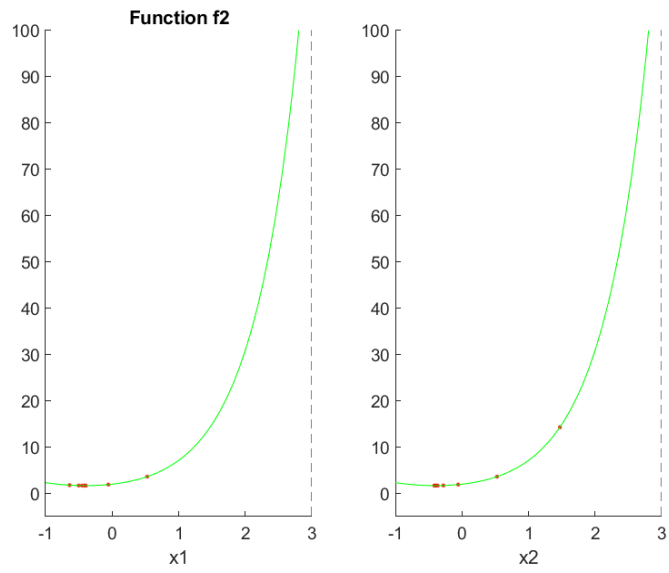
Σχήμα 64: Για $l = 0.00001$, η μεταβολή των x_1, x_2 .



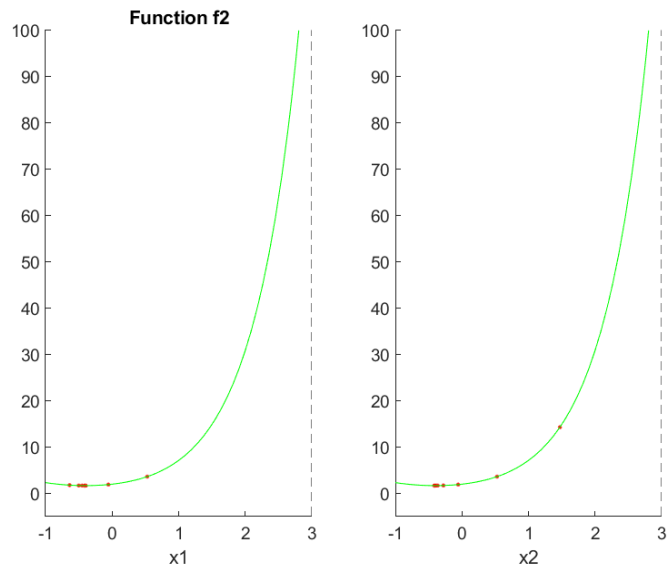
Σχήμα 65: Για $l = 0.01$, η μεταβολή των x_1, x_2 .



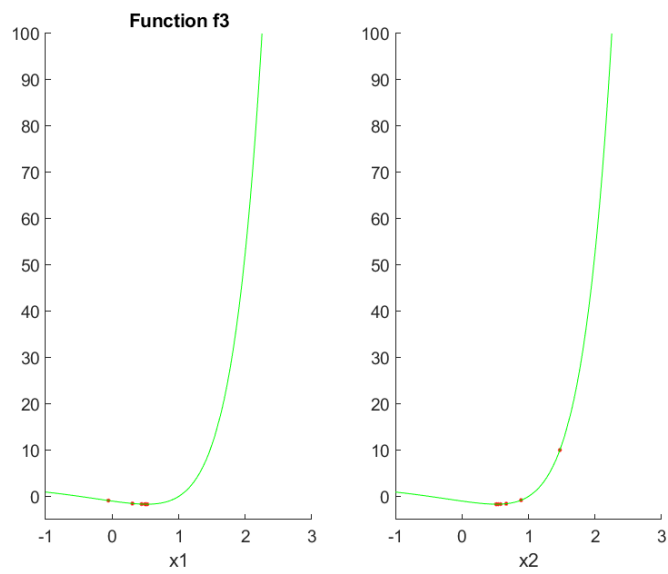
Σχήμα 66: Για $l = 0.001$, η μεταβολή των x_1, x_2 .



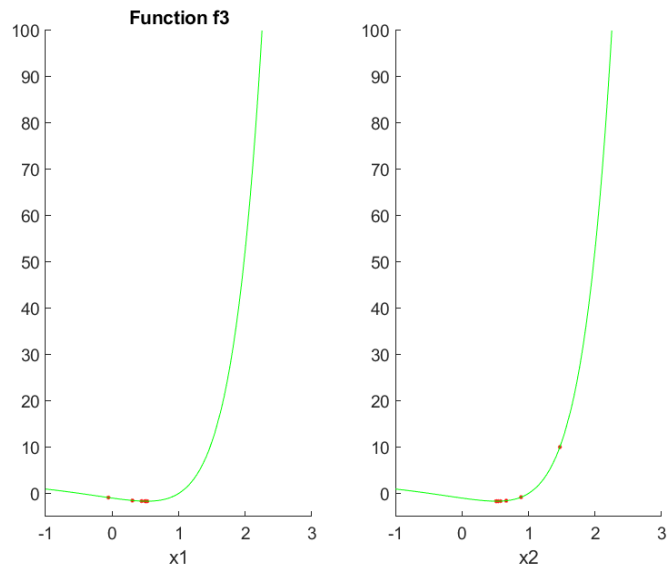
Σχήμα 67: Για $l = 0.0001$, η μεταβολή των x_1, x_2 .



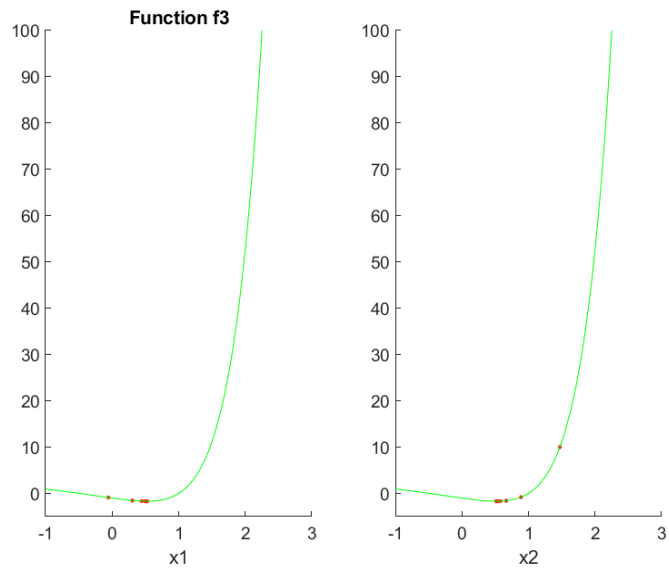
Σχήμα 68: Για $l = 0.00001$, η μεταβολή των x_1, x_2 .



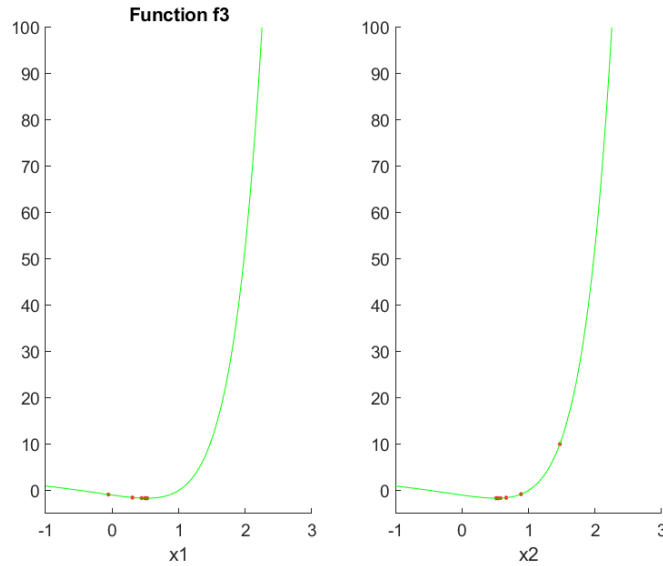
Σχήμα 69: Για $l = 0.01$, η μεταβολή των x_1, x_2 .



Σχήμα 70: Για $l = 0.001$, η μεταβολή των x_1, x_2 .



Σχήμα 71: Για $l = 0.0001$, η μεταβολή των x_1, x_2 .



Σχήμα 72: Για $l = 0.00001$, η μεταβολή των x_1, x_2 .

Παράλληλα παρατηρούμε τις μεταβολές των συναρτήσεων ανάλογα με τα x_k . Η γραφική παράσταση κάθε συνάρτησης φαίνεται στα παραπάνω σχήματα.

4 Μέθοδος της Διχοτόμου με Χρήση Παραγώγου

Η μέθοδος της διχοτόμου με χρήση παραγώγου χρησιμοποιείται για την ελαχιστοποίηση ψευδοκυρτών συναρτήσεων.

Μελετάμε την μεταβολή του διαστήματος $[a_k, b_k]$ και των αντικειμενικών συναρτήσεων για μεταβολή του l στο σύνολο τιμών $\{0.01, 0.001, 0.0001, 0.00001\}$.

l	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}
$f_1(x)$	0.38088	0.13005	0.14008	0.14773
$f_2(x)$	0.13791	0.11113	0.13121	0.14944
$f_3(x)$	0.09728	0.11023	0.15607	0.1419

Πίνακας 10: Χρόνος εκτέλεσης σε δευτερόλεπτα.

Βλέπουμε τους πίνακες με τον χρόνο εκτέλεσης του αλγορίθμου σε δευτερόλεπτα για κάθε l και για κάθε συνάρτηση, καθώς και τον αριθμό επαναλήψεων μέχρι τον τερματισμό του αλγορίθμου.

l	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}
$f_1(x)$	10	13	17	20
$f_2(x)$	10	13	17	20
$f_3(x)$	10	13	17	20

Πίνακας 11: Επαναλήψεις μέχρι τον τερματισμό.

Παρατηρούμε πολύ μικρό αριθμό επαναλήψεων μέχρι τον τερματισμό του αλγορίθμου. Έπειτα, ο επόμενος πίνακας δείχνει τα διαστήματα στα οποία εκτιμήθηκαν τα ελάχιστα.

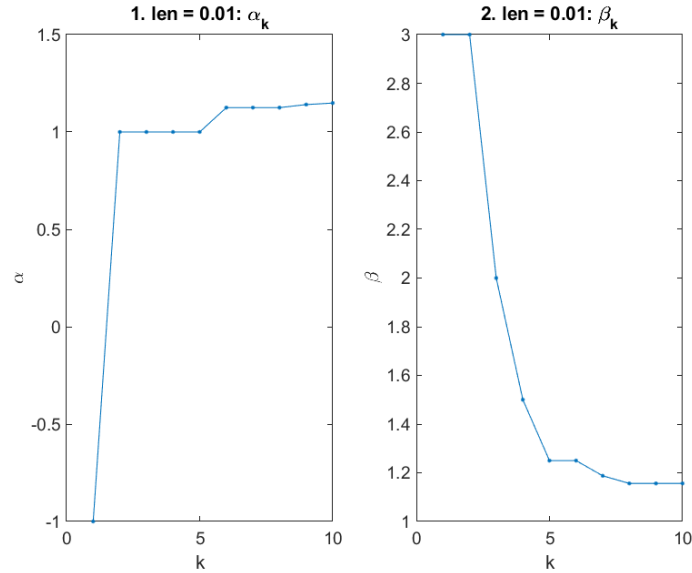
l	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}
$f_1(x)$	[1.1484 1.1563]	[1.1494 1.1504]	[1.1499 1.15]	[1.1499 1.1499]
$f_2(x)$	[-0.40625 -0.39844]	[-0.40234 -0.40137]	[-0.40143 -0.40137]	[-0.40141 -0.4014]
$f_3(x)$	[0.51563 0.52344]	[0.51953 0.52051]	[0.52008 0.52014]	[0.52008 0.52009]

Πίνακας 12: Διαστήματα εκτίμησης θέσης ελαχίστου.

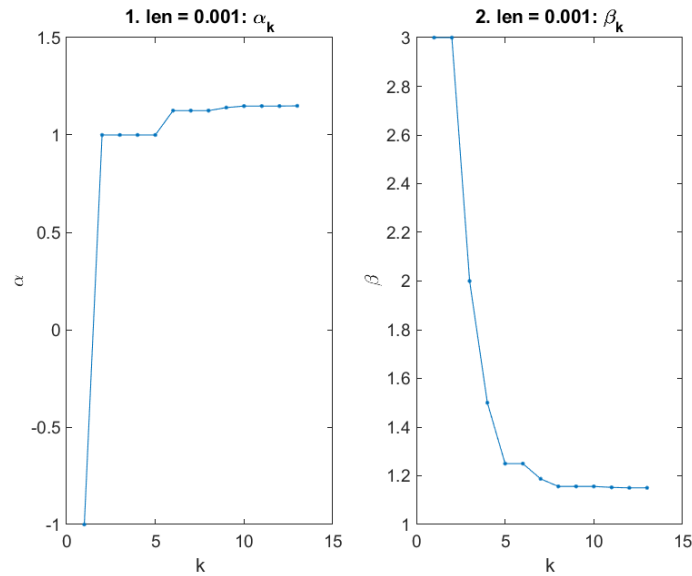
Παρατηρούμε ότι με μικρότερο l γίνεται όλο και στενότερο το διάστημα ελαχίστου, όπως ήταν αναμενόμενο.

Στη συνέχεια, έχοντας απεικονίσει την μεταβολή του παραπάνω διαστήματος με την χρήση του MATLAB, μπορούμε να δούμε στις παρακάτω εικόνες πως μεταβάλλεται ακολουθώντας το κάτω όριο του διαστήματος a_k και το άνω όριο b_k .

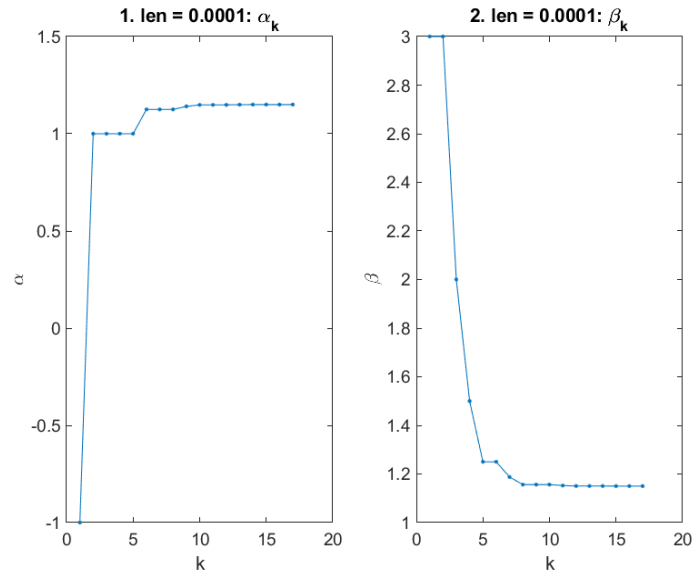
Για την f_1 :



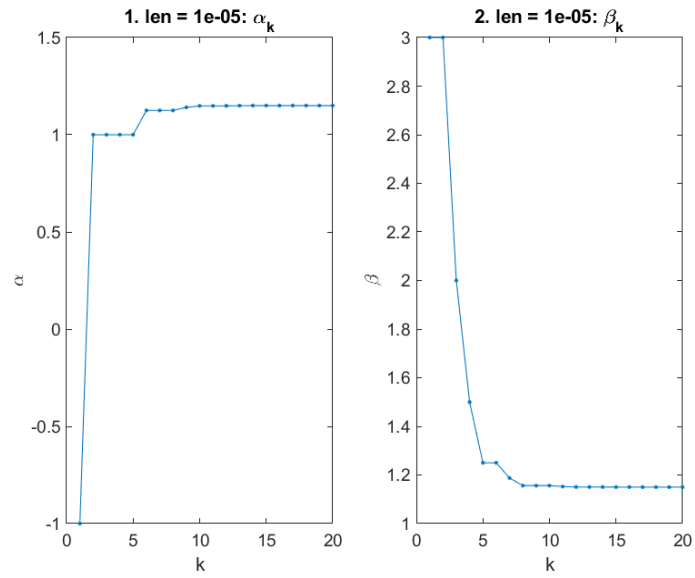
Σχήμα 73: Για $l = 0.01$, η μεταβολή των a_k , b_k .



Σχήμα 74: Για $l = 0.001$, η μεταβολή των a_k , b_k .

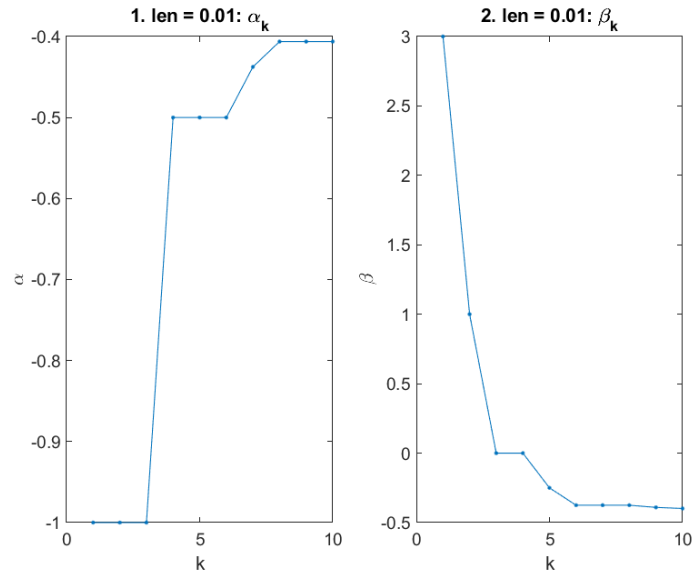


Σχήμα 75: Για $l = 0.0001$, η μεταβολή των a_k, b_k .

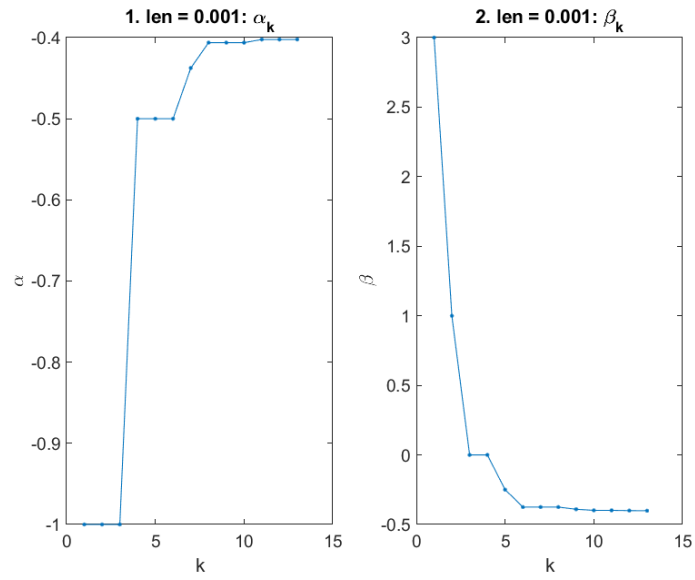


Σχήμα 76: Για $l = 0.00001$, η μεταβολή των a_k, b_k .

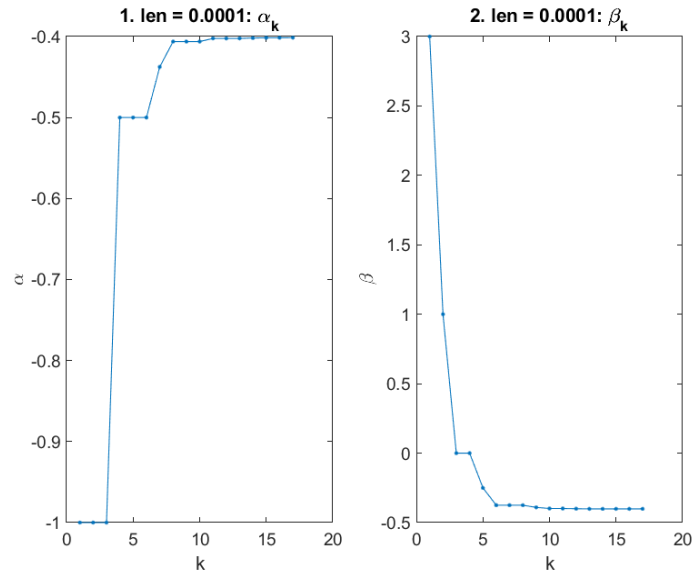
Για την f_2 :



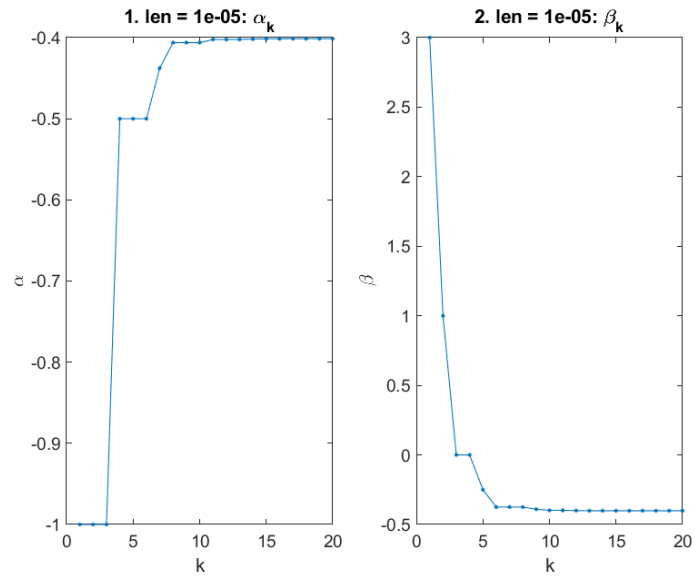
Σχήμα 77: Για $l = 0.01$, η μεταβολή των a_k , b_k .



Σχήμα 78: Για $l = 0.001$, η μεταβολή των a_k , b_k .

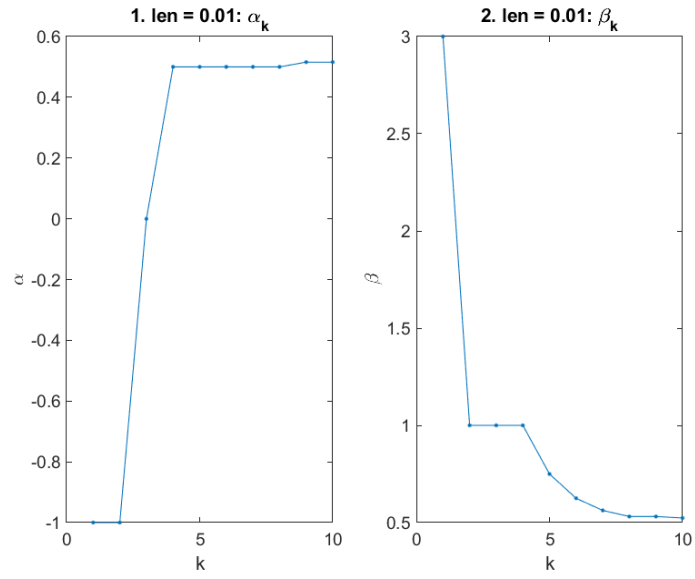


Σχήμα 79: Για $l = 0.0001$, η μεταβολή των a_k, b_k .

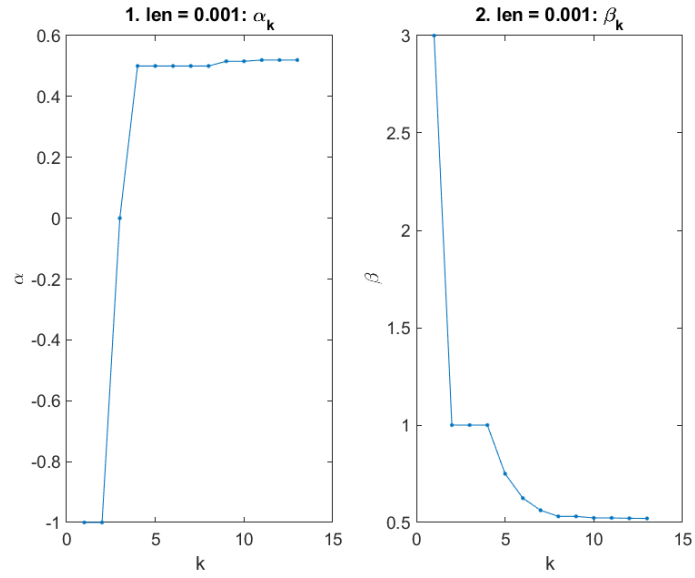


Σχήμα 80: Για $l = 0.00001$, η μεταβολή των a_k, b_k .

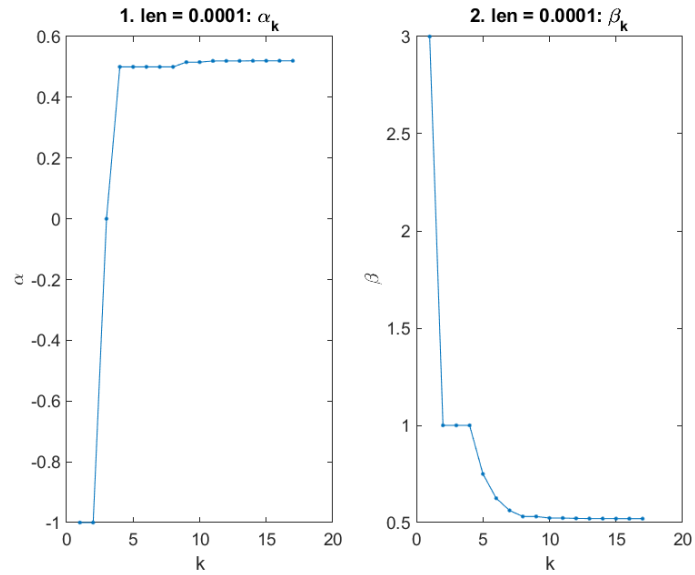
Για την f_3 :



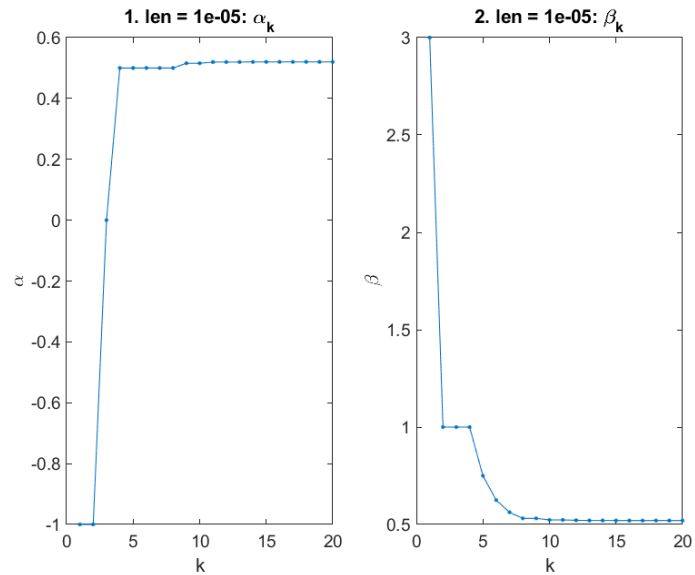
Σχήμα 81: Για $l = 0.01$, η μεταβολή των a_k, b_k .



Σχήμα 82: Για $l = 0.001$, η μεταβολή των a_k, b_k .

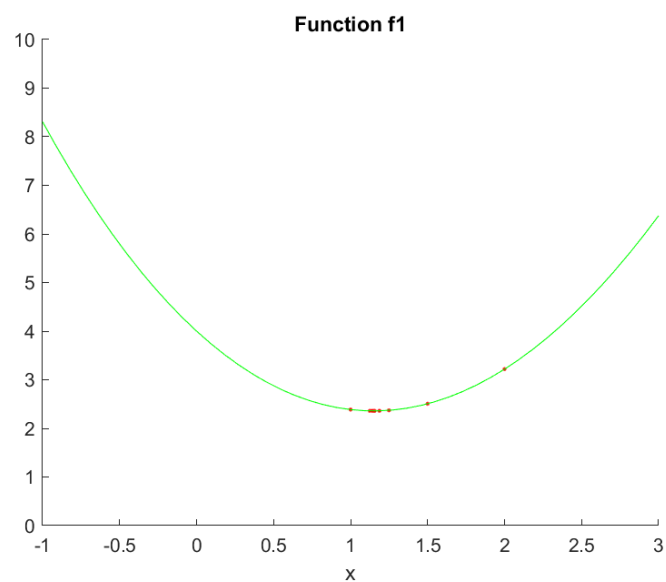


Σχήμα 83: Για $l = 0.0001$, η μεταβολή των a_k, b_k .

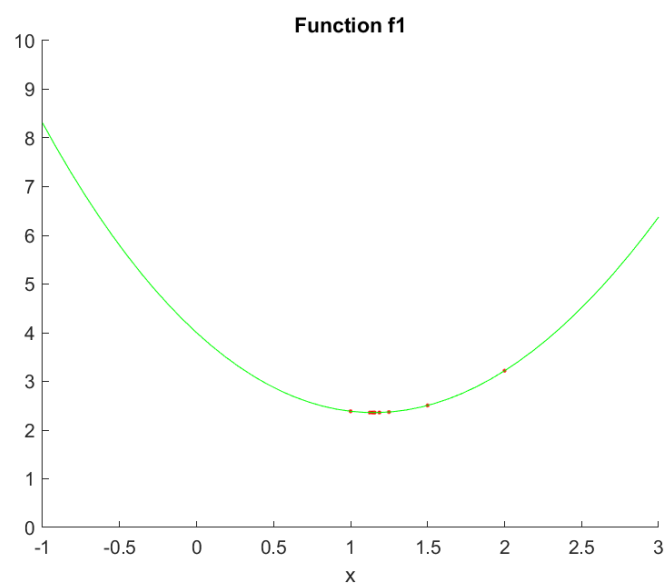


Σχήμα 84: Για $l = 0.00001$, η μεταβολή των a_k, b_k .

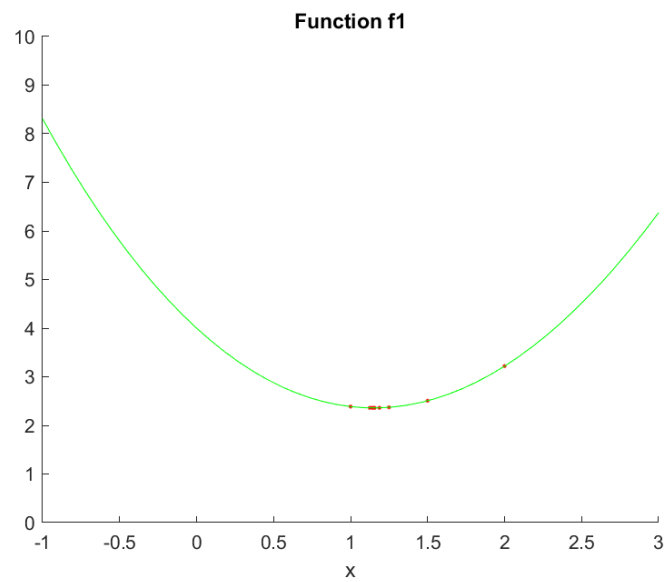
Παρατηρούμε ότι όσο πιο μικρό είναι το l τόσο πιο πολλά βήματα απαιτεί ο αλγόριθμος, κάτι που αναμέναμε. Τα a_k, b_k μεταβάλλονται, με την μεταβολή και των δύο να είναι σχεδόν πανομοιότυπη για κάθε l .



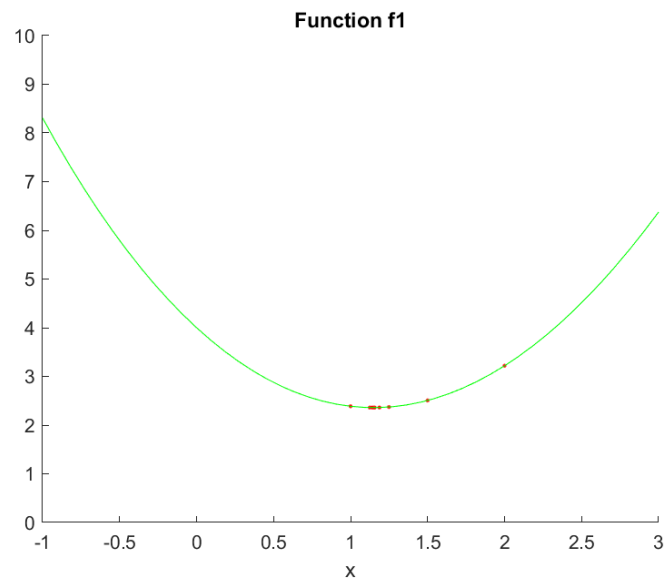
Σχήμα 85: Για $l = 0.01$, η μεταβολή των x_1, x_2 .



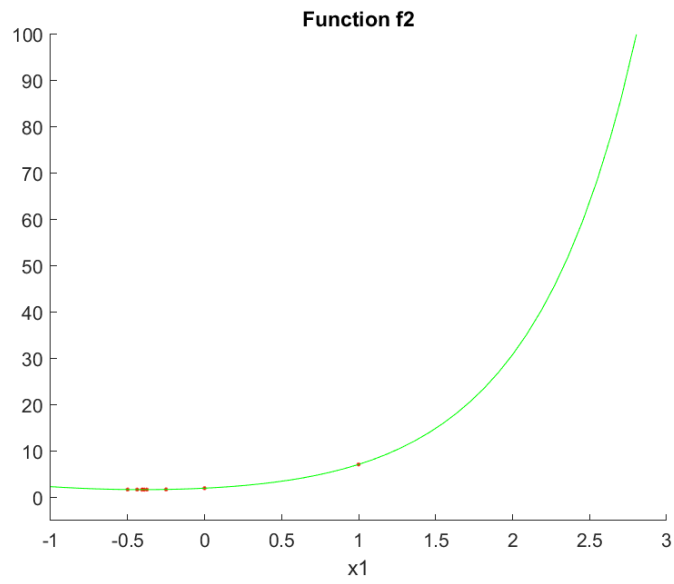
Σχήμα 86: Για $l = 0.001$, η μεταβολή των x_1, x_2 .



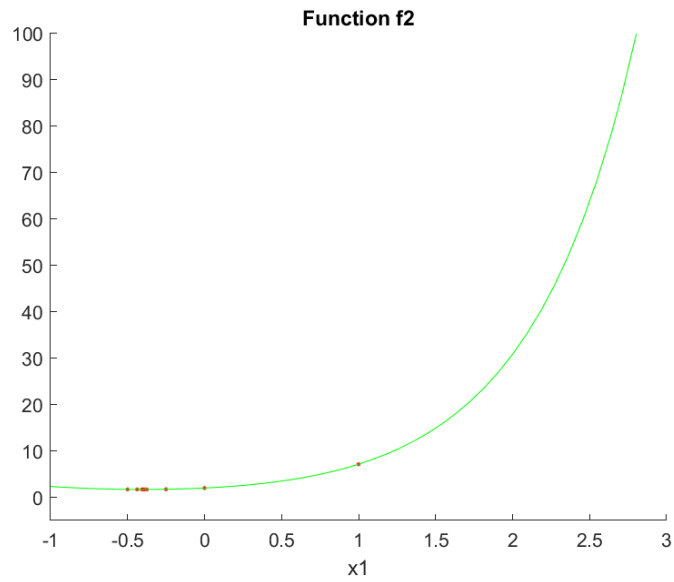
Σχήμα 87: Για $l = 0.0001$, η μεταβολή των x_1, x_2 .



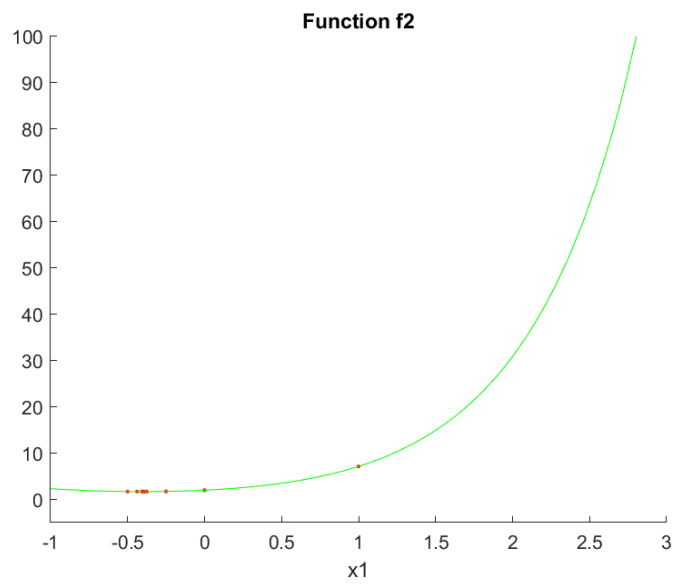
Σχήμα 88: Για $l = 0.00001$, η μεταβολή των x_1, x_2 .



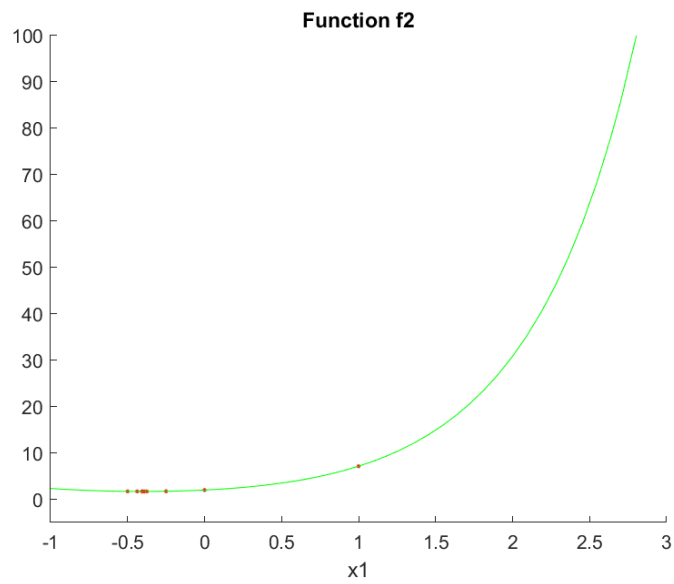
Σχήμα 89: Για $l = 0.01$, η μεταβολή των x_1, x_2 .



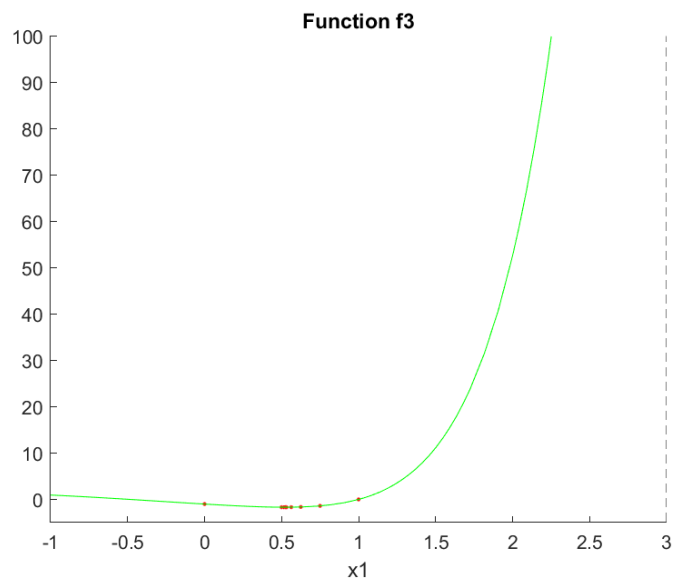
Σχήμα 90: Για $l = 0.001$, η μεταβολή των x_1, x_2 .



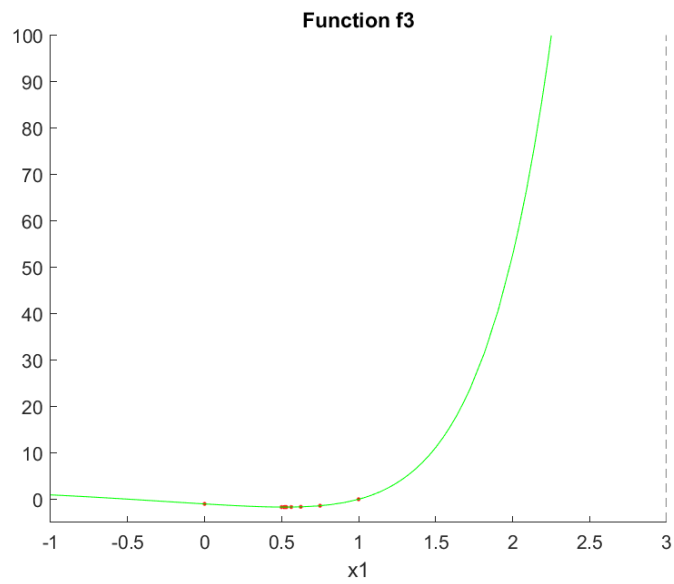
Σχήμα 91: Για $l = 0.0001$, η μεταβολή των x_1, x_2 .



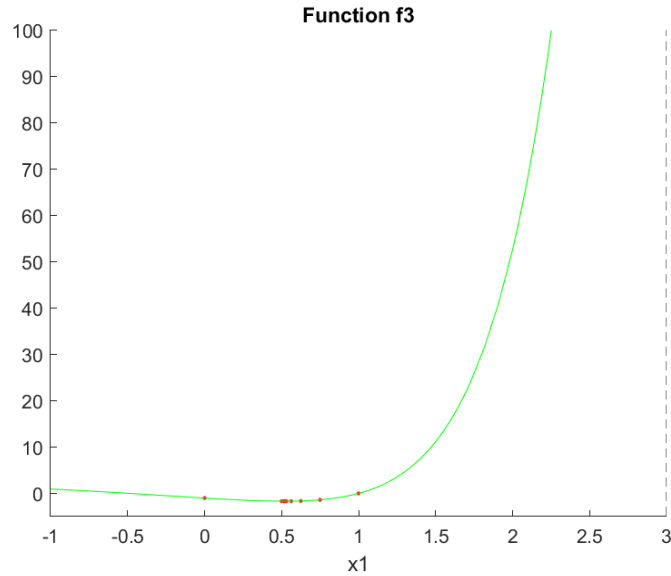
Σχήμα 92: Για $l = 0.00001$, η μεταβολή των x_1, x_2 .



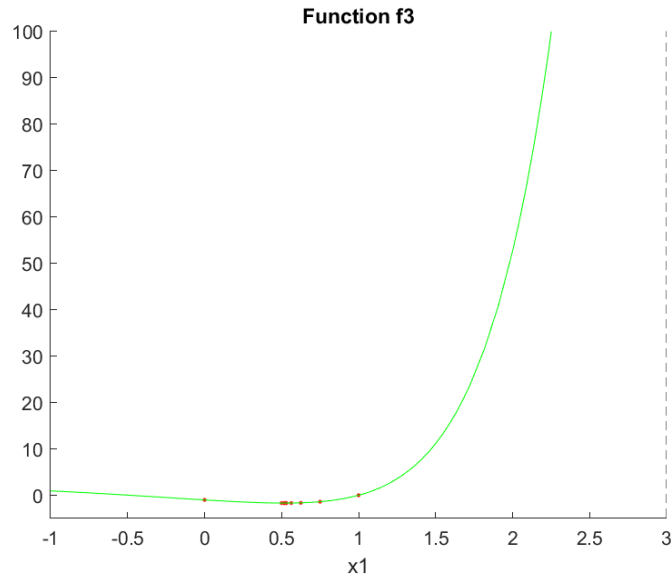
Σχήμα 93: Για $l = 0.01$, η μεταβολή των x_1, x_2 .



Σχήμα 94: Για $l = 0.001$, η μεταβολή των x_1, x_2 .



Σχήμα 95: Για $l = 0.0001$, η μεταβολή των x_1, x_2 .



Σχήμα 96: Για $l = 0.00001$, η μεταβολή των x_1, x_2 .

Παράλληλα παρατηρούμε τις μεταβολές των συναρτήσεων ανάλογα με τα x_k . Η γραφική παράσταση κάθε συνάρτησης φαίνεται στα παραπάνω σχήματα.

5 Σύγκριση Μεθόδων - Σχόλια

Όλες οι μέθοδοι που αναφέραμε στην εργασία υπολογίζουν το ελάχιστο με ακρίβεια l , σε πεπερασμένο αριθμό επαναλήψεων. Επιπλέον, δοσμένης της ακρίβειας l , εκτιμάται ο αριθμός n των υπολογισμών της αντικειμενικής συνάρτησης f . Για σταθερό πηλίκο, όσο πιο μικρό είναι το n τόσο πιο αποτελεσματικός είναι ο αλγόριθμος. Είναι προφανές ότι πιο αποτελεσματική είναι η μέθοδος Fibonacci, ακολουθούμενη από τη μέθοδο του χρυσού τομέα, την μέθοδο της διχοτόμου και τέλος από τη μέθοδο της ομοιόμορφης αναζήτησης. Να σημειωθεί ότι για μεγάλο n ο όρος $1/F_n$ τείνει ασυμπτωτικά στο $(0.618)^{n-1}$. Συνεπώς, τότε η μέθοδος του χρυσού τομέα και η μέθοδος Fibonacci είναι σχεδόν ταυτόσημες.

Τα παραπάνω θεωρητικά δεδομένα επιβεβαιώνονται κι από τα πειραματικά, καθώς παρατηρήσαμε πως ο αλγόριθμος Fibonacci ακολουθούμενος από τον αλγόριθμο του χρυσού τομέα δίνουν σαφώς στενότερο διάστημα εκτίμησης του ελαχίστου. Μάλιστα, με υλοποίηση του αλγορίθμου με δυναμικό

προγραμματισμό θα ήταν δυνατή η ταχύτατη εύρεση των όρων της ακολουθίας Fibonacci και κατ' επέκταση του τελικού διαστήματος αναζήτησης.

Ακόμη, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι όσο πιο κυρτή είναι μία συνάρτηση, δηλαδή όσο πιο απότομα κατεβαίνει στο ελάχιστο, τόσο λιγότερα βήματα απαιτεί κάποιος αλγόριθμος αναζήτησης ελαχίστου. Έτσι, πιο γρήγορη αναζήτηση γίνεται στην αντικειμενική συνάρτηση f_3 και πιο αργή στην f_1 .

Τέλος αναφοράς.