ΨΗΦΙΑΚΗ ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΕΙΚΟΝΑΣ

(ΕΡΓΑΣΙΑ 1)

ΟΝ/ΜΟ: ΝΗΡΑΣ ΔΗΜΗΤΡΗΣ

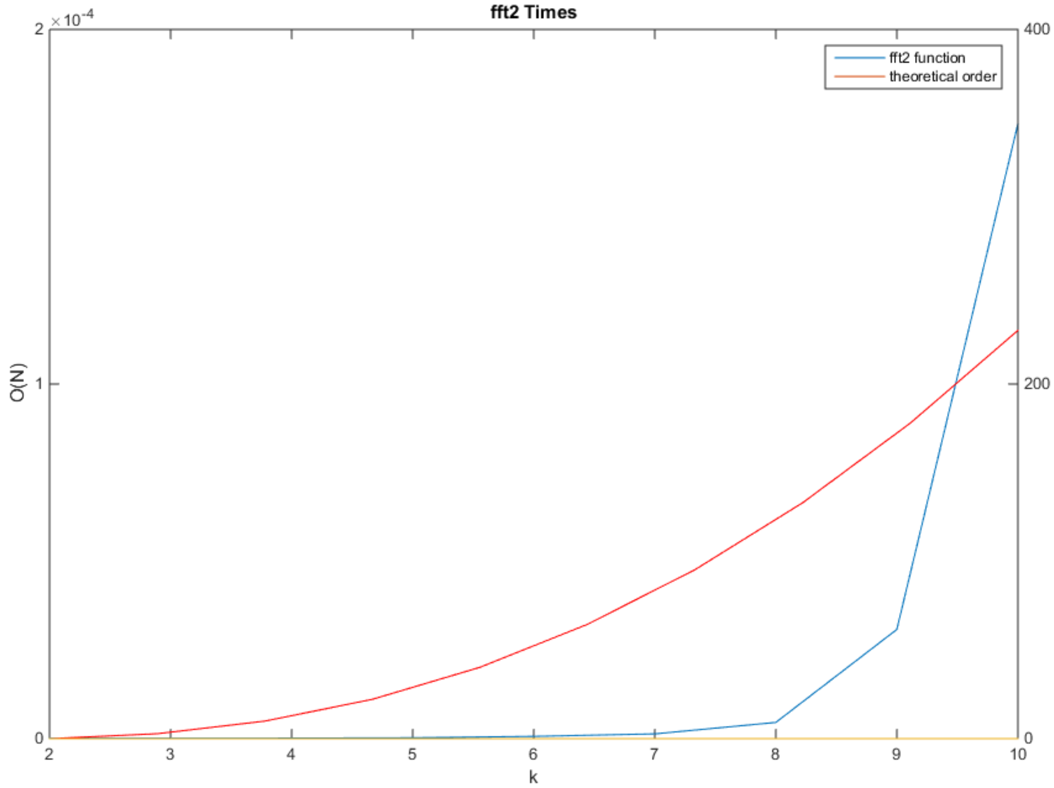
ΑΕΜ: 8057

email: diminira@auth.gr

Ζητούμενο 1

Στο ζητούμενο 1 έπρεπε να μελετήσουμε πειραματικά τη συνάρτηση fft2 του MATLAB, η οποία υλοποιεί τον διακριτό μετασχηματισμό Fourier ενός δισδιάστατου σήματος. Σύμφωνα με τη θεωρία η πολυπλοκότητα του FFT είναι **O(N*M*log(N*M))**, ενώ στη δική μας περίπτωση που έχουμε ίδια διάσταση πινάκων η πολυπλοκότητα θα είναι της τάξης **$O(N^2*log(N))$**. Για τη μελέτη λοιπόν του χρόνου εκτέλεσης της fft2 δημιουργήσαμε το script demo1a, στο οποίο τρέχουμε την fft2 για μεγέθη πινάκων εισόδου NxN, όπου $N=2^k$ με k=2,3,…,10. Επίσης την κάθε χρονομέτρηση την επαναλαμβάνουμε 100 φορές ώστε να έχουμε περισσότερη ευστάθεια.

Στο παρακάτω διάγραμμα λοιπόν φαίνονται δύο καμπύλες. Η πρώτη καμπύλη με το μπλε χρώμα είναι αυτή που παρουσιάζει τους μέσους χρόνους εκτέλεσης της fft2 ως προς το N, ενώ η δεύτερη με το κόκκινο χρώμα είναι αυτή που παρουσιάζει τη θεωρητική πολυπλοκότητα του fft2 για τις ίδιες τιμές του N. Στο διάγραμμα επίσης υπάρχουν 2 άξονες y, ένας αριστερά ο οποίος αντιστοιχεί στην πρώτη καμπύλη και ένας δεξιά ο οποίος αντιστοιχεί στη δεύτερη καμπύλη. Αυτό συνέβη καθώς υπάρχει αρκετά μεγάλη διαφορά στις τιμές της πολυπλοκότητας σε σχέση με αυτές του μέσου χρόνου εκτέλεσης και δεν θα υπήρχε ομοιομορφία στο διάγραμμα.



Όπως βλέπουμε λοιπόν από το διάγραμμα οι δύο καμπύλες έχουν παρόμοια μορφή αυξάνοντας με εκθετικό τρόπο. Παρατηρούμε επίσης πως οι καμπύλες έχουν περίπου ίδια κλίση εκτός της τιμής k=10, στην οποία βλέπουμε πως η πρώτη καμπύλη έχει πολύ πιο απότομη αύξηση σε σχέση με τη δεύτερη.

Ζητούμενο 2.1

Στο ζητούμενο 2.1 ζητήθηκε η υλοποίηση της συνάρτησης myconv2(h,x), η οποία υλοποιεί τη δισδιάστατη συνέλιξη μεταξύ των πεπερασμένων σημάτων h και x. Στην υλοποίηση της συνάρτησης δεν χρησιμοποιήθηκε η έτοιμη συνάρτηση conv2 που παρέχει το MATLAB, αλλά χρησιμοποιήθηκε ο ορισμός της δισδιάστατης συνέλιξης για την υλοποίηση αυτής. Στη συνάρτηση υπολογίζουμε αρχικά τα μεγέθη των πινάκων x και h και το μέγεθος του πίνακα που θα έχει η συνέλιξη αυτών. Στη συνέχεια επεκτείνουμε τον πίνακα h και δημιουργούμε έναν καινούριο πίνακα όπου θα έχει μηδενικά στις αρνητικές τιμές που θα προκύπταν από τον ορισμό στο διπλό άθροισμα, αλλά και στις τιμές που είναι μεγαλύτερες του μεγέθους του πίνακα. Στη συνέχεια υπολογίζουμε τη συνέλιξη των 2 σημάτων σύμφωνα με τον ορισμό, χρησιμοποιώντας 2 επαναλήψεις for και ένα διπλό άθροισμα. Για επιβεβαίωση της ορθής λειτουργίας της συνάρτησης, την εφαρμόσαμε στα σήματα x, y που περιέχονται στο αρχείο data.mat και προέκυψε το εξής αποτέλεσμα:

3.4655	16.4916	30.9824	27.8706	9.3879
5,0339	26.1971	49.2425	47.6631	19.5990
22.4419	29.3474	31.7719	27.9956	10.9564
10.6887	22.5403	7.7466	9.2875	1.7925

Εφαρμόζοντας τώρα τη συνάρτηση conv2(h,x) που παρέχεται από το MATLAB στα ίδια σήματα x, y παρατηρούμε πως καταλήγουμε στον ίδιο αποτέλεσμα με προηγουμένως. Επιβεβαιώσαμε έτσι λοιπόν την ορθότητα της συνάρτησης.

Ζητούμενο 2.2

Στο ζητούμενο 2.2 ζητήθηκε η υλοποίηση της συνάρτησης myconv2freq(h,x), η οποία και αυτή με τη σειρά της υλοποιεί τη δισδιάστατη συνέλιξη μεταξύ των πεπερασμένων σημάτων h και x, αλλά αυτή τη φορά εφαρμόζοντας μετασχηματισμούς DFT και IDFT και κατάλληλο zero padding. Υπολογίζουμε αρχικά και πάλι τα μεγέθη των πινάκων x και h και το μέγεθος του πίνακα που θα έχει η συνέλιξη αυτών. Στη συνέχεια επεκτείνουμε τους δύο πίνακες με μηδενικά μέχρι τη διάσταση του πίνακα που θα έχει η συνέλιξη αυτών. Έπειτα μέσω της fft2 συνάρτησης βρίσκουμε τους διακριτούς μετασχηματισμούς Fourier των επεκτεταμένων πινάκων και τους πολλαπλασιάζουμε. Ο πολλαπλασιασμός των δύο αυτών πινάκων μας δίνει το μετασχηματισμό Fourier της συνέλιξης των σημάτων. Εφαρμόζοντας επομένως αντίστροφο διακριτό μετασχηματισμό Fourier, μέσω της ifft2 συνάρτησης, προκύπτει η συνέλιξη των δύο σημάτων h και x. Η θεωρητική τεκμηρίωση των παραπάνω βρίσκεται στην διάλεξη 6 των διαφανειών του κ. Ντελόπουλου και συγκεκριμένα στις διαφάνειες 14 – 17. Όπως και προηγουμένως για επιβεβαίωση της ορθής λειτουργίας της συνάρτησης, την εφαρμόσαμε στα σήματα x, y που περιέχονται στο αρχείο data.mat και προέκυψε το ίδιο αποτέλεσμα με την myconv2, επιβεβαιώνοντας έτσι και στη συγκεκριμένη περίπτωση την ορθότητα της συνάρτησης.

Ζητούμενο 3.1

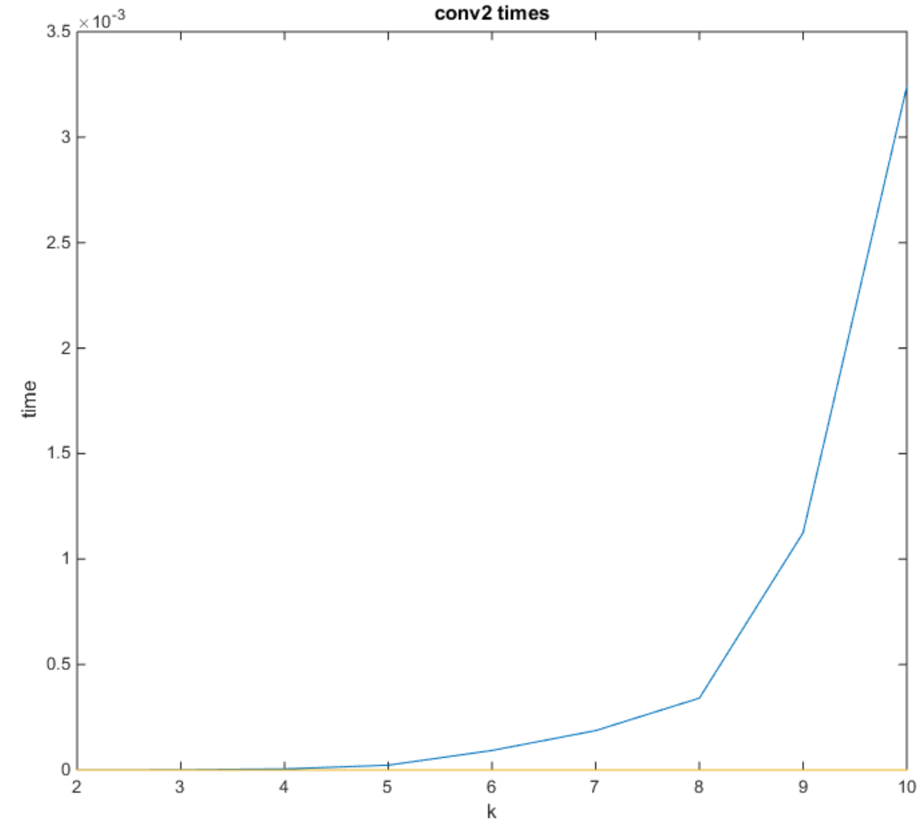
Στο εξής ζητούμενο ζητείται ο υπολογισμός της θεωρητικής πολυπλοκότητας του υπολογισμού της δισδιάστατης συνέλιξης, όπως υλοποιήθηκε στην myconv2 συνάρτηση, θεωρώντας σταθερές τις διαστάσεις της εικόνας h. Αναλύοντας τη συνάρτηση επομένως βλέπουμε πως αποτελείται από μία διπλή επανάληψη for, στο εσωτερικό των οποίων συντελείται η επέκταση του σήματος h. Η πολυπλοκότητα των δύο επαναλήψεων είναι **(K1+M1)*(K2+M2)*1**, όπου (K1,K2) οι διαστάσεις της συνέλιξης των δύο σημάτων και (M1,M2) οι διαστάσεις του σήματος x. Στη συνέχεια υπάρχει και πάλι ένα διπλό for, στο εσωτερικό του οποίου υπολογίζεται η συνέλιξη των σημάτων σημείο προς σημείο, μέσω ενός διπλού αθροίσματος. Η πολυπλοκότητα του κομματιού αυτού είναι **K1*K2*M1*M2**. Η συνολική πολυπλοκότητα της συνάρτησης επομένως θα είναι **(K1*K2*M1*M2)+(K1+M1)*(K2+M2)**. Η συνάρτηση επομένως θα έχει πολυπλοκότητα της τάξης **O(K1*K2*M1*M2) = O((M1+N1-1)*(M2+N2-1)*M1*M2)** και επειδή N1,N2 σταθερά μεγέθη έχουμε **O(M1*M1*M2*M2) =** $\mathbf{O(M^4)}$ εάν M1=M2.

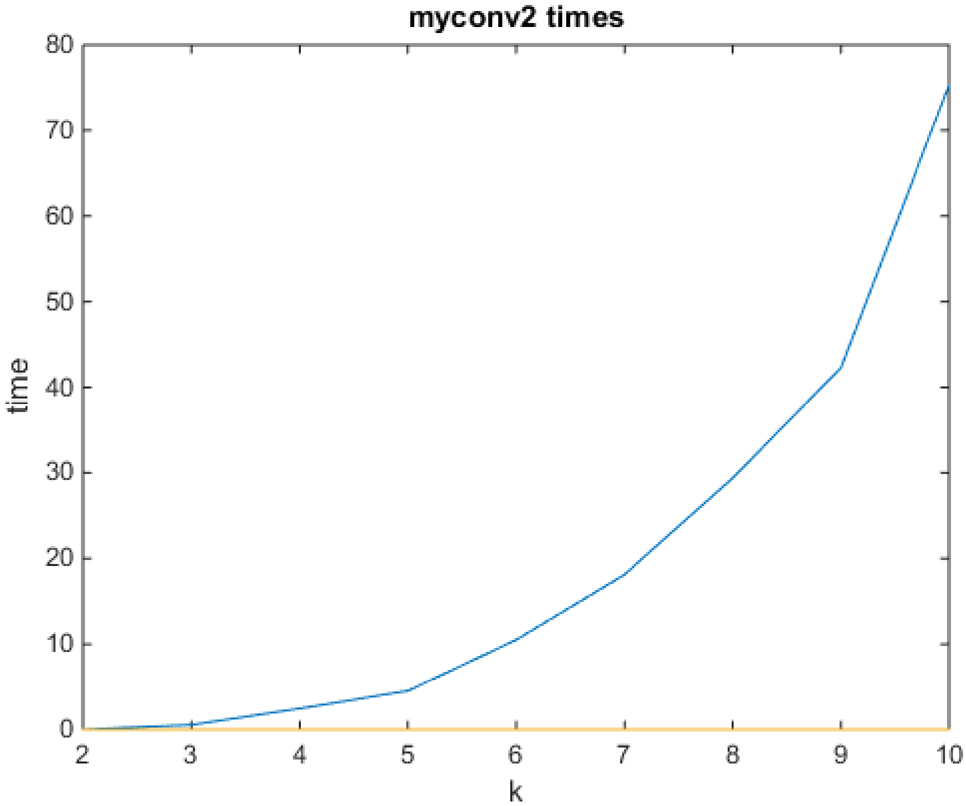
Ζητούμενο 3.2

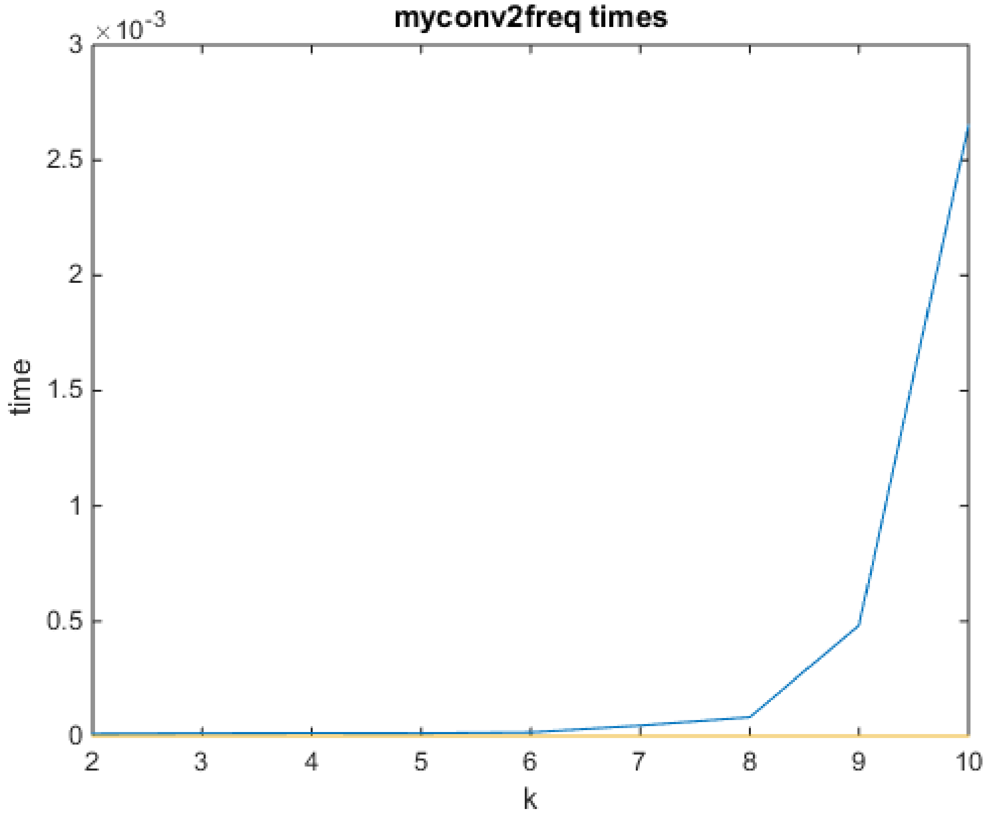
Στο ζητούμενο αυτό ζητείται και πάλι ο υπολογισμός της θεωρητικής πολυπλοκότητας του υπολογισμού της δισδιάστατης συνέλιξης, αλλά αυτή τη φορά για την myconv2freq συνάρτηση, θεωρώντας και πάλι σταθερές τις διαστάσεις της εικόνας h. Αναλύοντας τη συνάρτηση βλέπουμε πως αποτελείται και αυτή από μία διπλή επανάληψη for στο εσωτερικό των οποίων συντελείται η επέκταση με μηδενικά των σημάτων h και x. Η πολυπλοκότητα του κομματιού αυτού θα είναι **K1*K2*1**, όπου (K1,K2) όπως και πριν είναι οι διαστάσεις της συνέλιξης των 2 σημάτων. Στη συνέχεια υπάρχουν οι δύο DFT, οι οποίοι υλοποιούνται μέσω της συνάρτησης fft2, η οποία ως γνωστών έχει πολυπλοκότητα τάξης **O(N*M*log(N*M))**. Στη συγκεκριμένη περίπτωση η πολυπλοκότητα θα είναι της τάξης **O(K1*K2*log(K1*K2))**. Έπειτα έχουμε πολλαπλασιασμό των δύο μετασχηματισμών. Ο πολλαπλασιασμός δισδιάστατων πινάκων στο MATLAB έχει πολυπλοκότητα της τάξης $\mathbf{O(N^2)}$, όπου N θα είναι η διάσταση των πινάκων που πολλαπλασιάζονται. Τέλος έχουμε έναν αντίστροφο DFT ο οποίος υλοποιείται μέσω της συνάρτησης ifft2, η οποία και αυτή με τη σειρά της θα έχει πολυπλοκότητα της τάξης **O(K1*K2*log(K1*K2))**. Η πολυπλοκότητα επομένως που θα έχει η συνάρτηση στη χειρότερη περίπτωση θα είναι της τάξης **O(K1*K2*log(K1*K2)) =** $\mathbf{O(M^2*\log(M))}$ εάν M1=M2 και εφόσον N1,N2 σταθερά μεγέθη**.**

Ζητούμενο 3.3

Στο τελευταίο ζητούμενο ζητείται να μελετήσουμε πειραματικά την πολυπλοκότητα των συναρτήσεων conv2, myconv2 και myconv2freq, θεωρώντας σταθερές τις διαστάσεις της εικόνας h. Συγκεκριμένα χρησιμοποιήθηκε τυχαία εικόνα h διαστάσεων 64x64. Υλοποιήθηκαν επομένως τα scripts demo1b, demo1c και demo1d, τα οποία μελετούν την πολυπλοκότητα αντίστοιχα των παραπάνω συναρτήσεων με τον ίδιο τρόπο όπως και στο demo1a, για σήμα x δηλαδή με διαστάσεις NxN, όπου $N=2^k$ με k=2,3,…,10 και επανάληψη της χρονομέτρησης 100 φορές. Τρέχοντας τα παραπάνω scripts προκύπτουν τα εξής αποτελέσματα:

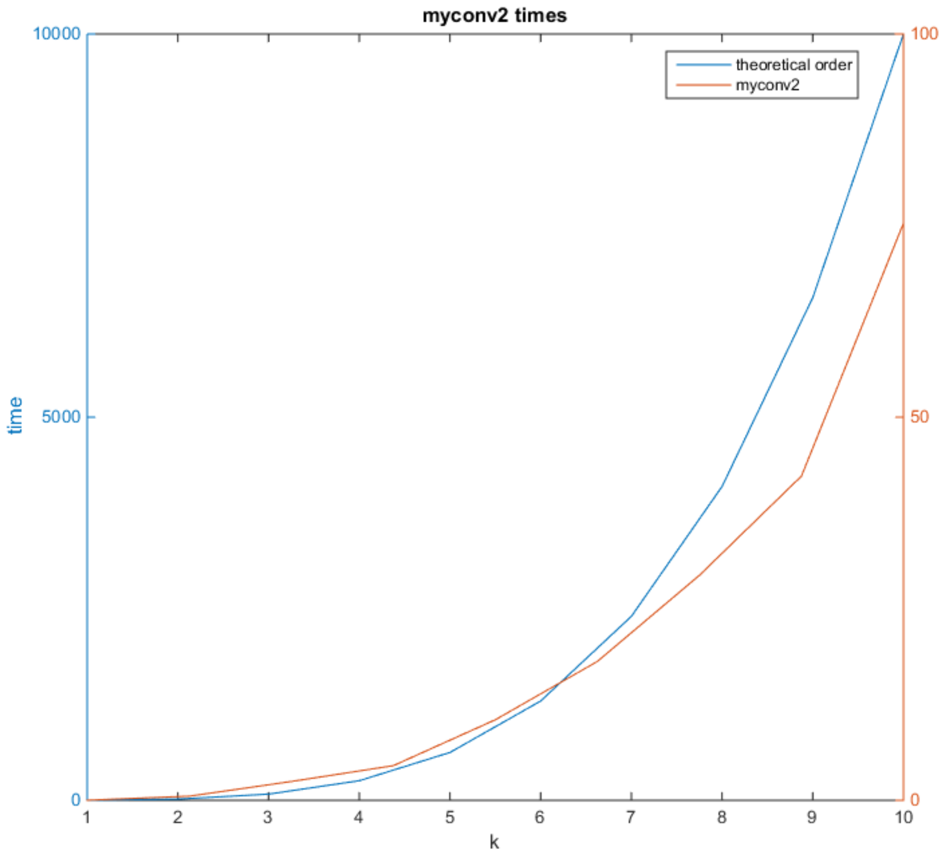


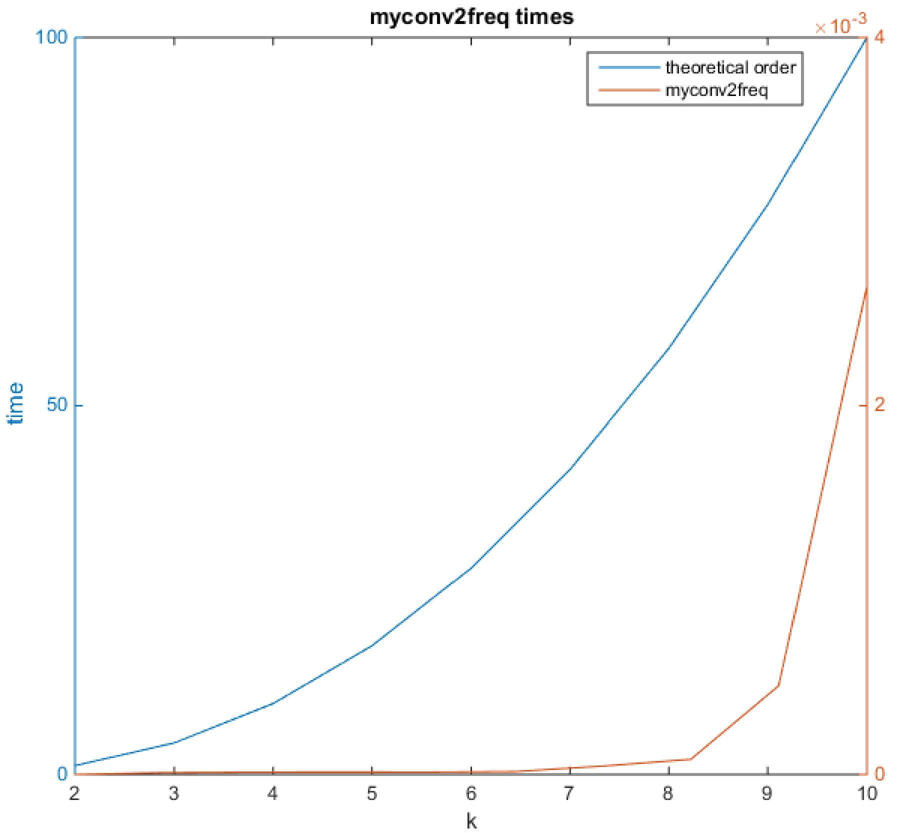




Όπως φαίνεται από τα παραπάνω διαγράμματα η συνάρτηση myconv2freq είναι η πιο γρήγορη από όλες, καθώς χρησιμοποιεί βελτιστοποιημένους μετασχηματισμούς Fourier για τον υπολογισμό της συνέλιξης. Βλέπουμε ωστόσο ότι οι διαφορές της με την conv2 του MATLAB είναι ελάχιστες. Αυτό συμβαίνει καθώς χρησιμοποιήσαμε πίνακα h μικρών διαστάσεων. Παρατηρήθηκε πως όταν αυξάνει η διάσταση του πίνακα h τότε η myconv2freq είναι πιο γρήγορη από την conv2, έχοντας ορισμένες φορές μέχρι και διαφορά τάξης. Η myconv2 είναι η πιο αργή από όλες, κάνοντας σημαντικά περισσότερο χρόνο να υπολογίσει τη συνέλιξη των σημάτων. Αυτό συμβαίνει καθώς χρησιμοποιεί επαναλήψεις for και αθροίσματα sum για τον υπολογισμό της.

Στα δύο παρακάτω διαγράμματα μπορούμε να δούμε τις καμπύλες της πειραματικής πολυπλοκότητας όπως προέκυψαν παραπάνω σε σύγκριση με τις αντίστοιχες καμπύλες της θεωρητικής πολυπλοκότητας, σύμφωνα με τα ζητούμενα 3.1 και 3.2.


myconv2 times
10000
5000
0
time
100
50
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
k
theoretical order
myconv2


myconv2freq times
100
50
0
time
×10^-3
4
2
0
2
3
4
5
6
7
8
9
10
k
theoretical order
myconv2freq

Όπως ακριβώς και στο ζητούμενο 1 έτσι και εδώ παρουσιάζονται οι καμπύλες πειραματικής και θεωρητικής πολυπλοκότητας στο ίδιο διάγραμμα, έχοντας δύο y άξονες, έναν στα αριστερά που αντιπροσωπεύει τις τιμές της θεωρητικής πολυπλοκότητας και έναν δεξιά που αντιπροσωπεύει τις τιμές της πειραματικής. Για την myconv2 παρατηρούμε πως ακολουθεί παρόμοια κλίση με τη θεωρητική πολυπλοκότητα αυξάνοντας εκθετικά. Για την myconv2freq παρατηρούμε ωστόσο πως δεν αυξάνεται ακριβώς με τον ίδιο τρόπο σε σχέση με τη θεωρητική πολυπλοκότητα, όντας περισσότερο ομαλή στις μικρές τιμές και αυξάνοντας απότομα στις μεγαλύτερες.