

# Ρομποτική

Εργασία Μαθήματος 2022 - 2023

Αλεξόπουλος Δημήτριος AEM 10091  
aadimitri@ece.auth.gr

# Περιεχόμενα

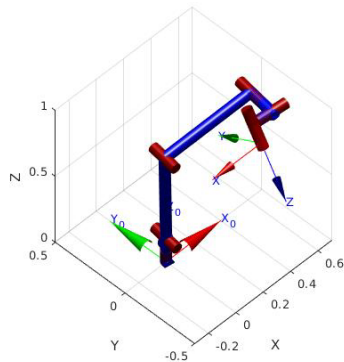
1	Εισαγωγή: Έλεγχος Βραχίονα	4
2	Τμήμα Α	5
2.1	Θεωρητική Ανάλυση . . . . .	5
2.1.1	Αρχική Κατάσταση Άκρου . . . . .	5
2.1.2	Σχεδίαση Σήματος Ελέγχου . . . . .	6
2.2	Προσομοίωση - Αποτελέσματα - Σχολιασμοί . . . . .	9
3	Τμήμα Β	12
3.1	Θεωρητική Ανάλυση - Σχεδίαση Τροχιάς . . . . .	12
3.2	Προσομοίωση - Αποτελέσματα - Σχολιασμοί . . . . .	14
	Βιβλιογραφία	16

## Κατάλογος Σχημάτων

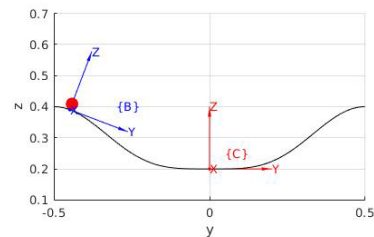
1.1	Βραχίονας ur10e . . . . .	4
1.2	Τροχιά της σφαίρας . . . . .	4
2.1	Σχήμα Ελέγχου . . . . .	8
2.2	Θέση του άκρου του βραχίονα . . . . .	10
2.3	Προσανατολισμός του άκρου του βραχίονα . . . . .	10
2.4	Θέσεις αρθρώσεων . . . . .	10
2.5	Ταχύτητες αρθρώσεων . . . . .	10
2.6	Επιταχύνσεις αρθρώσεων . . . . .	10
3.1	Μορφή γραμμικής τροχιάς με παραβολική μείξη . . . . .	13
3.2	Θέση του άκρου του βραχίονα . . . . .	14
3.3	Προσανατολισμός του άκρου του βραχίονα . . . . .	14
3.4	Θέσεις αρθρώσεων . . . . .	14
3.5	Ταχύτητες αρθρώσεων . . . . .	14
3.6	Επιταχύνσεις αρθρώσεων . . . . .	14

# 1 Εισαγωγή: Έλεγχος Βραχίονα

Αντικείμενο της παρούσας εργασίας είναι η μελέτη της κινηματικής ενός βραχίονα 6 βαθμών ελευθερίας και η εφαρμογή ενός νόμου ελέγχου σε αυτόν. Ο βραχίονας που θα μελετήσουμε και φαίνεται στο παρακάτω σχήμα είναι ο *ur10e*, του οποίου το κινηματικό μοντέλο θα δανειστούμε από το *robotics toolbox* του *MATLAB*.



Σχήμα 1.1: Βραχίονας *ur10e*



Σχήμα 1.2: Τροχιά της σφαίρας

Σκοπός μας είναι να σχεδιάσουμε το κατάλληλο σήμα ελέγχου για τον βραχίονα, ώστε αυτός να εκτελέσει μια εργασία. Η εργασία του βραχίονα στο τμήμα Α της αναφοράς έγκειται στην παρακολούθηση της κίνησης μιας σφαίρας, με το άκρο του να βρίσκεται σε καθορισμένη θέση και καθορισμένο προσανατολισμό ως προς το πλαίσιο της σφαίρας. Η σφαίρα κινείται στο χώρο εργασίας του βραχίονα και λόγω του βάρους της εκτελεί μια αποσβενύμενη ταλάντωση πάνω στην καμπυλωτή τσουλήθρα που φαίνεται στο Σχήμα 1.2.

Στο τμήμα Β της αναφοράς η εργασία του βραχίονα θα συγκεκριμενοποιηθεί περαιτέρω και θα σχεδιαστεί μια τροχιά την οποία θα ακολουθήσει το άκρο του βραχίονα με σκοπό να πλησιάσει αρκετά την σφαίρα και να μπορέσει να την πιάσει. Για να επιτευχθεί αυτό θα τοποθετηθεί αρπάγη στο άκρο του βραχίονα και θα σχεδιαστεί κατάλληλη τροχιά, ώστε η αρπάγη να έχει αρκετό χρόνο να πιάσει την σφαίρα εν κινήσει και χωρίς να ακουμπήσει πρωτίτερα αυτήν ή την τσουλήθρα.

## 2 Τμήμα Α

Όπως αναφέραμε, στο τμήμα Α της αναφοράς θα υλοποιήσουμε έναν βρόχο ελέγχου για την παρακολούθηση της κίνησης της σφαίρας. Ο επιθυμητός στόχος της θέσης του άκρου θα είναι τέτοιος, ώστε αυτό να βρίσκεται σε καθορισμένη θέση και καθορισμένο προσανατολισμό ως προς το πλαίσιο της σφαίρας.

Οι αρχικές τιμές των αρθρώσεων δίνονται:

$$q_0 = [-0.140 \quad -1.556 \quad -1.359 \quad 1.425 \quad -1.053 \quad -1.732] \text{ rad} \quad (2.1)$$

όπως φαίνεται στο Σχήμα 1.1. Ο βραχίονας δέχεται εντολές ταχύτητας αρθρώσεων  $\dot{q}_r \in \mathbb{R}^6$  με το αδρανειακό πλαίσιο  $\{0\}$  στη βάση του και  $\{E\}$  το πλαίσιο του άκρου. Η μέγιστη επιτρεπόμενη απόλυτη ταχύτητα των αρθρώσεων είναι:

$$\dot{q}_{r,max} = [120 \quad 120 \quad 180 \quad 180 \quad 180 \quad 180]^\circ/sec \quad (2.2)$$

ενώ η μέγιστη επιτάχυνση είναι  $\ddot{q}_{r,max} = 250 \text{ rad/s}^2$ .

Έστω, τώρα, το πλαίσιο μιας σταθερής κάμερας  $\{C\}$  το οποίο είναι τοποθετημένο στη θέση  $p_{0C} = [0.4 \quad 0 \quad 0.2]^T$  με προσανατολισμό  $R_{0C} = I_3$ , όπου  $I_3$  είναι ο μοναδιαίος πίνακας διάστασης 3, όπως φαίνεται στο Σχήμα 1.2.

Στον χώρο εργασίας του βραχίονα κινείται η σφαίρα ακτίνας  $r = 2\text{cm}$  λόγω του βάρους της πάνω στην καμπυλωτή τσουλήθρα που βρίσκεται στο επίπεδο  $x = 0.4$  του πλαισίου  $\{0\}$  όπως φαίνεται στο Σχήμα 1.2. Τοποθετούμε το πλαίσιο επαφής  $\{B\}$  στο σημείο επαφής της σφαίρας με την τσουλήθρα, έτσι ώστε ο άξονας  $\bar{z}$  του πλαισίου  $\{B\}$  να είναι κάθετος στην επιφάνεια επαφής και ο  $\bar{y}$  εφαπτόμενος, όπως φαίνεται στο Σχήμα 1.2. Ορίζουμε ως χρονική στιγμή  $t = 0$  την στιγμή που ο άξονας  $\bar{y}_B$  του  $\{B\}$  βρίσκεται στην κατεύθυνση  $[0 \quad 0.9351 \quad -0.3543]^T$ .

Η θέση  $p_{CB}(t) \in \mathbb{R}^3$ , η μεταφορική ταχύτητα  $u_{CB}(t)$  και η γωνιακή ταχύτητα  $\omega_{CB}(t) \in \mathbb{R}^3$  του πλαισίου  $\{B\}$  είναι γνωστές κάθε χρονική στιγμή ως προς το πλαίσιο της κάμερας  $\{C\}$  προσομοιώνοντάς τες με σταθερό βήμα  $T_s = 2\text{ms}$ .

Ακολουθεί η θεωρητική ανάλυση της κινηματικής μελέτης και του σχεδιασμού του ελέγχου του βραχίονα, καθώς και η παρουσίαση των αποτελεσμάτων της προσομοίωσης στο *MATLAB*.

### 2.1 Θεωρητική Ανάλυση

Θα μελετήσουμε με την βοήθεια του ευθύς κινηματικού την αρχική κατάσταση του άκρου του βραχίονα, κι έπειτα θα σχεδιάσουμε το ζητούμενο σύστημα ελέγχου.

#### 2.1.1 Αρχική Κατάσταση Άκρου

Από το κινηματικό μοντέλο του βραχίονα μπορούμε να εξάγουμε τις κινηματικές παραμέτρους, οι οποίες θα μας βοηθήσουν να λύσουμε το ευθύ κινηματικό πρόβλημα για την αρχική κατάσταση του άκρου του βραχίονα. Συγκεκριμένα, ο πίνακας των παραμέτρων είναι ο εξής:

Πίνακας 2.1: *UR10 Robot Parameters*

$j$	$\theta$	$d$	$a$	$\alpha$	offset
1	$q_1$	0.1807	0	1.5708	0
2	$q_2$	0	-0.6127	0	0
3	$q_3$	0	-0.57155	0	0
4	$q_4$	0.17415	0	1.5708	0
5	$q_5$	0.11985	0	-1.5708	0
6	$q_6$	0.11655	0	0	0

από τον οποίο, και με τη βοήθεια του παρακάτω τύπου, μπορούμε να κατασκευάσουμε τους ομογενείς μετασχηματισμούς που συνδέουν δύο γειτονικούς συνδέσμους:

$$g_{i-1,i} = \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i & 0 & a_{i-1} \\ s\theta_i c\alpha_{i-1} & c\theta_i c\alpha_{i-1} & -s\alpha_{i-1} & -s\alpha_{i-1}d_i \\ s\theta_i s\alpha_{i-1} & c\theta_i s\alpha_{i-1} & c\alpha_{i-1} & c\alpha_{i-1}d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

Έτσι, έχοντας από την σχέση (2.1) τις αρχικές τιμές των μεταβλητών των αρθρώσεων, μπορούμε να υπολογίσουμε τον ομογενή μετασχηματισμό που συνδέει την βάση του βραχίονα (πλαίσιο  $\{0\}$ ) με το άκρο του (πλαίσιο  $\{E\}$ ) ως εξής:

$$g_{0e} = g_{01} \times g_{12} \times g_{23} \times g_{34} \times g_{45} \times g_{56} \times g_{6e} \quad (2.4)$$

Αντικαθιστώντας τις τιμές των μεταβλητών των αρθρώσεων και εκτελώντας τους παραπάνω πολλαπλασιασμούς μπορούμε να βρούμε την θέση και τον προσανατολισμό του άκρου  $\{E\}$  ως προς το πλαίσιο  $\{0\}$ . Από την συνάρτηση  $fkinе(q_0)$  του `robotics toolbox` βρίσκουμε:

$$R_{0e} = \begin{bmatrix} -1.0000 & 0.0003 & 0.0004 \\ 0.0001 & 0.8661 & -0.4999 \\ -0.0005 & -0.4999 & -0.8661 \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

$$p_{0e} = \begin{bmatrix} 0.4000 \\ -0.2905 \\ 0.8111 \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

όπου  $R_{0e}$  είναι ο πίνακας στροφής του άκρου  $\{E\}$  ως προς το πλαίσιο  $\{0\}$  και  $p_{0e}$  το διάνυσμα θέσης του άκρου  $\{E\}$  ως προς το πλαίσιο  $\{0\}$  για τις αρχικές τιμές των αρθρώσεων  $q_0$ .

### 2.1.2 Σχεδίαση Σήματος Ελέγχου

Θα υλοποιήσουμε, τώρα, ένα σύστημα κλειστού βρόχου το οποίο με το κατάλληλο σήμα ελέγχου  $\dot{q}_r$  θα μας επιτρέψει να θέσουμε το άκρο του βραχίονα σε κίνηση, τέτοια ώστε να παρακολουθεί την κινούμενη σφαίρα. Συγκεκριμένα, επιθυμούμε το άκρο να βρίσκεται καθ' όλη τη διάρκεια της κίνησης σε προσανατολισμό  $R_{BE} = Rot(y, 180^\circ)$  και θέση  $p_{BE} = [0 \ 0 \ 0.45]^T$  ως προς το πλαίσιο  $\{B\}$  της σφαίρας.

Ορίζουμε, αρχικά, ως  $g_{0t}$  τον ομογενή μετασχηματισμό που μας δίνει την επιθυμητή (target) θέση και τον επιθυμητό προσανατολισμό του άκρου  $\{E\}$  ως προς το πλαίσιο βάσης του βραχίονα  $\{0\}$ .

Με βάση τα πλαίσια που ορίσαμε προηγουμένως, εάν  $\{E\}$  είναι το πραγματικό πλαίσιο του άκρου και  $\{T\}$  το επιθυμητό, τότε μπορούμε να γράψουμε:

$$g_{0e} = g_{0c} \times g_{cb} \times g_{be} \quad \text{και} \quad (2.7)$$

$$g_{0t} = g_{0c} \times g_{cb} \times g_{be} \times g_{et} \quad (2.8)$$

όπου ο ομογενής μετασχηματισμός  $g_{et}$  δηλώνει το σφάλμα της θέσης και του προσανατολισμού του άκρου κι επομένως η επιθυμητή του τιμή, για τον μηδενισμό του σφάλματος, είναι ο μοναδιαίος πίνακας διάστασης 4. Τότε ο ομογενής μετασχηματισμός του πραγματικού πλαισίου θα ταυτίζεται με αυτόν του επιθυμητού, δηλαδή  $g_{0e} \equiv g_{0t}$ .

Είναι προφανές ότι, εφόσον στο σχήμα ελέγχου μας θα χρησιμοποιήσουμε του ομογενείς μετασχηματισμούς  $g_{0t}$  και  $g_{0e}$ , θα πρέπει να είμαστε σε θέση να τους υπολογίσουμε για κάθε χρονική στιγμή μέσω των σχέσεων (2.7) και (2.8). Ο πίνακας  $g_{be}$  δεν είναι προκαθορισμένος, αλλά θα υπολογίζεται σε κάθε επανάληψη του βρόχου ελέγχου ως η πραγματική κατάσταση του πλαισίου του άκρου. Έτσι, ο πίνακας ομογενούς μετασχηματισμού  $g_{0t}$  που δηλώνει τον επιθυμητό μας στόχο θα υπολογίζεται από την σχέση:

$$g_{0t} = g_{0c} \times g_{cb} \times g_{bt} \quad (2.9)$$

στην οποία τόσο ο μετασχηματισμός  $g_{0c}$ , όσο και ο  $g_{bt}$  είναι ανεξάρτητοι του χρόνου και γνωστοί σύμφωνα με τα δεδομένα μας:

$$g_{0c} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0.4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad g_{bt} = \begin{bmatrix} \text{Rot}(y, 180^\circ) & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.45 \end{bmatrix} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0.45 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

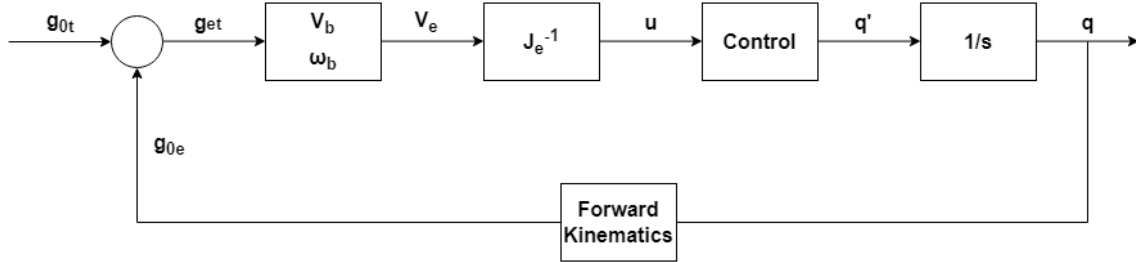
Ο μόνος πίνακας που απομένει για την εύρεση του επιθυμητού πλαισίου  $g_{0t}$  από την σχέση (2.9) είναι ο  $g_{cb}$ , ο οποίος μάλιστα είναι συνάρτηση του χρόνου. Μπορούμε, όμως, να τον υπολογίσουμε από τις πληροφορίες που έχουμε για την θέση  $p_{CB}(t) \in \mathbb{R}^3$ , την μεταφορική ταχύτητα  $u_{CB}(t)$  και την γωνιακή ταχύτητα  $\omega_{CB}(t) \in \mathbb{R}^3$  του πλαισίου  $\{B\}$  κάθε χρονική στιγμή ως προς το πλαίσιο της κάμερας  $\{C\}$ . Συγκεκριμένα, γράφουμε:

$$g_{cb} = \begin{bmatrix} R & p \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

όπου  $p = p_{CB}(t)$  και  $R = \text{Rot}(x, \theta)$  με  $\theta$  να είναι η γωνία μεταξύ του μοναδιαίου διανύσματος  $\bar{y}_c$  του πλαισίου της κάμερας  $\{C\}$  και του μοναδιαίου διανύσματος  $\bar{y}_B$  του πλαισίου της σφαίρας  $\{B\}$ . Το μοναδιαίο διάνυσμα  $\bar{y}_B$  υπολογίζεται από την γραμμική ταχύτητα του πλαισίου ως  $\bar{y}_B = \frac{v}{|v|}$ . Φροντίζουμε ώστε κατά τις αλλαγές της κατεύθυνσης της γραμμικής ταχύτητας του πλαισίου της σφαίρας  $\{B\}$  να μην αλλάζει και η κατεύθυνση του μοναδιαίου διανύσματος  $\bar{y}_B$ .

Συλλέγουμε, λοιπόν, τα δεδομένα για κάθε χρονική στιγμή ορίζοντας ως χρονική στιγμή  $t = 0$  την στιγμή που ο άξονας  $\bar{y}_B$  του  $\{B\}$  βρίσκεται στην κατεύθυνση  $[0 \ 0.9351 \ -0.3543]^T$  (14<sup>η</sup> επανάληψη). Έχουμε, πλέον, στη διάθεσή μας τον επιθυμητό ομογενή μετασχηματισμό του άκρου του βραχίονα ως προς το πλαίσιο της βάσης του  $g_{0t}$ .

Προχωράμε με την σχεδίαση του σχήματος ελέγχου για την παρακολούθηση του επιθυμητού αυτού πλαισίου του άκρου. Το σχήμα ελέγχου που θα υλοποιήσουμε δημιουργεί το σφάλμα στον λειτουργικό χώρο του βραχίονα και σχεδιάζει τον έλεγχο στο χώρο των αρθρώσεων. Παρακάτω βλέπουμε το σχήμα αυτό:



Σχήμα 2.1: Σχήμα Ελέγχου

Βλέπουμε ότι εμπλέκει την χρήση της Ιακωβιανής στο βρόχο ελέγχου, έχει όμως εν δυνάμει το πλεονέκτημα να ελέγχει άμεσα τις μεταβλητές του λειτουργικού χώρου. Τα σφάλματα ελέγχου δημιουργούνται στον λειτουργικό χώρο και απεικονίζονται στο χώρο των αρθρώσεων με την χρήση της αντίστροφης Ιακωβιανής, όπου και σχεδιάζεται ο νόμος ελέγχου. Το σχήμα αυτο παρουσιάζει πρόβλημα στα ιδιάζοντα σημεία του βραχίονα, στα οποία η Ιακωβιανή δεν αντιστρέφεται, το οποίο μπορεί να αντιμετωπιστεί με την χρήση της ψευδο-αντίστροφης. Ωστόσο, στα δεδομένα της εργασίας δεν εμφανίζεται τέτοιο πρόβλημα κι επομένως μπορεί να χρησιμοποιηθεί η αντίστροφη Ιακωβιανή χωρίς περιορισμούς.

Όπως φαίνεται από το Σχήμα 2.1 σε κάθε επανάληψη του συστήματος ελέγχου υπολογίζουμε, αρχικά, τον ομογενή μετασχηματισμό  $g_{et}$  που δηλώνει το σφάλμα θέσης και προσανατολισμού του άκρου. Από την γραμμική και την γωνιακή ταχύτητα, έπειτα, μπορούμε να κατασκευάσουμε την συστροφή της ταχύτητας του άκρου του βραχίονα (ταχύτητα σώματος). Συγκεκριμένα, κατασκευάζουμε το διάνυσμα:

$$V_e = \begin{bmatrix} v_b \\ \omega_b \end{bmatrix}, \quad v_b = p_{et} \quad \& \quad \omega_b = \sin\left(\frac{\theta}{2}\bar{k}\right) \quad (2.12)$$

όπου  $p_{et}$  είναι η θέση της αρχής του επιθυμητού πλαισίου  $\{T\}$  ως προς το πλαίσιο του άκρου  $\{E\}$  και  $\theta, \bar{k}$  η γωνία κι ο άξονας, αντίστοιχα, του ισοδυνάμου άξονα/γωνίας του πίνακα  $g_{et}$ . Έχουμε, έτσι, ένα διάνυσμα συστροφής της ταχύτητας του άκρου του βραχίονα και πολλαπλασιάζοντάς το με την αντίστροφη Ιακωβιανή  $J_e^{-1}$  παίρνουμε τις ταχύτητες των αρθρώσεων  $\dot{q}_r$ . Θέτουμε, λοιπόν, ως είσοδο στο μπλοκ ελέγχου:

$$u = \dot{q}_r = J_e^{-1} V_e \quad (2.13)$$

Στο μπλοκ ελέγχου, τώρα, υλοποιούμε έναν *PI* ελεγκτή, δηλαδή έναν ελεγκτή με ένα αναλογικό κέρδος  $k_p$  κι έναν ολοκληρωτή με κέρδος  $k_i$ . Η έξοδος του μπλοκ ελέγχου είναι οι ταχύτητες  $\dot{q}$  των αρθρώσεων του βραχίονα:



$$\dot{q} = k_p u + k_i U, \text{ όπου } U \text{ το ολοκλήρωμα του } u \quad (2.14)$$

Για να πληρούνται οι προδιαγραφές των ταχυτήτων και των επιταχύνσεων στις αρθρώσεις, όπως έχουν οριστεί από την σχέση (2.2), θα πρέπει σε αυτό το σημείο να περιορίσουμε τις τιμές των  $\dot{q}$  και  $\ddot{q}$ . Για τον σκοπό αυτό χρησιμοποιούμε την συνάρτηση κορεσμού (saturation) στο σήμα  $\dot{q}$  και θέτουμε άμεσα τα όριά του. Για την αποφυγή της υπέρβασης των ορίων της επιτάχυνσης  $\ddot{q}$  θα χρησιμοποιήσουμε ένα κατάλληλο χαμηλοπερατό φίλτρο για το σήμα  $\dot{q}$ . Η λογική είναι ότι το χαμηλοπερατό φίλτρο αποκόπτει τις συχνότητες που είναι μεγαλύτερες από το cutoff frequency και στην περίπτωση μας μεγάλη συχνότητα στην ταχύτητα σημαίνει μεγάλη στιγμιαία παράγωγος, δηλαδή επιτάχυνση. Υλοποιούμε αυτή τη λογική και πάλι με συνάρτηση κορεσμού στην στιγμιαία διαφορά της ταχύτητας.

Τέλος, ολοκληρώνουμε το σήμα  $\dot{q}$  της ταχύτητας των αρθρώσεων προκειμένου να λάβουμε το σήμα  $q$  των θέσεων των αρθρώσεων και μέσω της επίλυσης του ευθύς κινηματικού προβλήματος με την συνάρτηση  $fkine(q)$  να υπολογίσουμε τον πίνακα ομογενούς μετασχηματισμού  $g_{0e}$ . Ο πίνακας αυτός μας πληροφορεί για την πραγματική θέση και τον πραγματικό προσανατολισμό του άκρου του βραχίονα και μας επιτρέπει με την βοήθεια του επιθυμητού στόχου  $g_{0t}$  να υπολογίσουμε τον πίνακα σφάλματος  $g_{et}$  ως εξής:

$$g_{et} = g_{0e}^{-1} g_{0t} \quad (2.15)$$

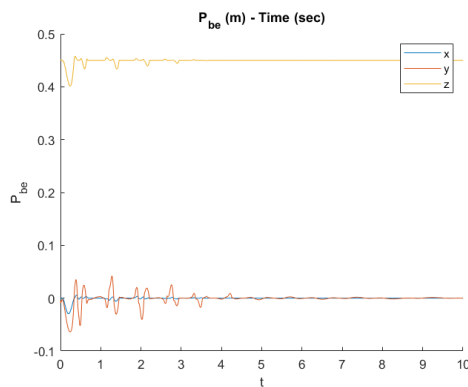
Κλείνει, έτσι, ο κύκλος του βρόχου και μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το σφάλμα για την παρακολούθηση της θέσης της σφαίρας στην επόμενη επανάληψη σύμφωνα με το Σχήμα 2.1.

## 2.2 Προσομοίωση - Αποτελέσματα - Σχολιασμοί

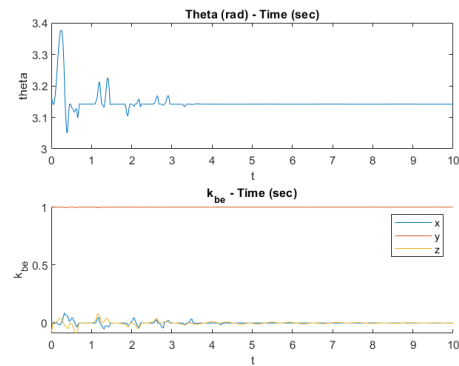
Στη συνέχεια θα παρουσιάσουμε τα αποτελέσματα της προσομοίωσης της κίνησης του βραχίονα και της σφαίρας στο περιβάλλον του **MATLAB** με την χρήση του **robotics toolbox**.

Εξάγοντας, αρχικά, τα δεδομένα της κίνησης της σφαίρας από την συνάρτηση  $sim\_ball(Ts)$  με  $Ts = 2sec$  σχηματίζουμε τον ομογενή μετασχηματισμό  $g_{0t}$  με τον τρόπο που αναφέραμε παραπάνω. Μπορούμε, έτσι, να τροφοδοτήσουμε στο σύστημα ελέγχου μας την τρέχουσα θέση της σφαίρας, ώστε να καταστεί δυνατή η παρακολούθησή της από το άκρο του βραχίονα με τη ζητούμενη σχετική θέση και προσανατολισμό που αναφέρθηκε προηγουμένως. Αφήνουμε την κίνηση να εξελιχθεί για χρόνο προσομοίωσης  $T = 10sec$ .

Παρακάτω βλέπουμε τη θέση του άκρου του βραχίονα ως προς το πλαίσιο  $\{B\}$  ως συνάρτηση του χρόνου, καθώς και τον προσανατολισμό του,  $R_{BE}$ , σε μορφή ισοδυνάμου άξονα/γωνίας. Παρατηρούμε κάποιες μικρές υπερυψώσεις και ταλαντώσεις στα διαγράμματα που, ωστόσο, εξασθενούν σημαντικά έπειτα από μερικά δευτερόλεπτα. Το σφάλμα μετά τις ταλαντώσεις είναι της τάξης των (1-2) χιλιοστών του μέτρου κι επομένως ικανοποιητικό για την εργασία που θέλουμε να εκτελέσουμε.

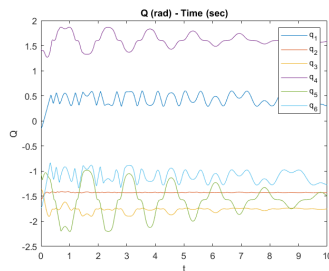


Σχήμα 2.2: Θέση του άκρου του βραχίονα

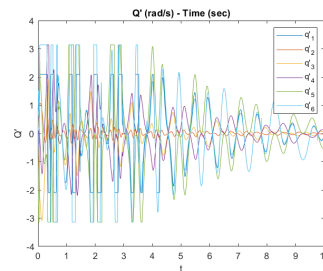


Σχήμα 2.3: Προσανατολισμός του άκρου του βραχίονα

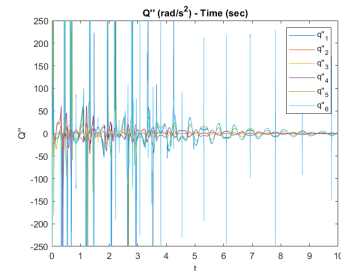
Βλέπουμε, ακόμη, τα διαγράμματα των θέσεων, των ταχυτήτων και των επιταχύνσεων των αρθρώσεων συναρτήσει του χρόνου. Παρατηρούμε ότι πράγματι τόσο οι ταχύτητες, όσο και οι επιταχύνσεις είναι εντός των ορίων των προδιαγραφών κι επομένως δεν υπάρχει κίνδυνος μηχανικής φθοράς του βραχίονα. Προσοχή ότι οι όλες τιμές σχεδιάζονται σε *rad*.



Σχήμα 2.4: Θέσεις αρθρώσεων



Σχήμα 2.5: Ταχύτητες αρθρώσεων



Σχήμα 2.6: Επιταχύνσεις αρθρώσεων

### Γενικότεροι Σχολιασμοί:

- Το σχήμα ελέγχου που επιλέχθηκε παρ' όλο που χρησιμοποιεί την αντίστροφη Ιακωβιανή του άκρου δεν παρουσιάζει ιδιάζοντα σημεία κι άρα όλες οι τιμές των ταχυτήτων των αρθρώσεων είναι υλοποιήσιμες κι εντός των επιτρεπόμενων ορίων.
- Οι υπερυψώσεις αποτελούν μεταβατικό φαινόμενο και καθώς περνάει ο χρόνος γίνονται αμελητέες για την ακρίβεια που απαιτείται από τα δεδομένα του προβλήματος.
- Τρέχοντας το αρχείο `Demo_Part_A` μπορείτε να δείτε τα αποτελέσματα της προσομοίωσης, καθώς και την κίνηση της σφαίρας και του βραχίονα από την συνάρτηση `visualize()`.
- Υπήρξε ένα γενικότερο πρόβλημα κατά την εξαγωγή των δεδομένων από την κλάση `Wspace`, το οποίο είχα τόσο εγώ, όσο και πολλοί από τους συμφοιτητές μου. Ανάλογα με την έκδοση του `MATLAB/Robotics Toolbox` μπορεί με τον ίδιο ακριβώς κώδικα σε άλλον υπολογιστή να προέκυπτε λανθασμένη τροχιά (χωρίς ταλάντωση). Το έλυσα για

τον δικό μου υπολογιστή, αλλά δεν μπορώ να εγγυηθώ ότι δεν θα προκύψει πρόβλημα σε άλλον.

### 3 Τμήμα Β

Στο τμήμα Β της αναφοράς, όπως είπαμε στην εισαγωγή, η εργασία του βραχίονα θα συγκεκριμενοποιηθεί και θα σχεδιαστεί μια τροχιά την οποία θα ακολουθήσει το άκρο του βραχίονα με σκοπό να πλησιάσει αρκετά την σφαίρα και να μπορέσει να την πιάσει.

#### 3.1 Θεωρητική Ανάλυση - Σχεδίαση Τροχιάς

Θα πρέπει να εφιστήσουμε την προσοχή μας στον κατάλληλο σχεδιασμό της τροχιάς του άκρου, ώστε η αρπάγη να έχει αρκετό χρόνο να πιάσει την σφαίρα εν κινήσει και χωρίς να ακουμπήσει πρωτύτερα αυτήν ή την τσουλήθρα.

Θεωρούμε ότι το πλαίσιο της αρπάγης ταυτίζεται με το πλαίσιο του άκρου  $\{E\}$ . Τότε το ρομπότ θα πρέπει να προσεγγίσει τη σφαίρα, καθώς αυτή κινείται, καταλήγωντας στη σχετική θέση  $p_{BE} = [0 \ 0 \ 0.06]^T$  με σχετικό προσανατολισμό  $R_{BE} = Rot(y, 180^\circ)$ . Στη συνέχεια το ρομπότ θα πρέπει να διατηρήσει τη σχετική θέση και τον σχετικό προσανατολισμό για χρονικό διάστημα τουλάχιστον 1 sec έως ότου κλείσουν τα δάχτυλα της αρπάγης.

Παρατηρώντας την κίνηση του άκρου του βραχίονα στο μέρος Α της εργασίας μπορούμε να συμπεράνουμε ότι μια τροχιά που λύνει το ζητούμενο πρόβλημα είναι η παρακολούθηση της κίνησης της σφαίρας με ταυτόχρονη προσέγγισή της κατά τον άξονα  $\bar{z}$  του πλαισίου  $\{B\}$ . Θα σχεδιάσουμε, λοιπόν, μια τροχιά  $z(t)$  τέτοια ώστε:

$$p_{BT}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ z(t) \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

Επιθυμούμε το άκρο του βραχίονα από την αρχική του θέση  $p_{BE} = [0 \ 0 \ 0.45]^T$  του τμήματος Α να βρεθεί στην ζητούμενη θέση  $p_{BE} = [0 \ 0 \ 0.06]^T$ . Επιπλέον, θα θεωρήσουμε ότι η αρχική και η τελική ταχύτητα της κίνησης αυτή κατά τον άξονα  $\bar{z}$  του πλαισίου  $\{B\}$  είναι μηδενικές.

Μια τροχιά που καλύπτει τις παραπάνω απαιτήσεις είναι η γραμμική με παραβολική μείξη. Θέλουμε το άκρο του βραχίονα να βρίσκεται στην επιθυμητή θέση και στον επιθυμητό προσανατολισμό τουλάχιστον για χρονικό διάστημα ενός δευτερολέπτου μέχρι να κλείσουν τα δάχτυλα της αρπάγης. Είναι, επίσης, επιθυμητό να παρέλθει το χρονικό διάστημα των μεταβατικών φαινομένων έως ότου αρχίσει την εργασία της η αρπάγη. Για τον λόγο αυτό επιλέγουμε ως  $t_f = 6sec$  την χρονική στιγμή που θα ολοκληρωθεί η τροχιά του άκρου. Έχουμε, λοιπόν:

$$z_0 = 0.45 \quad \dot{z}_0 = 0 \quad (3.2)$$

$$z_f = 0.06 \quad \dot{z}_f = 0 \quad (3.3)$$

Γνωρίζουμε, επιπλέον, ότι, σύμφωνα με την γραμμική τροχιά με παραβολική μείξη, κατά το χρονικό διάστημα από τον χρόνο μείξης  $t_b$  μέχρι τον χρόνο  $t_f - t_b$  η τροχιά είναι γραμμική με ταχύτητα  $V$  για την οποία ισχύει:

$$\frac{z_f - z_0}{t_f} < V \leq \frac{2(z_f - z_0)}{t_f} \quad (3.4)$$

από την οποία επιλέγουμε ως επιθυμητή ταχύτητα την μέγιστη:

$$V = \frac{2(z_f - z_0)}{t_f} \quad (3.5)$$

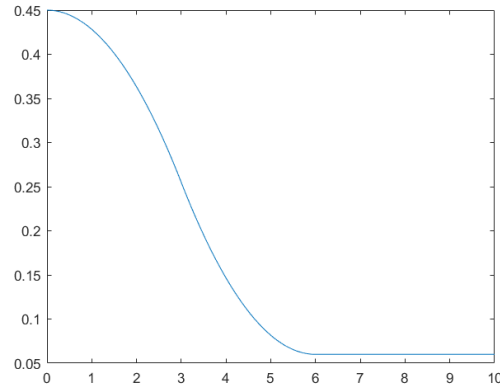
Είμαστε τώρα σε θέση να υπολογίσουμε την επιτάχυνση  $\alpha$  της κίνησης και τον χρόνο μείξης  $t_b$  με τον εξής τρόπο:

$$t_b = t_f - \frac{z_f - z_0}{V} \quad \alpha = \frac{V}{t_b} \quad (3.6)$$

Επομένως, η τροχιά θέσης για διάρκεια κίνησης  $t_f$  και ταχύτητα  $V$  δίνεται τελικά από τις σχέσεις:

$$z(t) = \begin{cases} z_0 + \frac{\alpha}{2}t^2, & \text{αν } 0 \leq t \leq t_b \\ \frac{z_f + z_0 - Vt_f}{2} + Vt, & \text{αν } t_b \leq t \leq t_f - t_b \\ z_f - \frac{\alpha t_f^2}{2} + \alpha t_f t - \frac{\alpha}{2}t^2, & \text{αν } t_f - t_b \leq t \leq t_f \end{cases} \quad (3.7)$$

και, για τις παραμέτρους που έχουμε επιλέξει, έχει την παρακάτω μορφή:



Σχήμα 3.1: Μορφή γραμμικής τροχιάς με παραβολική μείξη

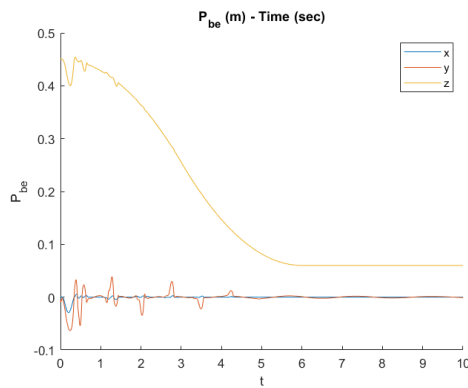
Έχοντας, λοιπόν, στη διάθεσή μας τον πίνακα  $p_{BT}(t)$ , και με τον πίνακα  $R_{BT}$  να παραμένει ο ίδιος, μπορούμε με ακριβώς παρόμοιο τρόπο με το τμήμα Α της εργασίας, να κατασκευάσουμε τον πίνακα ομογενούς μετασχηματισμού  $g_{0t}$  σύμφωνα με την σχέση (2.9). Το σχήμα ελέγχου που αναλύθηκε στην ενότητα 2.1.2 μπορεί να χρησιμοποιηθεί αυτούσιο για την επιτέλεση του σκοπού μας με μοναδική διαφορά την είσοδο  $g_{0t}$ , η οποία τώρα περιλαμβάνει την χρονικά μεταβαλλόμενη τροχιά  $z(t)$ .

## 3.2 Προσομοίωση - Αποτελέσματα - Σχολιασμοί

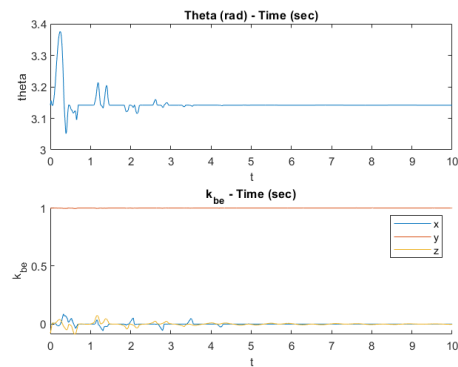
Στη συνέχεια θα παρουσιάσουμε τα αποτελέσματα της προσομοίωσης της τροχιάς του βραχίονα στο περιβάλλον του *MATLAB* με την χρήση του *robotics toolbox*. Αφήνουμε και πάλι την κίνηση να εξελιχθεί για χρόνο προσομοίωσης  $T = 10\text{sec}$ .

Παρακάτω βλέπουμε τη θέση του άκρου του βραχίονα ως προς το πλαίσιο  $\{B\}$  ως συνάρτηση του χρόνου, καθώς και τον προσανατολισμό του,  $R_{BE}$ , σε μορφή ισοδυναμού άξονα/γωνίας. Παρατηρούμε και πάλι κάποιες μικρές υπερυψώσεις και ταλαντώσεις στα διαγράμματα που, ωστόσο, εξασθενούν σημαντικά έπειτα από μερικά δευτερόλεπτα. Το σφάλμα μετά τις ταλαντώσεις είναι της τάξης των (1-2) χιλιοστών του μέτρου κι επομένως ικανοποιητικό για την εργασία που θέλουμε να εκτελέσουμε.

Βλέπουμε ότι το άκρο του βραχίονα ακολουθεί επιτυχώς την τροχιά που έχουμε σχεδιάσει και μάλιστα στον χρόνο  $t_f$ , στον οποίο ορίσαμε να ολοκληρώνεται η κίνησή του κατά τον άξονα  $\bar{z}$  του πλαισίου  $\{B\}$ , οι ταλαντώσεις είναι αμελητέες για τα δεδομένα του προβλήματος.

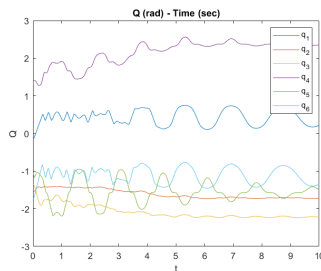


Σχήμα 3.2: Θέση του άκρου του βραχίονα

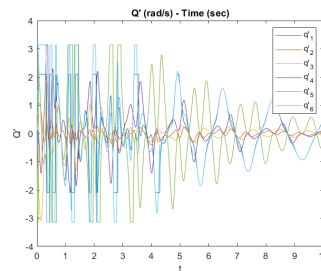


Σχήμα 3.3: Προσανατολισμός του άκρου του βραχίονα

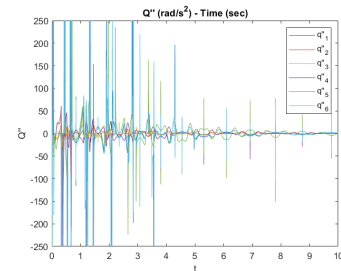
Βλέπουμε, ακόμη, τα διαγράμματα των θέσεων, των ταχυτήτων και των επιταχύνσεων των αρθρώσεων συναρτήσει του χρόνου. Παρατηρούμε ότι πράγματι τόσο οι ταχύτητες, όσο και οι επιταχύνσεις είναι εντός των ορίων των προδιαγραφών κι επομένως δεν υπάρχει κίνδυνος μηχανικής φθοράς του βραχίονα. Προσοχή ότι οι όλες τιμές σχεδιάζονται σε *rad*.



Σχήμα 3.4: Θέσεις αρθρώσεων



Σχήμα 3.5: Ταχύτητες αρθρώσεων



Σχήμα 3.6: Επιταχύνσεις αρθρώσεων

Γενικότεροι Σχολιασμοί:

- Οι υπερυψώσεις αποτελούν μεταβατικό φαινόμενο και καθώς περνάει ο χρόνος γίνονται αμελητέες για την ακρίβεια που απαιτείται από τα δεδομένα του προβλήματος.
- Η απαίτηση να μην έρθει σε επαφή το άκρο του βραχίονα με την σφαίρα ή την τσουλήθρα νωρίτερα της προβλεπόμενης κίνησης της αρπάγης πληρείται, καθώς η διάμετρος της σφαίρας δίνεται  $4\text{cm}$  και η απόσταση της τελικής θέσης του άκρου του βραχίονα από την βάση  $\{B\}$  της σφαίρας είναι  $6\text{cm}$ . Το σφάλμα της θέσης που παρατηρείται από τα διαγράμματα μετά τον χρόνο  $t_f = 6\text{sec}$  είναι μία τάξη μεγέθους μικρότερο από την απόσταση μεταξύ του άκρου του βραχίονα και την κορυφής της σφαίρας. Πράγματι, η απόσταση αυτή είναι  $2\text{cm}$ , ενώ το σφάλμα είναι της τάξης των 1-2 χιλιοστών του μέτρου. Επομένως, το άκρο του βραχίονα είναι αδύνατον να ακουμπήσει την σφαίρα ή κατέπεκταση την τσουλήθρα.
- Τρέχοντας το αρχείο `Demo_Part_B` μπορείτε να δείτε τα αποτελέσματα της προσομοίωσης, καθώς και την κίνηση της σφαίρας και του βραχίονα από την συνάρτηση `visualize()`.
- Από την παραπάνω προσομοίωση της κίνησης μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι ενδέχεται κάποια από τις αρθρώσεις του βραχίονα να ακουμπήσει την τσουλήθρα εάν δεν ορίσουμε κατάλληλα τον χρόνο  $t_f$ . Στην ανάλυσή μας χρησιμοποιήθηκε  $t_f = 6\text{sec}$  και  $T = 10\text{sec}$  (χρόνος προσομοίωσης) για γρηγορότερη εκτέλεση, ωστόσο εάν θέλουμε να διασφαλίσουμε κι αυτό το ενδεχόμενο μπορούμε να θέσουμε για παράδειγμα  $t_f = 10\text{sec}$  και  $T = 12\text{sec}$ .

## Βιβλιογραφία

- [1] Ρομποτική, Ζωή Δουλγέρη
- [2] ROBOTICS TOOLBOX, <https://petercorke.com/toolboxes/robotics-toolbox/>