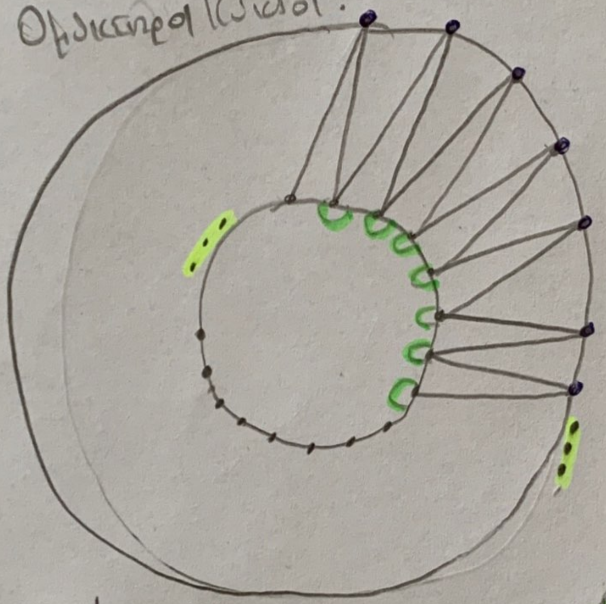
Υπολογιστική Γεωμετρία | 1ο Set Ασκήσεων | Βλάχος Δημήτριος 2641

Άσκηση 1 Ερώτημα (ii)

> Έστω 2 κύκλοι με διαφορετικό r, ο εσωτερικός και ο εξωτερικός.

> Χωρίζω τον εσωτερικό κύκλο σε n ίσα τόξα και τον εξωτερικό σε επίσης n τόξα.

Ομόκεντροι κύκλοι:



∀ n

Άρα εύκολα βλέπουμε ότι:  με 5 μη-κυρτές κορυφές ισχύει

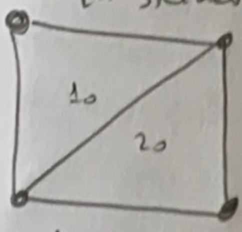
Αν επιχειρήσουμε πολύγωνο με 4 μη-κυρτές δεν μπορεί να μην είναι μονότονο ως προς τις ευθείες του επιπέδου

Βλέπουμε ότι είναι <u>y-μονότονο</u> & <u>x-μονότονο</u>

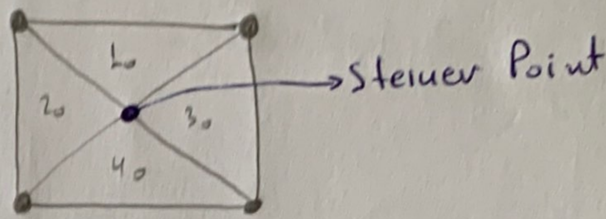
Άσκηση 1 (i) > Χωρίς Steiner Points ο γνωστός τρόπος να "σπάσουμε" ένα πολύγωνο σε τρίγωνα είναι με την χρήση διαγωνίων.

> Θα επιχειρήσουμε κατασκευαστική απόδειξη:

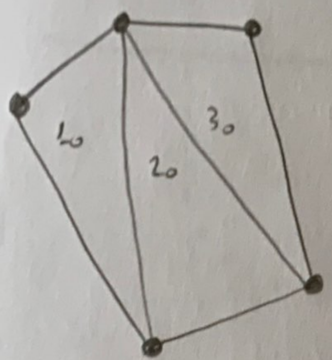
Χωρίς Steiner Point(s)	Με Steiner Point



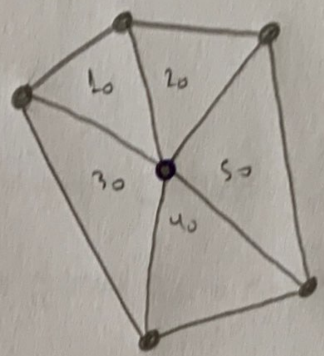
n-2 τρίγωνα



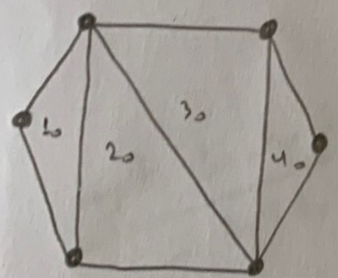
n τρίγωνα



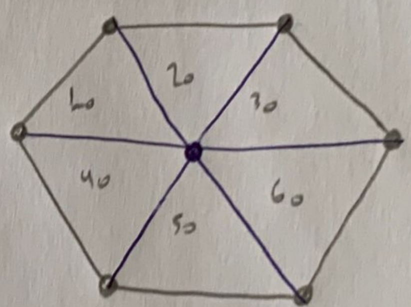
n-2 τρίγωνα



n τρίγωνα



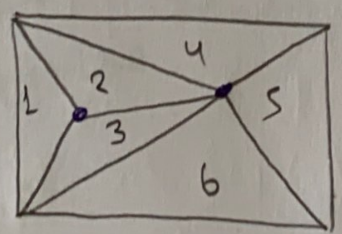
$\underbrace{\text{n-2 τρίγωνα}}$



n τρίγωνα

∃ Το γνωστό θεώρημα που μας εξασφαλίζει τα n-2 τρίγωνα

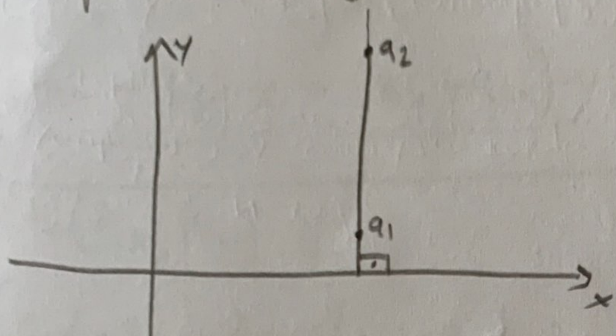
Φαίνεται ότι παίρνω πάντα n
Για περισσότερα σημεία Steiner
θα "αυξηθεί" το πλήθος των τριγώνων



Άσκηση 2

> $Ax + By + C = 0$ με $A, B, C \in \mathbb{R}$, $\underbrace{(A,B) \neq (0,0)}_{\text{όχι ταυτόχρονα } 0}$

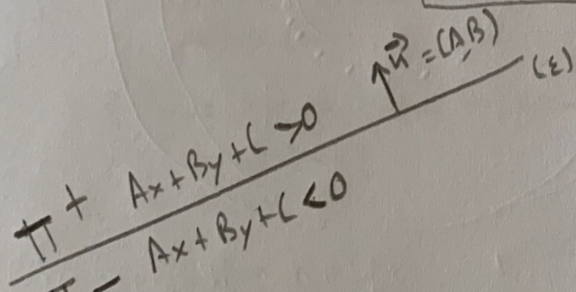
> Έστω τυχαία σημεία $q_1 = (q_{1x}, q_{1y})$ & $q_2 = (q_{2x}, q_{2y})$ ορίζουν ευθεία (l)



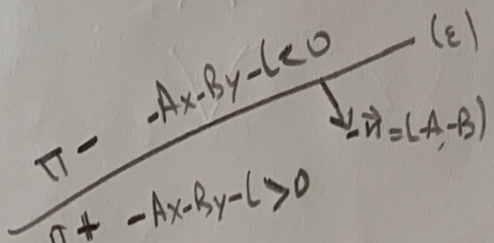
Η l είναι κατακόρυφη $\Longleftrightarrow$ $q_{1x} = q_{2x}$ (vertical line)

(Ομοία δηλαδή για οριζόντια $\Longleftrightarrow$ $q_{1y} = q_{2y}$)

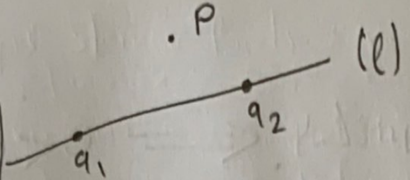
> Έστω ευθεία (ε): $\boxed{Ax + By + C = 0}$ (1)



> Αντίστοιχα (ε): $\boxed{-Ax - By - C = 0}$ (2)



Άσκηση 2 ευθεία



$$(\ell):\ \begin{array}{ccc} + & - & + \\ \end{array} \qquad \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ q_{1x} & q_{1y} & 1 \\ q_{2x} & q_{2y} & 1 \end{vmatrix} = 0 \iff$$

$$(q_{1y} - q_{2y})\cdot x - (q_{1x} - q_{2x})\cdot y + (q_{1x}\cdot q_{2y} - q_{2x} q_{1y}) = \underline{0}$$

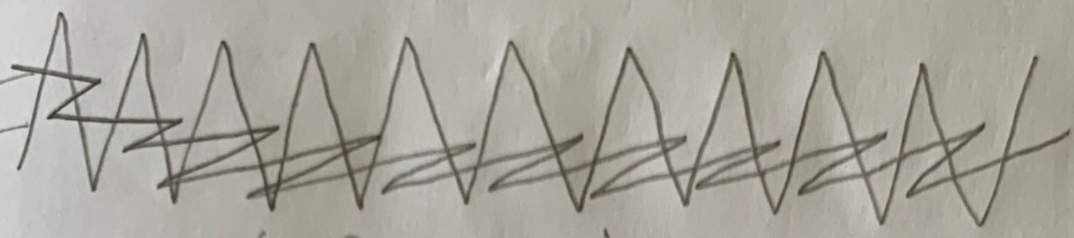
$P = (P_{1x}, P_{1y})$

$$(q_{1y} - q_{2y})\cdot P_{1x} - (q_{1x} - q_{2y})\cdot P_{1y} + (q_{1x}\cdot q_{2y} - q_{2x}\cdot q_{1y}) \begin{cases} >0 & \text{από πάνω} \\ <0 & \text{από κάτω} \\ =0 & ? \end{cases}$$

```
int check(double px, double py, double q1x, double q1y, double q2x, double q2y){
        if(q1x == q2x){
            print("Vertical line");
            return(-2);
        }
        value=(q1y-q2y)*p1x -(q1x-q2y)*p1y + (q1x*q2y - q2x*q1x);
        if(value >0){
            return 1;
        }
        if(value <0){
            return(-1);
        }
        return 0;
}
```


Scanned with CamScanner

Άσκηση 3 (i)



→ k σημεία $\left(\text{Στο max: } \begin{matrix} k = ct \\ l = ct \end{matrix} \right)$ ίσο $k + l = n \Rightarrow n = 2k$

→ l σημεία

$\frac{k-1}{2}$ "δόντια"

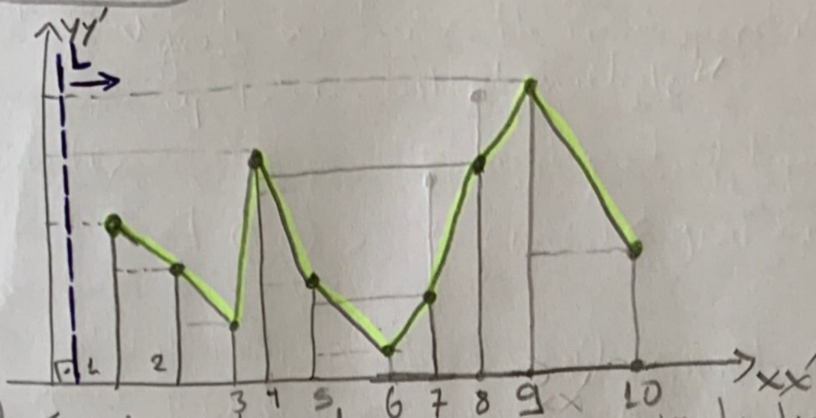
Σε ∀ δόντι 4 σημεία τομής

$$4\left(\frac{k-1}{2}\right)+1 = 2(k-1)+1 = 2k-1$$

Σημεία τομής $2k-1 = n-1$

$$\boxed{\begin{array}{l} \frac{1}{2}n \le n-1 \underbrace{\le 1\cdot n}_{\text{προφανές}} \\ n \le 2n-2 \Leftrightarrow \\ n \ge 2 \end{array}}$$

Άσκηση 4



1:0
2:1
3:2
4:0
5:3
6:5
7:4
8:1
9:0
10:5

(Προσομοίωση) > Συνενώνοντας με edges τις κορυφές, παίρνουμε μια ακολουθία ευθύγραμμων τμημάτων.

> Σημείο ενδιαφέροντος για εμάς είναι οι κορυφές.

> Καθώς το L "σαρώνει" από αριστερά προς τα δεξιά, θα βρίσκει τις κορυφές V και για $\forall v_i$ θα αποθηκεύει σε μια λίστα το (x_i, y_i).

> Στο τέλος της σάρωσης θα έχουμε μια λίστα

list =

	index
(x_1, y_1)	1
(x_2, y_2)	2
⋮	
(x_n, y_n)	n

Κόστος $\boxed{O(|I|)}$ για I κορυφές

> Για την κορυφή 1, print("1:0")
Δηλ. δεν θα χρειαστεί να κάνει κάποιο έλεγχο

> Για την κορυφή 2:
if $y_1 > y_2 \Rightarrow$ list2 = {1}, sum(list2) = 1, print("2: 1")

> Για την κορυφή n:

```
sum=0;
for(int i=n-1; i=1; i--){
    if(yn < yi){
        sum++; // Απλά έναν αριθμό θέλουμε, όχι λίστα κορυφών
    }
    print("n : sum")
}
```

$O(n^2)$

Άσκηση 6

> Έστω Polygon P με h τρύπες, n κορυφές συνολικά.
> Όταν λέμε συνολικά: κορυφές των τρυπών + του πολυγώνου
> Τότε μια τριγωνοποίηση του P έχει $\boxed{2h+n-2}$ τρίγωνα.
> Πως;

> Έχουμε $|V| = n$ κορυφές
> Έχουμε $\underbrace{h}_{\text{holes}} + \underbrace{t}_{\text{triangles}} + 1$ faces, ένα για $\forall$ τρίγωνο & τρύπα + το "εξωτερικό" face.

$E = (3t+n)/2$ ακμές, όπου 3 ανά τρίγωνο + το "εξωτερικό" (boundary) "μετράει" $\forall$ ακμή εκεί 2.

$$\underset{\text{vertices}}{V} - \underset{\text{edges}}{E} + \underset{\text{faces}}{F} = 2 \Longrightarrow \boxed{t = n + 2h - 2}$$

page 7

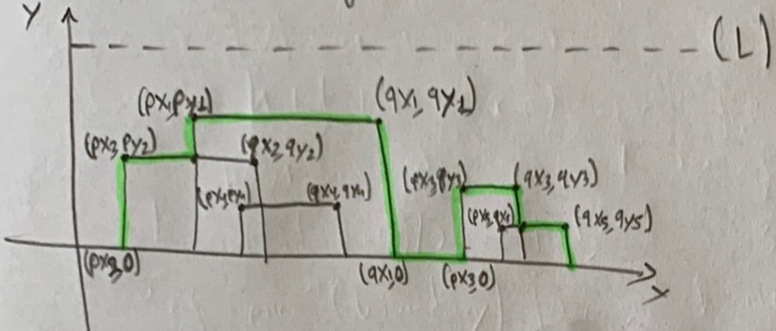
Σχόλιο: Η απόδειξη έγινε μετά από αναζήτηση στο duckduckgo.

"A polygon P with holes may be triangulated"

Άσκηση 5

> Χρησιμοποιώντας την οριζόντια γραμμή σάρωσης L θα σαρώσουμε τα τέμνοντα πολύγωνα → ορθογώνια

> Ταξινόμηση των κορυφών (κατά φθίνουσα y-συντεταγμένη)
Συνεπώς: $O(n \cdot \log n)$ χρόνο.



> Για ∀ πολύγωνο αποθηκεύω το (px_i, py_i) & (qx_i, qy_i)

> Έχουμε διάφορες περιπτώσεις:

> Αν (px_i, py_i) αριστερότερη από ∀ άλλη κορυφή:
Ζωγραφίζουμε την κατακόρυφη ευθεία (ευθ. τμήμα) με κορυφές (px_i, qy_i) & $(px_i, 0)$

> Αν (px_i, py_i) δεξιότερα από ∀ άλλη κορυφή:
Ζωγραφίζουμε το κατακόρυφο ευθ. τμήμα με κορυφές (qx_i, qy_i) & $(qx_i, 0)$

> Αν για το πολύγωνο με κορυφές (px_i, py_i) & (qx_i, qy_i) ισχύει ότι βρίσκεται "μέσα" σε ένα μεγαλύτερο πολύγωνο, το αγνοούμε
Δηλ: $px_j < px_i$ & $qx_j > qx_i$ && $py_j \geq py_i$ & $qy_j \geq qy_i$

> Αν ∃ ένα συνεχές διάστημα $[x_a, x_b]$ στο οποίο ∄ ορθογώνιο τότε ζωγραφίζουμε το ευθ. τμήμα $(x_a, 0)$, $(x_b, 0)$.

> Αν ∃ σημείο τομής μεταξύ 2 πολυγώνων ζωγραφίζουμε το ευθ. τμήμα:
(px_i, py_i), (tx_i, ty_i) ή (tx_i, ty_i), (qx_i, qy_i)