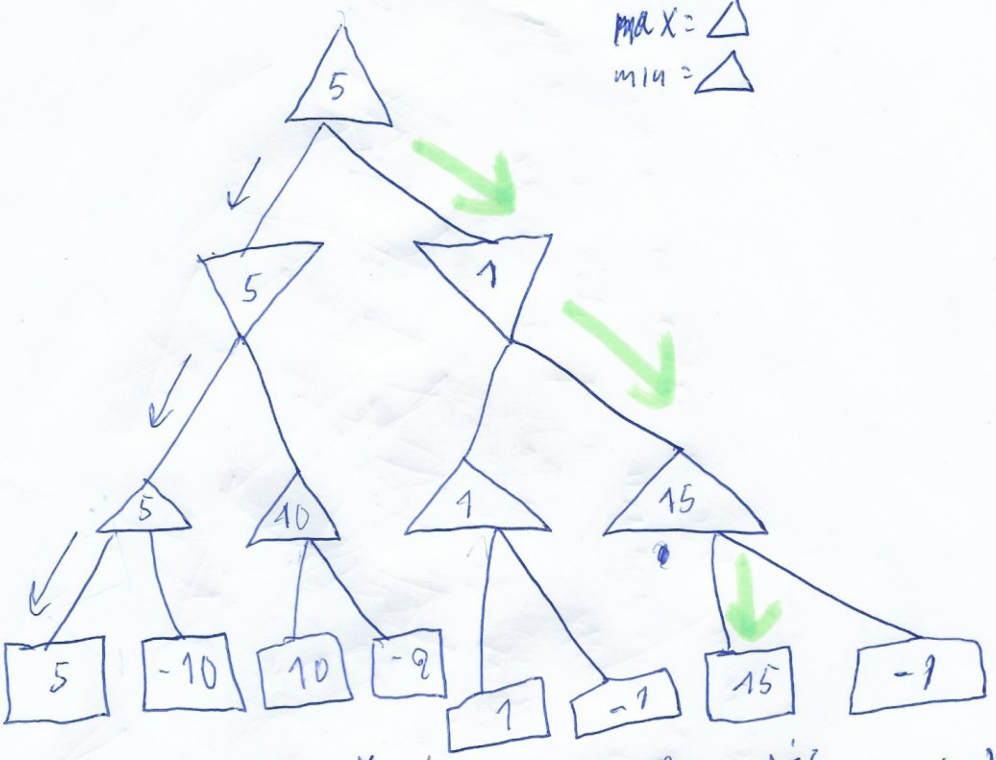
Προβλημα 1

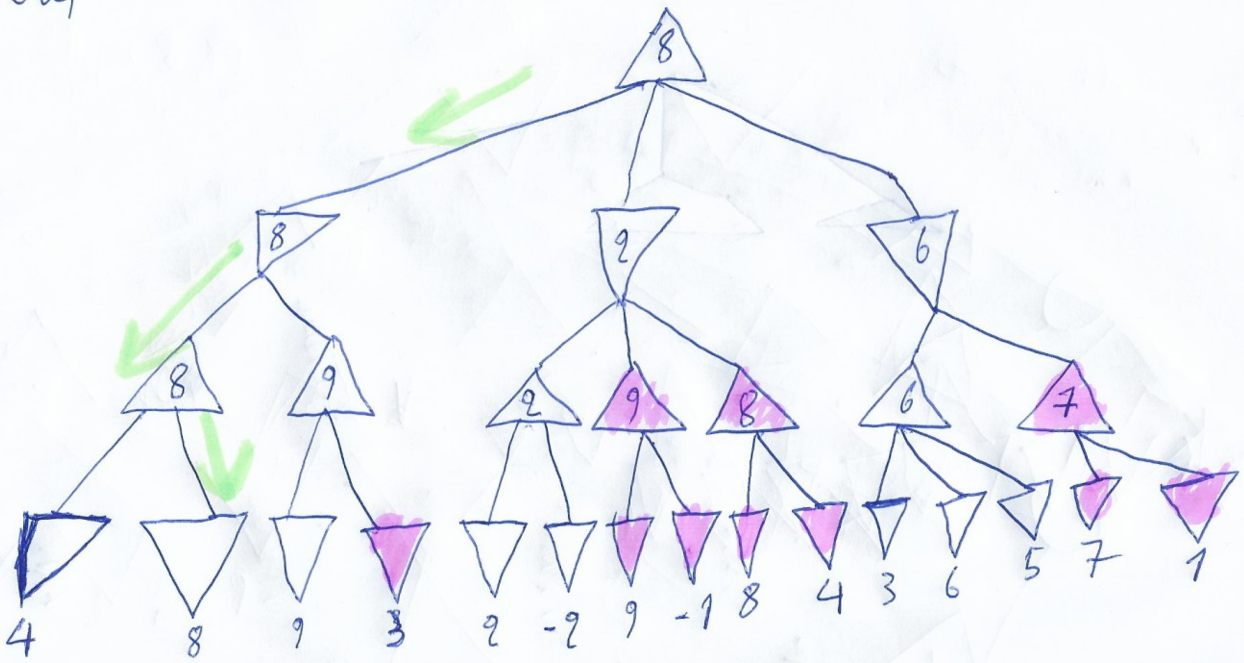
Έστω ότι έχουμε παίγνιο βάθους 2 με 1 κόμβο του MAX ο οποίος έχει n παιδιά (άρα ο MIN έχει n κομβους) Έστω επίσης ότι $k_i$ είναι το πλήθος των φύλλων του i κομβου του MIN όπου $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Υποθέτουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι η βελτιστη λύση για τον MAX όταν και οι δύο παίκτες έχουν βέλτιστη στρατηγική βρίσκεται στο αριστερότερο φύλλο του δέντρου και ονομάζουμε την βελτιστη τιμή ως α. Συμπεραίνουμε λοιπόν πως το αριστερότερο φύλλο έχει την μικρότερη τιμή από όλα τα φύλλα με τα οποία έχει τον ίδιο κόμβο πατέρα. Έστω τώρα πως ο MAX παίζει το παιχνίδι χρησιμοποιόντας βέλτιστη στρατηγική ενώ ο MIN δεν χρησιμοποιεί βέλτιστη στρατηγική. Τότε προφανώς ο MAX θα επιλέξει να κατευθυνθεί προς τον κόμβο που έχει ως παιδί του το φύλλο με την τιμή α αφήνοντας στον MIN την επιλογή είτε να διαλέξει το φύλλο με την τιμή α είτε κάποιο φύλλο από τα παιδιά του το οποίο όπως είπαμε πριν θα έχει τιμή μικρότερη του α. Άρα στο πρόβλημα, πάντα η χρησιμότητα για τον MAX που υπολογίζεται χρησιμοποιόντας αποφάσεις minimax εναντίον ενός μη βέλτιστου MIN δεν είναι ποτέ μικρότερη από την χρησιμότητα που υπολογίζεται παίζοντας εναντίον ενός βελτιστου MIN. Η συγκεκριμένη πρόταση ισχύει για προβλήματα οποιουδήποτε βάθους καθώς κάθε τέτοιο πρόβλημα αποτελεί επαγωγική γενίκευση του μικρού προβλήματος που μελετήσαμε

Πρόβλημα 1) Έστω το δέντρο




Αν τρέξουμε minimax τότε ο max θα επιλέξει να μπλε ακολουθήσει την διαδρομή που έχω δείξει με τα βελάκια. Αν όμως κανένας από τους MIN, MAX δεν επιλέγουν βέλτιστα, τότε είναι ~~...~~ πιθανό να ακολουθηθεί η διαδρομή που δείχνω με τα πράσινα βελάκια και ο MAX να καταφέρει καλύτερο αποτέλεσμα λειτουργώντας μη βέλτιστα, από ότι θα κατάφερνε αν συμπεριφερόταν ~~...~~ βέλτιστα.

Προβλημα 2α)

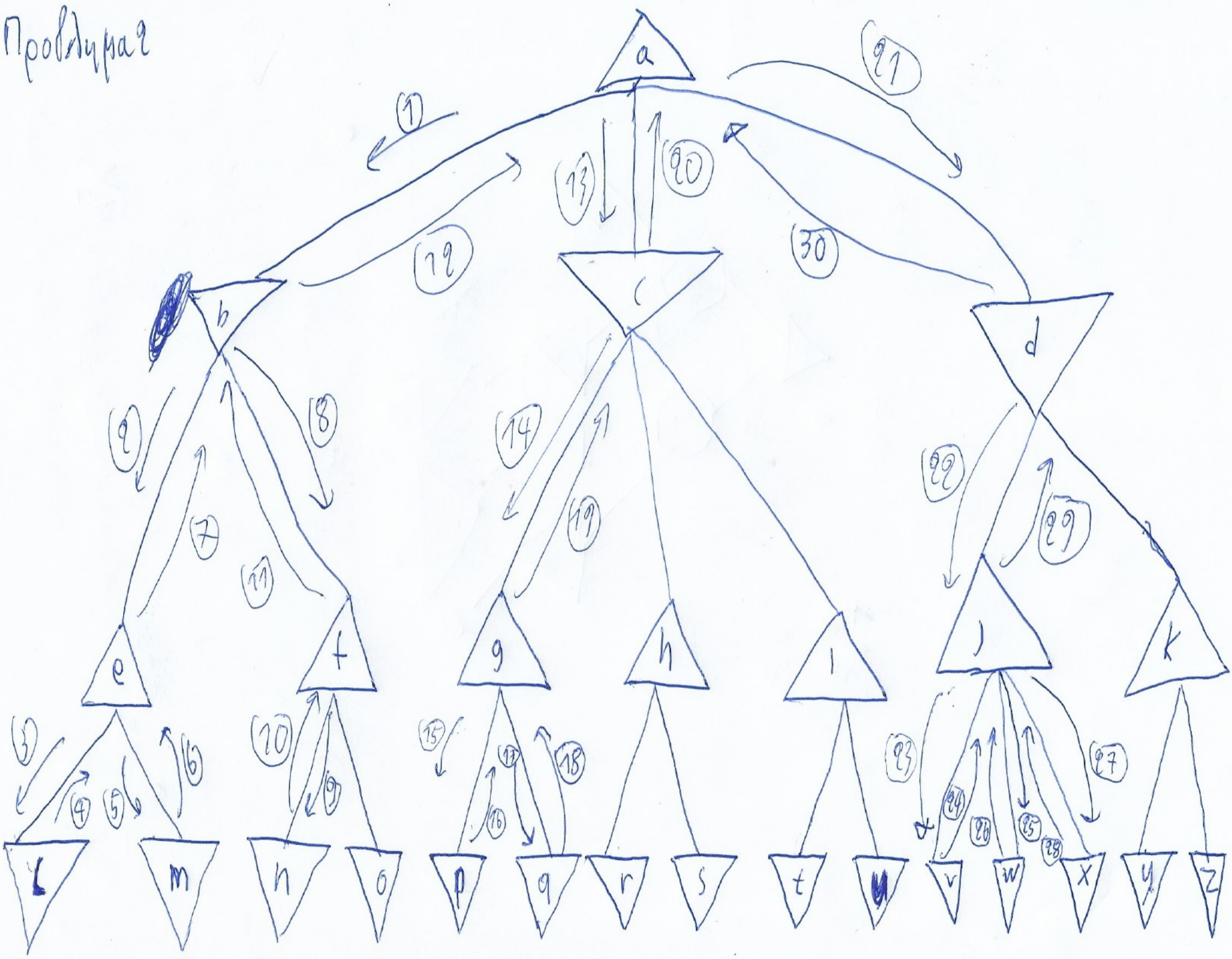



Προβλημα 2β) Η minimax απόφαση στην ρίζα του δέντρου είναι το 8 και θα ακολουθήσει ο αλγόριθμος το μονοπάτι που απεικονίζω με τα πράσινα βελάκια

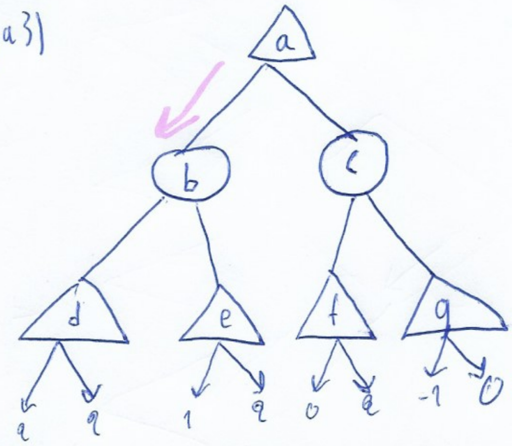
Πρόβλημα 2γ) Οι κόμβοι που κλαδεύονται από τον αλγόριθμο ALPHA-BETA-SEARCH όταν αυτός εκτελεστεί είναι οι κόμβοι του δέντρου που έχω χρωματίσει με ροζ χρώμα

Με αριθμημένα βελάκια θα δείξω αναλυτικά τις κινήσεις του αλγορίθμου ALPHA-BETA-SEARCH

Πρόβλημα 2



Πρόβλημα 3)



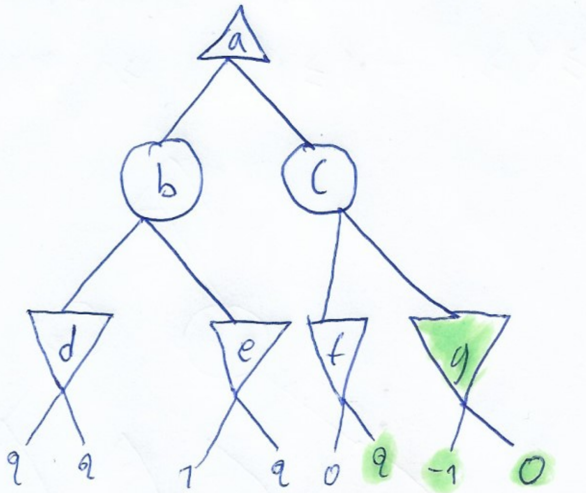

α) Ακολουθώντας το ροζ βελάκι ο MAX θα πάρει τιμή $\alpha \in \{1,2\}$ ενώ αν πάρει διαφορετική απόφαση θα πάρει μια τιμή $\beta \in \{0,-1\}$ άρα επειδή σε κάθε περίπτωση $\alpha > \beta$ ο MAX θα ακολουθήσει το ροζ βελάκι

β) Προφανώς αν δεν μας έχουν δωθεί τα τελευταία δύο φύλλα, πρέπει να τα υπολογίσουμε καθώς σε αυτή την περίπτωση δεν γνωρίζουμε την τιμή του κόμβου g, η οποία είναι η ελάχιστη των τιμών των φύλλων του. Αναλυτικά γνωρίζουμε πως αν X η τιμή που θα πάρει ο MAX πηγαίνοντας αριστερά, ισχύει ότι $E[X] = \frac{1}{2}\cdot 2 + \frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{3}{2}$ (Άρα ο κόμβος τύχης b αποτιμάται με $\frac{3}{2}$). Από την άλλη έστω Y η τιμή που θα πάρει ο MAX αν επιλέξει το δεξί μονοπάτι και έστω y η τιμή του κόμβου g, τότε $E[y] = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}y$ όπου $y = \min\{p_1, p_2\}$ όπου $p_1, p_2$ οι τιμές των φύλλων του. Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε πως συμφέρει τον Max να επιλέξει το δεξί μονοπάτι μόνο αν $E[y] > E[x]$ δηλαδή αν $\frac{1}{2}y > \frac{3}{2} \Leftrightarrow y > 3 \Leftrightarrow \min\{p_1,p_2\} > 3 \Leftrightarrow p_1 > 3$ και $p_2 > 3$ ①. Άρα θα πρέπει να συνεχίσουμε υπολογίζοντας και το έβδομο φύλλο. Βρίσκουμε δηλαδή την τιμή $p_1$ η οποία είναι $-1$ και άρα από το ① βλέπουμε ότι δεν υπάρχει καμία περίπτωση να ισχύει $E[y] > E[x]$ για οποιαδήποτε τιμή του $p_2$ και άρα δεν χρειάζεται να το υπολογίσουμε.

Πρόβλημα 3

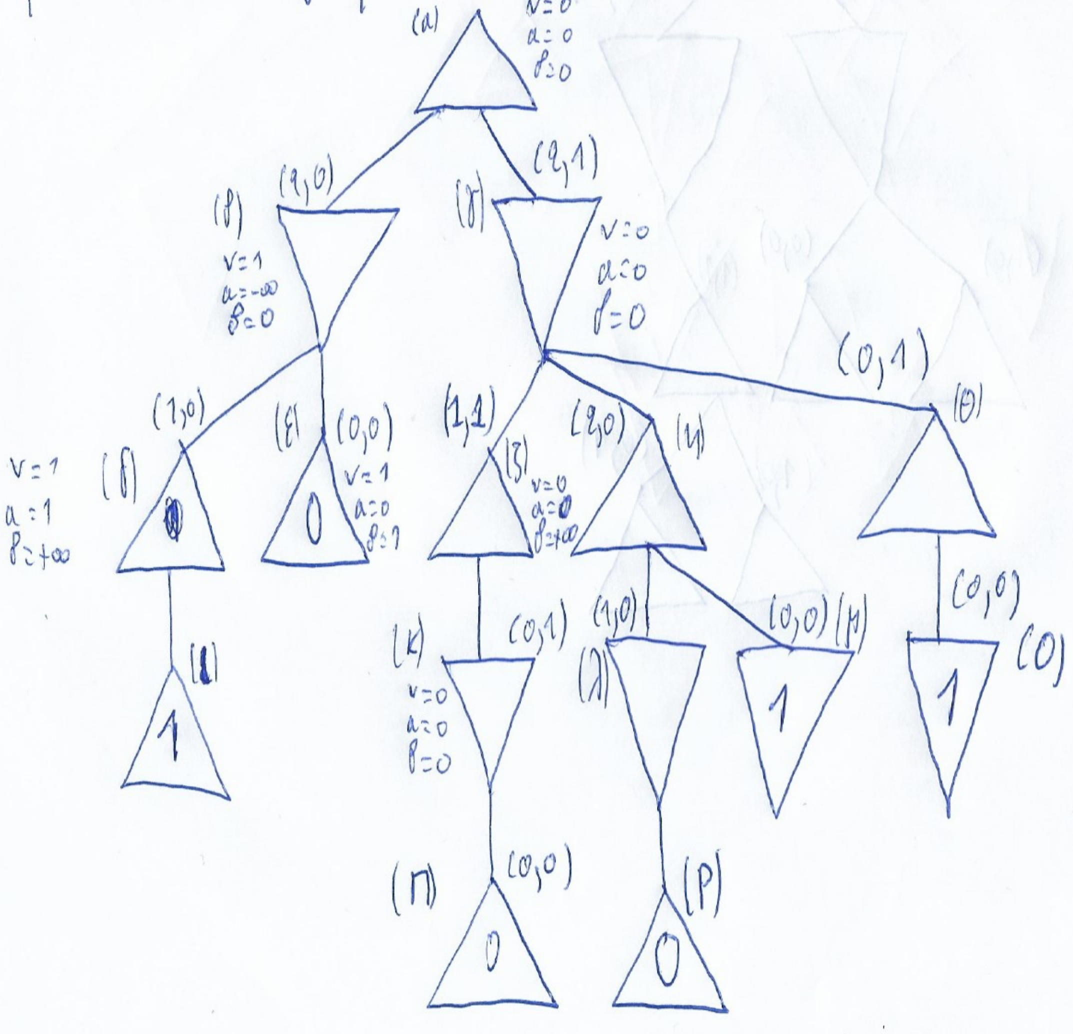
γ) Αφού αποτιμηθούν τα δύο πρώτα φύλλα, γνωρίζουμε ότι η τιμή του κόμβου d είναι 2 και έστω $p_1, p_2$ οι τιμές των φύλλων του e. Χωρίς βλάβη της γενικότητας θεωρούμε $p_1 < p_2$. Σε αυτή την περίπτωση ο κόμβος e θα αποτιμηθεί με την τιμή $p_1 \in [-2, 2]$. Η τιμή του τυχαίου κόμβου b είναι ίση με την μέση τιμή των τιμών των παιδιών του. Άρα έστω y η τιμή του b, τότε $y = \frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot p_1 = 1 + \frac{p_1}{2}$ όμως $-2 \leq p_1 \leq 2 \Leftrightarrow -1 \leq \frac{p_1}{2} \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq \frac{p_1}{2} + 1 \leq 2 \Leftrightarrow 0 \leq y \leq 2$

δ)




Οι πράσινοι κόμβοι δεν θα υπολογιστούν. Υπολογίζοντας τα δύο πρώτα φύλλα γνωρίζουμε πως η τιμή του κόμβου $d = \min\{2, 2\} = 2$. Υπολογίζοντας τα επόμενα δυο φύλλα αντίστοιχα $e = \min\{1, 2\} = 1$. Γνωρίζοντας αυτά μπορούμε να βρούμε την τιμή του $b = \frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{3}{2}$. Τέλος υπολογίζοντας το πέμπτο φύλλο συμπεραίνουμε πως η τιμή του f είναι το πολύ 0. (Έστω x η τιμή του f) Παράλληλα γνωρίζουμε πως η μέγιστη τιμή που μπορεί να πάρει το g είναι 2 και την ονομάζουμε y. Συνδυάζοντας τις γνώσεις μας βλέπουμε πως η τιμή του $c = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y \leq 1 < \frac{3}{2} =$ η τιμή το b. Άρα δεν χρειάζεται να υπολογίσουμε τίποτα άλλο καθώς ξέρουμε ήδη την καλύτερη επιλογή για τον MAX. (θα πάρει το αριστερό μονοπάτι)

Προβλημα 4) Κάθε ουρά έχει δύο αντικείμενα. Για να απεικονίσω το Πλήθος των αντικειμένων σε κάθε ουρά, θα χρησιμοποιήσω το καρτεσιανό γινόμενο $(X,Y)$ όπου $X,Y \in \{0,1,2\}$. Το παιχνίδι είναι συμμετρικό οπότε δεν θα είναι λάθος να πούμε ότι $(X,Y)=(Y,X)$ ώστε να λιγοστεψουμε τους υπολογισμούς






Έχω ονομάσει κάθε κόμβο με ένα γράμμα της ελληνικής άλφα-βήτα σε παρένθεση και τα χρησιμοποιώ για να απαντήσω αναλυτικά στα ερωτήματα.

Προβλημα 4 β)

Αναλυτικά όταν βρισκόμαστε στον (α) κόμβο τότε έχουμε $v=$ , $\alpha=-\infty$, $\beta=+\infty$ , απο κει κατευθυνόμαστε στον κομβο (β) με τιμές $v=$ , $\alpha=-\infty$, $\beta=\infty$ , απο κει κατευθυνόμαστε στον (δ) κόμβο με τιμές $v=$ , $\alpha=-\infty$, $\beta=\infty$ , απο κει κατευθυνόμαστε στον κόμβο (ι) και παίρνουμε τιμη $v=1$ και επιστρεφουμε στον κομβο (δ) ο οποίος πλέον έχει τιμές $v=1$, $\alpha=1$, $\beta=\infty$ και επιστρέφουμε στον (β) κόμβο ο οποίος ελέγχει τα παιδιά του και αποκτά τιμη $v=1$ , $\alpha=-\infty$, $\beta=1$ , απο τον β κατευθυνόμαστε στον (ε) ο οποίος έχει $v=1$, $\alpha=0$, $\beta=1$ και επιστρεφουμε πάλι στον (β) με τιμές $v=1$, $\alpha=-\infty$, $\beta=0$ , ο αλγόριθμος τώρα επιστρέφει στον κομβο (α) και έχουμε τιμές $v=1$, $\alpha=0$, $\beta=+\infty$. Τωρα θα κατέβει ο αλγόριθμος στο (γ) με τιμές $v=$ , $\alpha=0$, $\beta=+\infty$ συνεχίζει κατεβαίνοντας στο (ζ) με τιμές $v=$ , $\alpha=0$, $\beta=+\infty$, συνεχίζει στο (κ) με τιμες $v=$ , $\alpha=0$, $\beta=+\infty$ , τώρα κατευθυνόμαστε στον (π) κόμβο ο οποίος αποτιμάται με $v=0$, επιστρέφουμε στον (κ) κόμβο ο οποίος αποκτά πλέον τιμές $v=0$, $\alpha=0$, $\beta=0$ και επειδή $v\le\alpha$ ~~δεν χρειάζεται να υπολογίσουμε τίποτα~~ επιστρέφουμε στον κομβο (ζ) ο οποίος έχει τιμες $v=0$, $\alpha=0$, $\beta=+\infty$ επιστρέφουμε στον κόμβο (γ) με τιμές $v=0$, $\alpha=0$, $\beta=0$ και επειδή $v\le\alpha$ επιστρέφει ο αλγόριθμος στον κομβο (α) με τιμές $v=0$, $\alpha=0$, $\beta=0$

γ) Προφανώς αν και οι δυο παίχτες παίζουν βέλτιστα, θα κερδίζει πάντα αυτός που παίζει δεύτερος, δηλαδή ο MIN, καθώς ο αλγοριθμος ALPHA-BETA-SEARCH μας δείχνει πως αν και οι δύο παίχτες παίζουν βέλτιστα πάντα ο MIN θα κυριαρχεί του MAX

Προβλημα(θ)(Συνέχεια)

Απο τα προηγούμενα γίνεται φανερό πως οι κόμβοι που θα κλαδευτούν απο τον αλγόριθμο είναι οι:

η, λ, μ, θ, Ο