ΤΕΧΝΙΚΕΣ ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ

3η ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΑΚΗ ΑΣΚΗΣΗ

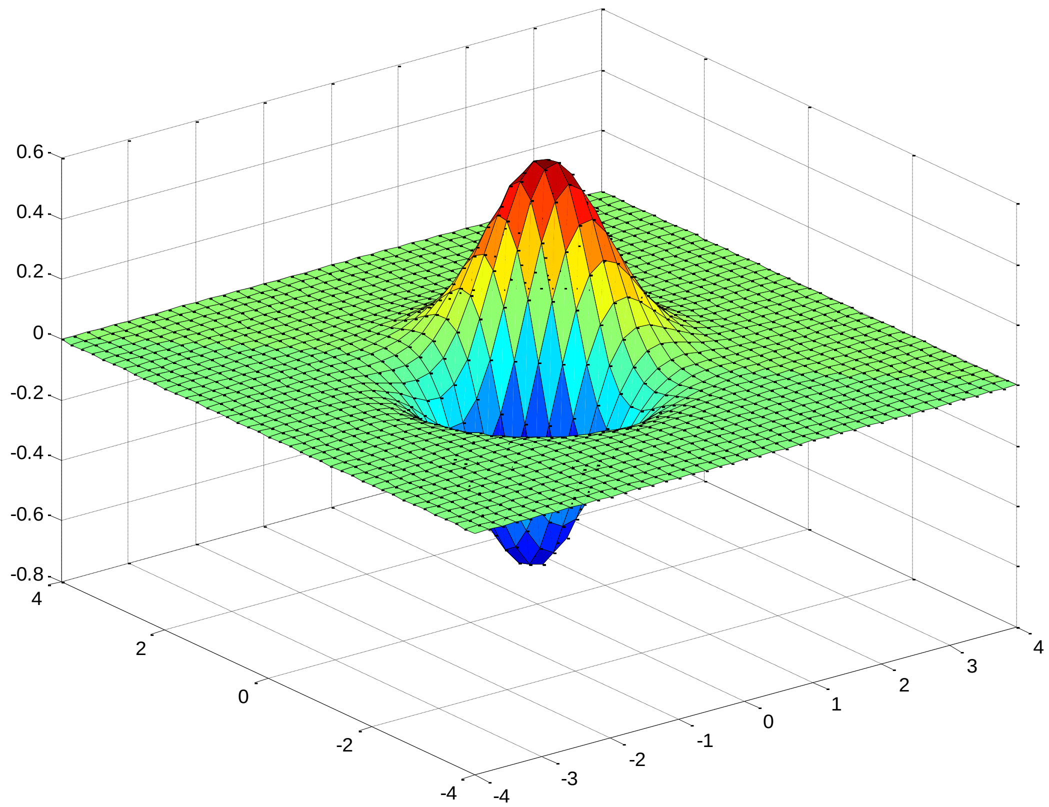
ΟΝ/ΜΟ: Νήρας Δημήτρης

ΑΕΜ: 8057

Σκοπός αυτής της εργασίας είναι η ελαχιστοποίηση μιας συνάρτησης f δύο μεταβλητών χωρίς περιορισμούς χρησιμοποιώντας τις εξής 5 μεθόδους:

- Μέθοδος Μέγιστης Καθόδου (Steepest Descent)
- Μέθοδος Newton
- Μέθοδος Levenberg – Marquardt
- Μέθοδος Συζυγών Κλίσεων
- Μέθοδος Σχεδόν Newton

Μετά από πλήθος τιμών που δώσαμε στη συνάρτηση f καταφέραμε να κατασκευάσουμε την γραφική της παράσταση, δίνοντας μας έτσι μια γενική εικόνα της συνάρτησης f. Η γραφική παράσταση της f φαίνεται παρακάτω:

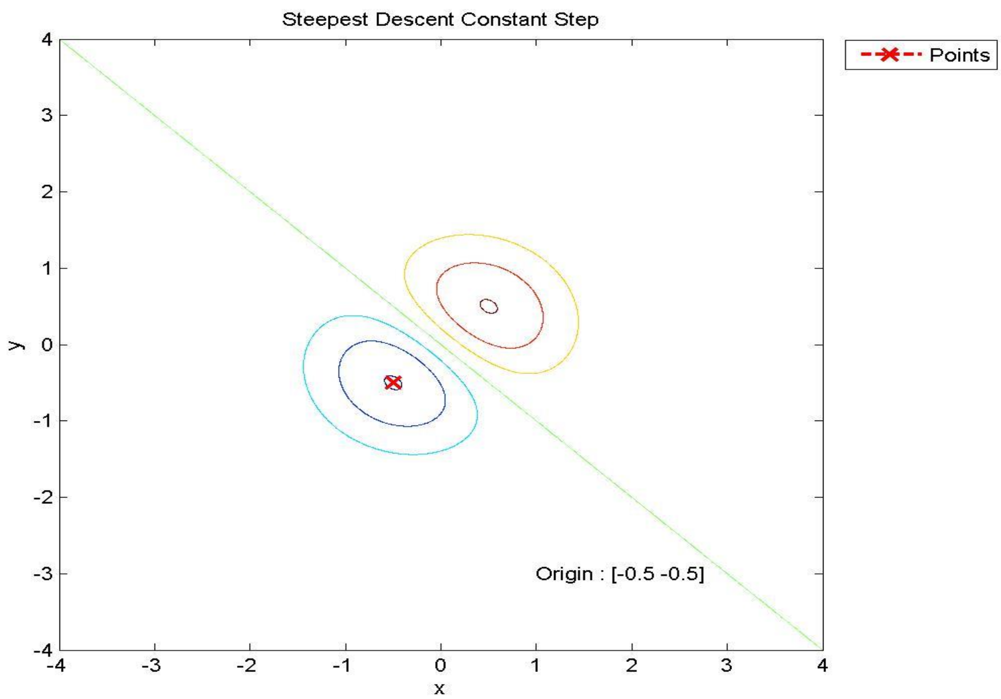


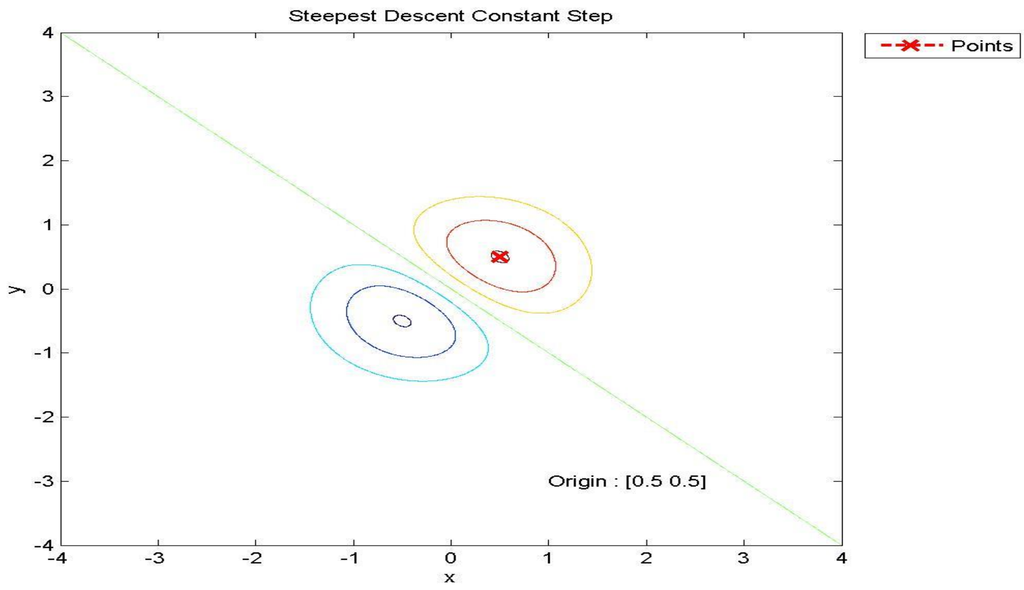
Από το διάγραμμα μπορούμε να διακρίνουμε πως η συνάρτηση παρουσιάζει ελάχιστο στο σημείο (-0.5,-0.5) και μέγιστο στο (0.5,0.5).

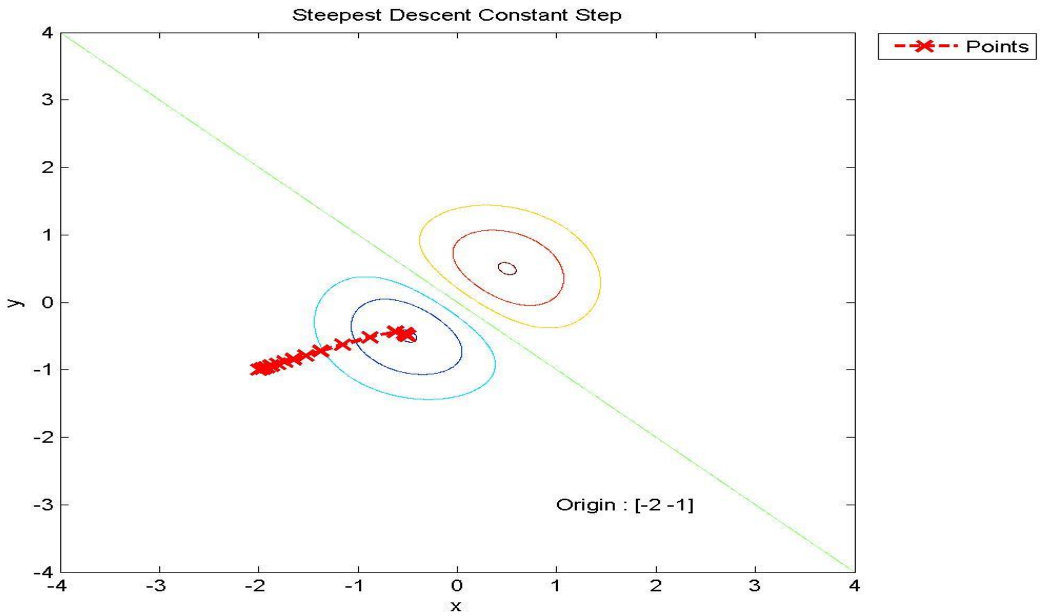
ΘΕΜΑ 1 (Μέθοδος Μέγιστης Καθόδου (Steepest Descent))

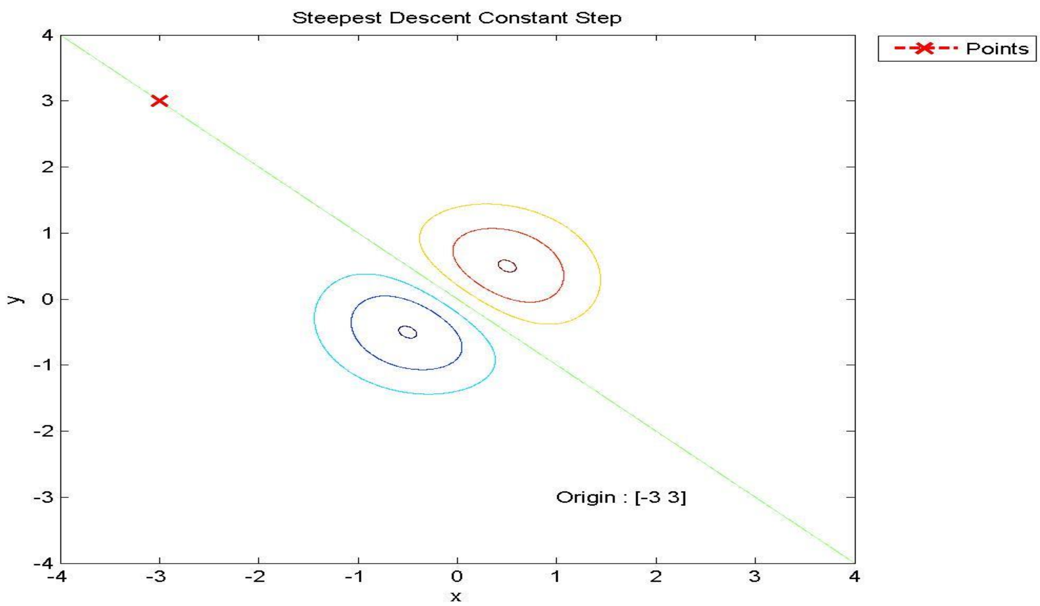
Α) Επιλέγοντας σταθερό βήμα γ_κ δημιουργούμε τη συνάρτηση alg_meg_kathodou1(e,co), όπου e είναι η σταθερά τερματισμού και co οι συντεταγμένες του αρχικού σημείου εκκίνησης. Επιλέγοντας ως βήμα γ_κ=0.5 και ακρίβεια e=10^{-8}, εκτελούμε τον αλγόριθμο για τις τιμές (-0.5, -0.5), (0.5,0.5), (-2,-1), (-3,3) και παίρνουμε ως αποτέλεσμα αντίστοιχα τις τιμές (-0.5,-0.5), (0.5 0.5), (-0.5,-0.5) και (-3.0008,2.9992). Δεδομένου ότι το ελάχιστο της συνάρτησης βρίσκεται στο σημείο (-0.5,-0.5) βλέπουμε πως ο αλγόριθμος ξεκινώντας από το (-2,-1) συγκλίνει στο ελάχιστο, ενώ από το (-0.5,-0.5) βρίσκεται ήδη εκεί. Λόγω ότι το μέγιστο της συνάρτησης βρίσκεται στο σημείο (0.5,0.5) ξεκινώντας ο αλγόριθμος από αυτό δεν είναι δυνατό να συγκλίνει στο ελάχιστο, αφού στο σημείο αυτό το διάνυσμα κλίσης της f θα είναι μηδενικό τερματίζοντας έτσι τον αλγόριθμο. Για το σημείο (-3,3) βλέπουμε πως ο αλγόριθμος κινείται στο ίδιο σημείο, χωρίς να καταφέρνει να συγκλίνει στο ελάχιστο, εξαιτίας του ότι η συνάρτηση σε εκείνο το σημείο είναι σταθερή.

Παρακάτω φαίνονται τα διαγράμματα των ισοβαρών καμπυλών για τα σημεία (-0.5,-0.5), (0.5,0.5), (-2,-1), (-3,3) αντίστοιχα:




Steepest Descent Constant Step
Points
Origin : [0.5 0.5]
x
y

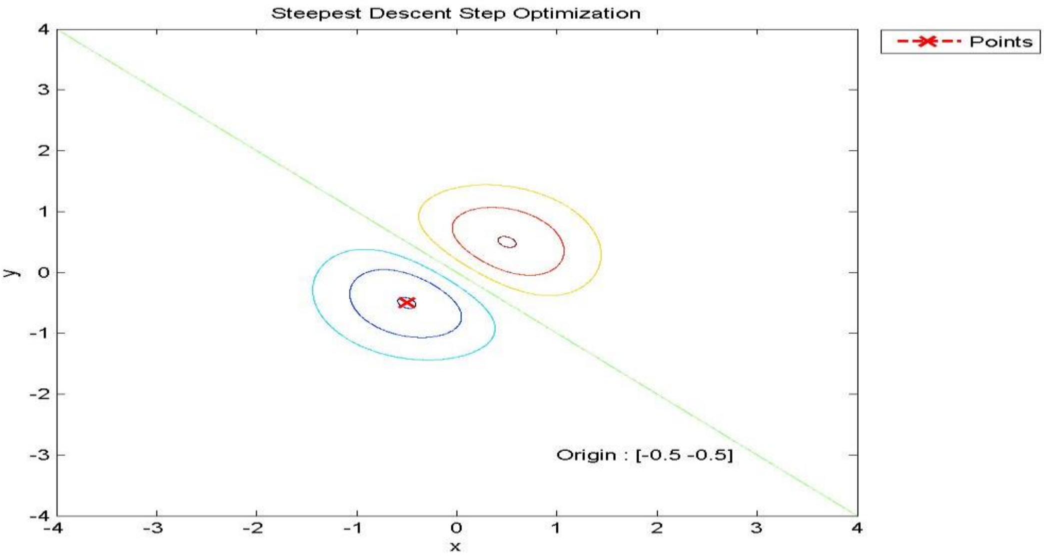

Steepest Descent Constant Step
Points
Origin : [-2 -1]
x
y

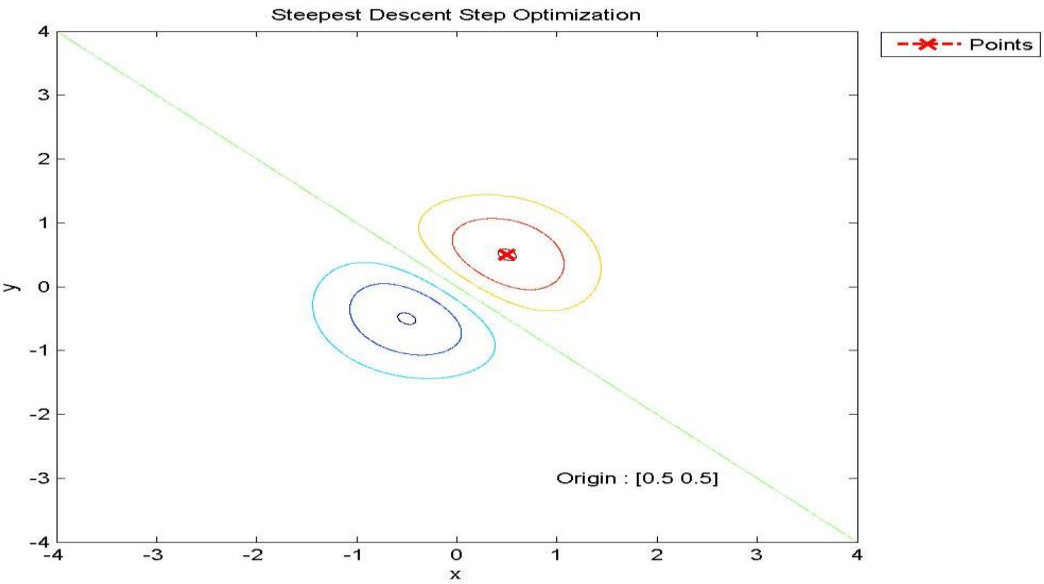

Steepest Descent Constant Step
Points
Origin : [-3 3]
x
y

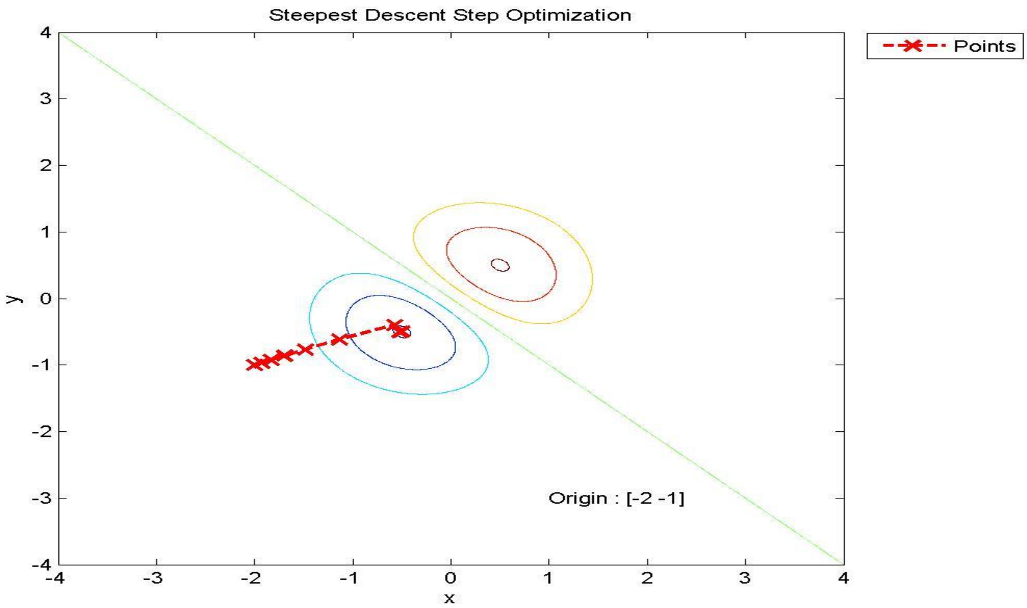
Από τα διαγράμματα προκύπτουν τα ίδια συμπεράσματα που βγάλαμε και παραπάνω. Διακρίνουμε πώς στο σημείο (-2,-1) ο αλγόριθμος συγκλίνει μετά από μεγάλο αριθμό βημάτων στο ελάχιστο, λόγω του ότι η πορεία που ακολουθούν τα διαδοχικά σημεία είναι μια ζικ-ζακ πορεία, καθιστώντας έτσι τον αλγόριθμο εξαιρετικά αργό.

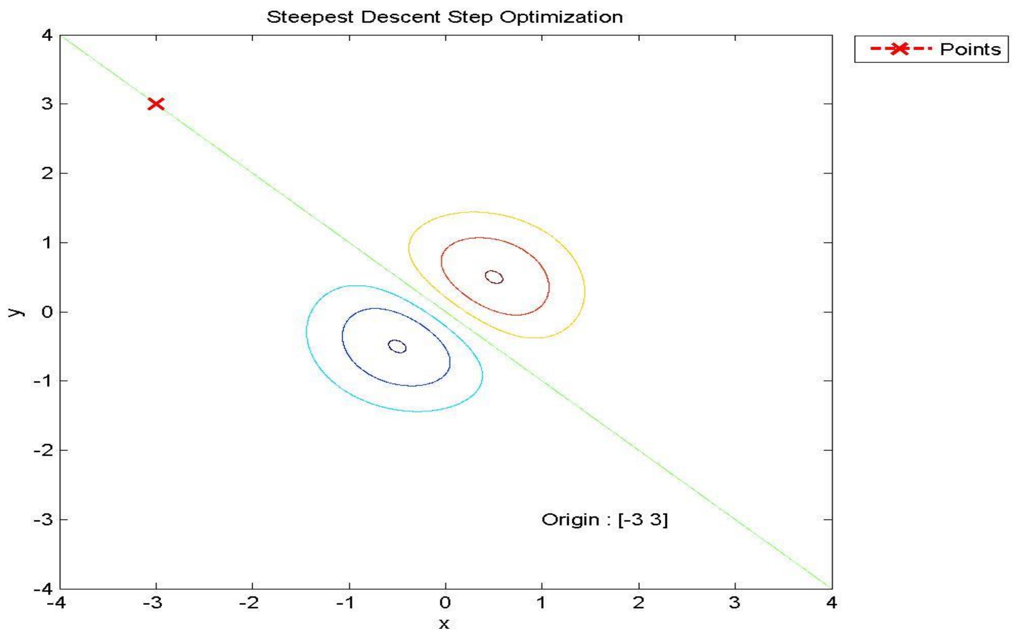
B) Επιλέγοντας βήμα γ_κ τέτοιο ώστε να ελαχιστοποιείται η συνάρτηση $f(x_k+\gamma_\kappa d_k)$, δημιουργούμε τη συνάρτηση alg_meg_kathodou2(e,co), όπου e είναι η σταθερά τερματισμού και co οι συντεταγμένες του αρχικού σημείου εκκίνησης και τη συνάρτηση BisDeriv(e,int,p), όπου e είναι η σταθερά τερματισμού, int τα αρχικά όρια του διαστήματος αναζήτησης και p οι συντεταγμένες του σημείου x_k. Η συνάρτηση BisDeriv χρησιμοποιεί τη μέθοδο της διχοτόμου με παράγωγο για την ελαχιστοποίηση της συνάρτησης $f(x_k+\gamma_\kappa d_k)$ και την επιλογή του κατάλληλου βήματος γ_κ. Επιλέγοντας ως ακρίβεια $e=10^{-8}$, εκτελούμε τον αλγόριθμο για τις τιμές (-0.5,-0.5), (0.5,0.5), (-2,-1), (-3,3) και παίρνουμε ως αποτέλεσμα αντίστοιχα τις τιμές (-0.5,-0.5), (0.5 0.5), (-0.5,-0.5) και (-3.0015,2.9985). Δεδομένου ότι το ελάχιστο της συνάρτησης βρίσκεται στο σημείο (-0.5,-0.5) βλέπουμε πως ο αλγόριθμος ξεκινώντας από το (-2,-1) συγκλίνει στο ελάχιστο, ενώ από το (-0.5,-0.5) βρίσκεται ήδη εκεί. Λόγω ότι το μέγιστο της συνάρτησης βρίσκεται στο σημείο (0.5,0.5) ξεκινώντας ο αλγόριθμος από αυτό δεν είναι δυνατό να συγκλίνει στο ελάχιστο, αφού στο σημείο αυτό το διάνυσμα κλίσης της f θα είναι μηδενικό τερματίζοντας έτσι τον αλγόριθμο. Για το σημείο (-3,3) βλέπουμε πως ο αλγόριθμος κινείται στο ίδιο σημείο, χωρίς να καταφέρνει να συγκλίνει στο ελάχιστο, εξαιτίας του ότι η συνάρτηση σε εκείνο το σημείο είναι σταθερή.

Παρακάτω φαίνονται τα διαγράμματα των ισοβαρών καμπυλών για τα σημεία (-0.5,-0.5), (0.5,0.5), (-2,-1), (-3,3) αντίστοιχα:


Steepest Descent Step Optimization
Points
Origin : [-0.5 -0.5]
x
y


Steepest Descent Step Optimization
Points
Origin : [0.5 0.5]
x
y

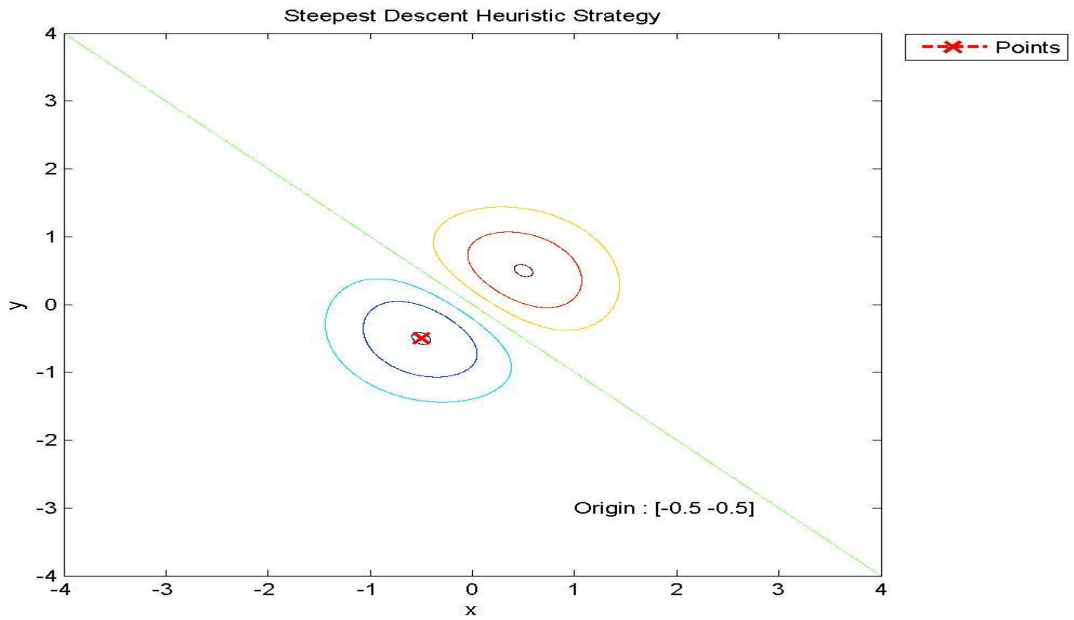

Steepest Descent Step Optimization
Points
Origin : [-2 -1]
x
y

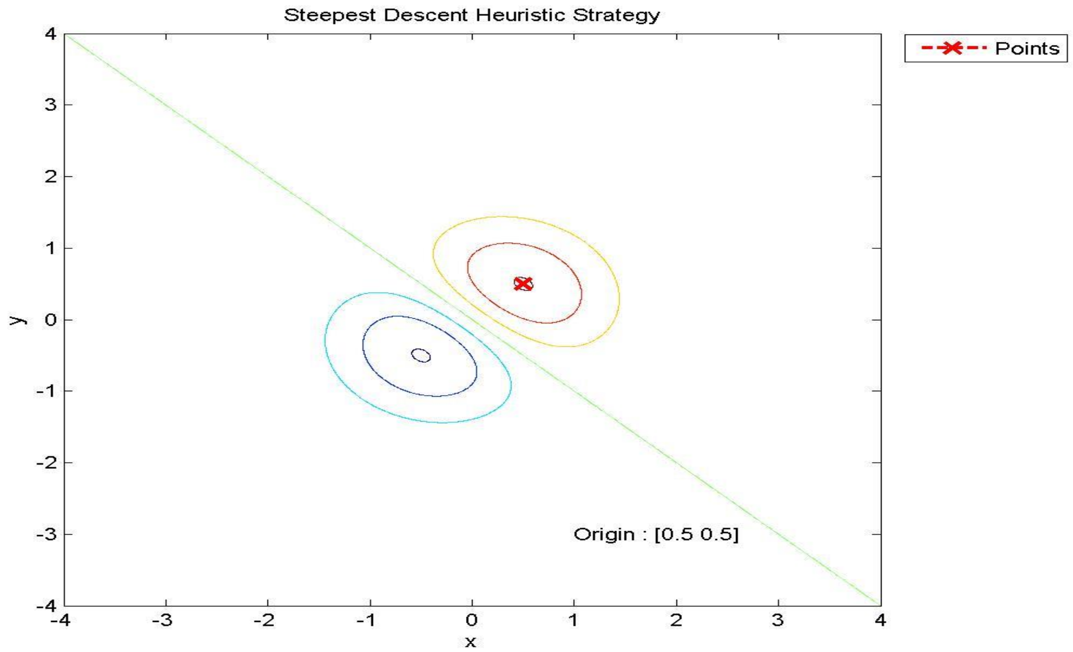


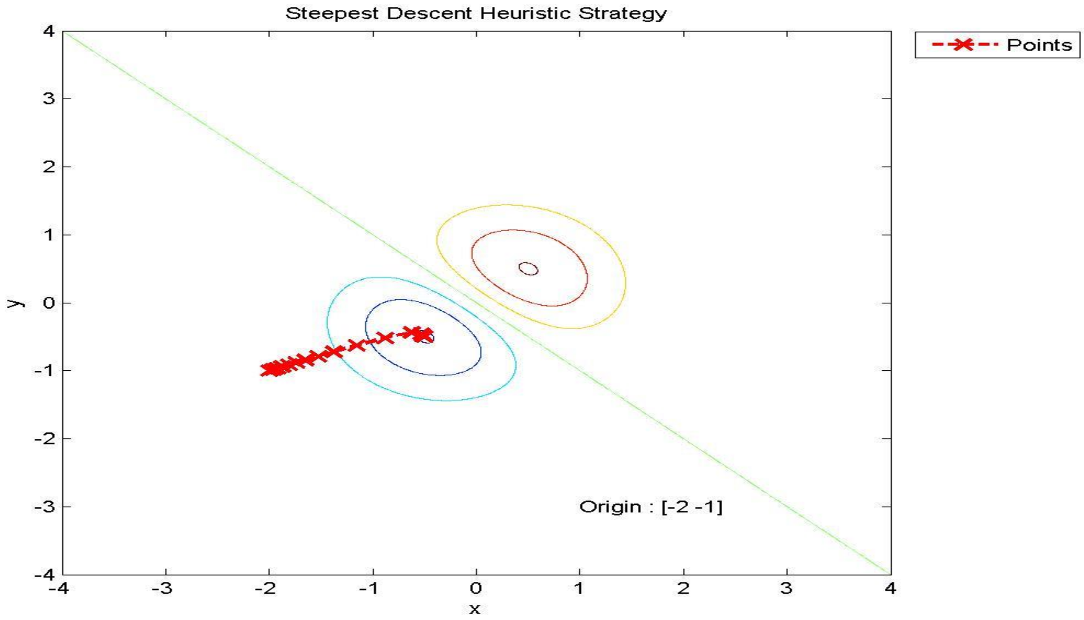
Από τα διαγράμματα προκύπτουν τα ίδια συμπεράσματα που βγάλαμε και παραπάνω. Μπορούμε να διακρίνουμε πως για το σημείο (-2,-1) ο αλγόριθμος συγκλίνει με λιγότερο αριθμό βημάτων στο ελάχιστο σε σχέση με τον πρώτο αλγόριθμο, εξαιτίας της κατάλληλης κάθε φορά επιλογής του βήματος γ_κ.

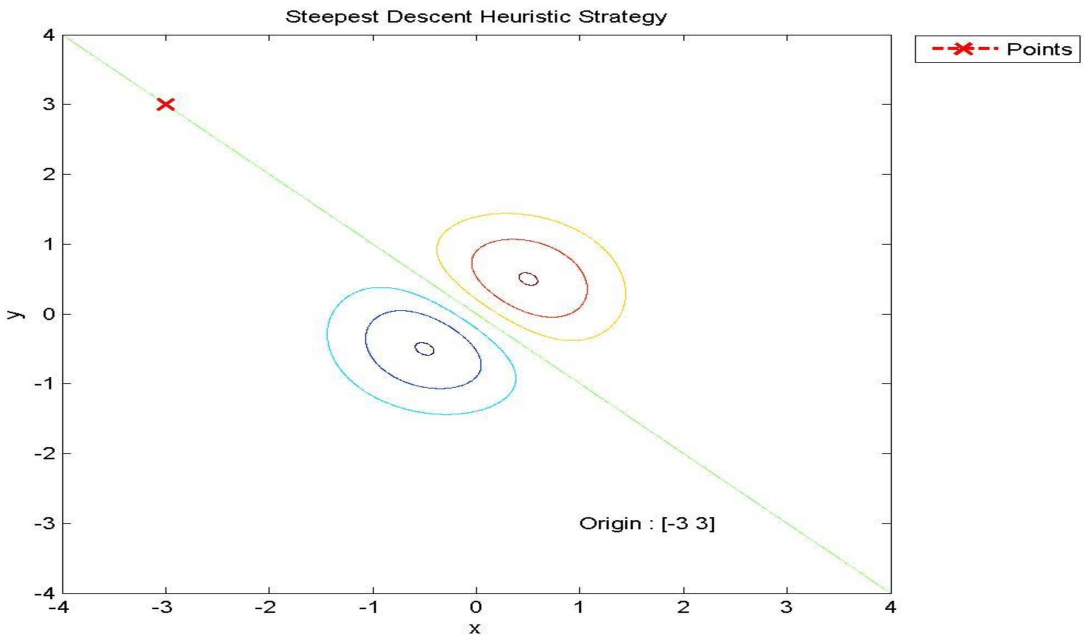
Γ) Χρησιμοποιώντας τώρα τον δικό μας ευριστικό αλγόριθμο για την επιλογή του βήματος γ_κ, δημιουργούμε τη συνάρτηση alg_meg_kathodou3(e,co), όπου e είναι η σταθερά τερματισμού και co οι συντεταγμένες του αρχικού σημείου εκκίνησης. Ο ευριστικός αλγόριθμος επιλέγει το γ_κ βάσει των προηγούμενων τιμών της f, δηλαδή αν η f έχει μικρύνει το πολύ κατά 10% σε σχέση με την τιμή που είχε 3 επαναλήψεις πριν, τότε το βήμα αυξάνεται κατά 20%. Επιλέγοντας ως ακρίβεια $e=10^{-8}$, εκτελούμε τον αλγόριθμο για τις τιμές (-0.5,-0.5), (0.5,0.5), (-2,-1), (-3,3) και παίρνουμε ως αποτέλεσμα αντίστοιχα τις τιμές (-0.5,-0.5), (0.5 0.5), (-0.5,-0.5) και (-3.0008,2.9992). Δεδομένου ότι το ελάχιστο της συνάρτησης βρίσκεται στο σημείο (-0.5,-0.5) βλέπουμε πως ο αλγόριθμος ξεκινώντας από το (-2,-1) συγκλίνει στο ελάχιστο, ενώ από το (-0.5,-0.5) βρίσκεται ήδη εκεί. Λόγω ότι το μέγιστο της συνάρτησης βρίσκεται στο σημείο (0.5,0.5) ξεκινώντας ο αλγόριθμος από αυτό δεν είναι δυνατό να συγκλίνει στο ελάχιστο, αφού στο σημείο αυτό το διάνυσμα κλίσης της f θα είναι μηδενικό τερματίζοντας έτσι τον αλγόριθμο. Για το σημείο (-3,3) βλέπουμε πως ο αλγόριθμος κινείται στο ίδιο σημείο, χωρίς να καταφέρνει να συγκλίνει στο ελάχιστο, εξαιτίας του ότι η συνάρτηση σε εκείνο το σημείο είναι σταθερή.

Παρακάτω φαίνονται τα διαγράμματα των ισοβαρών καμπυλών για τα σημεία (-0.5,-0.5), (0.5,0.5), (-2,-1), (-3,3) αντίστοιχα:







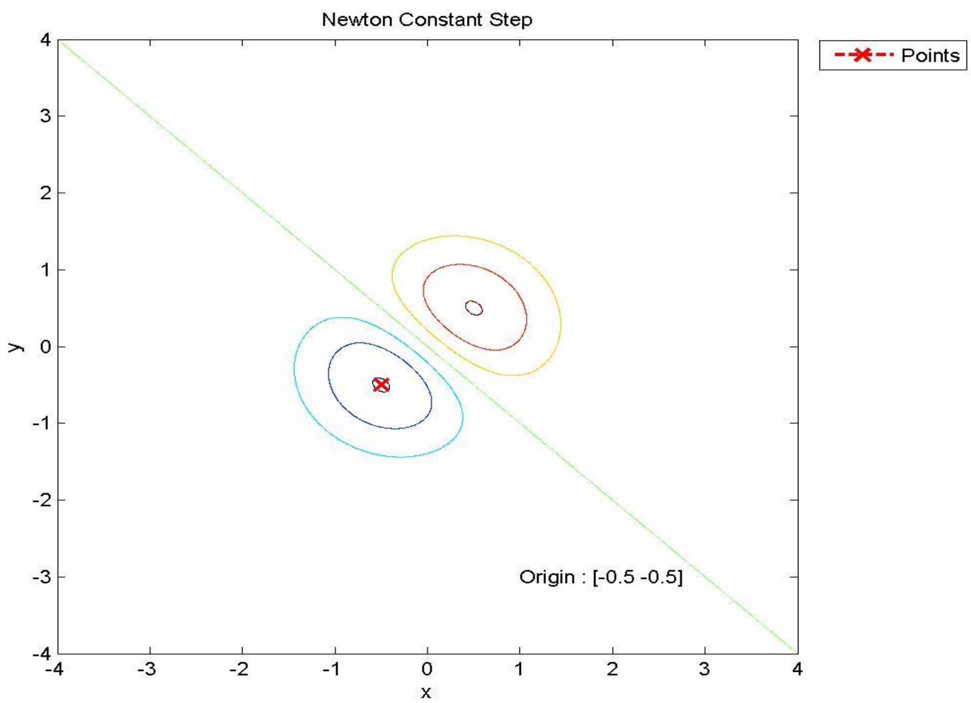


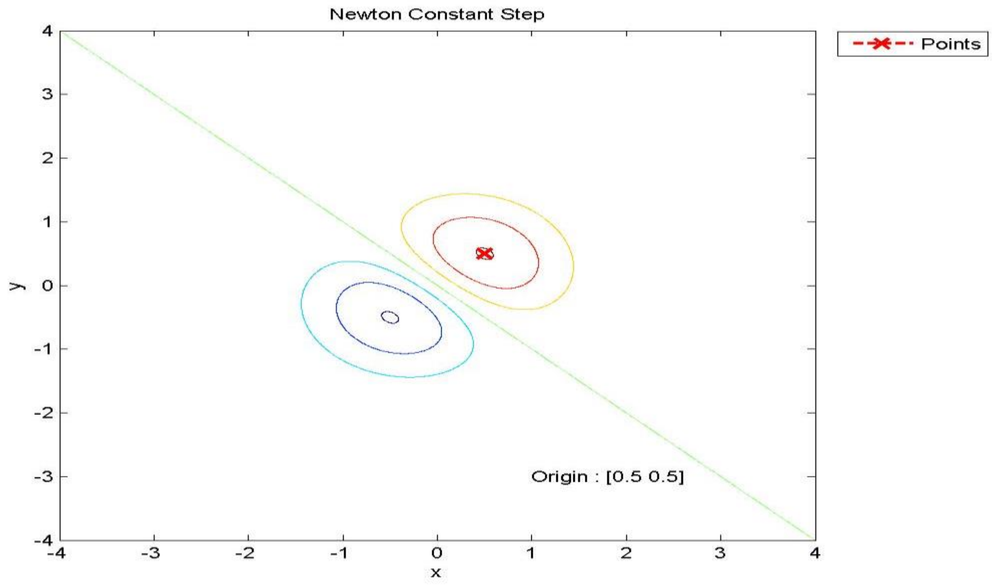
Από τα διαγράμματα προκύπτουν τα ίδια συμπεράσματα που βγάλαμε και παραπάνω. Παρατηρώντας το διάγραμμα για το σημείο (-2,-1) βλέπουμε πως ο αριθμός των βημάτων είναι παρόμοιος με αυτόν του πρώτου αλγορίθμου, πράγμα το οποίο σημαίνει πως ο ευριστικός αλγόριθμος που επιλέξαμε για την επιλογή του βήματος δεν ήταν αποτελεσματικός. Συμπεραίνουμε λοιπόν πώς ο καλύτερος αλγόριθμος είναι ο δεύτερος ο οποίος συγκλίνει στο ελάχιστο με τον μικρότερο αριθμό βημάτων.

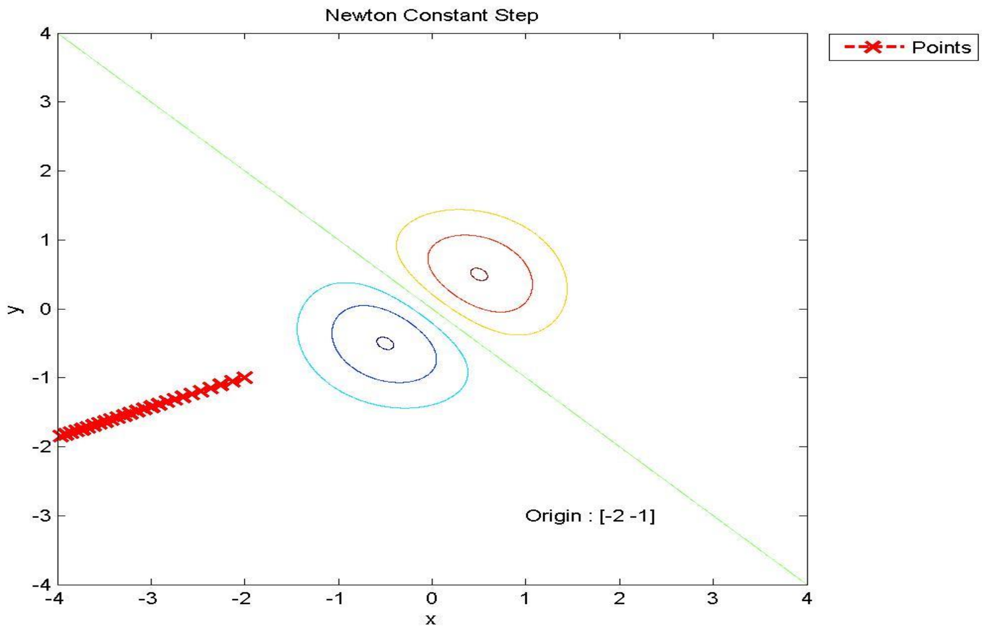
ΘΕΜΑ 2 (Μέθοδος Newton)

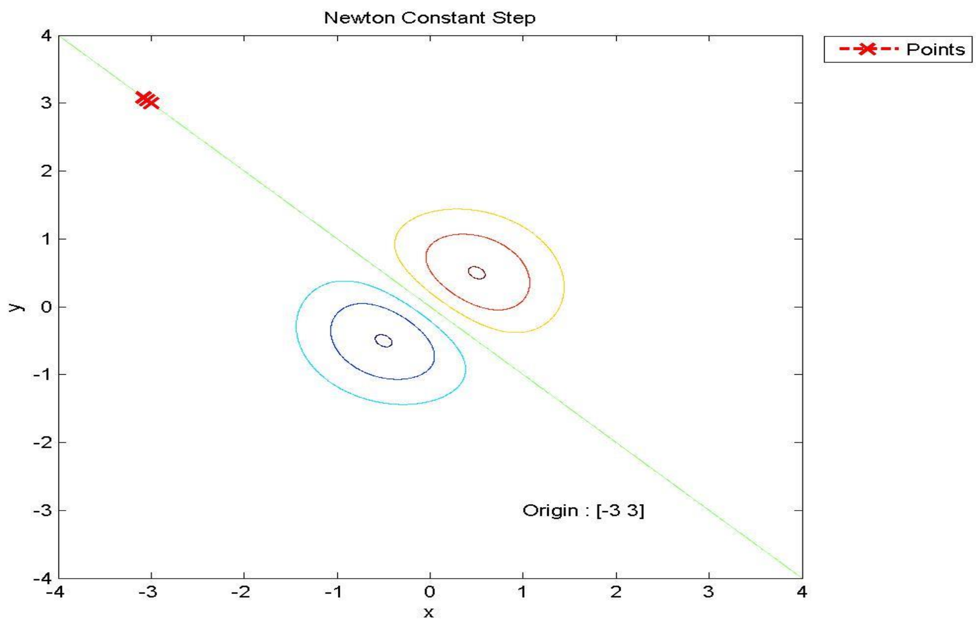
Α) Επιλέγοντας σταθερό βήμα γ_κ δημιουργούμε τη συνάρτηση alg_newton1 (e,co), όπου e είναι η σταθερά τερματισμού και co οι συντεταγμένες του αρχικού σημείου εκκίνησης. Επιλέγοντας ως βήμα γ_κ=0.5 και ακρίβεια e=10^{-8}, εκτελούμε τον αλγόριθμο για τις τιμές (-0.5, -0.5), (0.5,0.5), (-2,-1), (-3,3) και παίρνουμε ως αποτέλεσμα αντίστοιχα τις τιμές (-0.5,-0.5), (0.5 0.5), (-4.5319,-2.0981) και (-3.2804 3.2804). Ο αλγόριθμος συγκλίνει μόνο στην περίπτωση που ξεκινά από το σημείο (-0.5,-0.5) το οποίο όμως είναι και το ελάχιστο. Στο σημείο (0.5,0.5) η συνάρτηση παρουσιάζει το μέγιστο της επομένως η κλίση της είναι 0, άρα και ο αλγόριθμος δεν μπορεί να συγκλίνει, στο (-2,-1) ο αλγόριθμος αποκλίνει, καθώς ο εσσιανός πίνακας της f δεν είναι θετικά ορισμένος σε κάθε σημείο, άρα δεν εφαρμόζεται σωστά ο αλγόριθμος και στο (-3,3) ο αλγόριθμος δεν συγκλίνει στο ελάχιστο αλλά παραμένει στο ίδιο σημείο, καθώς η συνάρτηση στο σημείο αυτό είναι σταθερή.

Παρακάτω φαίνονται τα διαγράμματα των ισοβαρών καμπυλών για τα σημεία (-0.5,-0.5), (0.5,0.5), (-2,-1), (-3,3) αντίστοιχα:




Newton Constant Step
Points
Origin : [0.5 0.5]
x
y
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4

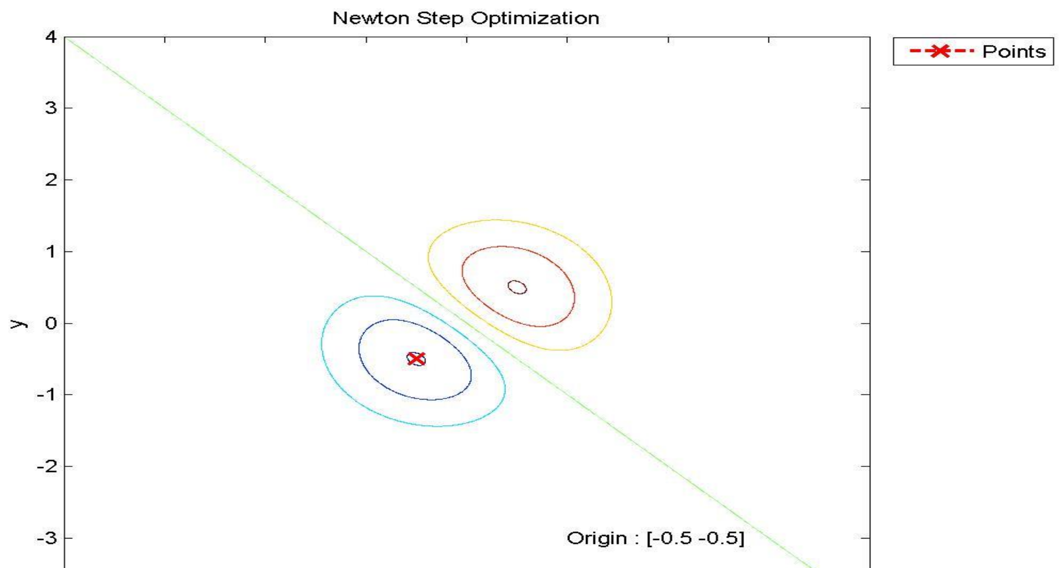

Newton Constant Step
Points
Origin : [-2 -1]
x
y
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4

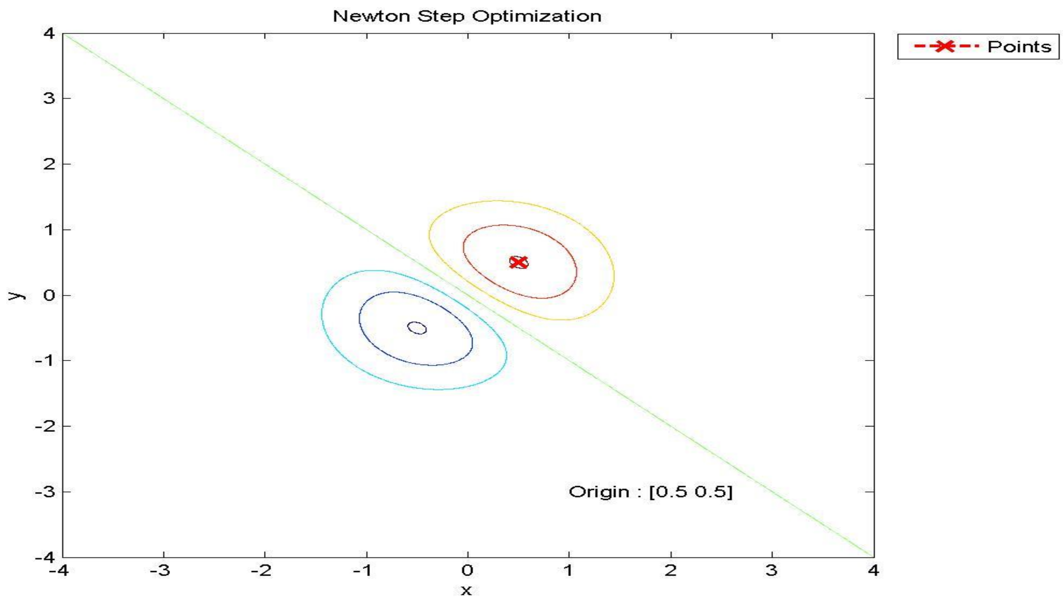

Newton Constant Step
Points
Origin : [-3 3]
x
y
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4

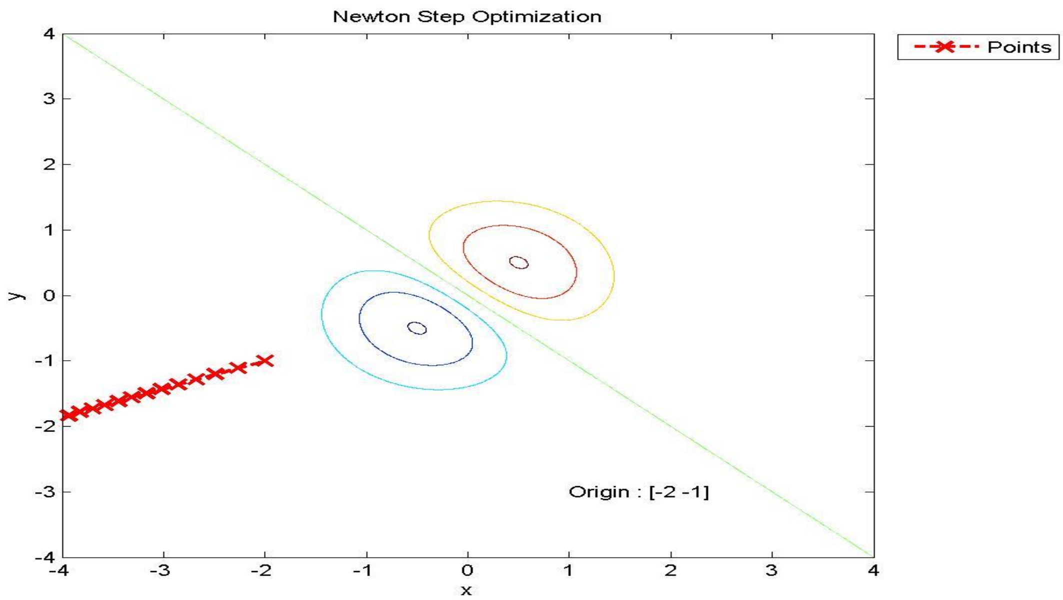
Παρατηρώντας τα διαγράμματα καταλήγουμε στα ίδια συμπεράσματα όπως και πριν.

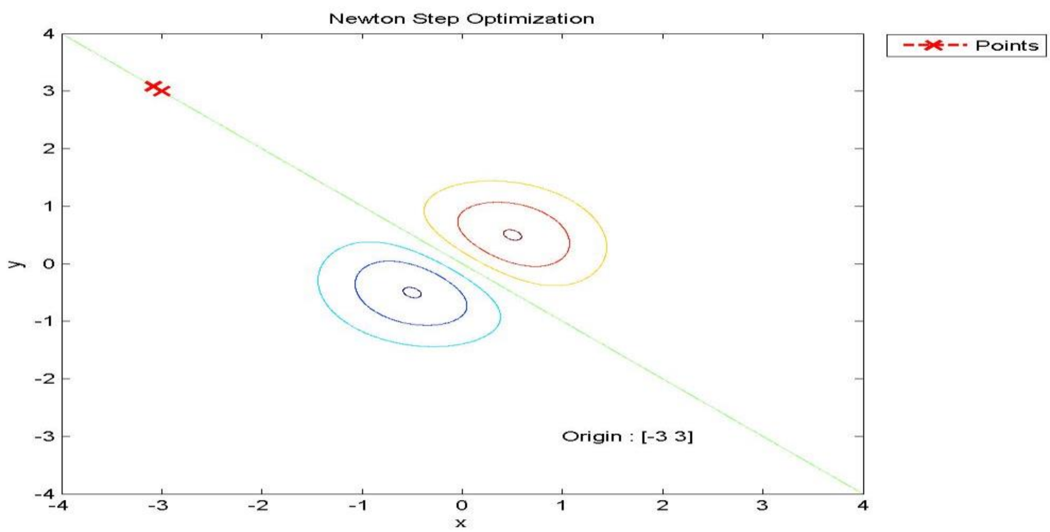
B) Επιλέγοντας βήμα γ_κ τέτοιο ώστε να ελαχιστοποιείται η συνάρτηση $f(x_k+\gamma_\kappa d_k)$, δημιουργούμε τη συνάρτηση alg_newton2 (e,co), όπου e είναι η σταθερά τερματισμού και co οι συντεταγμένες του αρχικού σημείου εκκίνησης. Για την ελαχιστοποίηση του βήματος γ_κ χρησιμοποιούμε τη συνάρτηση BisDeriv που χρησιμοποιήσαμε και στην προηγούμενη μέθοδο. Επιλέγοντας ως ακρίβεια $e=10^{-8}$, εκτελούμε τον αλγόριθμο για τις τιμές (-0.5,-0.5), (0.5,0.5), (-2,-1), (-3,3) και παίρνουμε ως αποτέλεσμα αντίστοιχα τις τιμές (-0.5,-0.5), (0.5 0.5), (-4.5592, -2.1071) και (-3.3205,3.3205). Για τα σημεία (-0.5,-0.5) και (0.5,0.5) καταλήγουμε στα ίδια συμπεράσματα όπως και πριν, ενώ για τα σημεία (-2,-1) και (-3,3) έχουμε μια μικρή διαφορά σε σχέση με τον προηγούμενο αλγόριθμο, χωρίς ωστόσο να συγκλίνει σε καμία από τις δυο περιπτώσεις.

Παρακάτω φαίνονται τα διαγράμματα των ισοβαρών καμπυλών για τα σημεία (-0.5,-0.5), (0.5,0.5), (-2,-1), (-3,3) αντίστοιχα:




Newton Step Optimization
Points
Origin : [0.5 0.5]
x
y
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4

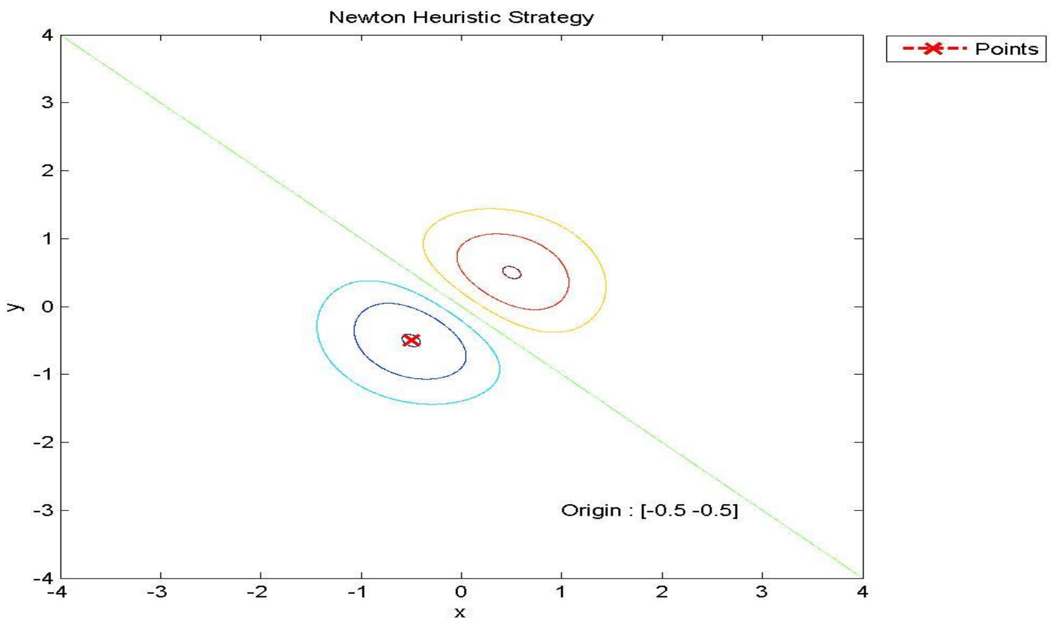

Newton Step Optimization
Points
Origin : [-2 -1]
x
y
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4

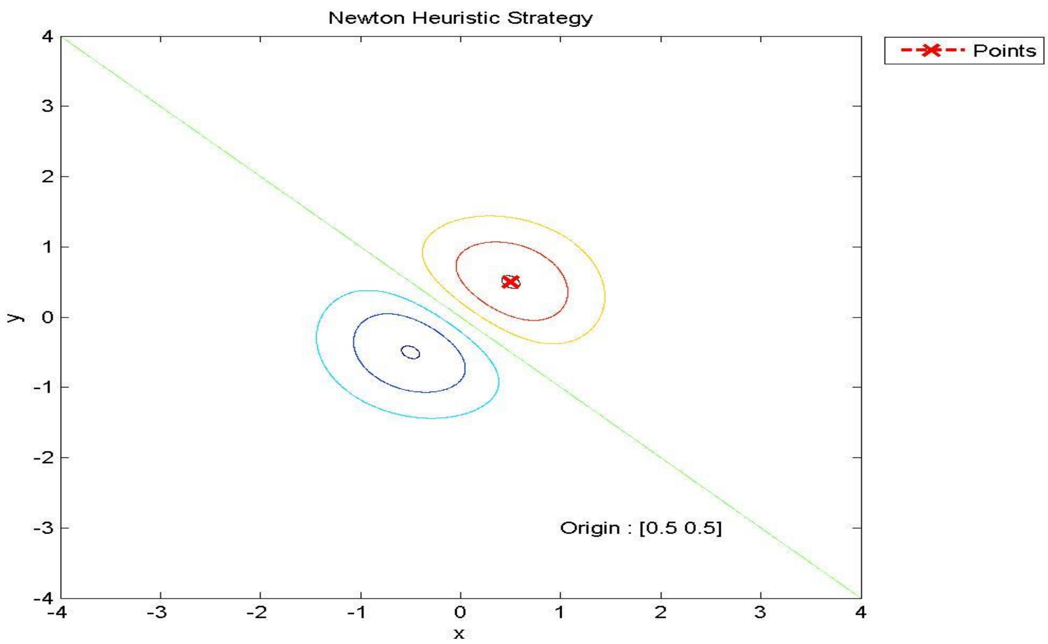

Newton Step Optimization
Points
Origin : [-3 3]
x
y
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4

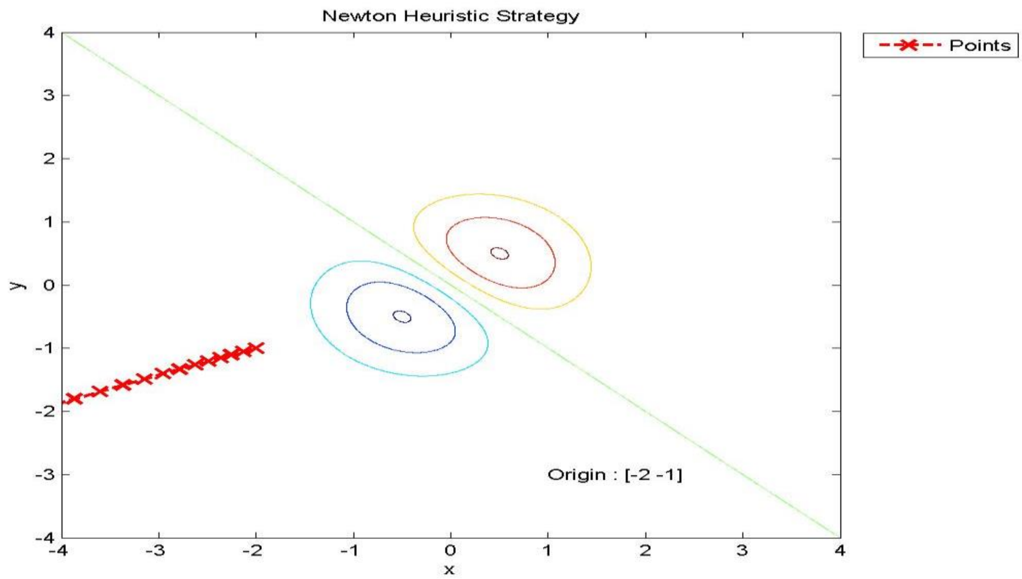
Παρατηρώντας τα διαγράμματα επαληθεύουμε τα παραπάνω συμπεράσματα. Η διαφορά αυτού του αλγορίθμου με τον προηγούμενο φαίνεται στο σημείο (-2,-1) στο οποίο ο δεύτερος αλγόριθμος αποκλίνει γρηγορότερα από τον πρώτο, κάνοντας δηλαδή μικρότερο αριθμό βημάτων.

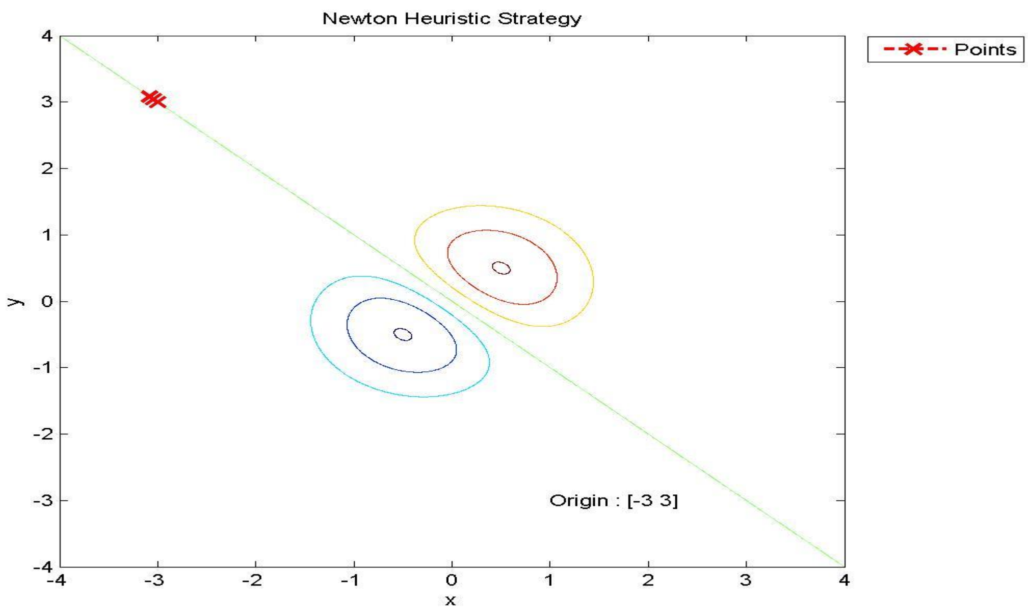
Γ) Χρησιμοποιώντας τώρα τον δικό μας ευριστικό αλγόριθμο για την επιλογή του βήματος $γ_κ$, δημιουργούμε τη συνάρτηση alg_newton3(e,co), όπου e είναι η σταθερά τερματισμού και co οι συντεταγμένες του αρχικού σημείου εκκίνησης. Ο ευριστικός αλγόριθμος που χρησιμοποιούμε είναι ο ίδιος με της προηγούμενης μεθόδου. Επιλέγοντας ως ακρίβεια $e=10^{-8}$, εκτελούμε τον αλγόριθμο για τις τιμές (-0.5,-0.5), (0.5,0.5), (-2,-1), (-3,3) και παίρνουμε ως αποτέλεσμα αντίστοιχα τις τιμές (-0.5,-0.5), (0.5 0.5), (-4.8441,-2.2349) και (-3.2804,3.2804). Όπως βλέπουμε ο αλγόριθμος αποκλίνει πάλι στα σημεία (-2,-1) και (-3,3), όπως και στους προηγούμενος αλγορίθμους.

Παρακάτω φαίνονται τα διαγράμματα των ισοβαρών καμπυλών για τα σημεία (-0.5,-0.5), (0.5,0.5), (-2,-1), (-3,3) αντίστοιχα:




Newton Heuristic Strategy
Points
Origin : [0.5 0.5]
x
y


Newton Heuristic Strategy
Points
Origin : [-2 -1]
x
y


Newton Heuristic Strategy
Points
Origin : [-3 3]
x
y

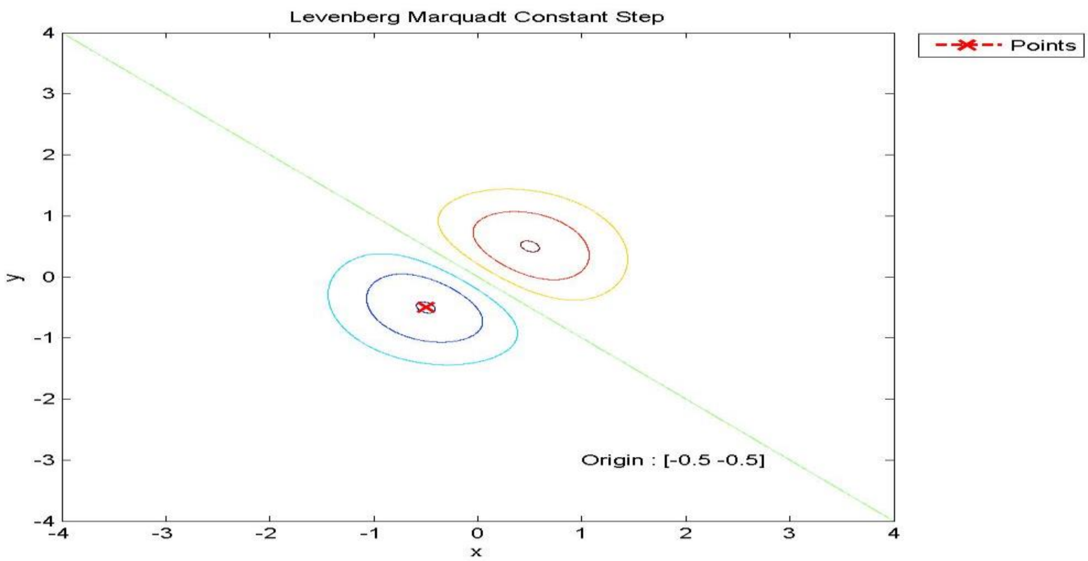
Από τα διαγράμματα καταλήγουμε στα ίδια συμπεράσματα με πριν. Στο σημείο (-2,-1) παρατηρούμε πως ενώ αρχικά φαίνεται να μειώνεται ο αριθμός των βημάτων μέχρι να αποκλίνει ο αλγόριθμος, τελικά αυξάνεται.

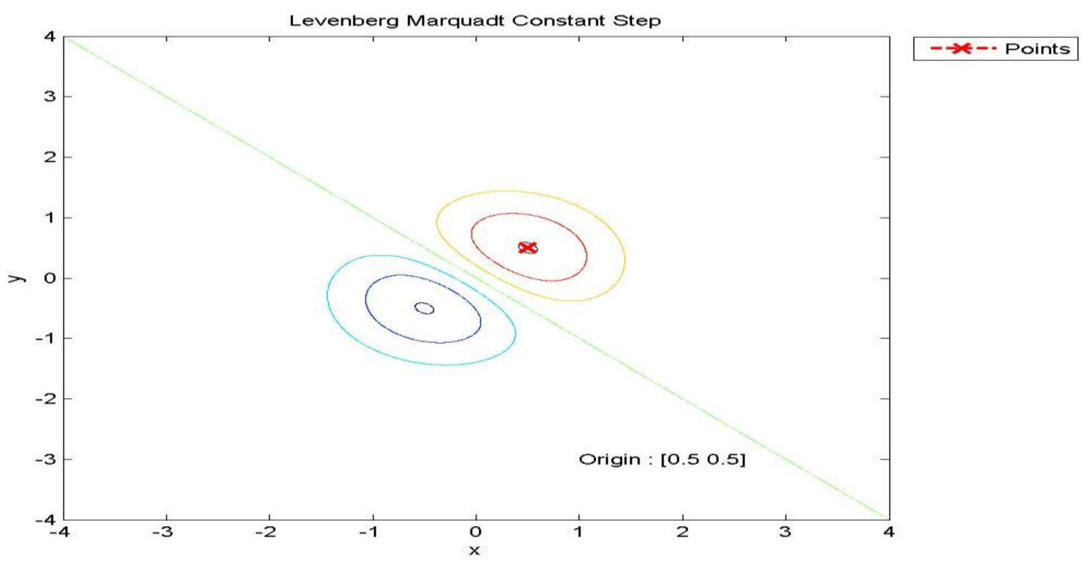
Παρατηρώντας και τους 3 αλγορίθμους είδαμε πως κανένας δεν συγκλίνει στο ελάχιστο, πέραν του σημείου (-0.5,-0.5), καθώς ο εσσιανός πίνακας της συνάρτησης δεν είναι θετικά ορισμένος σε κάθε σημείο της f, πράγμα το οποίο είναι προαπαιτούμενο για τον αλγόριθμο.

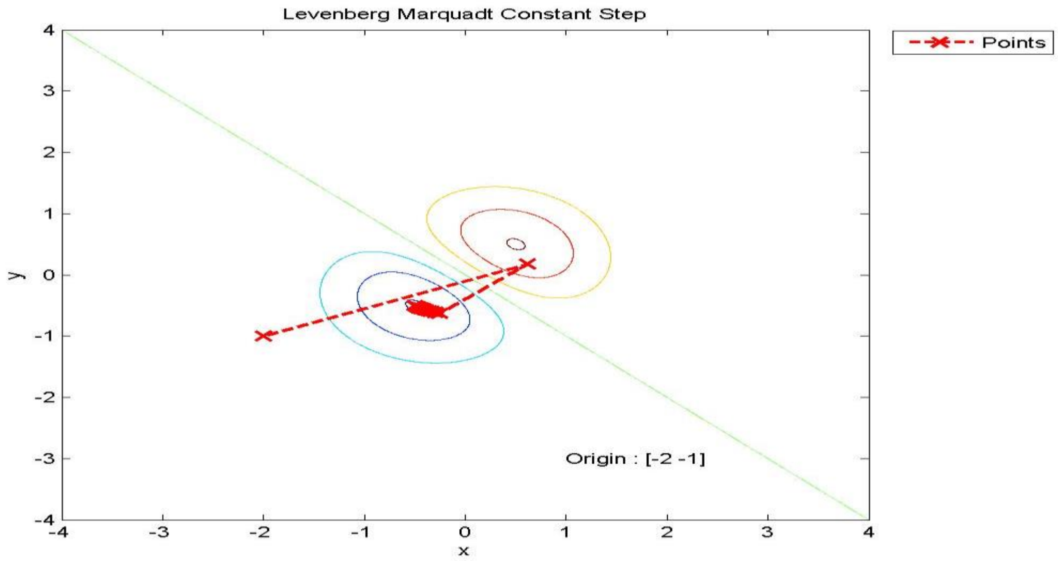
ΘΕΜΑ 3 (Μέθοδος Levenberg – Marquardt)

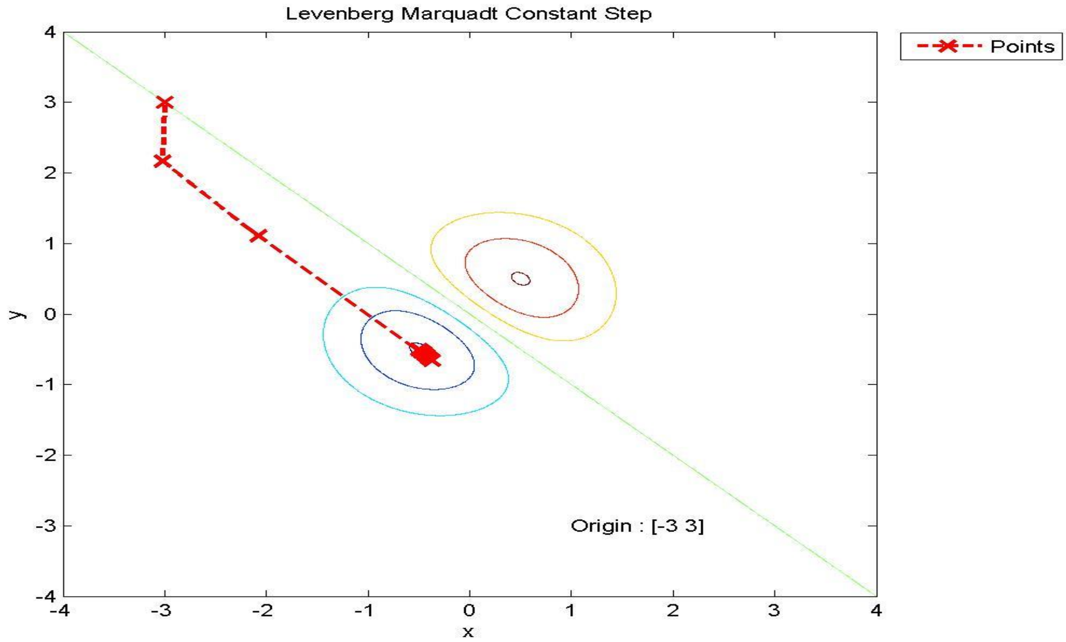
Α) Επιλέγοντας σταθερό βήμα γ_κ δημιουργούμε τη συνάρτηση alg_levenberg1(e,co), όπου e είναι η σταθερά τερματισμού και co οι συντεταγμένες του αρχικού σημείου εκκίνησης. Επιλέγοντας ως βήμα γ_κ=0.5 και ακρίβεια e=10^{-8}, εκτελούμε τον αλγόριθμο για τις τιμές (-0.5, -0.5), (0.5,0.5), (-2,-1), (-3,3) και παίρνουμε ως αποτέλεσμα αντίστοιχα τις τιμές (-0.5,-0.5), (0.5 0.5), (-0.5,-0.5) και (-0.5,-0.5). Παρατηρούμε πως εκτός του σημείου (0.5,0.5) στο οποίο η συνάρτηση παρουσιάζει το μέγιστο της, σε όλα τα υπόλοιπα ο αλγόριθμος συγκλίνει στο ελάχιστο.

Παρακάτω φαίνονται τα διαγράμματα των ισοβαρών καμπυλών για τα σημεία (-0.5,-0.5), (0.5,0.5), (-2,-1), (-3,3) αντίστοιχα:





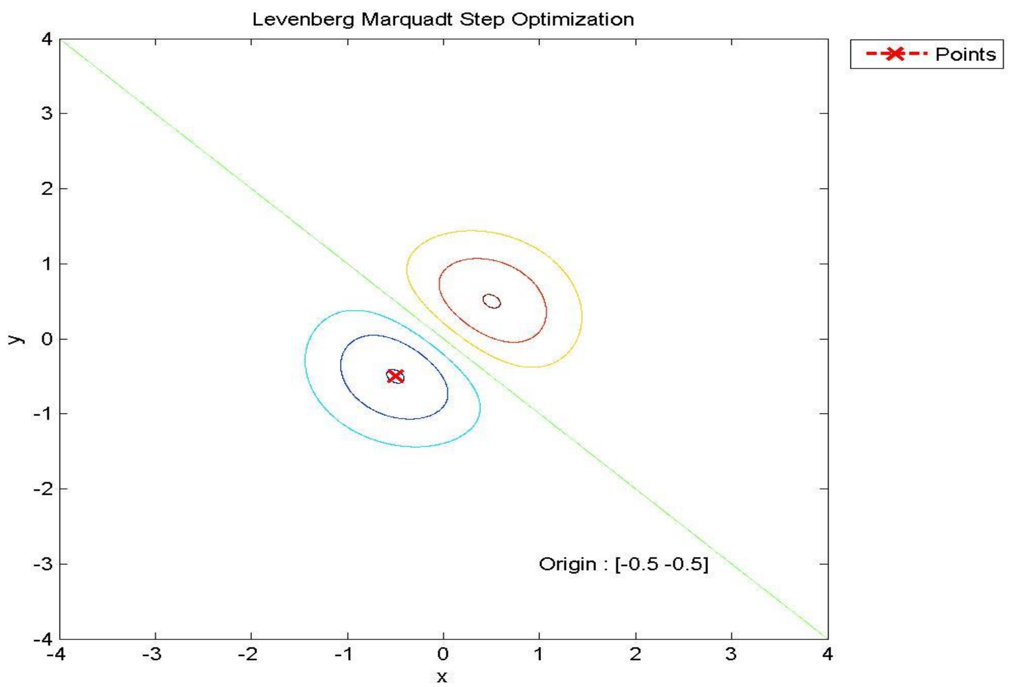


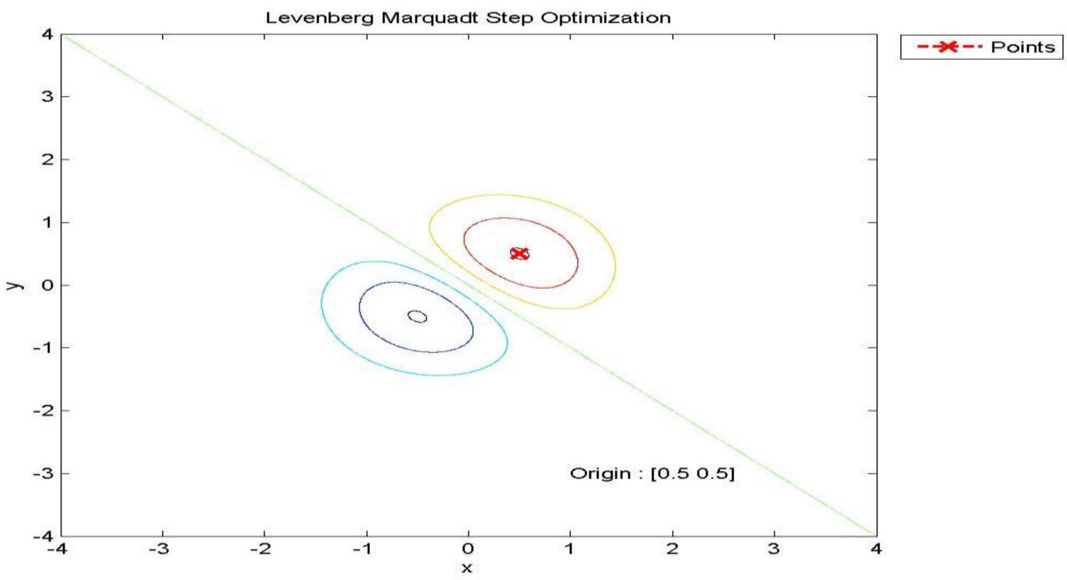


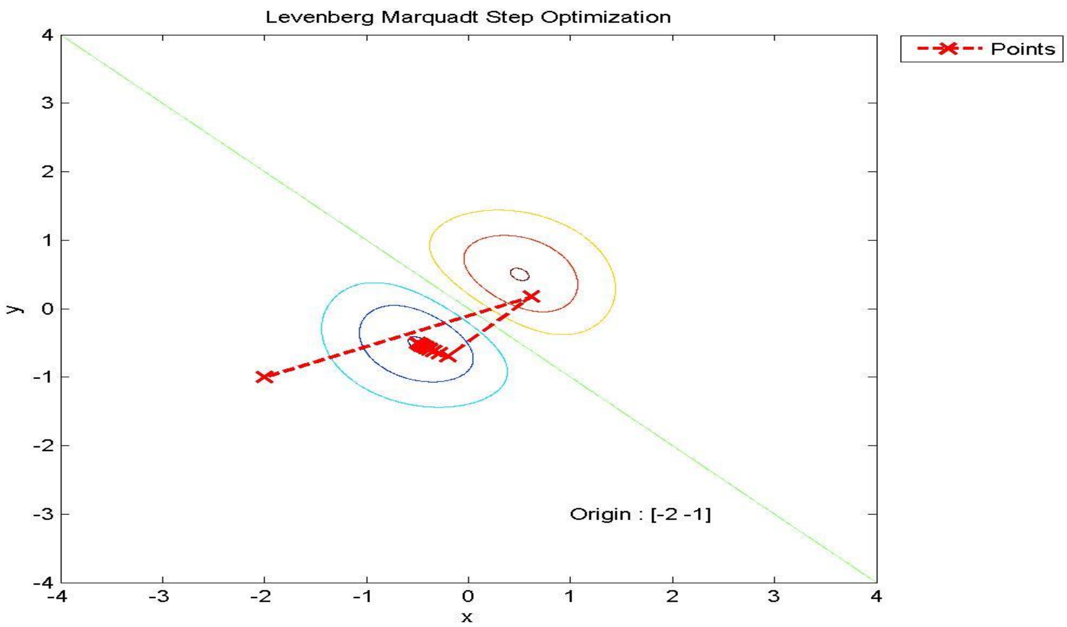
Παρατηρώντας τα διαγράμματα επαληθεύουμε τα συμπεράσματα που βγάλαμε παραπάνω. Βλέπουμε επίσης πως είναι η μόνη μέθοδος μέχρι στιγμής στην οποία συγκλίνει το σημείο (-3,3) στο ελάχιστο σε πεπερασμένο αριθμό βημάτων. Στα διαγράμματα μπορούμε να διακρίνουμε επίσης πως ο αλγόριθμος αρχικά με έναν μικρό αριθμό βημάτων πλησιάζει αρκετά προς το ελάχιστο και έπειτα κάνει έναν μεγάλο αριθμό βημάτων μέχρι να συγκλίνει σε αυτό. Αυτό συμβαίνει διότι ο αρχικά ο παράγοντας μ_κ, τον οποίο χρησιμοποιούμε για να μετατρέψουμε σε θετικά ορισμένο τον εσσιανό της f, είναι πολύ μικρός και επομένως η μέθοδος συμπεριφέρεται σαν την μέθοδο Newton, ενώ πλησιάζοντας προς το ελάχιστο το μ_{κ} γίνεται αρκετά μεγάλο κ έτσι η μέθοδος συμπεριφέρεται όπως της μέγιστης καθόδου, γι αυτό υπάρχουν και τα συνεχή ζικ-ζακ μεταξύ των διαδοχικών σημείων.

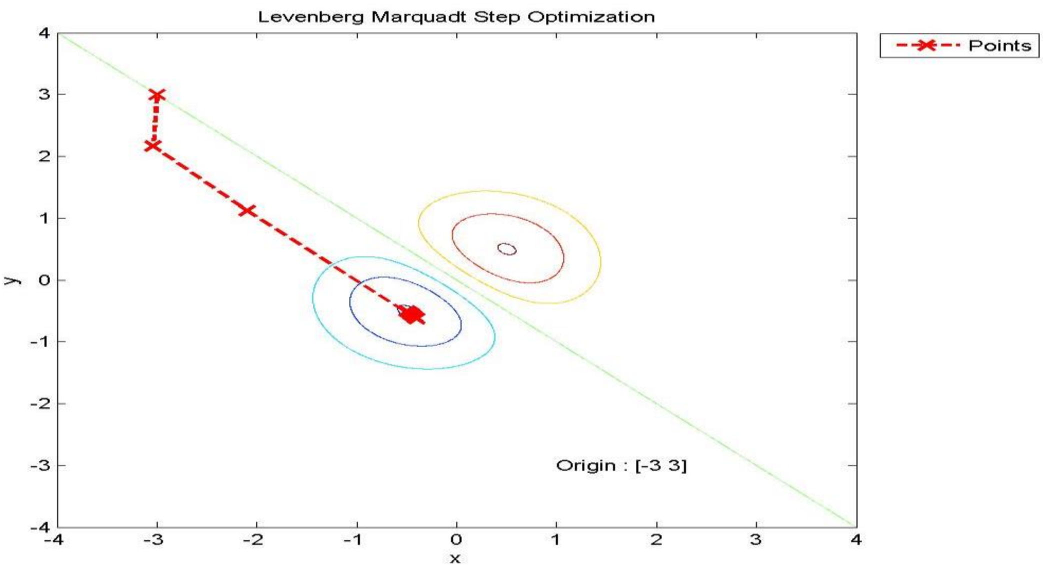
B) Επιλέγοντας βήμα γ_{κ} τέτοιο ώστε να ελαχιστοποιείται η συνάρτηση $f(x_k+\gamma_{\kappa}d_k)$, δημιουργούμε τη συνάρτηση alg_levenberg2(e,co), όπου e είναι η σταθερά τερματισμού και co οι συντεταγμένες του αρχικού σημείου εκκίνησης. Για την ελαχιστοποίηση του βήματος γ_{κ} χρησιμοποιούμε τη συνάρτηση BisDeriv που χρησιμοποιήσαμε και στις προηγούμενες μεθόδους. Επιλέγοντας ως ακρίβεια $e=10^{-8}$, εκτελούμε τον αλγόριθμο για τις τιμές (-0.5,-0.5), (0.5,0.5), (-2,-1), (-3,3) και παίρνουμε ως αποτέλεσμα αντίστοιχα τις τιμές (-0.5,-0.5), (0.5 0.5), (-0.5,-0.5) και (-0.5,-0.5). Παρατηρούμε λοιπόν πως και στον συγκεκριμένο αλγόριθμο εκτός από το σημείο (0.5,0.5) που είναι το μέγιστο, σε όλα τα υπόλοιπα ο αλγόριθμος συγκλίνει στο ελάχιστο σε πεπερασμένο αριθμό βημάτων.

Παρακάτω φαίνονται τα διαγράμματα των ισοβαρών καμπυλών για τα σημεία (-0.5,-0.5), (0.5,0.5), (-2,-1), (-3,3) αντίστοιχα:




Levenberg Marquadt Step Optimization
Points
Origin : [0.5 0.5]
x
y

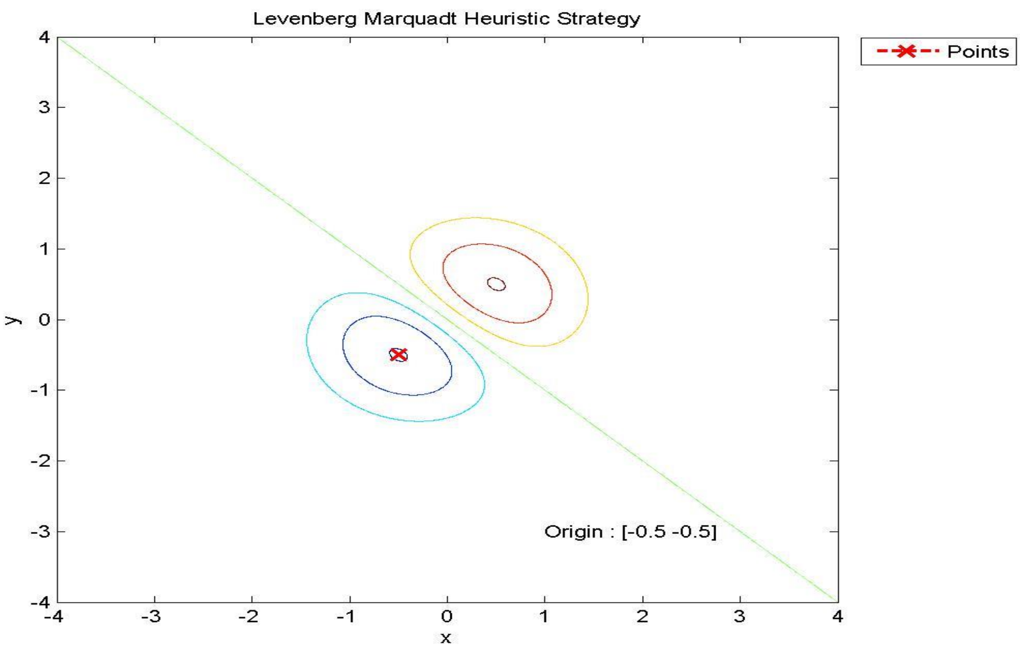

Levenberg Marquadt Step Optimization
Points
Origin : [-2 -1]
x
y

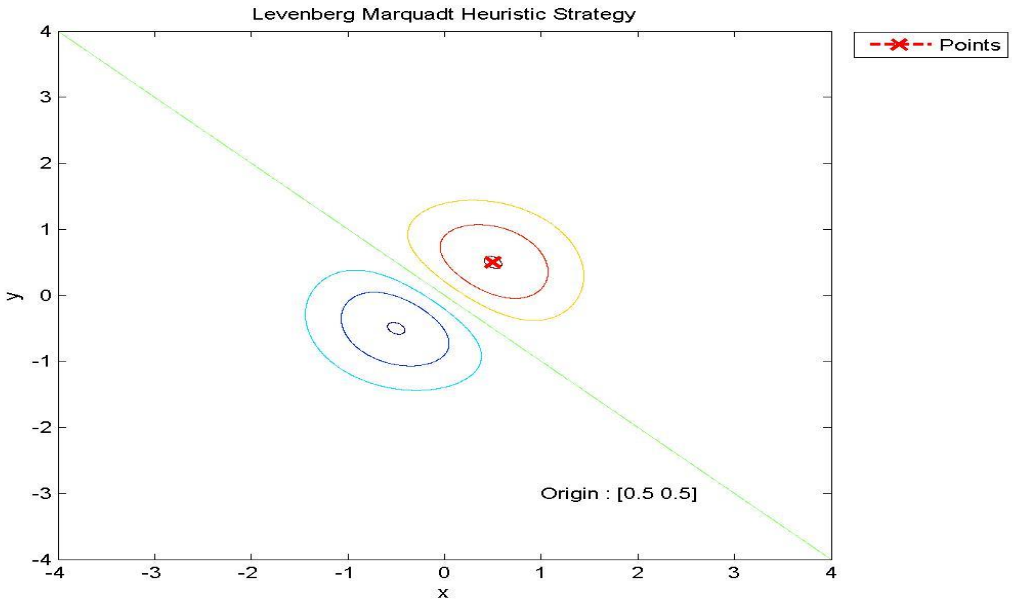

Levenberg Marquadt Step Optimization
Points
Origin : [-3 3]
x
y

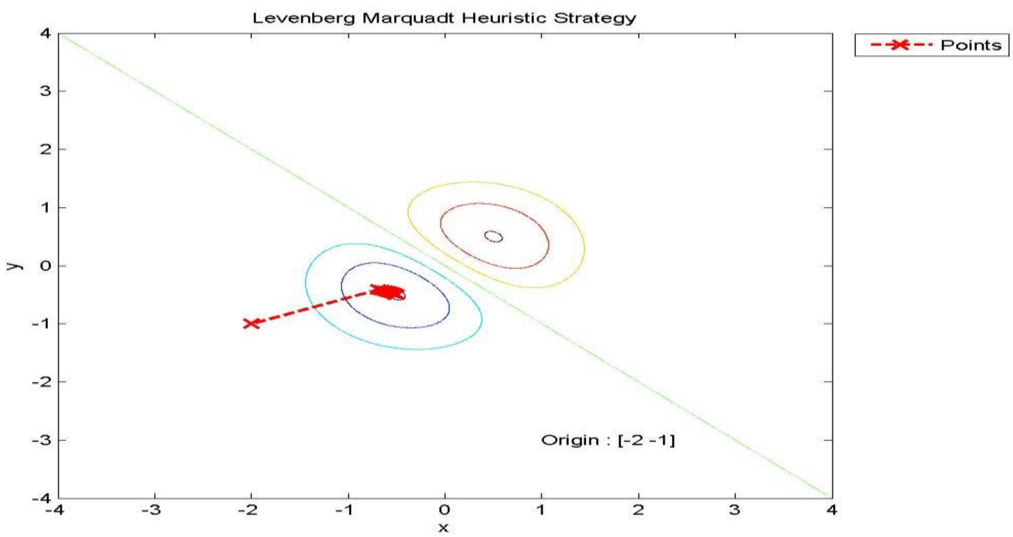
Παρατηρούμε όπως και πριν ότι τα διαγράμματα επαληθεύουν τα συμπεράσματα μας από την παραπάνω ανάλυση. Στα διαγράμματα μπορούμε να διακρίνουμε μια μείωση στο αριθμό των βημάτων που απαιτούνται για τη σύγκλιση στο ελάχιστο σε σχέση με τον προηγούμενο αλγόριθμο, καθώς το γ_κ τώρα επιλέγεται σε κάθε επανάληψη με τον βέλτιστο τρόπο.

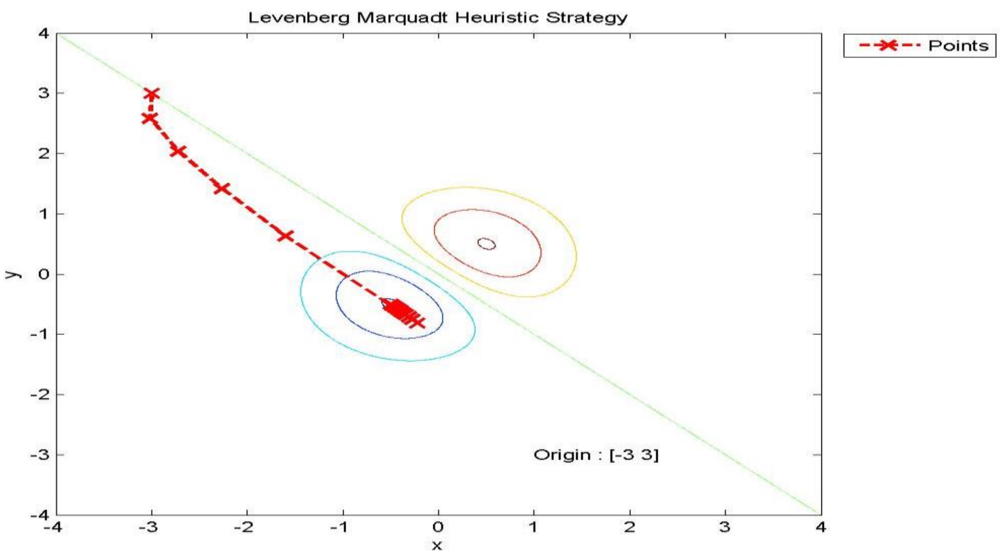
Γ) Χρησιμοποιώντας τώρα τον δικό μας ευριστικό αλγόριθμο για την επιλογή του βήματος γ_κ, δημιουργούμε τη συνάρτηση alg_levenberg3(e,co), όπου e είναι η σταθερά τερματισμού και co οι συντεταγμένες του αρχικού σημείου εκκίνησης. Ο ευριστικός αλγόριθμος που χρησιμοποιούμε είναι ο ίδιος με των προηγούμενων μεθόδων. Επιλέγοντας ως ακρίβεια $e=10^{-8}$, εκτελούμε τον αλγόριθμο για τις τιμές (-0.5,-0.5), (0.5,0.5), (-2,-1), (-3,3) και παίρνουμε ως αποτέλεσμα αντίστοιχα τις τιμές (-0.5,-0.5), (0.5 0.5),(-0.5,-0.5) και (-0.5,-0.5). Και σε αυτή την περίπτωση παρατηρούμε πως ο αλγόριθμος συγκλίνει σε όλα τα σημεία στο ελάχιστο, εκτός του (0.5,0.5), δηλαδή του μέγιστου της συνάρτησης.

Παρακάτω φαίνονται τα διαγράμματα των ισοβαρών καμπυλών για τα σημεία (-0.5,-0.5), (0.5,0.5), (-2,-1), (-3,3) αντίστοιχα:




Levenberg Marquadt Heuristic Strategy
Points
Origin : [0.5 0.5]
x
y


Levenberg Marquadt Heuristic Strategy
Points
Origin : [-2 -1]
x
y

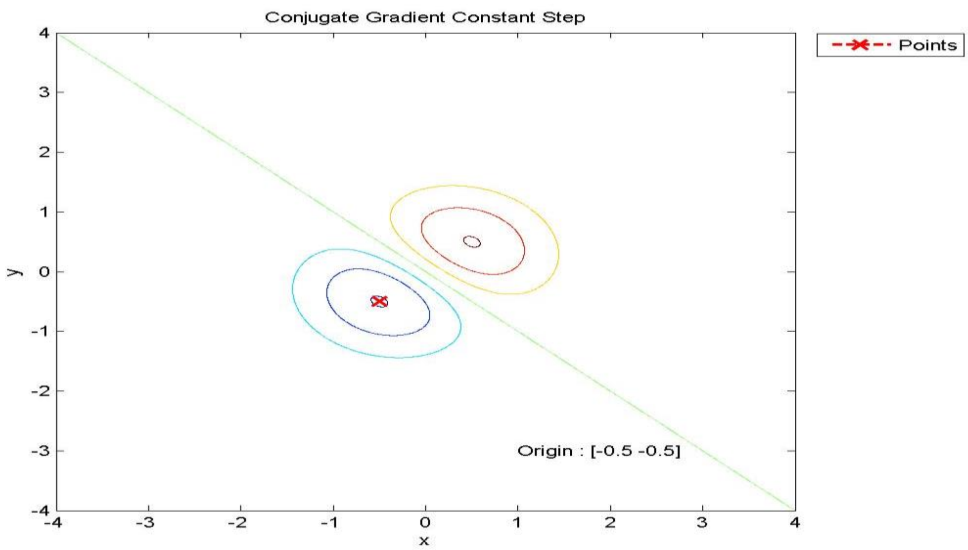

Levenberg Marquadt Heuristic Strategy
Points
Origin : [-3 3]
x
y

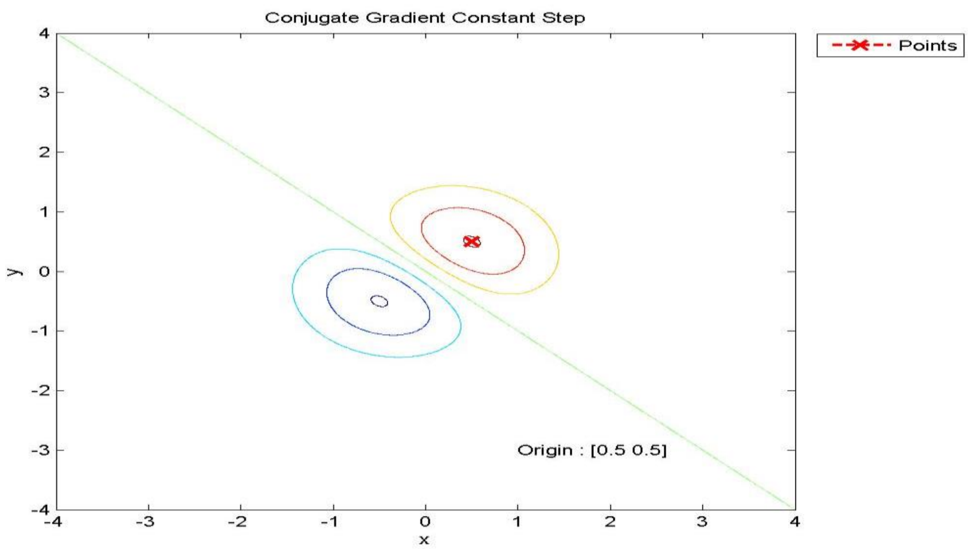
Όπως βλέπουμε και από τα διαγράμματα καταλήγουμε στα ίδια συμπεράσματα με παραπάνω. Παρατηρούμε ότι ο αλγόριθμος καθώς πλησιάζει στο ελάχιστο αυξάνει τον αριθμό βημάτων μέχρι την τελική σύγκλισή του, καθώς λειτουργεί σχεδόν όπως η μέθοδος της μέγιστης καθόδου. Βλέπουμε επίσης πως με τον ευριστικό αλγόριθμο κάνουμε έναν μικρότερο αριθμό βημάτων μέχρι την τελική σύγκλιση σε σχέση με τον αλγόριθμο που επιλέγουμε σταθερό $γ_κ$, αλλά κάνουμε αρκετά περισσότερα σε σύγκριση με τον αλγόριθμο που ελαχιστοποιούμε σε κάθε επανάληψη το βήμα.

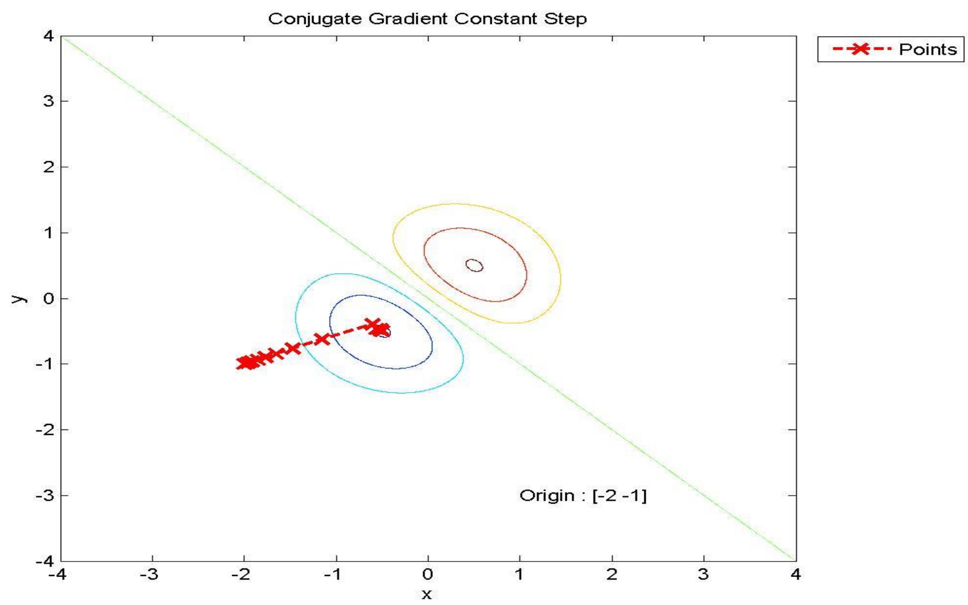
ΘΕΜΑ 4 (Μέθοδος Συζυγών Κλίσεων)

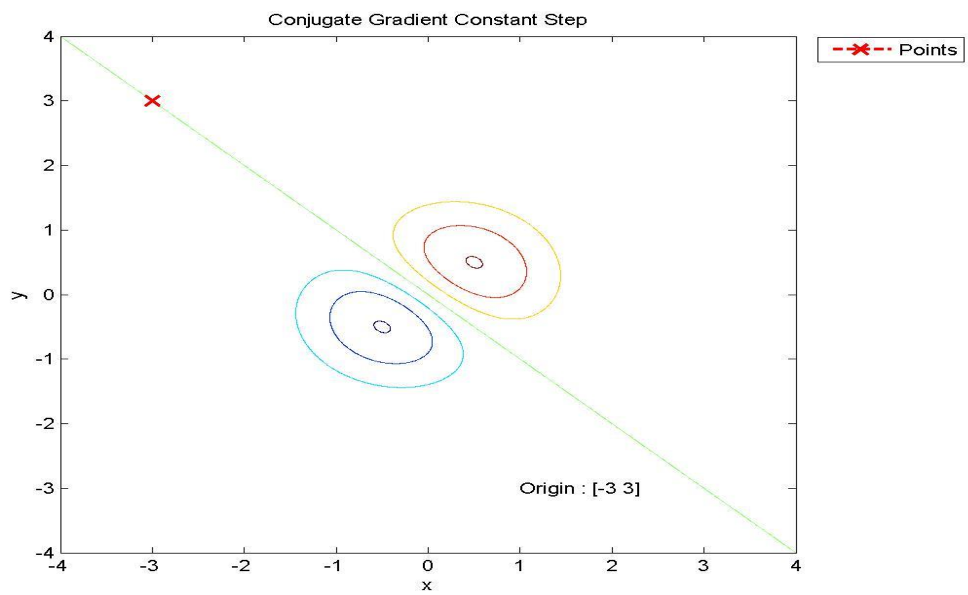
Α) Επιλέγοντας σταθερό βήμα γ_κ δημιουργούμε τη συνάρτηση alg_suz_klisewn1(e,co), όπου e είναι η σταθερά τερματισμού και co οι συντεταγμένες του αρχικού σημείου εκκίνησης. Επιλέγοντας ως βήμα γ_κ=0.5 και ακρίβεια e=10^{-8}, εκτελούμε τον αλγόριθμο για τις τιμές (-0.5, -0.5), (0.5,0.5), (-2,-1), (-3,3) και παίρνουμε ως αποτέλεσμα αντίστοιχα τις τιμές (-0.5,-0.5), (0.5 0.5), (-0.5,-0.5) και (-3,3). Βλέπουμε λοιπόν πως ο αλγόριθμος συγκλίνει στο ελάχιστο στις περιπτώσεις των σημείων (-0.5,-0.5) και (-2,-1), ενώ στο (0.5,0.5) που είναι και το μέγιστο της συνάρτησης παραμένει στο ίδιο σημείο και στο (-3,3) επίσης παραμένει στο ίδιο σημείο, καθώς η συνάρτηση είναι σταθερή στο σημείο αυτό.

Παρακάτω φαίνονται τα διαγράμματα των ισοβαρών καμπυλών για τα σημεία (-0.5,-0.5), (0.5,0.5), (-2,-1), (-3,3) αντίστοιχα:





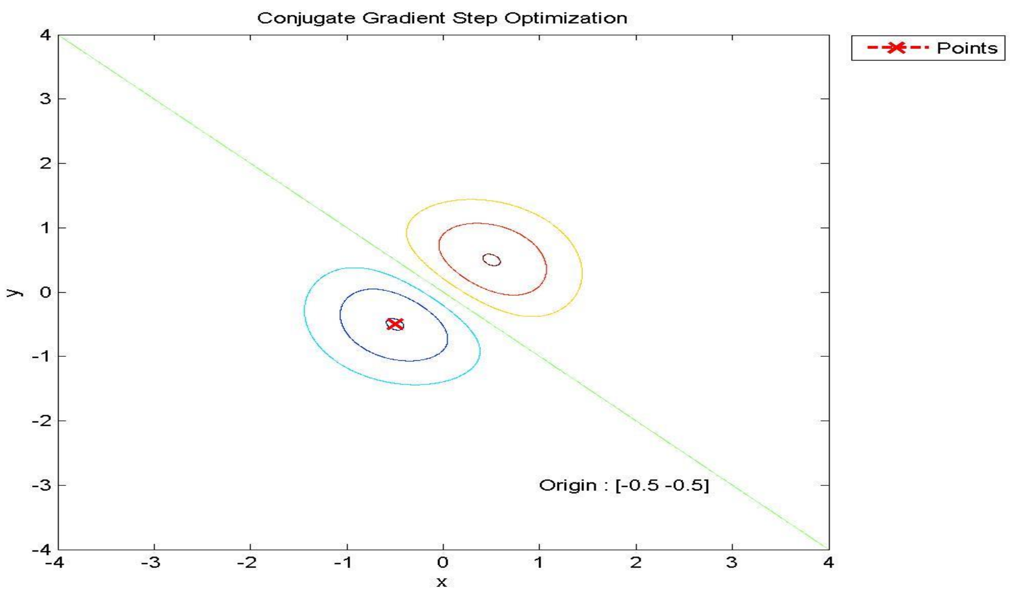


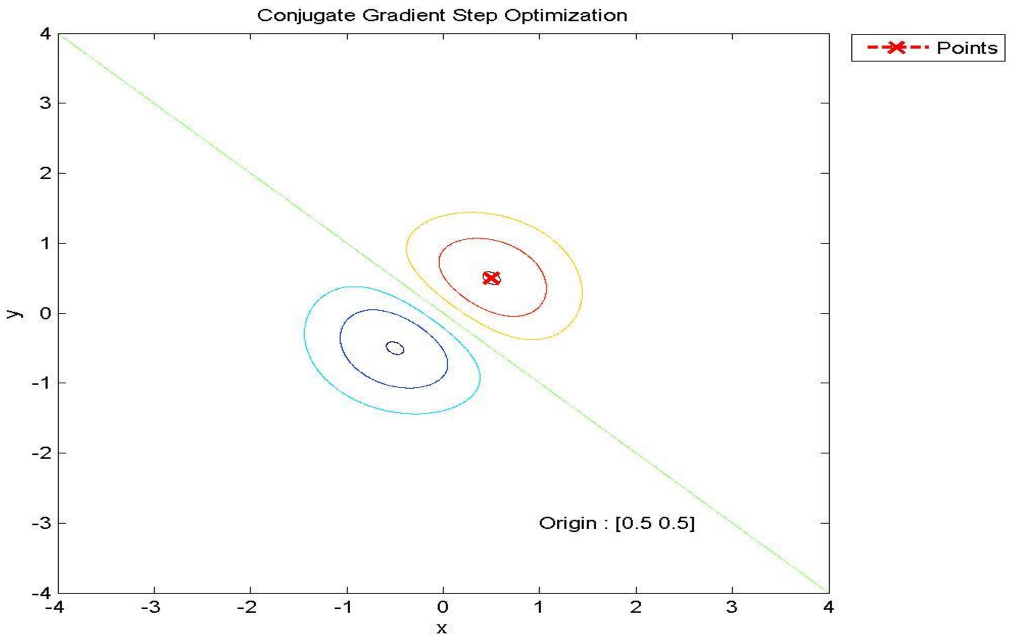


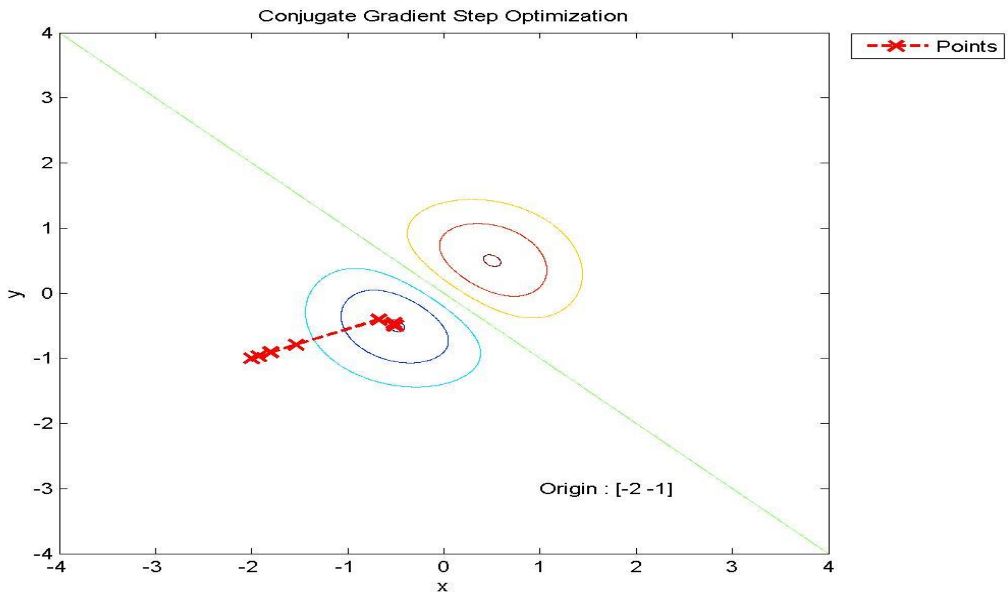
Παρατηρώντας τα διαγράμματα καταλήγουμε στα ίδια συμπεράσματα με την παραπάνω ανάλυση.

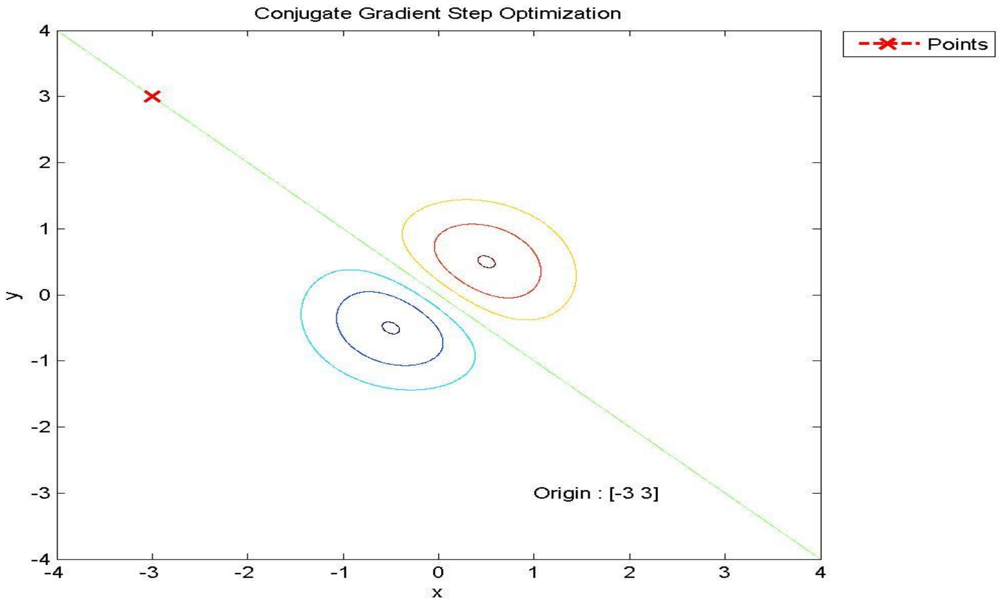
B) Επιλέγοντας βήμα γ_κ τέτοιο ώστε να ελαχιστοποιείται η συνάρτηση $f(x_k+\gamma_\kappa d_k)$, δημιουργούμε τη συνάρτηση alg_suz_klisewn2(e,co), όπου e είναι η σταθερά τερματισμού και co οι συντεταγμένες του αρχικού σημείου εκκίνησης. Για την ελαχιστοποίηση του βήματος γ_κ χρησιμοποιούμε τη συνάρτηση BisDeriv που χρησιμοποιήσαμε και στις προηγούμενες μεθόδους. Επιλέγοντας ως ακρίβεια $e=10^{-8}$, εκτελούμε τον αλγόριθμο για τις τιμές (-0.5,-0.5), (0.5,0.5), (-2,-1), (-3,3) και παίρνουμε ως αποτέλεσμα αντίστοιχα τις τιμές (-0.5,-0.5), (0.5 0.5), (-0.5,-0.5) και (-3,3). Βλέπουμε λοιπόν πως καταλήγουμε στα ίδια αποτελέσματα με τον προηγούμενο αλγόριθμο.

Παρακάτω φαίνονται τα διαγράμματα των ισοβαρών καμπυλών για τα σημεία (-0.5,-0.5), (0.5,0.5), (-2,-1), (-3,3) αντίστοιχα:





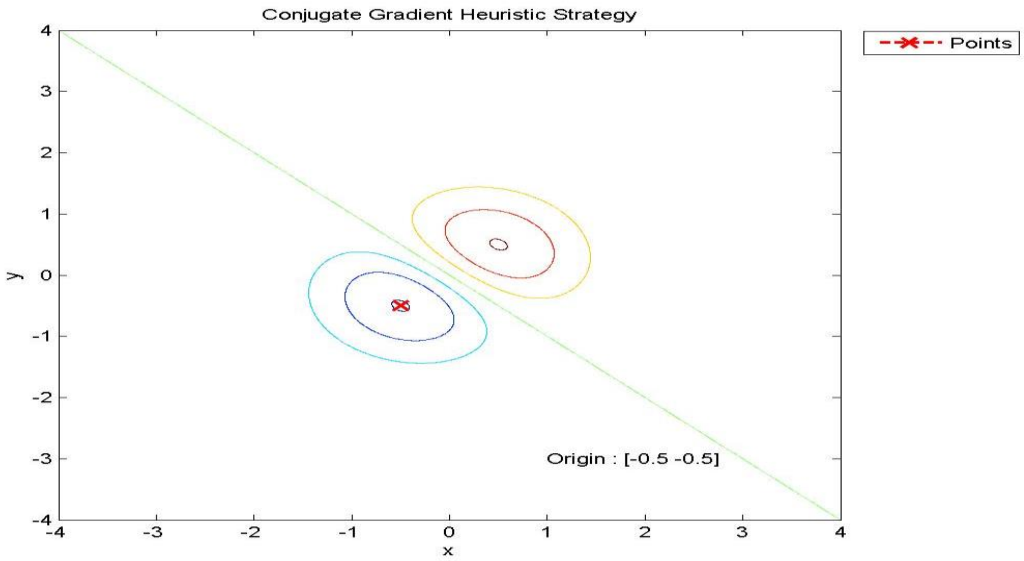


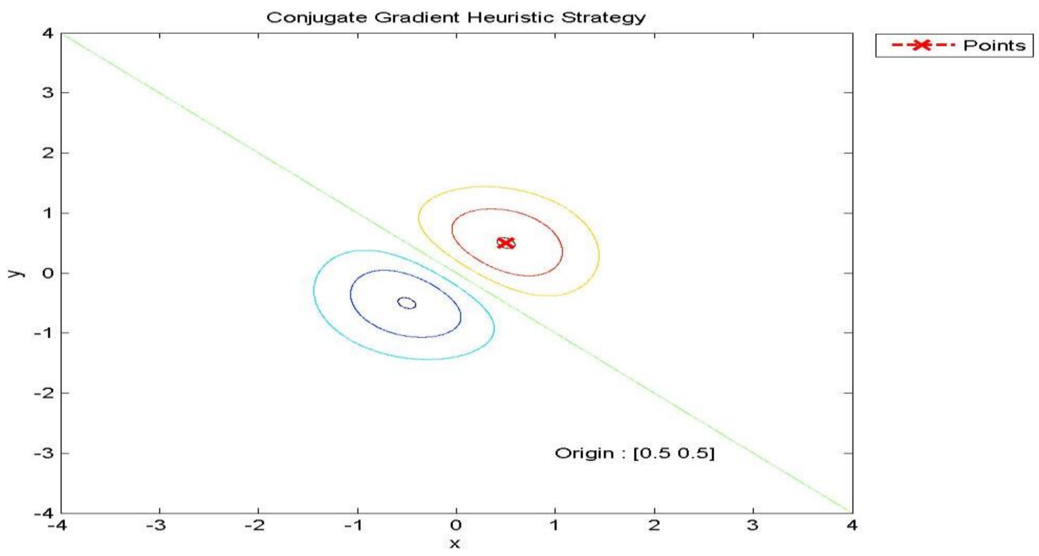


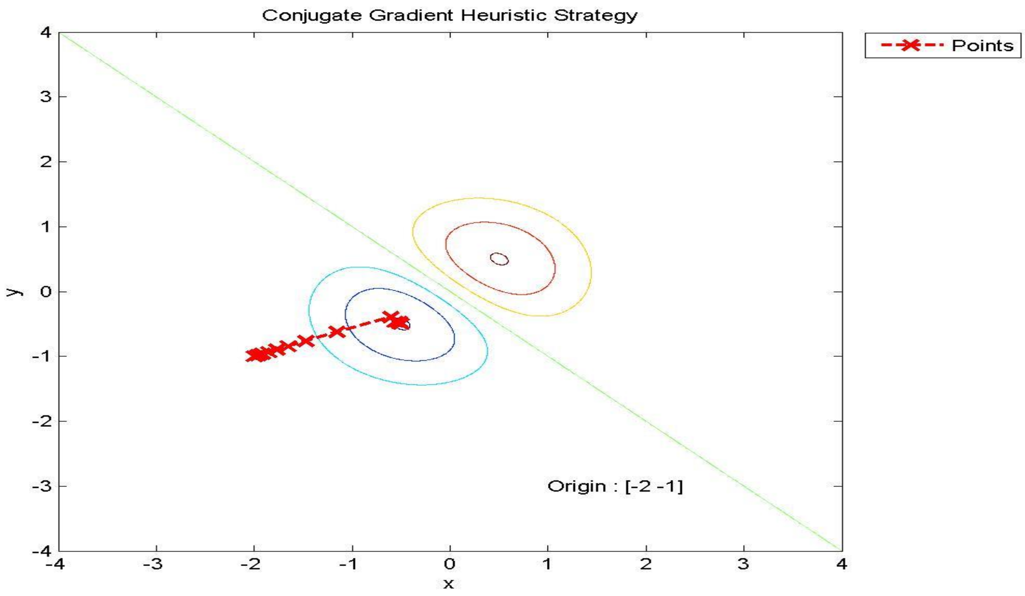
Βλέπουμε λοιπόν και από τα διαγράμματα πως καταλήγουμε στα ίδια συμπεράσματα με παραπάνω. Μπορούμε να διακρίνουμε επίσης μια σημαντική μείωση στο αριθμό των βημάτων που γίνονται μέχρι τη σύγκλιση στο ελάχιστο στο σημείο (-2,-1) σε σύγκριση με τον προηγούμενο αλγόριθμο. Αυτό συμβαίνει καθώς σε αυτή την περίπτωση το βήμα γ_k επιλέγεται με τον βέλτιστο τρόπο σε κάθε επανάληψη.

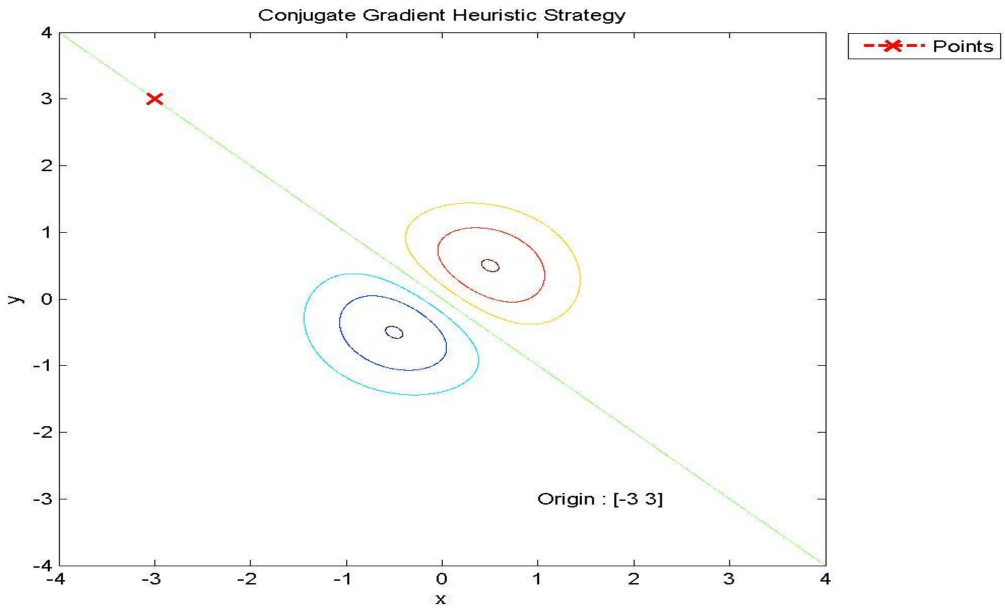
Γ) Χρησιμοποιώντας τώρα τον δικό μας ευριστικό αλγόριθμο για την επιλογή του βήματος γ_κ, δημιουργούμε τη συνάρτηση alg_suz_klisewn3(e,co), όπου e είναι η σταθερά τερματισμού και co οι συντεταγμένες του αρχικού σημείου εκκίνησης. Ο ευριστικός αλγόριθμος που χρησιμοποιούμε είναι ο ίδιος με των προηγούμενων μεθόδων. Επιλέγοντας ως ακρίβεια $e=10^{-8}$, εκτελούμε τον αλγόριθμο για τις τιμές (-0.5,-0.5), (0.5,0.5), (-2,-1), (-3,3) και παίρνουμε ως αποτέλεσμα αντίστοιχα τις τιμές (-0.5,-0.5), (0.5 0.5),(-0.5,-0.5) και (-3,3). Όπως βλέπουμε και σε αυτήν την περίπτωση παίρνουμε τα ίδια αποτελέσματα με τους άλλους δύο αλγορίθμους.

Παρακάτω φαίνονται τα διαγράμματα των ισοβαρών καμπυλών για τα σημεία (-0.5,-0.5), (0.5,0.5), (-2,-1), (-3,3) αντίστοιχα:









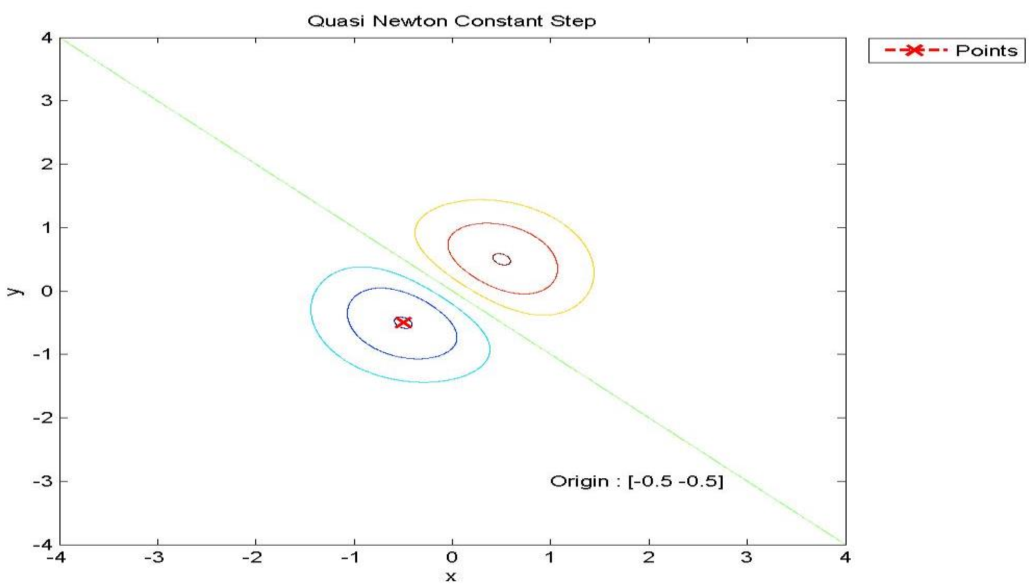
Παρατηρώντας τα διαγράμματα καταλήγουμε στα ίδια συμπεράσματα με παραπάνω. Διακρίνουμε στο σημείο (-2,-1) μια πολύ μικρή μείωση στον αριθμό των βημάτων σε σύγκριση με τον πρώτο αλγόριθμο, αλλά σημαντική αύξηση σε σύγκριση με τον δεύτερο. Θα μπορούσε επομένως να γίνει μια πιο έξυπνη και καλή επιλογή του ευριστικού αλγορίθμου για να έχουμε ταχύτερη σύγκλιση.

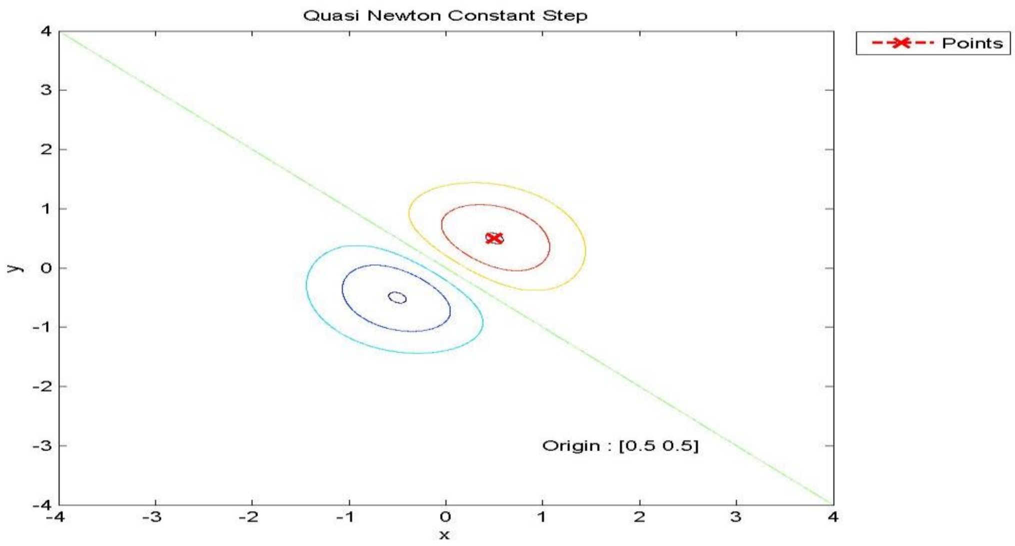
ΘΕΜΑ 5 (Μέθοδος Σχεδόν Newton)

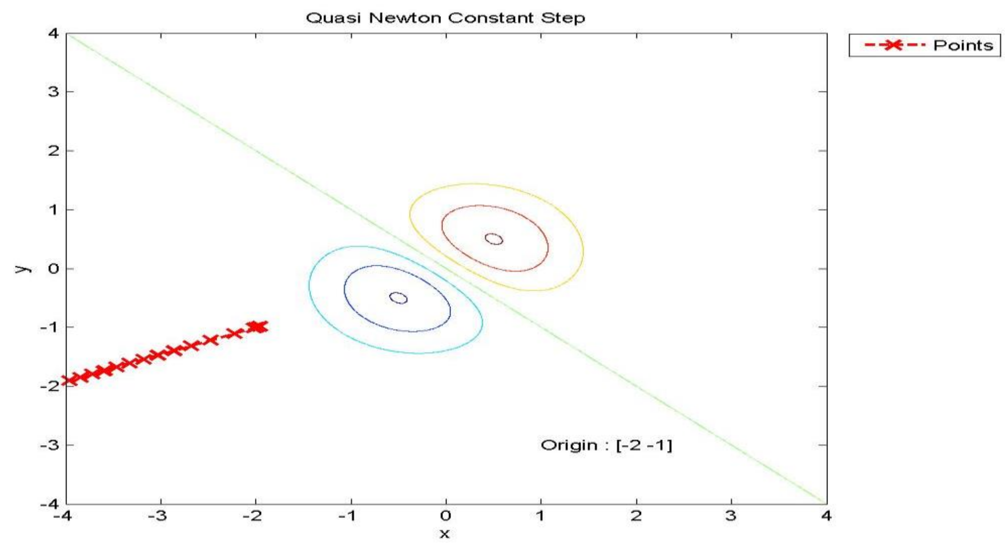
Σε αυτή τη μέθοδο κατά τη δημιουργία των αλγορίθμων, δημιουργήσαμε και 2 ακόμη συναρτήσεις, τη συνάρτηση PosDef(Mat), η οποία δέχεται έναν πίνακα και ελέγχει εάν είναι θετικά ορισμένος και τη συνάρτηση quasiNewtonHeur, η οποία επιτελεί την ευριστική συνάρτηση που χρησιμοποιείται για την εύρεση του ελαχίστου στον ευριστικό αλγόριθμο.

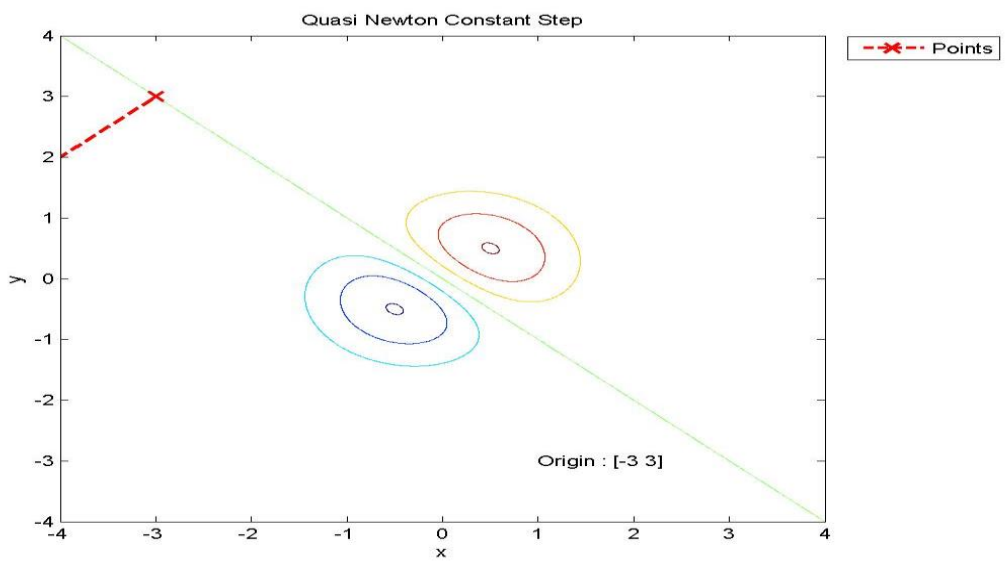
A) Επιλέγοντας σταθερό βήμα γ_κ δημιουργούμε τη συνάρτηση alg_quasiNewton1(e,co), όπου e είναι η σταθερά τερματισμού και co οι συντεταγμένες του αρχικού σημείου εκκίνησης. Επιλέγοντας ως βήμα γ_κ=0.5 και ακρίβεια e=10^{-8}, εκτελούμε τον αλγόριθμο για τις τιμές (-0.5, -0.5), (0.5,0.5), (-2,-1), (-3,3) και παίρνουμε ως αποτέλεσμα αντίστοιχα τις τιμές (-0.5,-0.5), (0.5,0.5),(,) και (,). Βλέπουμε λοιπόν πως εκτός από το σημείο (-0.5,-0.5), το οποίο είναι και το ελάχιστο, ο αλγόριθμος δεν συγκλίνει σε κανένα από τα άλλα αρχικά σημεία. Αυτό συμβαίνει διότι κατά τη διάρκεια των επαναλήψεων ο πίνακας Δ ενδέχεται να γίνεται μη θετικά ορισμένος και επομένως να μην ορίζεται σωστά το διάνυσμα κατεύθυνσης.

Παρακάτω φαίνονται τα διαγράμματα των ισοβαρών καμπυλών για τα σημεία (-0.5,-0.5), (0.5,0.5), (-2,-1), (-3,3) αντίστοιχα:




Quasi Newton Constant Step
Points
Origin : [0.5 0.5]
x
y

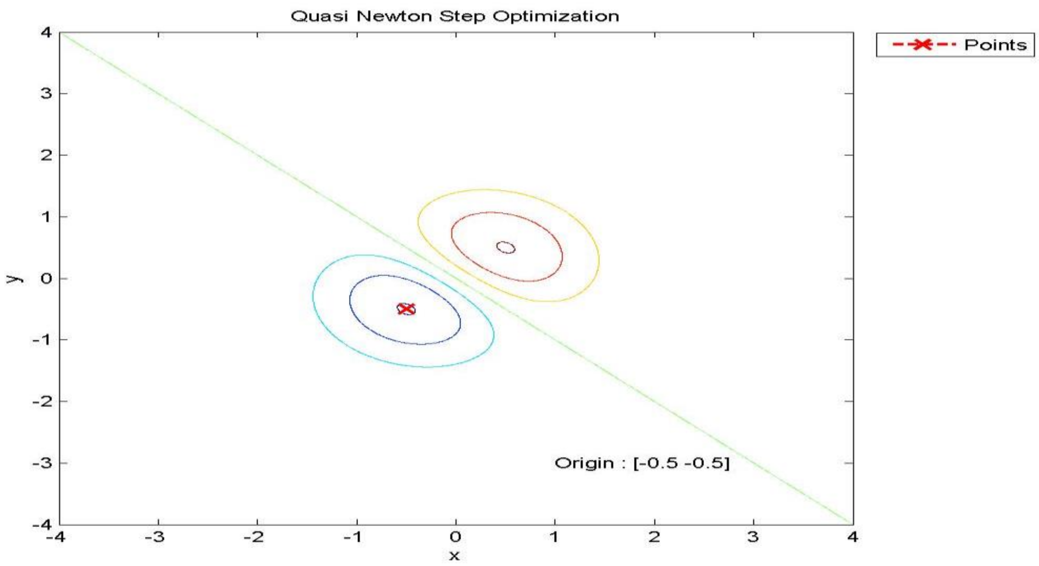

Quasi Newton Constant Step
Points
Origin : [-2 -1]
x
y

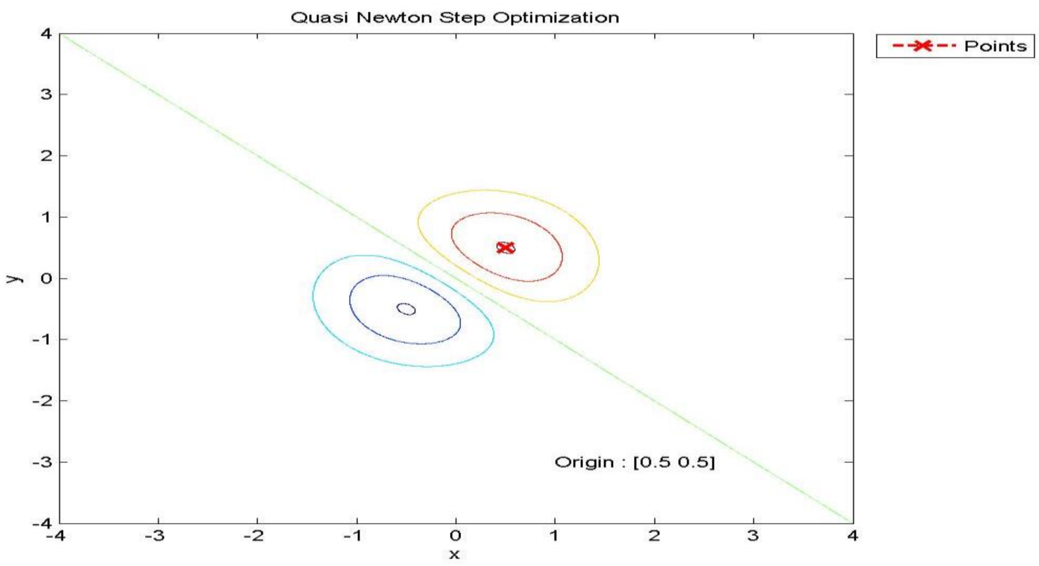

Quasi Newton Constant Step
Points
Origin : [-3 3]
x
y

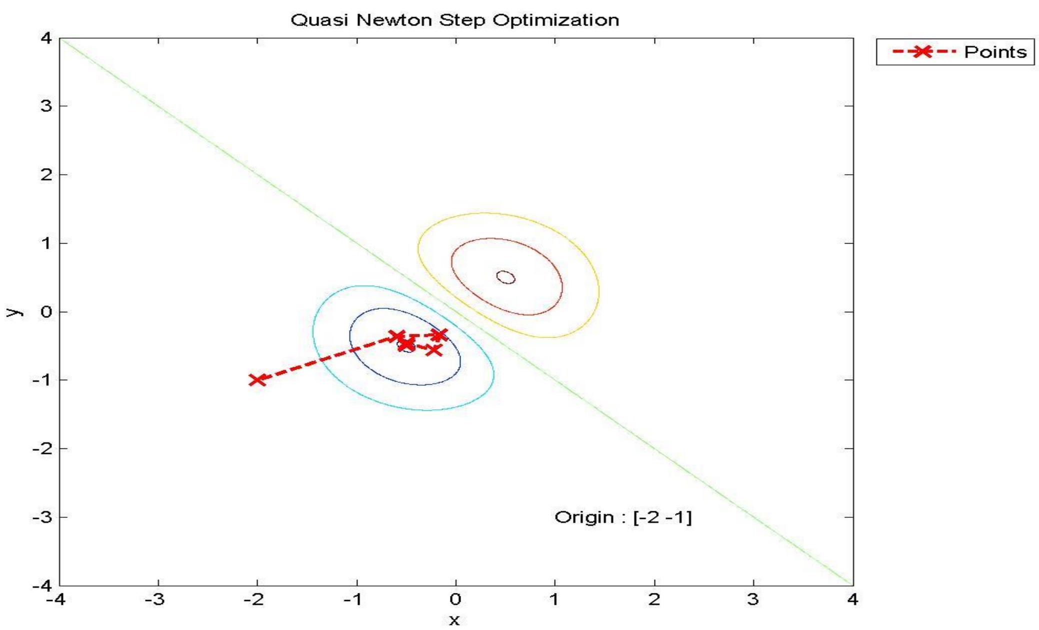
Παρατηρώντας λοιπόν και τα διαγράμματα βλέπουμε πως καταλήγουμε στα ίδια συμπεράσματα και με την παραπάνω ανάλυση. Βλέπουμε πως στα σημεία (-2,-10 και (-3,3) ο αλγόριθμος αποκλίνει έπειτα από πεπερασμένο αριθμό βημάτων. Επίσης δοκιμάστηκε ο αλγόριθμος και για μικρότερες τιμές του e, αλλά και μικρότερες τιμές του βήματος $γ_κ$, χωρίς ωστόσο να καταφέρει και πάλι σύγκλιση στο ελάχιστο της συνάρτησης f.

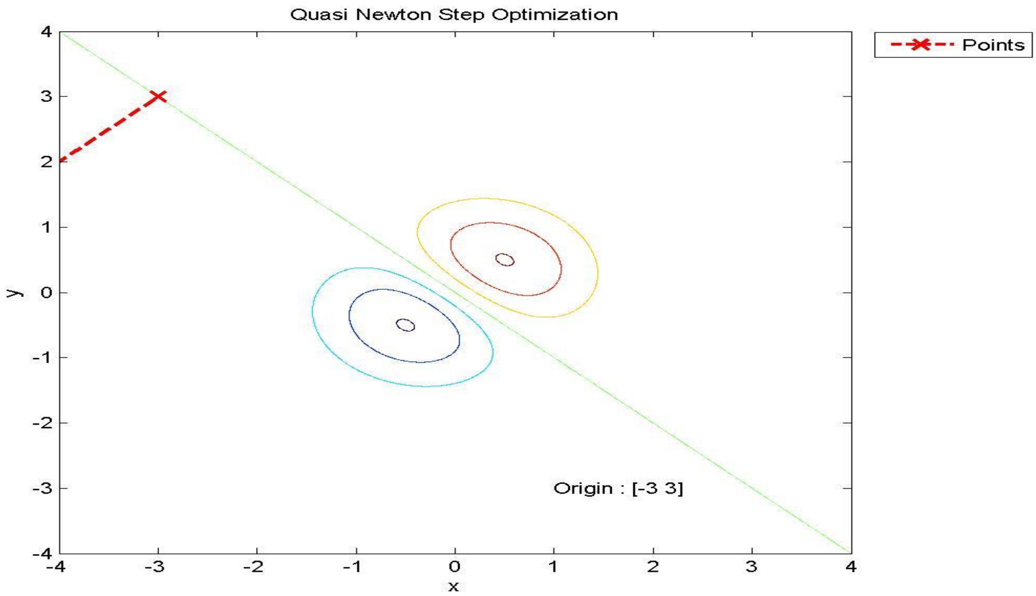
B) Επιλέγοντας βήμα $γ_κ$ τέτοιο ώστε να ελαχιστοποιείται η συνάρτηση $f(x_k+γ_κ d_k)$, δημιουργούμε τη συνάρτηση alg_quasiNewton2(e,co), όπου e είναι η σταθερά τερματισμού και co οι συντεταγμένες του αρχικού σημείου εκκίνησης. Για την ελαχιστοποίηση του βήματος $γ_κ$ χρησιμοποιούμε τη συνάρτηση BisDeriv που χρησιμοποιήσαμε και στις προηγούμενες μεθόδους, ενώ για να καθορίσουμε τα όρια μέσα στα οποία κυμαίνεται το βήμα $γ_κ$ χρησιμοποιούμε τη συνάρτηση PosDef για να δούμε αν είναι θετικά ορισμένος ο πίνακας Δ και έπειτα καθορίζουμε τα όρια. Επιλέγοντας ως ακρίβεια $e=10^{-8}$, εκτελούμε τον αλγόριθμο για τις τιμές (-0.5,-0.5), (0.5,0.5), (-2,-1), (-3,3) και παίρνουμε ως αποτέλεσμα αντίστοιχα τις τιμές (-0.5,-0.5), (0.5 0.5), (-0.5,-0.5) και (,). Παρατηρούμε λοιπόν πως και σε αυτόν τον αλγόριθμο ξεκινώντας από τα σημεία (-0.5,-0.5), (το ελάχιστο δηλαδή), και (-2,-1) καταλήγουμε στο ελάχιστο της συνάρτησης, ενώ από το (0.5,0.5) ο αλγόριθμος παραμένει στο ίδιο σημείο, όντας το μέγιστο της συνάρτησης, και από το (-3,3) αποκλίνει σε ένα διαφορετικό σημείο σε σχέση με τις προηγούμενες μεθόδους.

Παρακάτω φαίνονται τα διαγράμματα των ισοβαρών καμπυλών για τα σημεία (-0.5,-0.5), (0.5,0.5), (-2,-1), (-3,3) αντίστοιχα:


Quasi Newton Step Optimization
Points
Origin : [-0.5 -0.5]
x
y
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4


Quasi Newton Step Optimization
Points
Origin : [0.5 0.5]
x
y
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4


Quasi Newton Step Optimization
Points
Origin : [-2 -1]
x
y
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4

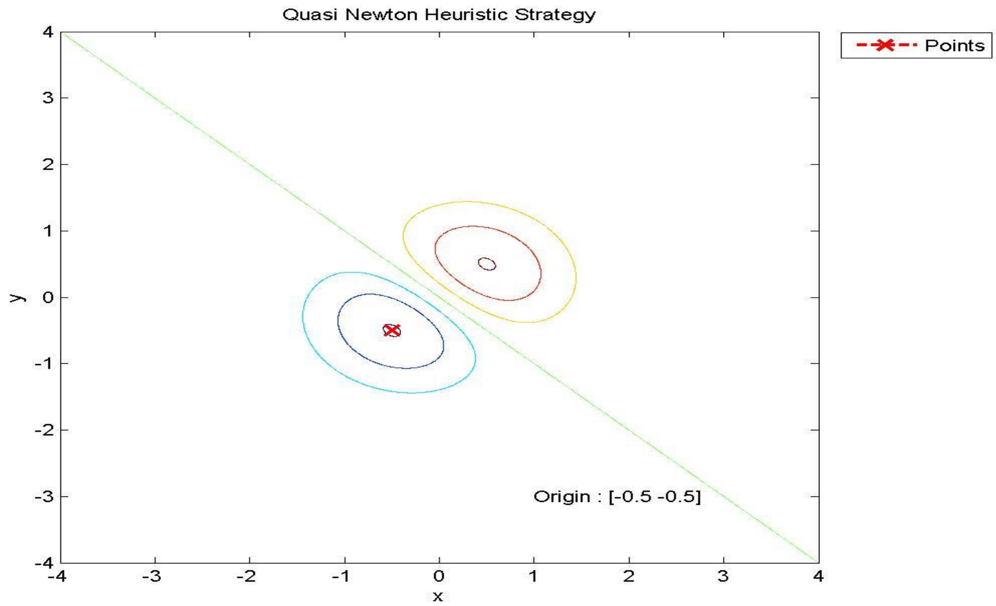


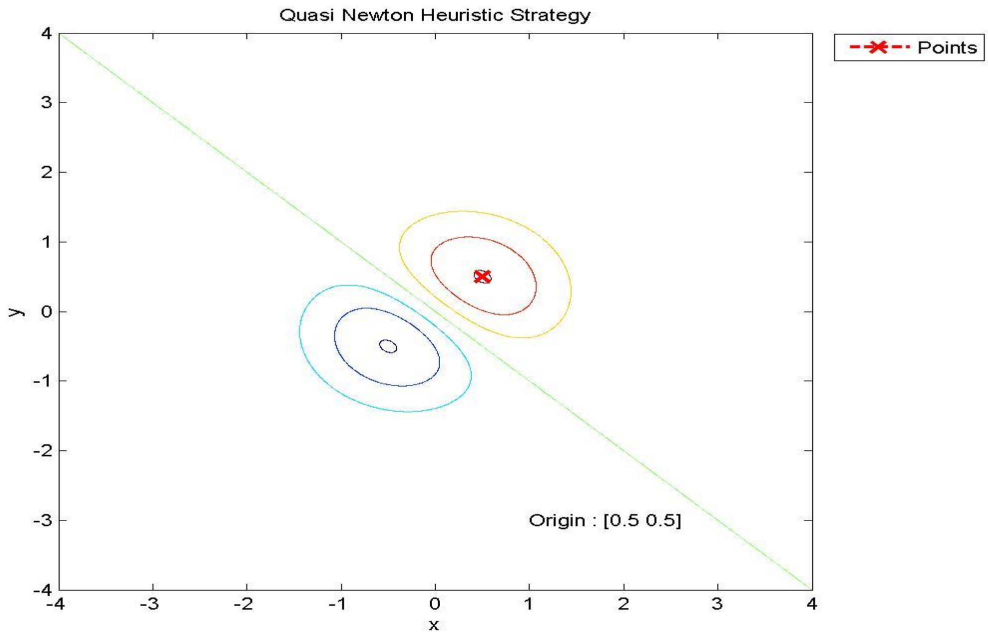
Σχηματίζοντας και τα διαγράμματα, συμπεραίνουμε πως καταλήγουμε στα ίδια με την παραπάνω ανάλυση. Σε αντίθεση με τον πρώτο αλγόριθμο, αυτός συγκλίνει στο σημείο (-2,-1) σε πεπερασμένο αριθμό βημάτων.

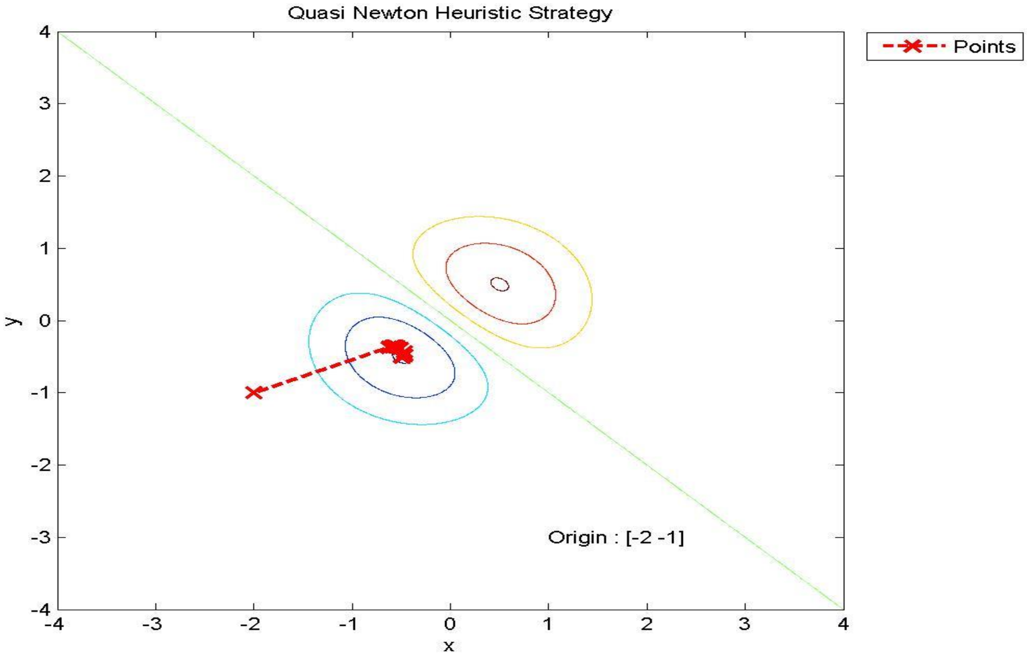
Γ) Χρησιμοποιώντας τώρα τον δικό μας ευριστικό αλγόριθμο για την επιλογή του βήματος γ_κ, δημιουργούμε τη συνάρτηση alg_quasiNewton3(e,co), όπου e είναι η σταθερά τερματισμού και co οι συντεταγμένες του αρχικού σημείου εκκίνησης. Ο ευριστικός αλγόριθμος που χρησιμοποιούμε ονομάζεται quasiNewtonHeur(r,int,d) και δέχεται ως ορίσματα το διάνυσμα θέσης r, τα αρχικά όρια αναζήτησης int και το διάνυσμα κατεύθυνσης d. Ο ευριστικός αλγόριθμος σαρώνοντας όλα τα πιθανά βήματα γ_κ μέσα στα όρια αναζήτησης, διαλέγει εκείνο για το οποίο η τιμή της συνάρτησης f είναι η ελάχιστη. Στον αλγόριθμο μας χρησιμοποιούμε ακόμη και τη συνάρτηση PosDef(Mat), για να καθορίζουμε κάθε φορά τα όρια αναζήτησης για το βήμα. Επιλέγοντας ως ακρίβεια $e=10^{-8}$, εκτελούμε τον αλγόριθμο για τις τιμές (-0.5,-0.5), (0.5,0.5), (-2,-1), (-3,3) και παίρνουμε ως αποτέλεσμα αντίστοιχα τις τιμές (-0.5,-0.5), (0.5 0.5),

(-0.5,-0.5) και (,). Βλέπουμε λοιπόν πως καταλήγουμε στα ίδια αποτελέσματα με τον προηγούμενο αλγορίθμο.

Παρακάτω φαίνονται τα διαγράμματα των ισοβαρών καμπυλών για τα σημεία (-0.5,-0.5), (0.5,0.5), (-2,-1), (-3,3) αντίστοιχα:







Όπως βλέπουμε λοιπόν και από τα διαγράμματα καταλήγουμε στα ίδια συμπεράσματα με την παραπάνω ανάλυση. Βλέπουμε επίσης πως ο συγκεκριμένος αλγόριθμος έχει παρόμοιο αριθμό βημάτων με τον προηγούμενο. Ωστόσο παρατηρούμε πως με τον ευριστικό αλγόριθμο το διάνυσμα θέσης κινείται πιο κοντά στο ελάχιστο σημείο σε σχέση με τον προηγούμενο αλγόριθμο.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ

Έπειτα από την εφαρμογή όλων των μεθόδων στη συνάρτηση f μπορούμε να καταλήξουμε στο συμπέρασμα πως η μέθοδος σχεδόν Newton είναι η επικρατέστερη, καθώς συγκλίνει στο ελάχιστο με τον μικρότερο αριθμό βημάτων. Ωστόσο είδαμε πως η μέθοδος Levenberg ήταν η μόνη, που παρά τον αρκετά μεγάλο αριθμό βημάτων που παρουσίαζε κοντά στο ελάχιστο, σύγκλινε στο ελάχιστο με σημείο εκκίνησης το (-3,3). Η μέθοδος Newton όπως είδαμε δεν σύγκλινε σε καμία περίπτωση, εκτός από όταν δίναμε αρχικό σημείο εκκίνησης το ελάχιστο, διότι ο πίνακας κατεύθυνσης προέκυπτε αρνητικά ορισμένος. Η μέθοδος της μέγιστης καθόδου είχε μεγάλη ακρίβεια σε όλες τις περιπτώσεις, πλην του σημείου (-3,3), κάνοντας ωστόσο έναν πολύ μεγάλο αριθμό βημάτων μέχρι τη σύγκλιση στο ελάχιστο. Τέλος η μέθοδος των συζυγών κλίσεων είχε και αυτή μεγάλη ακρίβεια συγκλίνοντας στο ελάχιστο με έναν αρκετά καλό αριθμό βημάτων. Επομένως αν θα έπρεπε να κατατάξουμε τις μεθόδους με βάση την ταχύτητα σύγκλισής τους τότε η σειρά θα ήταν μέθοδος σχεδόν Newton, μέθοδος συζυγών κλίσεων, μέθοδος Levenberg και τελευταία η μέθοδος της μέγιστης καθόδου, ενώ επικρατέστερη στον τομέα της απόλυτης ακρίβεια είναι η μέθοδος Levenberg. Η μέθοδος Newton δεν μπορεί να συμπεριληφθεί στην κατάταξη, καθώς απέκλινε σε κάθε περίπτωση και δεν μπορούμε να βγάλουμε ακριβές συμπέρασμα. Τέλος έπειτα από την εφαρμογή διαφόρων περιπτώσεων στην επιλογή του βήματος γ_κ καταλήγουμε στο συμπέρασμα πως ελαχιστοποιώντας τη συνάρτηση $f(x_k+\gamma_\kappa d_k)$ ως προς γ_κ σε κάθε επανάληψη, καταφέρνουμε να συγκλίνουμε στο ελάχιστο μ τον μικρότερο αριθμό επαναλήψεων, κερδίζοντας έτσι πολύ χρήσιμο υπολογιστικό χρόνο.