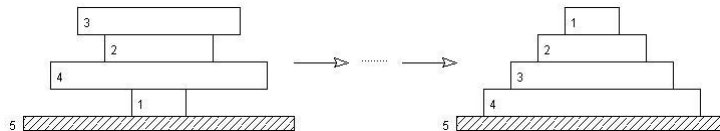
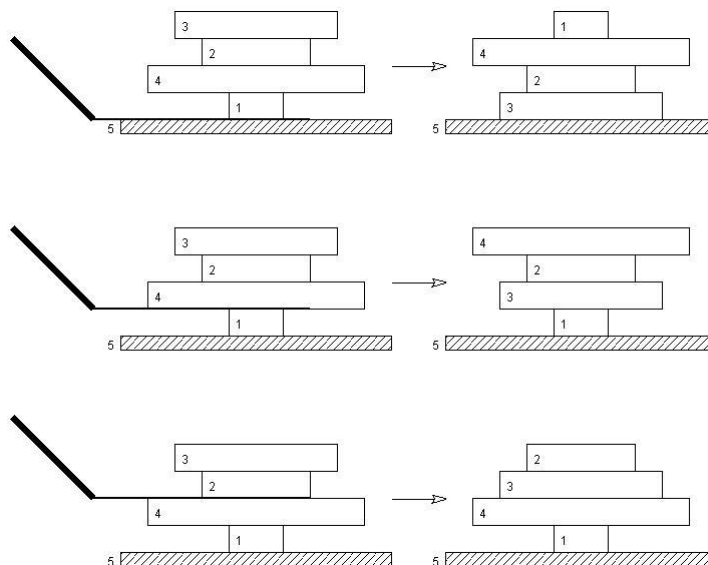


Έχουμε φτιάξει N πίτες, όλες κυκλικού σχήματος, αλλά διαφορετικών μεγεθών, έστω με διαμέτρους $1, 2, \dots, N$. Οι πίτες είναι τοποθετημένες σε μία στήλη, η μία επάνω από την άλλη, με αυθαίρετη σειρά, επάνω σε ένα πιάτο, έστω διαμέτρου $N+1$. Θέλουμε να αλλάξουμε τη σειρά στις πίτες, έτσι ώστε κάτω-κάτω να είναι αυτή με το μεγαλύτερο μέγεθος (διαμέτρου N), από επάνω της αυτή με το αμέσως μικρότερο (διαμέτρου $N-1$), κοκ., μέχρι τη μικρότερη πίτα (διαμέτρου 1), που θα είναι στην κορυφή. Στο παρακάτω σχήμα, έχουμε $N = 4$ πίτες τοποθετημένες αρχικά όπως φαίνεται αριστερά και θέλουμε τελικά να τους αλλάξουμε τη σειρά και να είναι όπως φαίνεται δεξιά.



Ο μοναδικός τρόπος που έχουμε για να αλλάξουμε τη σειρά στις πίτες είναι να χρησιμοποιήσουμε μία σπάτουλα, να την βάλουμε κάτω από μία πίτα, να σηκώσουμε όλη τη στήλη από την πίτα αυτή και τις από πάνω της και με μία κίνηση (δύσκολο, αλλά όχι ακατόρθωτο για έναν σεφ!) να τοποθετήσουμε τις πίτες με αντεστραμμένη σειρά επάνω στις υπόλοιπες. Για να καταλάβετε καλύτερα τι μπορούμε να κάνουμε με τη σπάτουλα, δείτε το επόμενο σχήμα.



Στην 1η περίπτωση, βάζουμε τη σπάτουλα κάτω από την πίτα 1 και αντιστρέφουμε όλη τη στήλη από πάνω της, με αποτέλεσμα τη δεξιά διάταξη. Στη 2η περίπτωση, βάζουμε τη σπάτουλα κάτω από την πίτα 4 και αντιστρέφουμε όλη τη στήλη από πάνω της. Ομοίως, στην 3η περίπτωση, η σπάτουλα μπαίνει κάτω από την πίτα 2. Προφανώς, δεν έχει νόημα να βάλουμε τη σπάτουλα κάτω από την πίτα 3 και να αντιστρέψουμε τις πίτες επάνω από αυτήν, γιατί τελικά δεν θα αλλάξει κάτι στη διάταξη.¹

Ας θεωρήσουμε ότι η αναπαράσταση μίας κατάστασης του προβλήματος γίνεται από μία λίστα που τα στοιχεία της είναι οι διάμετροι των πιτών από επάνω προς τα κάτω. Δηλαδή, η αρχική κατάσταση του προηγούμενου στιγμιότυπου προβλήματος είναι η $[3, 2, 4, 1]$. Επίσης, ας θεωρήσουμε ότι η αναπαράσταση μίας ενέργειας κατά την οποία τοποθετούμε την σπάτουλα κάτω από την πίτα διαμέτρου N και αντιστρέφουμε όλη τη στήλη από πίτες από επάνω μέχρι και την πίτα αυτή γίνεται από τον ακέραιο N . Οπότε, μία αλληλουχία τέτοιων ενεργειών, άρα και μία λύση του προβλήματος, μπορεί να αναπαρασταθεί από μία λίστα ακεραίων μεταξύ 1 και N . Για παράδειγμα,

μπορείτε να επιβεβαιώσετε ότι η λίστα $[4, 3, 2, 4, 1]$ είναι μία λύση του προβλήματος με αρχική κατάσταση την $[3, 2, 4, 1]$.

Ορίστε σε Prolog ένα κατηγορημα `pancakes_dfs/3`, το οποίο όταν καλείται ως `pancakes_dfs(InitialState, Operators, States)`, για αρχική κατάσταση του προβλήματος την `InitialState`, να επιστρέφει μέσω οπισθοδρόμησης όλες τις πιθανές λύσεις σαν λίστα ενεργειών `Operators`, αλλά και τις καταστάσεις από τις οποίες περνά η επίλυσή του σαν λίστα `States`.

Υπόδειξη: Μελετήστε τα προβλήματα και τις λύσεις τους στις σελίδες 139-141 και 148-152 των διαφανειών του μαθήματος, όπου χρησιμοποιείται η μέθοδος *αναζήτησης πρώτα-κατά-βάθος* (depth-first-search – dfs).

Ενδεικτικές εκτελέσεις:

```
?- pancakes_dfs([3, 2, 4, 1], Operators, States).
Operators = [1, 2, 3, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 1, 2, 4, 1]
States = [[3, 2, 4, 1], [1, 4, 2, 3], [2, 4, 1, 3],
          [3, 1, 4, 2], [1, 3, 4, 2], [2, 4, 3, 1],
          [3, 4, 2, 1], [1, 2, 4, 3], [2, 1, 4, 3],
          [3, 4, 1, 2], [1, 4, 3, 2], [2, 3, 4, 1],
          [4, 3, 2, 1], [1, 2, 3, 4]] --> ;
Operators = [1, 2, 3, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 1, 4, 2, 1, 3, 2, 1]
States = [[3, 2, 4, 1], [1, 4, 2, 3], [2, 4, 1, 3],
          [3, 1, 4, 2], [1, 3, 4, 2], [2, 4, 3, 1],
          [3, 4, 2, 1], [1, 2, 4, 3], [2, 1, 4, 3],
          [3, 4, 1, 2], [1, 4, 3, 2], [4, 1, 3, 2],
          [2, 3, 1, 4], [1, 3, 2, 4], [3, 1, 2, 4],
          [2, 1, 3, 4], [1, 2, 3, 4]] --> ;
.....
?- findall(Operators,
          pancakes_dfs([3, 2, 4, 1], Operators, _),
          Solutions),
   length(Solutions, N).
.....
N = 2936
```

¹ Σε μία παραλλαγή του προβλήματος, οι πίτες είναι καμένες από τη μία πλευρά και ο σεφ θέλει να τις αναδιατάξει έτσι ώστε τελικά να είναι με την επιθυμητή σειρά μεγεθών, όπως έχει ήδη περιγραφεί, αλλά με την καμένη επιφάνειά τους από κάτω. Τότε, έχει νόημα να αντιστρέψουμε μόνο την πίτα της κορυφής, αλλά στη συγκεκριμένη άσκηση, δεν θα ασχοληθούμε με αυτή την παραλλαγή του προβλήματος.