

2η Εργαστηριακή Άσκηση

Ελαχιστοποίηση συνάρτησης πολλών μεταβλητών

Στην εργασία αυτή θα ασχοληθούμε με το πρόβλημα ελαχιστοποίησης μιας δοσμένης συνάρτησης πολλών μεταβλητών $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ χωρίς περιορισμούς. Οι αλγόριθμοι που θα χρησιμοποιήσουμε βασίζονται στην ιδέα της επαναληπτικής καθόδου, βάσει της οποίας ξεκινάμε από κάποιο σημείο $x_0 \in \mathbb{R}^n$ και παράγουμε διαδοχικά τα διανύσματα x_1, x_2, \dots έτσι ώστε $f(x_k) < f(x_{k-1})$, $k = 1, 2, \dots$. Οι αλγόριθμοι αναζήτησης που θα μελετήσουμε είναι:

- Μέθοδος Μέγιστης Καθόδου (Steepest Descent),
- Μέθοδος Newton,
- Μέθοδος Levenberg-Marquardt,
- Μέθοδος Συζυγών Κλίσεων,
- μέθοδος Σχεδόν Newton.

Η αντικειμενική συνάρτηση που θα ελαχιστοποιήσουμε είναι η $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, δεν γνωρίζουμε, όμως, τον αναλυτικό της τύπο. Ωστόσο είναι δυνατή η λήψη της τιμής τόσο της συνάρτησης f , όσο και των ∇f , $\nabla^2 f$ για κάθε ζεύγος $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Αφού μελετήσετε προσεκτικά την αντίστοιχη θεωρία από το βιβλίο σας, λάβετε τιμές της συνάρτησης f ώστε να σχηματίσετε μία γραφική παράσταση για να αποκτηθεί μία γενική εικόνα της μορφής της. Στη συνέχεια, προχωρήστε στην επίλυση των παρακάτω θεμάτων:

Θέμα 1ο

Ελαχιστοποιήστε την f με χρήση της μεθόδου Μέγιστης Καθόδου, χρησιμοποιώντας ως αρχικά σημεία (x_0, y_0) τα i) $(-0.5, -0.5)$, ii) $(0.5, 0.5)$, iii) $(-2, -1)$, iv) $(-3, 3)$. Το βήμα γ_k θα επιλεγεί: α) σταθερό (της επιλογής σας) β) τέτοιο ώστε σε κάθε επανάληψη να ελαχιστοποιείται η $f(x_k + \gamma_k d_k)$ και γ) μεταβλητό βάσει κάποιου ευριστικού κανόνα που θα επιλέξετε εσείς, π.χ. αν στην τελευταία επανάληψη η τιμή της f έχει μικρύνει το πολύ κατά 10% σε σχέση με την τιμή της που είχε τρεις επαναλήψεις πριν, τότε το βήμα αυξάνεται κατά 20%.

Σχολιάστε και ερμηνεύστε τα αποτελέσματα και τις διαφορές στα αποτελέσματα, σε περίπτωση που προκαλούνται, λόγω της επιλογής του σημείου έναρξης του αλγορίθμου, καθώς επίσης και λόγω της επιλογής του βήματος.

Θέμα 2ο

Επαναλάβετε το Θέμα 1 χρησιμοποιώντας τη μέθοδο Newton.

Θέμα 3ο

Επαναλάβετε το Θέμα 1 χρησιμοποιώντας τη μέθοδο Levenberg-Marquardt.

Θέμα 4ο

Επαναλάβετε το Θέμα 1 χρησιμοποιώντας τη μέθοδο Συζυγών Κλίσεων.

Θέμα 5ο

Επαναλάβετε το Θέμα 1 χρησιμοποιώντας τη μέθοδο Σχεδόν Newton.

Οι τιμές των f , ∇f , $\nabla^2 f$ λαμβάνονται με τη βοήθεια των αρχείων `f.p`, `gradf.p` και `hessianf.p` αντίστοιχα, τα οποία είναι κρυπτογραφημένες συναρτήσεις MATLAB και χρησιμοποιούνται σε να είχαν επέκταση `.m`.

Παράδειγμα χρήσης για τον υπολογισμό των f , ∇f , $\nabla^2 f$ στο σημείο $(x, y) \equiv (0.4, 2)$:

`f(0.4, 2)`

`gradf(0.4, 2)`

`hessianf(0.4, 2)`

Να παραδώσετε όλους τους κώδικες των προγραμμάτων που γράψατε και μία αναφορά με τα διαγράμματα, τα σχόλια, τα συμπεράσματά σας και ό,τι άλλο κρίνετε αναγκαίο για την παρουσίαση της δουλειά σας. Στην αναφορά να περιλαμβάνεται και συγκριτικός σχολιασμός πάνω στην αποδοτικότητα των υπο μελέτη μεθόδων για τις τρεις δοθείσες συναρτήσεις.