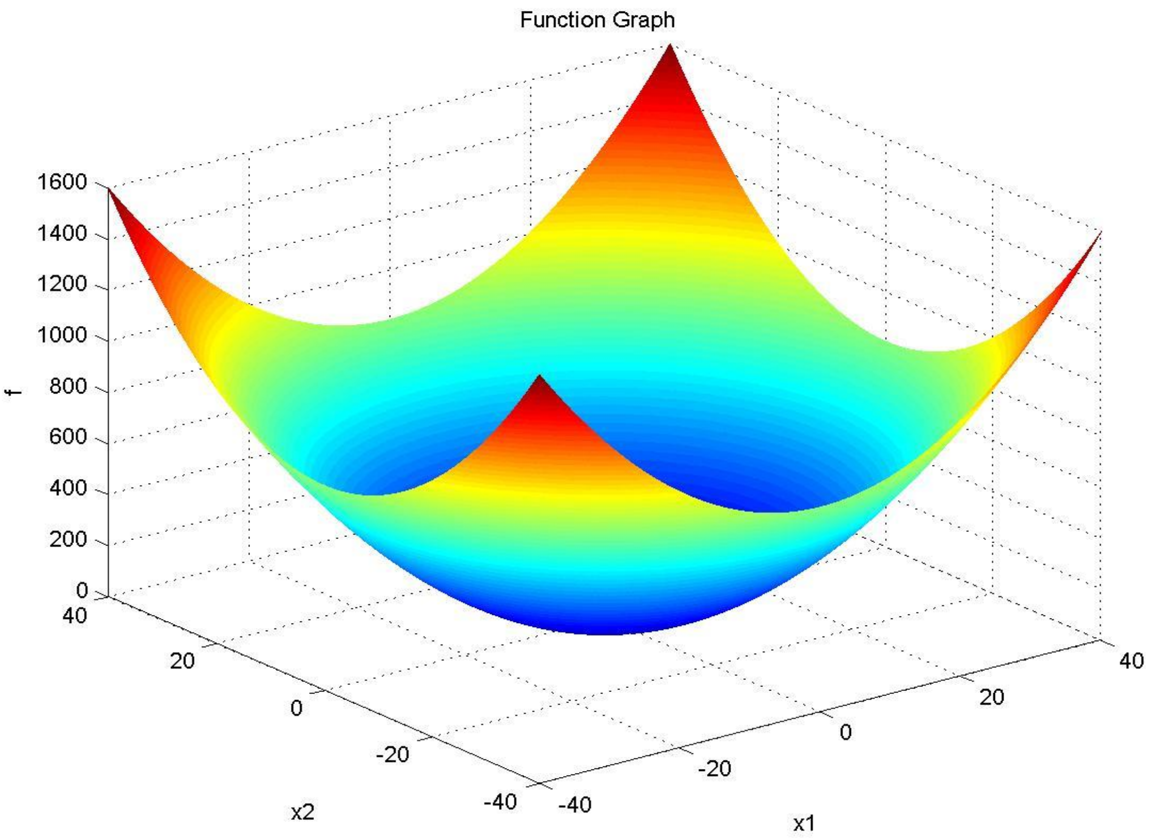
<u>ΤΕΧΝΙΚΕΣ ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ</u>

<u>4η ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΑΚΗ ΑΣΚΗΣΗ</u>

ΟΝ/ΜΟ: Νήρας Δημήτρης

ΑΕΜ: 8057

Σκοπός της εργασίας αυτής είναι η ελαχιστοποίηση της τετραγωνικής συνάρτησης f(x)=$\frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2$ με τη μέθοδο της μέγιστης καθόδου που είδαμε στην προηγούμενη εργασία χωρίς περιορισμούς και με τη μέθοδο της μέγιστης καθόδου με προβολή με περιορισμούς. Οι περιορισμοί που θέτονται είναι οι εξής: $-20 \le x_1 \le 10$ και $-12 \le x_2 \le 15$. Η συνάρτηση f(x) είναι κυρτή ως άθροισμα κυρτών συναρτήσεων και η γραφική της παράσταση φαίνεται παρακάτω:

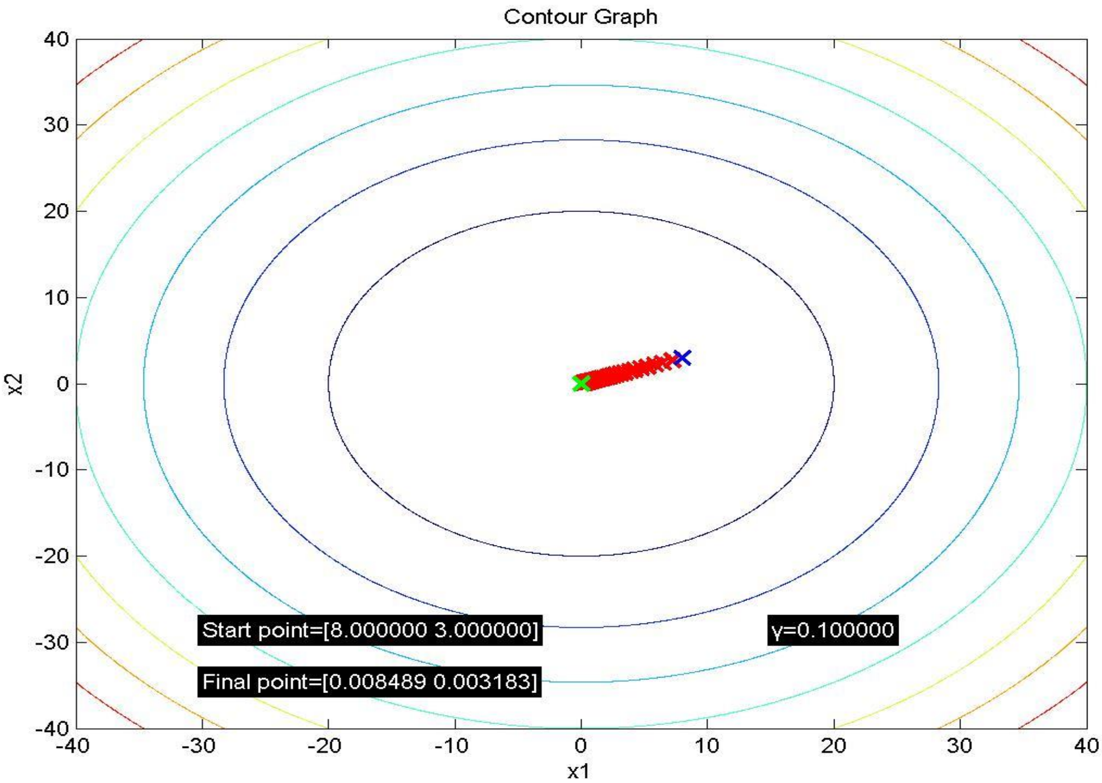


Φαίνεται και από την γραφική παράσταση της f(x) ότι είναι μια κυρτή συνάρτηση με ελάχιστο στο (0,0).

<u>ΜΕΘΟΔΟΣ ΜΕΓΙΣΤΗΣ ΚΑΘΟΔΟΥ</u>

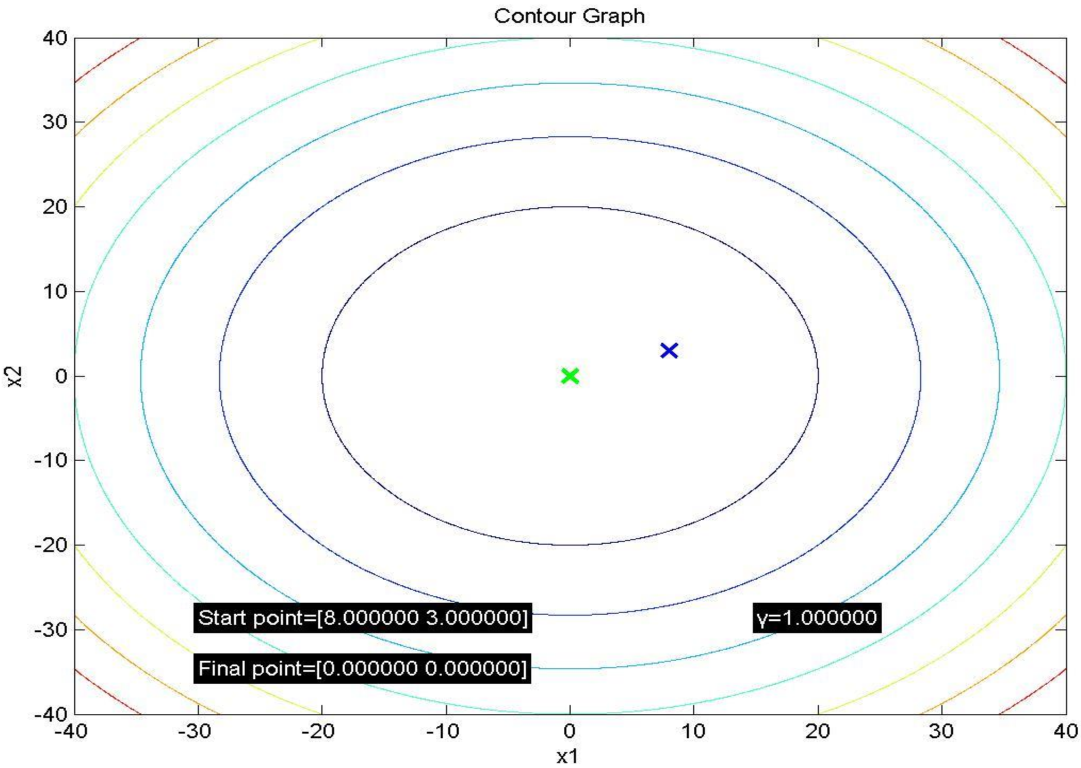
Α) Για την ελαχιστοποίηση της f(x) θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο της μέγιστης καθόδου της προηγούμενης εργασίας με όνομα alg_meg_kathodou1(e,g,co), όπου e η επιθυμητή ακρίβεια, g το βήμα γ_κ και co οι συντεταγμένες του αρχικού σημείου εκκίνησης του αλγορίθμου. Χρησιμοποιώντας e=0.01 και ως αρχικό σημείο το co=(8,3) έχουμε τις εξής περιπτώσεις:

i. Για βήμα γ_κ=0.1 παρατηρούμε πως ο αλγόριθμος συγκλίνει στο σημείο (0.008489,0.003183), πολύ κοντά στο ελάχιστο με ακρίβεια e=0.01. Παρακάτω φαίνεται και το διάγραμμα των ισοβαρών καμπυλών:



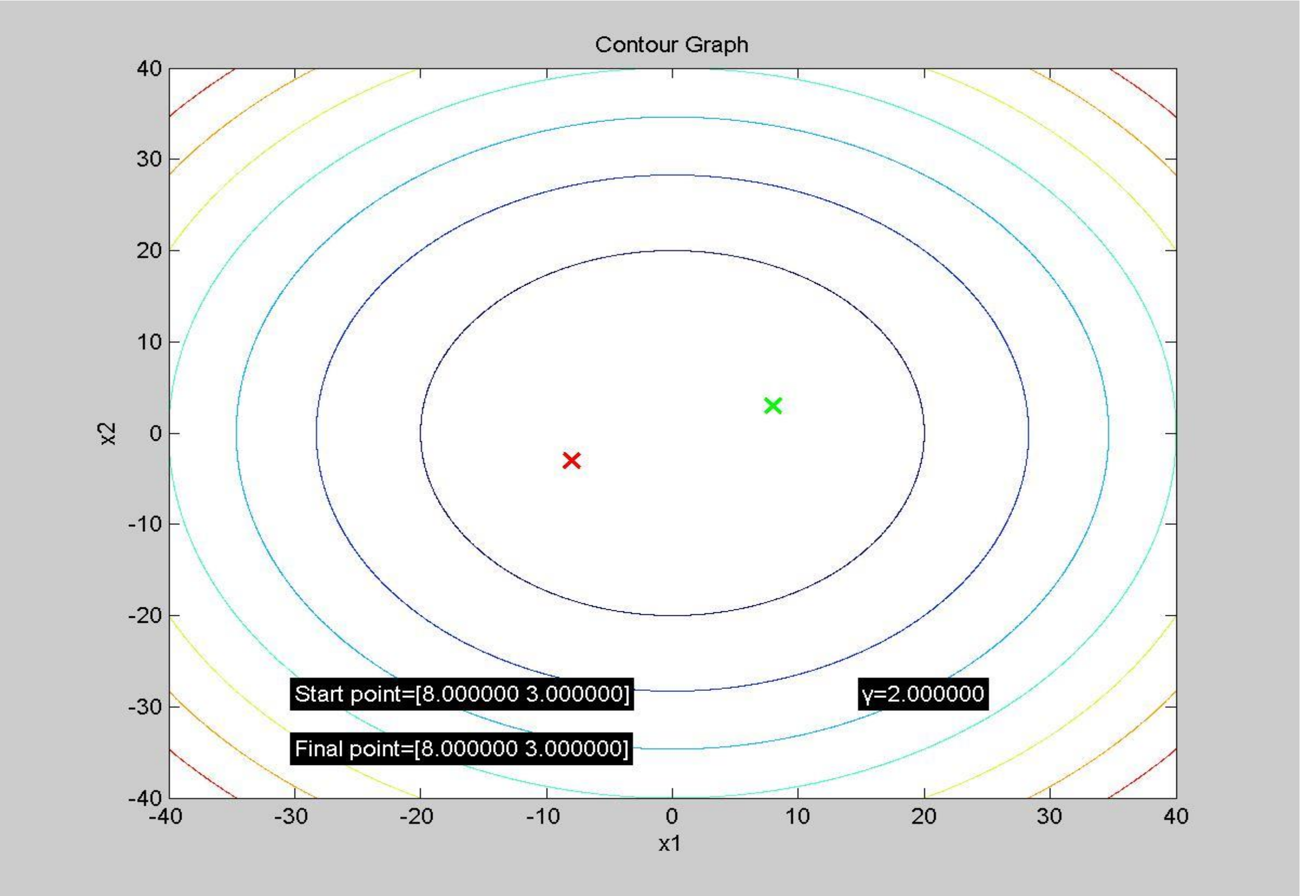
Όπως βλέπουμε και από το διάγραμμα ο αλγόριθμος συγκλίνει στο ελάχιστο έπειτα από πεπερασμένο αριθμό βημάτων.

ii. Για βήμα γ_κ=1 παρατηρούμε ότι ο αλγόριθμος συγκλίνει ακριβώς στο ελάχιστο (0,0). Παρακάτω φαίνεται και το διάγραμμα των ισοβαρών καμπυλών:



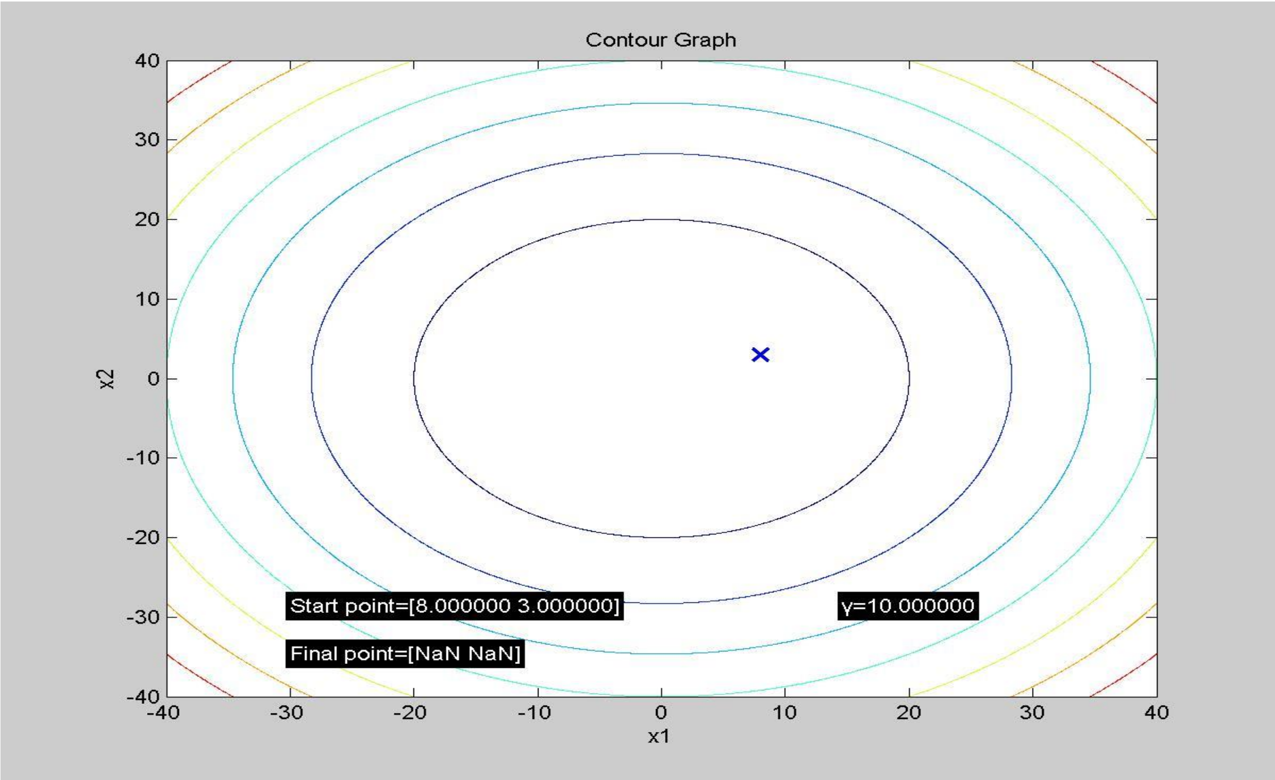
Από το διάγραμμα διακρίνουμε πως ο αλγόριθμος συγκλίνει στο ελάχιστο μετά από μια επανάληψη ακριβώς.

iii. Για βήμα γ_κ=2 ο αλγόριθμος μας δίνει ως αποτέλεσμα το αρχικό σημείο εκκίνησης (8,3) χωρίς να συγκλίνει έτσι στο ελάχιστο. Παρακάτω φαίνεται και το διάγραμμα των ισοβαρών καμπυλών:



Όπως βλέπουμε και από το διάγραμμα σε κάθε επανάληψη ο αλγόριθμος εναλλάσσεται στα σημεία (-8,-3) και (8,3) μη συγκλίνοντας έτσι στο ελάχιστο. Ο αλγόριθμος δεν τερματίζει ποτέ αφού εναλλάσσεται συνέχεια μεταξύ αυτών των δύο σημείων και τα αποτελέσματα που πήραμε είναι για 100000 επαναλήψεις.

iv. Για γ_κ=10 βλέπουμε πως ο αλγόριθμος αποκλίνει στο άπειρο. Παρακάτω φαίνεται το διάγραμμα ισοβαρών καμπυλών:



Από το διάγραμμα δεν διακρίνουμε καμία επανάληψη καθώς ο αλγόριθμος αποκλίνει σε πολύ μεγάλες τιμές.

Για να αποδειχθούν τα παραπάνω αποτελέσματα και μαθηματικά θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε τη βασική σχέση που χρησιμοποιεί ο αλγόριθμος, δηλαδή ότι $x_{k+1} = x_k - \gamma_k * grad(f(x_k))$, όπου $grad(f(x_k)) = \begin{matrix} x1 \\ x2 \end{matrix} = x_k$,άρα $x_{k+1} = x_k - \gamma_k x_k = (1-\gamma_k)x_k$.

Δεδομένου ότι η κλίση της f στο σημείο x_k μας επιστρέφει το σημείο x_k τότε εύκολα μπορούμε να διακρίνουμε πως για οποιαδήποτε τιμή του βήματος $\gamma_\kappa<1$ η τιμή x_{k+1} που θα προκύπτει θα είναι μικρότερη από την προηγούμενη τιμή x_k και έτσι επομένως ο αλγόριθμος μετά από πεπερασμένο αριθμό βημάτων θα συγκλίνει στο ελάχιστο.

Για βήμα $γ_κ$=1 βλέπουμε πως το επόμενο σημείο x_{k+1} που προκύπτει θα είναι το μηδέν, δηλαδή το ελάχιστο της συνάρτησης, επομένως γι αυτό το λόγο για το συγκεκριμένο βήμα ο αλγόριθμος συγκλίνει σε μία μόνο επανάληψη.

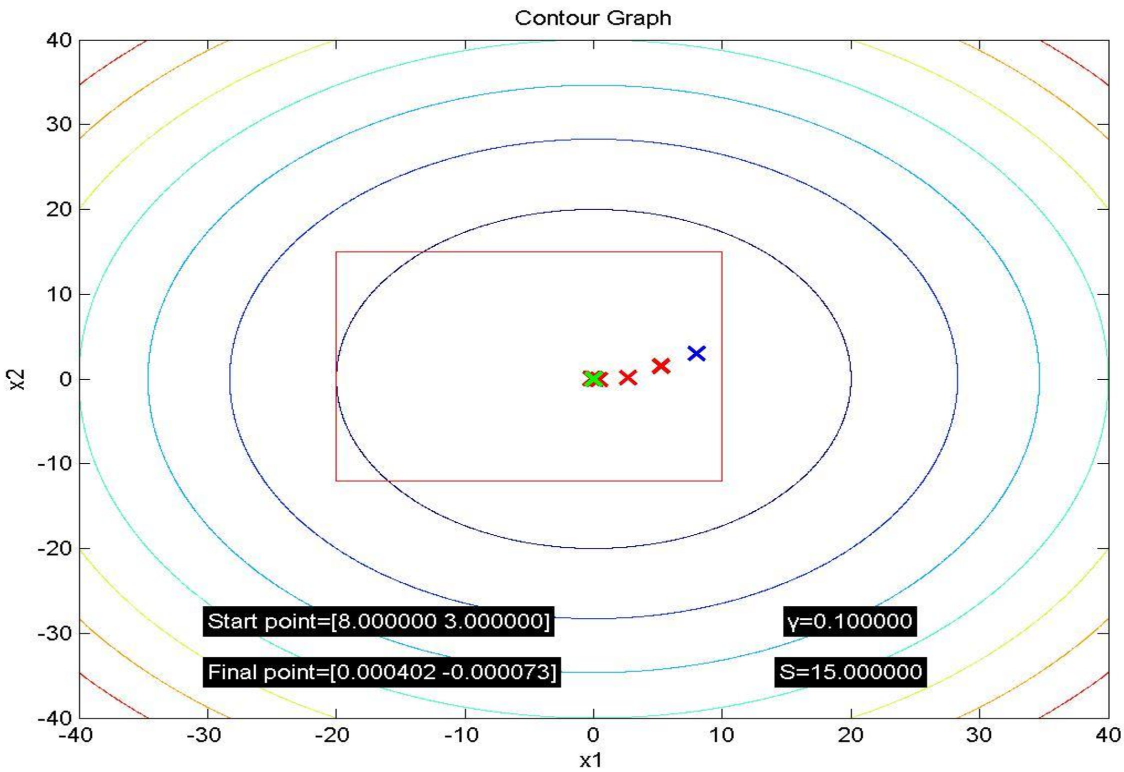
Για βήμα τώρα $γ_κ$=2 παρατηρούμε πως η επόμενη τιμή που προκύπτει κάθε φορά θα είναι η αντίθετη της προηγούμενης και συγκεκριμένα του αρχικού σημείου εκκίνησης. Επομένως ο αλγόριθμος θα ταλαντώνεται ανάμεσα σε δύο σημεία, στο αρχικό σημείο εκκίνησης και στο αντίθετό του χωρίς να τερματίζει πότε.

Τέλος για βήμα $γ_κ$=10, αλλά και γενικότερα για οποιοδήποτε βήμα μεγαλύτερο του 2, ο αλγόριθμος αποκλίνει καθώς η επόμενη τιμή x_{k+1} που προκύπτει κάθε φορά θα είναι μεγαλύτερη κατά απόλυτη τιμή από την προηγούμενη x_k, με αποτέλεσμα ο αλγόριθμος να μην καταφέρνει να συγκλίνει ποτέ.

ΜΕΘΟΔΟΣ ΜΕΓΙΣΤΗΣ ΚΑΘΟΔΟΥ ΜΕ ΠΡΟΒΟΛΗ

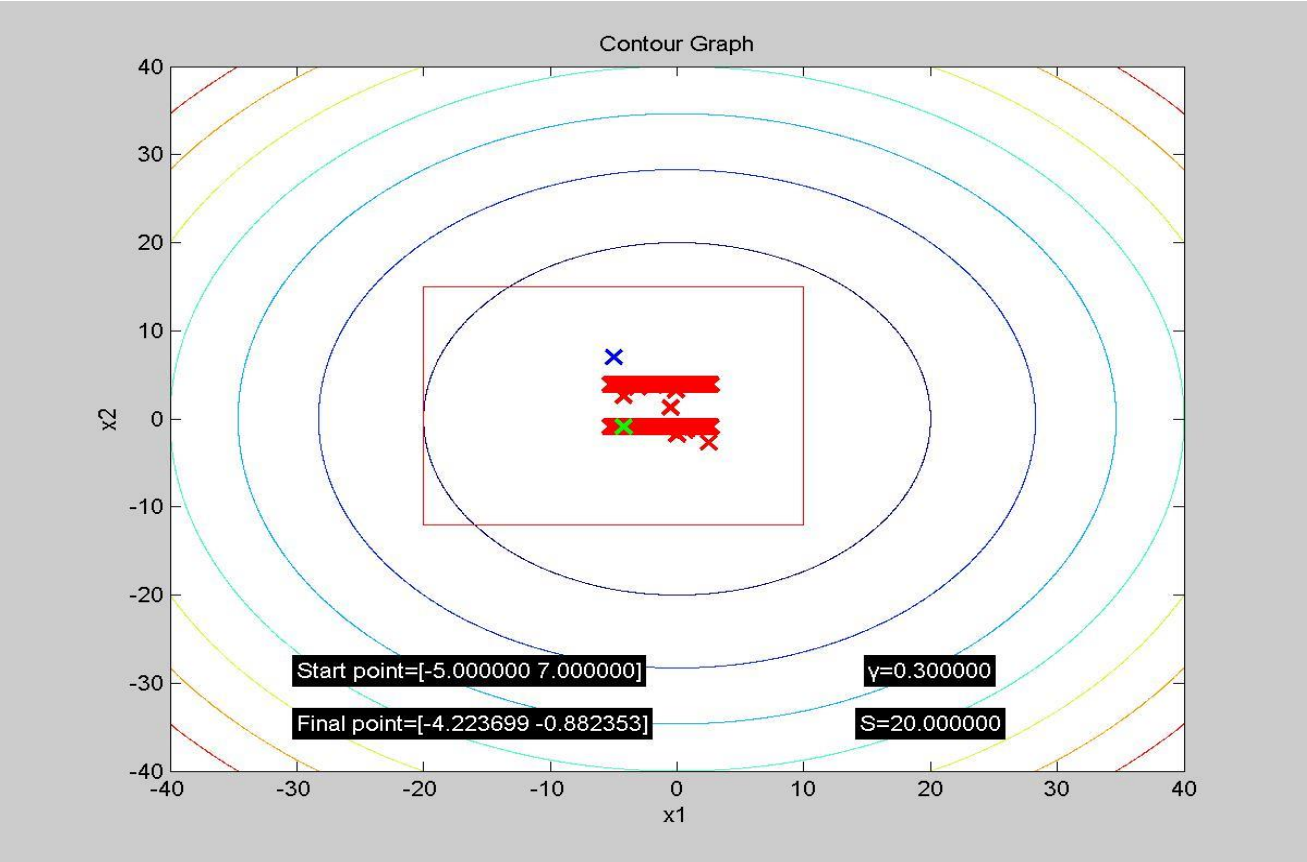
Για τη μέθοδο μέγιστης καθόδου με προβολή δημιουργήσαμε τη συνάρτηση alg_meg_kathodou_proj(e,g,s,co), όπου e η επιθυμητή ακρίβεια, g το βήμα γ_k, s το βήμα s_k και co οι συντεταγμένες του αρχικού σημείου εκκίνησης. Για τις ανάγκες του αλγορίθμου δημιουργήσαμε και τη συνάρτηση projf(x), η οποία υπολογίζει την προβολή στο συγκεκριμένο σημείο x. Παρακάτω ο αλγόριθμος εκτελείται για διάφορες τιμές εισόδου.

B) Εκτελώντας τον αλγόριθμο για e=0.01, γk=0.1,sk=15 και αρχικό σημείο εκκίνησης το co=(8,3) βλέπουμε πως ο αλγόριθμος συγκλίνει στο σημείο (0.000402,-0.000073), ουσιαστικά στο ελάχιστο. Παρακάτω φαίνεται και το διάγραμμα των ισοβαρών καμπυλών:

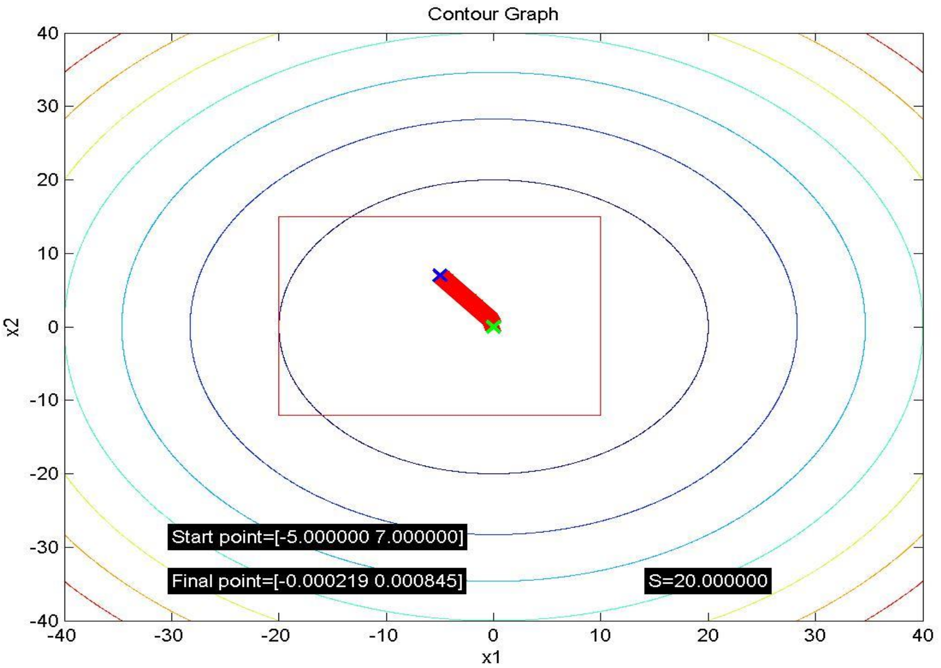


Μπορούμε να διακρίνουμε σε σχέση με το υποερώτημα (α,i) ότι ο αλγόριθμος συγκλίνει σε έναν μικρότερο αριθμό επαναλήψεων στο ελάχιστο. Επίσης η πορεία που ακολουθούν τα σημεία προς το ελάχιστο δεν είναι μία ευθεία γραμμή όπως στο πρώτο υποερώτημα, αλλά ακολουθούν μια πιο ακανόνιστη πορεία, λόγω της ιδιότητας αυτού του αλγορίθμου να επαναφέρει το σημείο μέσα στα επιτρεπτά όρια όταν πάει να ξεφύγει από αυτά. Λόγω αυτής της ιδιότητας ο αλγόριθμος καταφέρνει να συγκλίνει στο ελάχιστο, σε αντίθεση με το υποερώτημα (α,iv).

Γ) Εκτελώντας τώρα τον αλγόριθμο για e=0.02, γ_k=0.3, s_k=20 και αρχικό σημείο εκκίνησης το co=(-5,7) βλέπουμε ότι έπειτα από 100000 επαναλήψεις ο αλγόριθμος αποκλίνει. Παρακάτω φαίνεται το διάγραμμα των ισοβαρών καμπυλών:

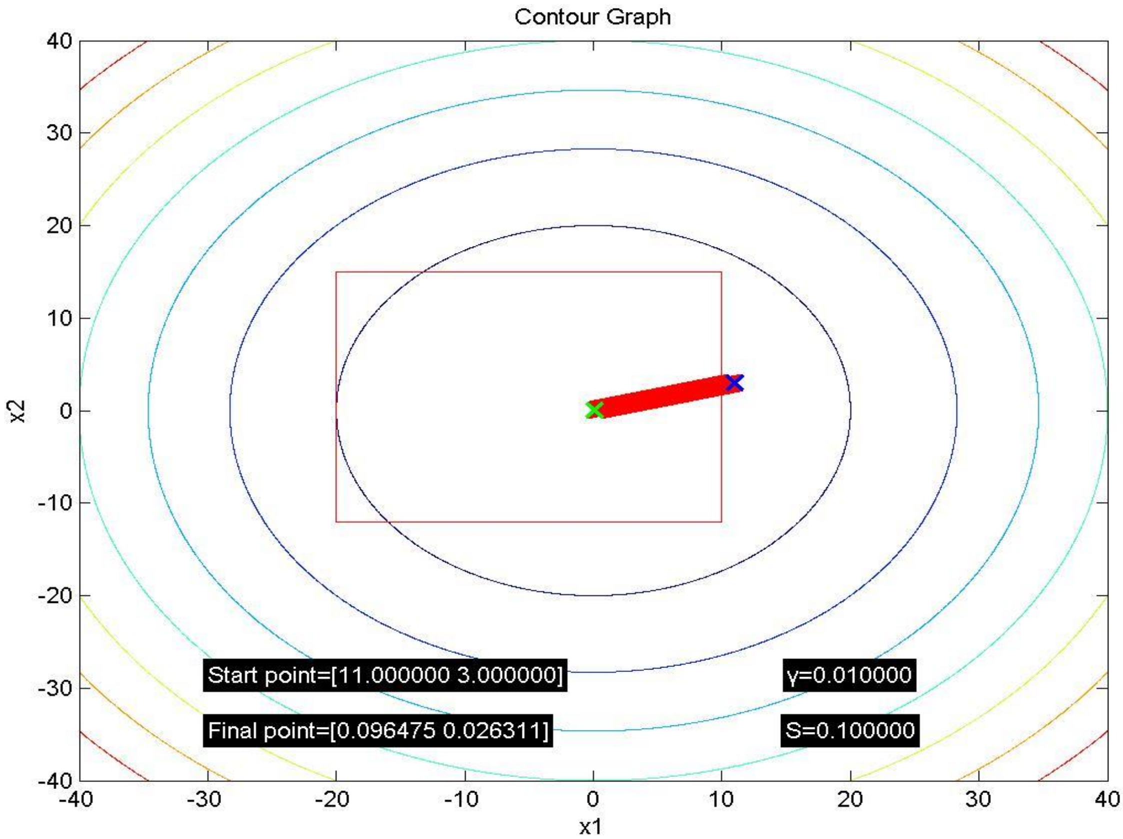


Παρατηρώντας το διάγραμμα βλέπουμε πως έχουμε μια συνεχή ταλάντωση των σημείων μέσα στα επιτρεπτά όρια, χωρίς ωστόσο να καταφέρνει ο αλγόριθμος να συγκλίνει στο ελάχιστο. Η απόκλιση αυτή που παρατηρείται οφείλεται στους συντελεστές γ_k και s_k. Ένας απλός πρακτικός τρόπος για να συγκλίνει ο αλγόριθμος στο ελάχιστο είναι να χρησιμοποιήσουμε μια εσωτερική βελτιστοποίηση για το βήμα γ_k, όπως κάναμε και στην προηγούμενη εργασία. Συγκεκριμένα θα χρησιμοποιήσουμε τον αλγόριθμο της διχοτόμου με παράγωγο BisDeriv που είχαμε χρησιμοποιήσει και στην προηγούμενη εργασία. Μετά την εφαρμογή του παραπάνω αλγορίθμου παίρνουμε τα εξής αποτελέσματα:



Όπως παρατηρούμε και από το διάγραμμα ο αλγόριθμος μετά την εσωτερική ελαχιστοποίηση του βήματος καταφέρνει να συγκλίνει στο ελάχιστο σε έναν πεπερασμένο αριθμό βημάτων.

Δ) Πριν την εκτέλεση αυτού του αλγορίθμου μπορούμε να πούμε πως δεν είμαστε καθόλου σίγουροι για την ευστάθεια και τη σύγκλιση του αλγορίθμου, καθώς το αρχικό σημείο εκκίνησης είναι εκτός των ορίων που έχουν τεθεί και η δημιουργία του αλγόριθμου έγινε με την προϋπόθεση ότι το αρχικό σημείο εκκίνησης θα βρίσκεται εντός των ορίων. Εκτελώντας όμως τον αλγόριθμο για e=0.01, γ_k=0.01, s_k=0.1 και co=(11,3) βλέπουμε ότι ο αλγόριθμος καταφέρνει να συγκλίνει στο ελάχιστο. Η σύγκλιση αυτή μπορούμε να πούμε πως είναι αποτέλεσμα επιλογής συγκεκριμένων τιμών για το γ_k και s_k, καθώς σε άλλη περίπτωση ο αλγόριθμος θα απέκλινε. Παρακάτω φαίνεται το διάγραμμα των ισοβαρών καμπυλών:



Παρατηρώντας το διάγραμμα βλέπουμε ότι γίνεται ένας πολύ μεγάλος αριθμός επαναλήψεων μέχρι τη σύγκλιση στο ελάχιστο. Αυτό οφείλεται στις πολύ μικρές τιμές για το γ_k και s_k.