ΤΕΧΝΙΚΕΣ ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ

5η ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΑΚΗ ΑΣΚΗΣΗ

ΟΝ/ΜΟ: Νήρας Δημήτρης

ΑΕΜ: 8057

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Σκοπός της εργασίας αυτής είναι η ελαχιστοποίηση δύο συναρτήσεων δύο μεταβλητών, της $f(x)=x_1x_2+2(x_1-x_2)^2$ και της $g(x)= (x_1-x_2)^2$, οι οποίες έχουν τους εξής περιορισμούς:

- για την f(x) ισχύει ότι $3\leq x_1\leq 30$ και $-25\leq x_2\leq -5$.
- για την g(x) ισχύει $x_1\leq -1$ και $x_2\leq -1$.

Η ελαχιστοποίηση των παραπάνω συναρτήσεων θα γίνει με τους εξής δύο τρόπους:

α) Θεωρητικά, χρησιμοποιώντας το θεώρημα Karush-Kuhn-Tucker και ,

β) Αλγοριθμικά, χρησιμοποιώντας τις μεθόδους φραγμού και ποινής.

ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

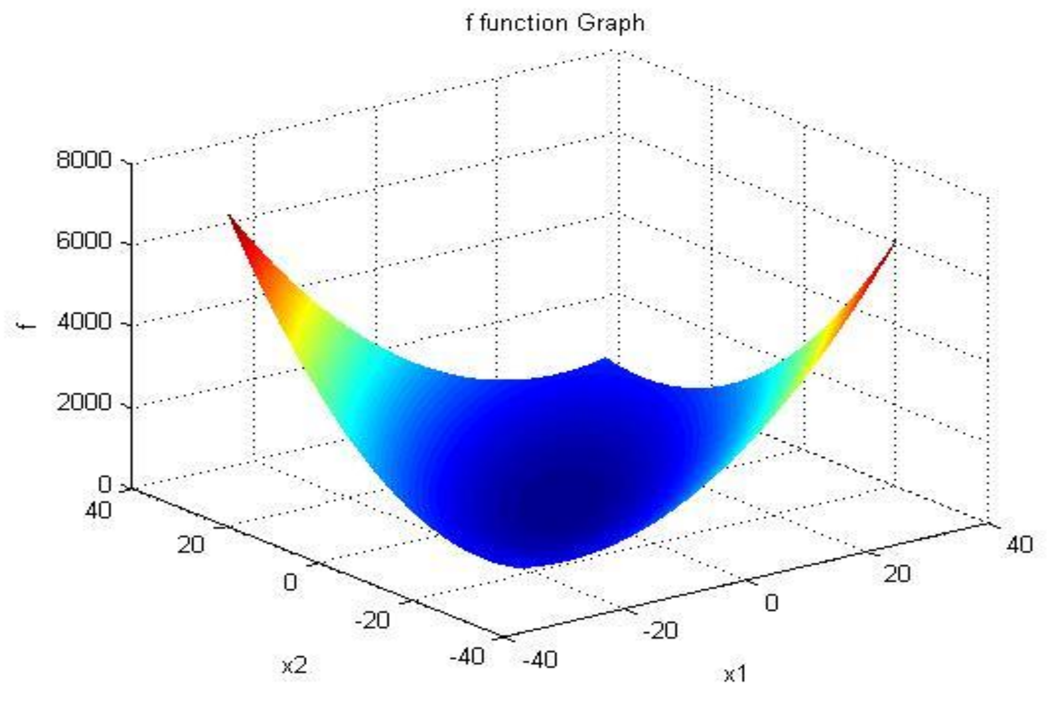
Αρχικά ξεκινάμε με την θεωρητική ανάλυση της συνάρτησης f(x). Η συνάρτηση f(x) είναι συνεχώς παραγωγίσιμη, με κλίση $\nabla f(x) = \begin{bmatrix} 4x_1\text{-}3x_2 \\ -3x_1 + 4x_2 \end{bmatrix}$.

Ο Εσσιανός πίνακας της f είναι: $H_f(x)=\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$, ο οποίος είναι συμμετρικός πίνακας με ιδιοτιμές $\lambda_1=1$ και $\lambda_2=7$, δηλαδή πρόκειται για έναν θετικά ορισμένο πίνακα. Επομένως η συνάρτηση f είναι μία γνήσια κυρτή συνάρτηση. Οι περιορισμοί του προβλήματος μπορούν να γραφούν και ως εξής:

- $g_1(x)=3-x_1\leq0$
- $g_2(x)=x_1-30\leq0$
- $g_3(x)=-25-x_2\leq0$
- $g_4(x)=x_2+5\leq0$

Οι συναρτήσεις των περιορισμών είναι γραμμικές συναρτήσεις των μεταβλητών x_1 και x_2, άρα είναι κυρτές συναρτήσεις.

Επομένως το πρόβλημά μας είναι κυρτό και υπερ-αποτελούμενο, αφού υπάρχουν σημεία του πεδίου ορισμού της f που ικανοποιούν τους περιορισμούς. Παρακάτω φαίνεται η γραφική παράσταση της f:



Οι συνθήκες Karush-Kuhn-Tucker διαμορφώνονται ως εξής:

- $\lambda_i \geq 0$, i=1,…,4
- $\lambda_1 g_1(x^*)=0 \Rightarrow \lambda_1(3-x_1^*)=0$
- $\lambda_2 g_2(x^*)=0 \Rightarrow \lambda_2(x_1^*-30)=0$
- $\lambda_3 g_3(x^*)=0 \Rightarrow \lambda_3(-x_2^*-25)=0$
- $\lambda_4 g_4(x^*)=0 \Rightarrow \lambda_4(x_2^*+5)=0$
- $4x_1^*-3x_2^*-\lambda_1+\lambda_2=0$
- $-3x_1^*+4x_2^*-\lambda_3+\lambda_4=0$

Επιλύοντας το παραπάνω σύστημα παίρνουμε τις εξής λύσεις:

1. $(x_1^*,x_2^*)=(-3.75,-5)$ και $(\lambda_1^*,\lambda_2^*,\lambda_3^*,\lambda_4^*)=(0,0,0,8.75)$, η οποία απορρίπτεται διότι $x_1^*\leq 3$.
2. $(x_1^*,x_2^*)=(-18.75,-25)$ και $(\lambda_1^*,\lambda_2^*,\lambda_3^*,\lambda_4^*)=(0,0,-43.75,0)$, η οποία απορρίπτεται διότι $\lambda_3^*\leq 0$.
3. $(x_1^*,x_2^*)=(30,22.5)$ και $(\lambda_1^*,\lambda_2^*,\lambda_3^*,\lambda_4^*)=(0,-52.5,0,0)$, η οποία απορρίπτεται διότι $\lambda_4^*\leq 0$.
4. $(x_1^*,x_2^*)=(30,-5)$ και $(\lambda_1^*,\lambda_2^*,\lambda_3^*,\lambda_4^*)=(0,-135,0,70)$, η οποία απορρίπτεται διότι $\lambda_2^*\leq 0$.
5. $(x_1^*,x_2^*)=(30,-25)$ και $(\lambda_1^*,\lambda_2^*,\lambda_3^*,\lambda_4^*)=(0,-195,-190,0)$, η οποία απορρίπτεται διότι $\lambda_2^*\leq 0$ και $\lambda_3^*\leq 0$.
6. $(x_1^*,x_2^*)=(3,-2.25)$ και $(\lambda_1^*,\lambda_2^*,\lambda_3^*,\lambda_4^*)=(5.75,0,0,0)$, η οποία απορρίπτεται διότι $x_2^*\geq -5$.
7. $(x_1^*,x_2^*)=(3,-5)$ και $(\lambda_1^*,\lambda_2^*,\lambda_3^*,\lambda_4^*)=(27,0,0,29)$, η οποία είναι αποδεκτή λύση, αφού ικανοποιεί τους περιορισμούς.
8. $(x_1^*,x_2^*)=(3,-25)$ και $(\lambda_1^*,\lambda_2^*,\lambda_3^*,\lambda_4^*)=(87,0,-109,0)$, η οποία απορρίπτεται διότι $\lambda_3^*\leq 0$
9. $(x_1^*,x_2^*)=(0,0)$ και $(\lambda_1^*,\lambda_2^*,\lambda_3^*,\lambda_4^*)=(0,0,0,0)$, η οποία απορρίπτεται διότι $x_2^*\geq -5$.

Μετά την επίλυση του συστήματός μας βλέπουμε λοιπόν πως το μοναδικό σημείο που ικανοποιεί τους περιορισμούς μας είναι το $(x_1,x_2)=(3,-5)$ με διάνυσμα πολλαπλασιαστών Lagrange $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4)=(27,0,0,29)$.

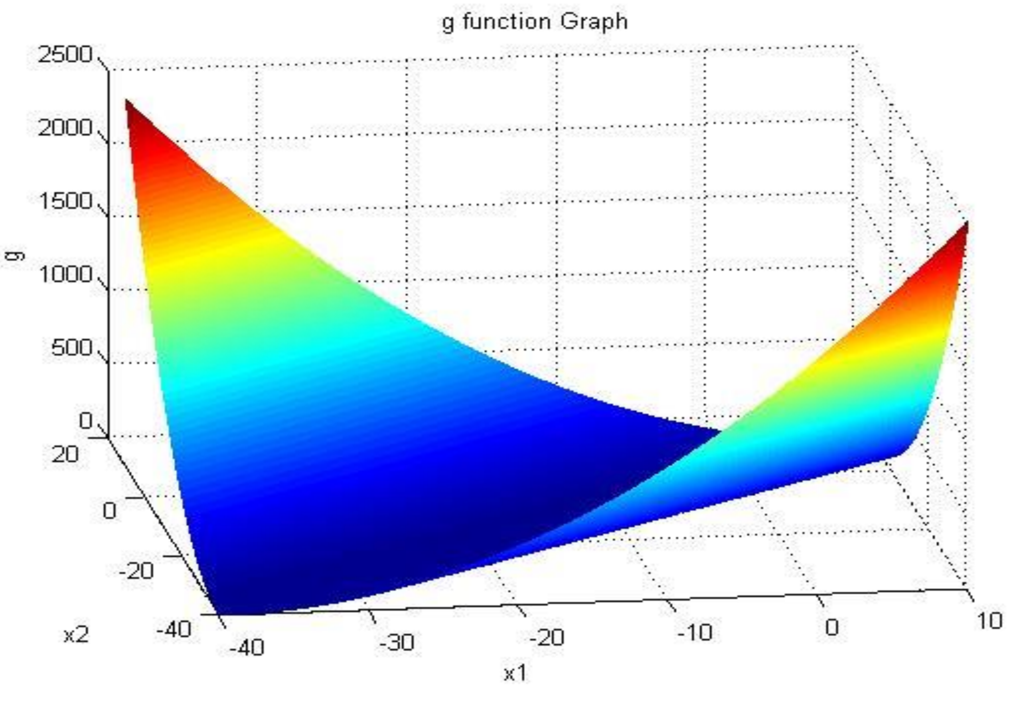
Επομένως μετά την εφαρμογή του θεωρήματος Karush-Kuhn-Tucker στην συνάρτηση f καταλήξαμε στο συμπέρασμα ότι το ελάχιστο της συνάρτησης βρίσκεται στο σημείο (3,-5).

Συνεχίζουμε με τη θεωρητική ανάλυση τώρα της συνάρτησης g(x). Η g(x) είναι συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση με κλίση ∇g(x)=$\begin{bmatrix} 2x_1 - 2x_2 \\ -2x_1 + 2x_2 \end{bmatrix}$.
Ο Εσσιανός πίνακας της g είναι H_g(x)=$\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$, ο οποίος είναι συμμετρικός πίνακας με ιδιοτιμές λ_1=0 και λ_2=4. Πρόκειται δηλαδή για έναν θετικά ημιορισμένο πίνακα. Επομένως η g είναι μια κυρτή συνάρτηση. Οι περιορισμοί του προβλήματος μπορούν να γραφούν και ως εξής:

- $h_1(x)=x_1+1\leq 0$
- $h_2(x)=x_2+1\leq 0$

Οι συναρτήσεις των περιορισμών είναι γραμμικές συναρτήσεις των μεταβλητών x_1 και x_2, άρα είναι κυρτές συναρτήσεις.

Επομένως το πρόβλημά μας είναι κυρτό και υπερ-αποτελούμενο, αφού υπάρχουν σημεία του πεδίου ορισμού της g που ικανοποιούν τους περιορισμούς. Παρακάτω φαίνεται η γραφική παράσταση της g:



Οι συνθήκες Karush-Kuhn-Tucker διαμορφώνονται ως εξής:

- $\lambda_i \geq 0$, $i=1,2$
- $\lambda_1 h_1(x^*)=0 \Rightarrow \lambda_1(x_1^*+1)=0$
- $\lambda_2 h_2(x^*)=0 \Rightarrow \lambda_2(x_2^*+1)=0$
- $2x_1^*-2x_2^*+\lambda_1=0$
- $-2x_1^*+2x_2^*+\lambda_2=0$

Επιλύοντας το παραπάνω σύστημα παίρνουμε τις εξής λύσεις:

1. $(x_1,x_2)=(-1,-1)$ και $(\lambda_1,\lambda_2)=(0,0)$, η οποία είναι αποδεκτή λύση, αφού ικανοποιεί τους περιορισμούς.
2. $(x_1,x_2)=(x_0,x_0)$ και $(\lambda_1,\lambda_2)=(0,0)$, η οποία είναι αποδεκτή λύση για κάθε $x_0 \leq -1$, αφού ικανοποιεί τους περιορισμούς.

Το ελάχιστο λοιπόν της συνάρτησης g βρίσκεται στο σημείο $(x_1,x_2)=(-1,-1)$ με διάνυσμα πολλαπλασιαστών Lagrange $(\lambda_1,\lambda_2)=(0,0)$. Εφόσον όμως η συνάρτηση g δεν είναι γνήσια κυρτή αλλά κυρτή το ολικό ελάχιστο δεν είναι το μοναδικό και είναι κάθε ζεύγος τιμών $(x_1,x_2)=(x_0,x_0)$ με $x_0 \leq -1$.

Μετά την εφαρμογή του θεωρήματος του Karush-Kuhn-Tucker στις δύο συναρτήσεις καταλήξαμε στα εξής συμπεράσματα:

- Το ελάχιστο της συνάρτησης f παρουσιάζεται στο σημείο $(x_1,x_2)=(3,-5)$, ενώ
- Το ελάχιστο της συνάρτησης g παρουσιάζεται σε κάθε σημείο $(x_1,x_2)=(x_0,x_0)$ με $x_0 \leq -1$.

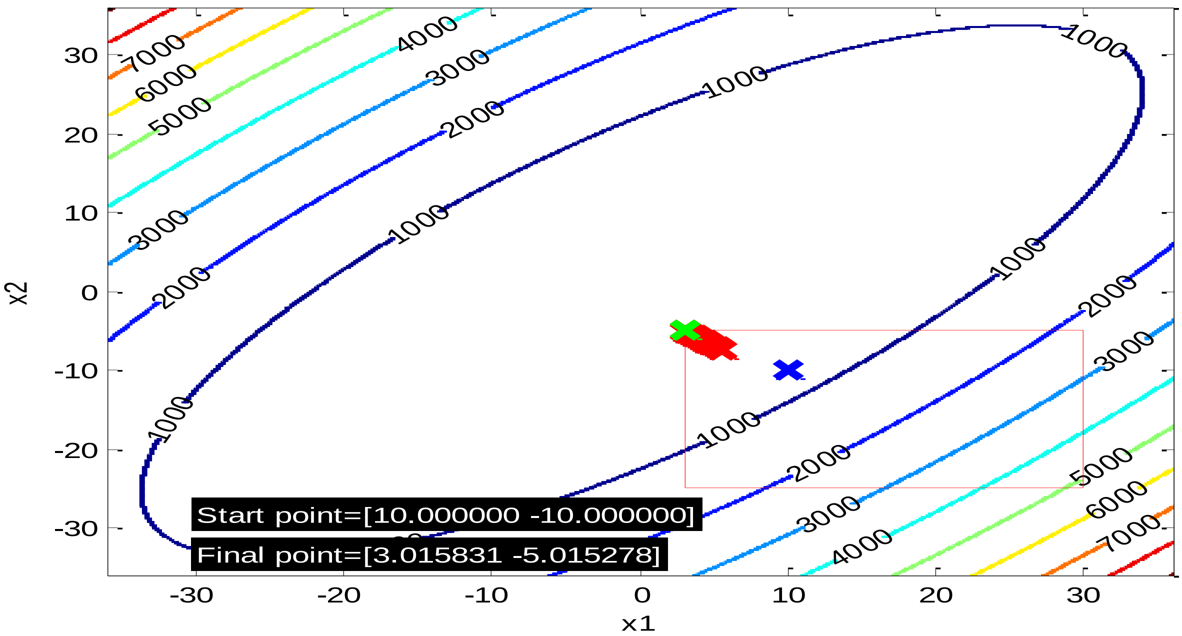
ΑΛΓΟΡΙΘΜΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

Αφού εφαρμόσαμε το θεώρημα Karush-Kuhn-Tucker στις συναρτήσεις f και g και καταλήξαμε στα ελάχιστα των συναρτήσεων, τώρα θα εφαρμόσουμε τις μεθόδους φραγμού και ποινής για να δούμε αν θα καταλήξουμε στα ίδια αποτελέσματα με παραπάνω.

ΜΕΘΟΔΟΣ ΦΡΑΓΜΟΥ

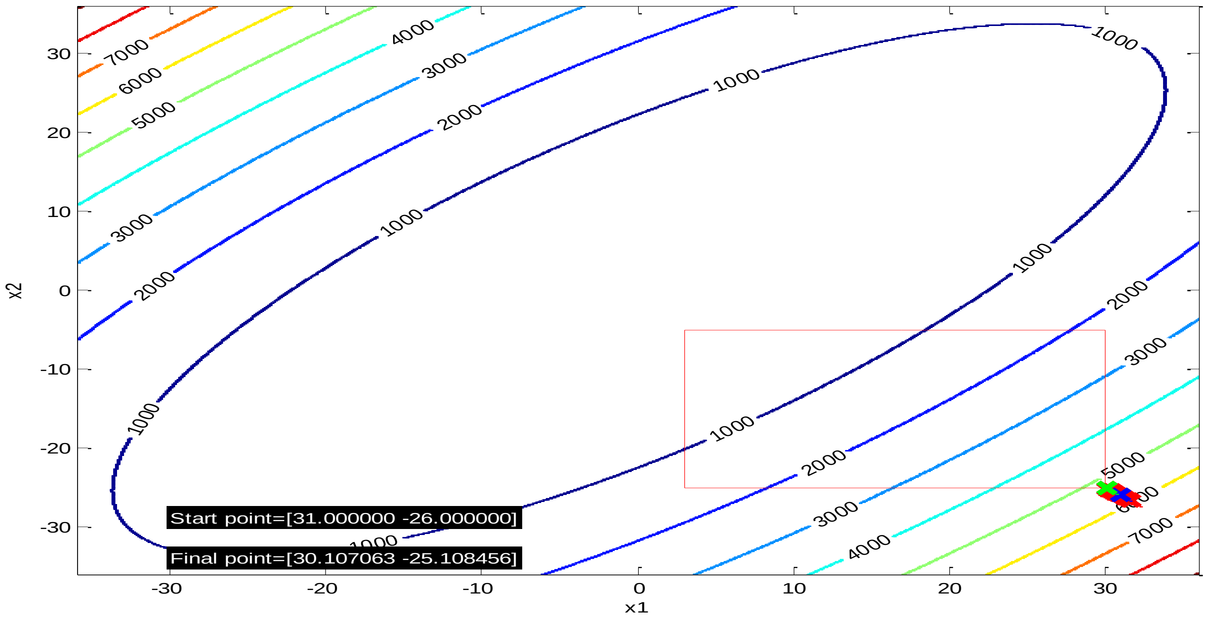
Για τη μέθοδο φραγμού δημιουργήσαμε τη συνάρτηση alg_fragmou(e,co), όπου e η επιθυμητή ακρίβεια και co οι συντεταγμένες του αρχικού σημείου εκκίνησης. Σαν αρχική τιμή για το r_k χρησιμοποιήσαμε την τιμή $r_o=0.2\frac{f(x_o)}{B(x_o)}$ και σε κάθε επανάληψη η νέα τιμή της παραμέτρου δίνεται από τον τύπο $r_{k+1}=0.8r_k$. Η τιμή του βήματος γ_κ που χρησιμοποιήσαμε στη μέθοδο της μέγιστης καθόδου για την ελαχιστοποίηση της αντικειμενικής συνάρτησης ορίστηκε ως e/10 έτσι ώστε να πραγματοποιείται μικρή μεταβολή στα σημεία και επομένως να συγκλίνει ο αλγόριθμος.

Εφαρμόζοντας τη μέθοδο για τη συνάρτηση f και για αρχικό σημείο το (10,-10) βλέπουμε ότι ο αλγόριθμος συγκλίνει στο σημείο (3,-5), στο ελάχιστο δηλαδή που καταλήξαμε και από τη μέθοδο Karush-Kuhn-Tucker. Παρακάτω φαίνεται το διάγραμμα των ισοβαρών καμπυλών:



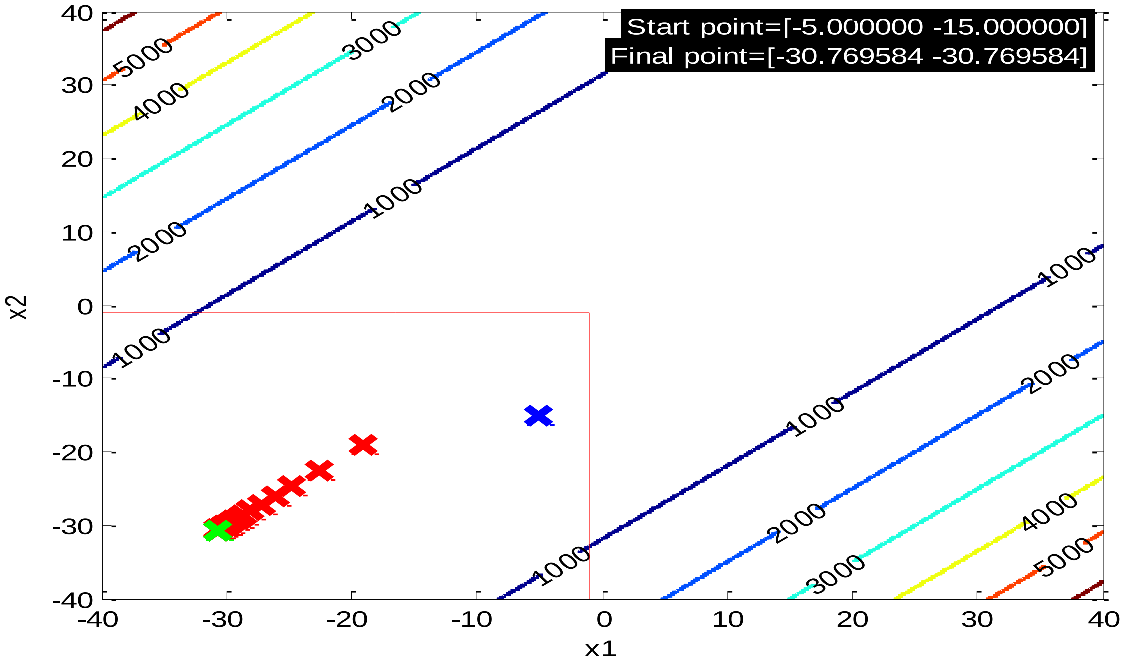
Όπως βλέπουμε και από το διάγραμμα ο αλγόριθμος καταλήγει στο ελάχιστο έπειτα από πεπερασμένο αριθμό βημάτων.

Εφαρμόζοντας τώρα τη μέθοδο και πάλι για τη συνάρτηση f, αλλά με αρχικό σημείο εκκίνησης το (31,-26) το οποίο είναι εκτός των περιορισμών παίρνουμε το εξής διάγραμμα:



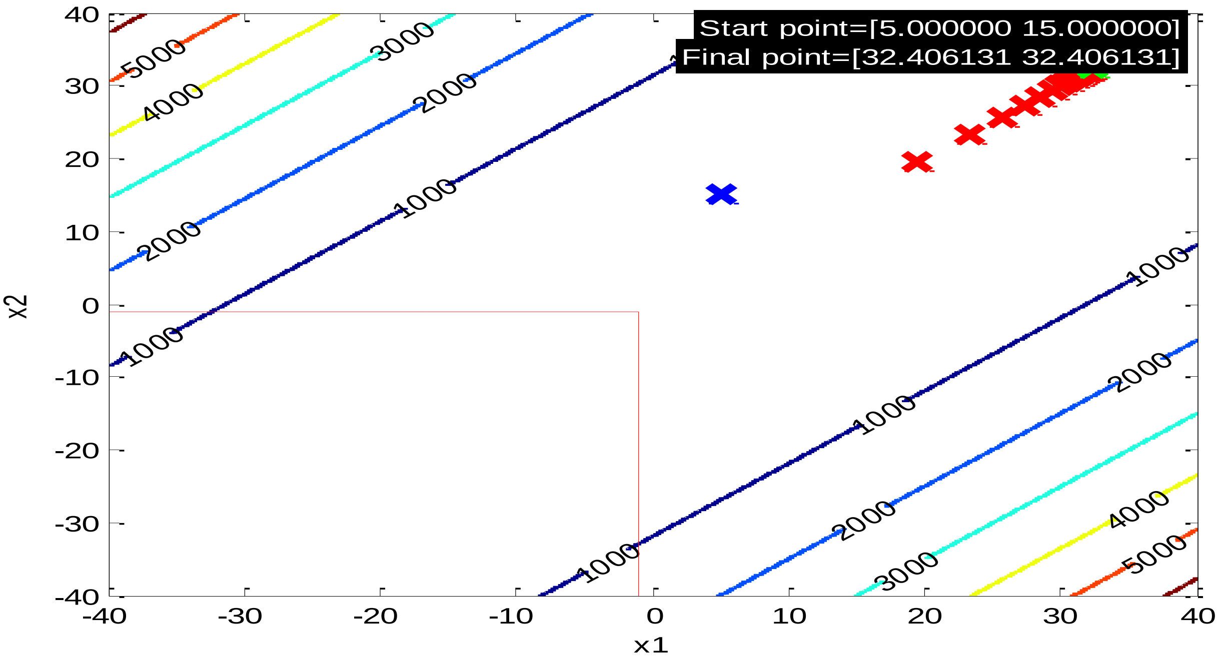
Όπως βλέπουμε ο αλγόριθμος αποτυγχάνει να συγκλίνει στο ελάχιστο, εφόσον το αρχικό σημείο εκκίνησης δεν ικανοποιεί τους περιορισμούς.

Εφαρμόζοντας τώρα τη μέθοδο για τη συνάρτηση g με $r_o=0.2\,\frac{g(x_o)}{B(x_o)}$, επόμενη τιμή της παραμέτρου $r_{k+1}=0.8r_k$ και ίδια τιμή για το βήμα γ_k όπως και πριν, με αρχικό σημείο εκκίνησης το (-5,-15) παίρνουμε ως αποτέλεσμα την τιμή (-30.7695,-30.7695). Η τιμή αυτή είναι ένα από τα ελάχιστα της συνάρτησης, αφού όπως είδαμε και από τη θεωρητική ανάλυση η g παρουσιάζει ελάχιστο σε κάθε σημείο της μορφής (x_o,x_o) με $x_o\leq-1$. Παρακάτω φαίνεται και το διάγραμμα των ισοβαρών καμπυλών:



Βλέπουμε και από το διάγραμμα ότι ο αλγόριθμος συγκλίνει στο ελάχιστο σε πεπερασμένο αριθμό βημάτων.

Εφαρμόζοντας πάλι τη μέθοδο για τη συνάρτηση g με αρχικό σημείο εκκίνησης όμως το (5,15) το οποίο βρίσκεται εκτός των περιορισμών καταλήγουμε στο εξής διάγραμμα:

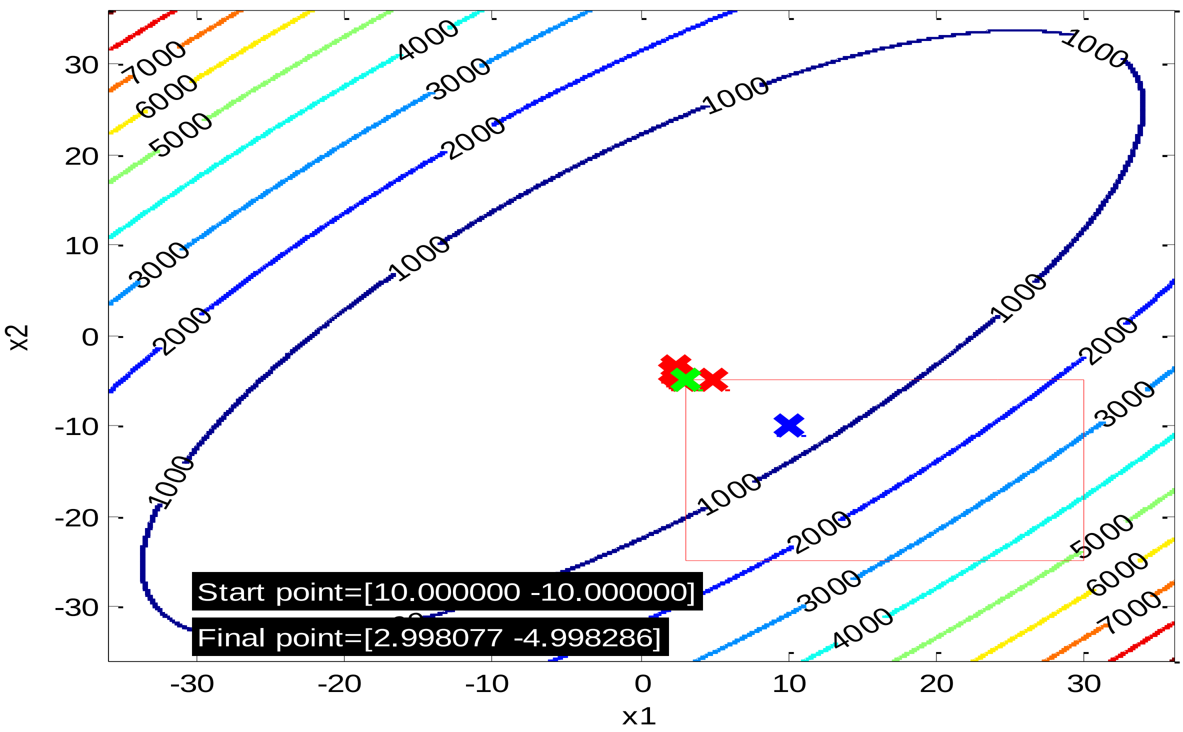


Βλέπουμε από το διάγραμμα ότι ο αλγόριθμος συγκλίνει σε ελάχιστο όπως προκύπτει και από την θεωρητική ανάλυση, όμως λόγω του ότι δεν βρίσκεται μέσα στους περιορισμούς δεν αποτελεί και ορθή λύση του προβλήματος μας.

ΜΕΘΟΔΟΣ ΠΟΙΝΗΣ

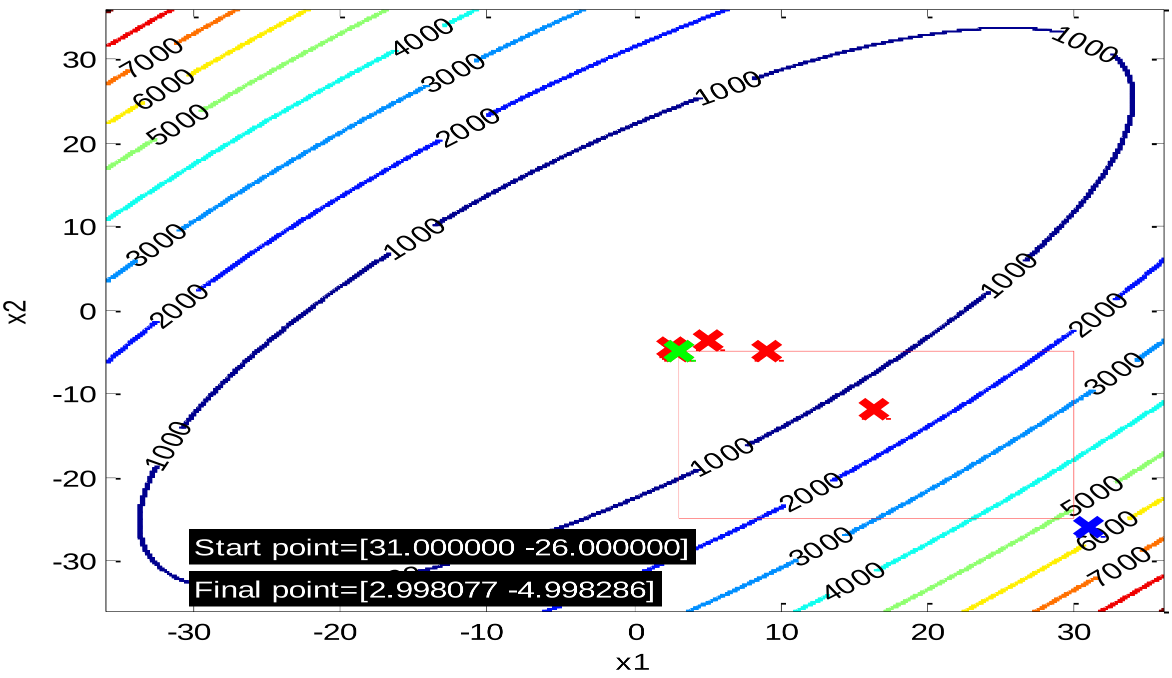
Η δεύτερη μέθοδος που κληθήκαμε να μελετήσουμε είναι η μέθοδος ποινής. Για τη συγκεκριμένη μέθοδο δημιουργήσαμε τη συνάρτηση alg_poinhs(e,co), όπου e η επιθυμητή ακρίβεια και co οι συντεταγμένες του αρχικού σημείου εκκίνησης. Ως αρχική τιμή για την παράμετρο r_k ορίσαμε την τιμή $r_o=3$, ενώ σε κάθε επανάληψη η παράμετρος μεταβάλλεται σύμφωνα με τη σχέση $r_{k+1}=2r_k$. Η τιμή του βήματος γ_κ που χρησιμοποιήσαμε στη μέθοδο της μέγιστης καθόδου ορίστηκε όπως και πριν ίση με e/10.

Εφαρμόζοντας τη μέθοδο για τη συνάρτηση f με αρχικό σημείο εκκίνησης το (10,-10) παίρνουμε τα εξής αποτελέσματα:



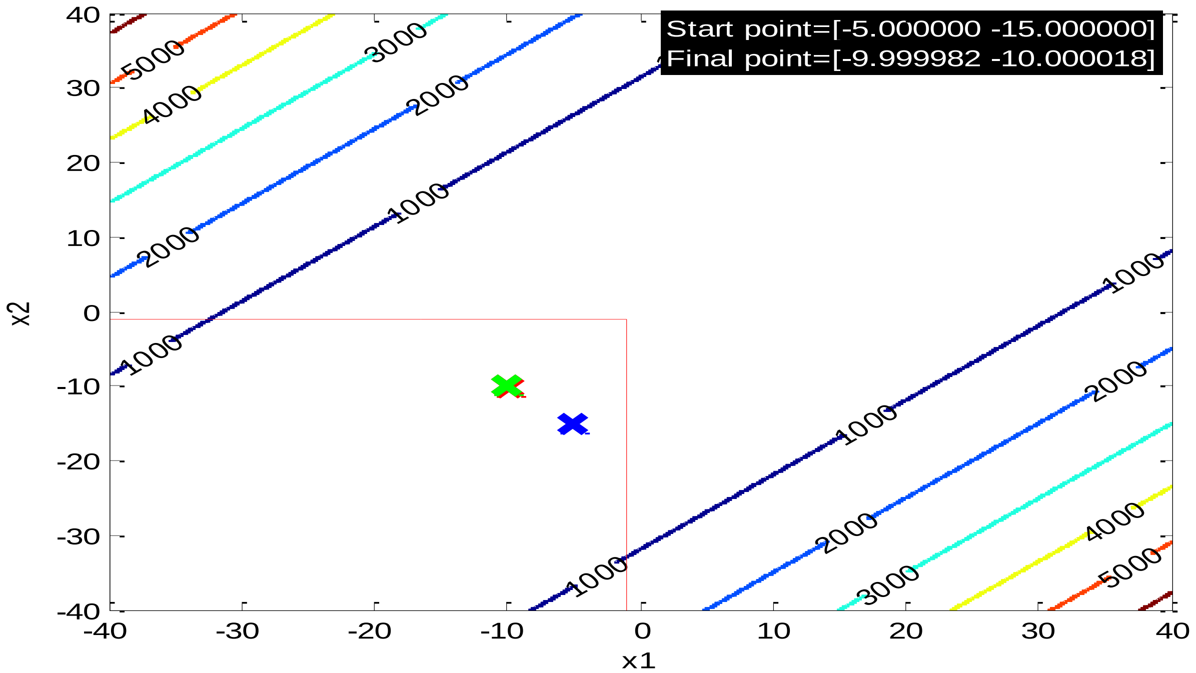
Βλέπουμε από το διάγραμμα ότι ο αλγόριθμος συγκλίνει στο ελάχιστο όπως και στην προηγούμενη μέθοδο.

Εφαρμόζοντας τώρα τη μέθοδο πάλι για τη συνάρτηση f, αλλά με αρχικό σημείο εκκίνησης το (31,-26) το οποίο βρίσκεται εκτός των περιορισμών, παίρνουμε τα εξής αποτελέσματα:



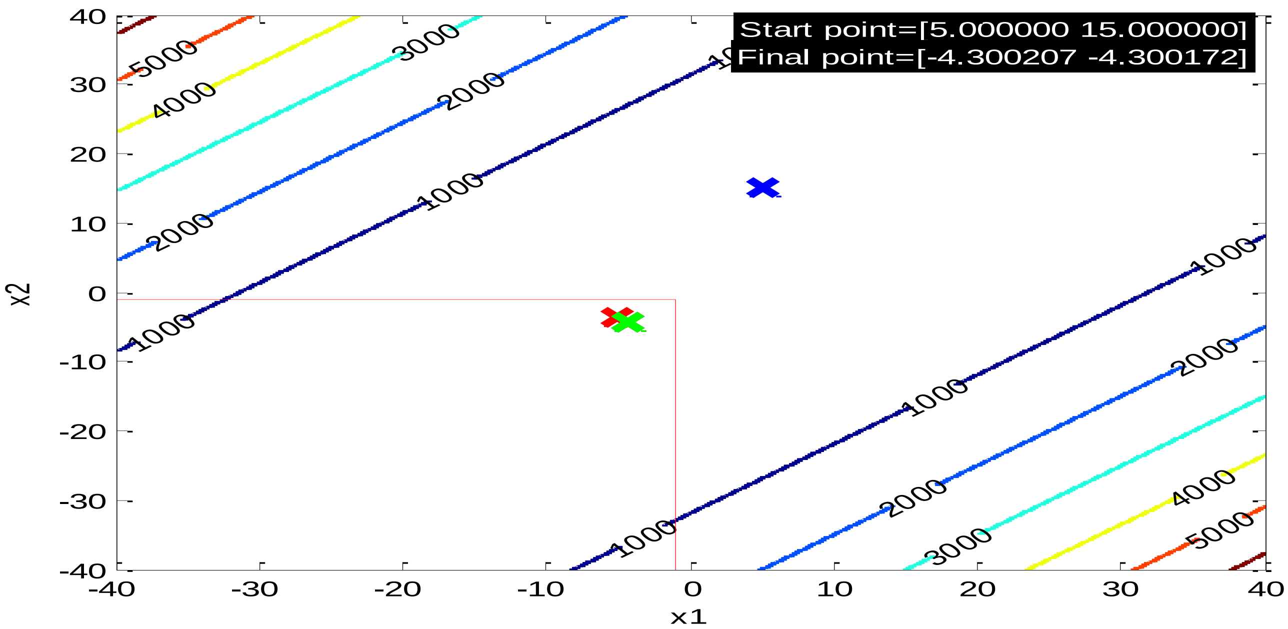
Βλέπουμε λοιπόν πως ο αλγόριθμος καταλήγει και πάλι στο ελάχιστο, παρότι ξεκινήσαμε εκτός των περιορισμών, σε αντίθεση με την προηγούμενη μέθοδο.

Εφαρμόζοντας τώρα τη μέθοδο για τη συνάρτηση g, με τις ίδιες τιμές για τα $r_o, r_{k+1}, \gamma_\kappa$ όπως και για την f, με αρχικό σημείο εκκίνησης το (-5,-15) καταλήγουμε στο εξής διάγραμμα:



Παρατηρούμε από το διάγραμμα ότι ο αλγόριθμος συγκλίνει σε ελάχιστο της μορφής (x_o,x_o), όπως είδαμε και από την θεωρητική ανάλυση και μάλιστα σε πολύ λιγότερα βήματα σε σχέση με την προηγούμενη μέθοδο.

Εφαρμόζοντας τη μέθοδο και πάλι για τη συνάρτηση g με αρχικό σημείο εκκίνησης όμως το (5,15) το οποίο βρίσκεται εκτός των περιορισμών παίρνουμε τα εξής αποτελέσματα:



Όπως βλέπουμε από το διάγραμμα ο αλγόριθμος συγκλίνει και πάλι σε ελάχιστο, παρότι το αρχικό σημείο εκκίνησης βρίσκεται εκτός των περιορισμών, σε αντίθεση με την προηγούμενη μέθοδο.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Εφαρμόζοντας και τις δύο μεθόδους στις συναρτήσεις f και g, βλέπουμε πως για τη μέθοδο φραγμού εφόσον το αρχικό σημείο και οι παράμετροι του αλγορίθμου είναι καλά ρυθμισμένες, τότε ο αλγόριθμος συγκλίνει στο ελάχιστο. Για τη μέθοδο ποινής είδαμε πως ο αλγόριθμος συγκλίνει και στις περιπτώσεις που το αρχικό σημείο εκκίνησης βρίσκεται εκτός των περιορισμών. Αυτόματα επομένως αποκτά ένα μεγάλο πλεονέκτημα έναντι της μεθόδου φραγμού, διότι ενώ στη συγκεκριμένη περίπτωση οι περιορισμοί ήταν γραμμικοί και ήταν εύκολος ο προσδιορισμός του αρχικού σημείου, θα μπορούσαν να μην είναι γραμμικοί και να δυσκολέψει αρκετά ο προσδιορισμός του αρχικού σημείου. Επιπλέον ως προς την ταχύτητα είδαμε ότι η μέθοδος ποινής παρουσιάζει και εδώ πλεονέκτημα, αφού συγκλίνει στο ελάχιστο σε λιγότερες επαναλήψεις σε σχέση με τη μέθοδο φραγμού. Στη γενικότερη περίπτωση επομένως θα μπορούσαμε να πούμε πως η μέθοδος ποινής είναι αρκετά καλύτερη από τη μέθοδο φραγμού.