ΜΥΕ034 Υπολογιστική Γεωμετρία

1η Ομάδα Ασκήσεων

[Προθεσμία Παράδοσης: **03 Μαΐου 2023** (έως τις **18:00**)]

Άσκηση 1 [20]

(i) [12] Έστω P απλό πολύγωνο με n κορυφές. Δείξτε ότι η διαίρεση του P σε τρίγωνα με χρήση διαγωνίων παράγει μικρότερο πλήθος τριγώνων από οποιαδήποτε διαίρεση του P σε τρίγωνα με χρήση επιπλέον κορυφών για τα τρίγωνα (σημεία Steiner).
Υπόδειξη: Προσπαθήστε να αφαιρέσετε τα σημεία Steiner.

(ii) [8] Περιγράψτε ένα απλό πολύγωνο με n κορυφές το οποίο

- δεν είναι μονότονο ως προς καμία ευθεία του επιπέδου και
- έχει το μικρότερο πλήθος μη κυρτών κορυφών που μπορείτε να επιτύχετε.

Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

Άσκηση 2 [13]

Περιγράψτε (με ψευδοκώδικα ή στη γλώσσα προγραμματισμού C, C++ ή Java) συνάρτηση above_line με ορίσματα τους πραγματικούς αριθμούς px, py, q1x, q1y, q2x και q2y η οποία κάνει τους απαραίτητους ελέγχους και:

- εάν η ευθεία L που ορίζεται από τα σημεία q_1 = (q1x,q1y) και q_2 = (q2x,q2y) είναι κατακόρυφη, τυπώνει "vertical line" και επιστρέφει -2,
- αλλιώς επιστρέφει 1, 0, -1 εάν το σημείο p = (p1x,p1y) βρίσκεται ψηλότερα, επάνω ή χαμηλότερα από την ευθεία L, αντίστοιχα.

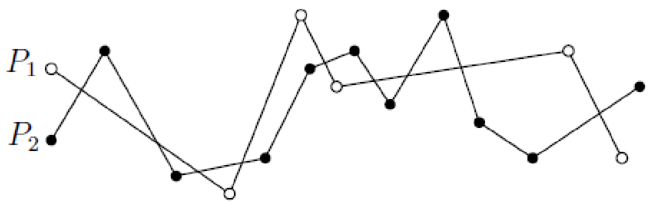
Σημείωση: Μην ξεχάσετε να χρησιμοποιήσετε κάποιο μικρό περιθώριο σφάλματος στις συγκρίσεις πραγματικών αριθμών.

Άσκηση 3 [16]

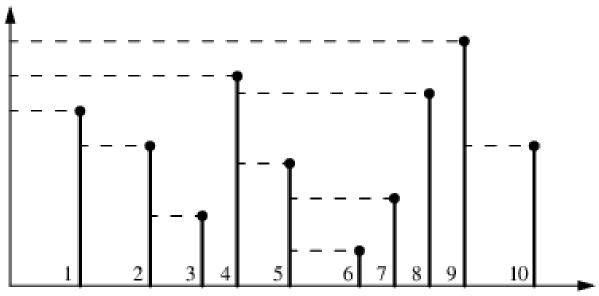
Δίδονται δύο μονότονες πολυγωνικές γραμμές P_1 και P_2 με n κορυφές συνολικά τέτοιες ώστε κανένα ευθύγραμμο τμήμα της μιας δεν είναι συνευθειακό με κάποιο ευθύγραμμο τμήμα της άλλης.

(i) [6] Δείξτε ότι αν οι P_1 και P_2 δεν είναι μονότονες ως προς την ίδια διεύθυνση, τότε το πλήθος των σημείων τομής τους ενδέχεται να υπερβαίνει ασυμπτωτικά το $\Theta(n)$.

(ii) [10] Δείξτε ότι αν οι P_1 και P_2 είναι και οι δύο μονότονες ως προς την ίδια (π.χ., την οριζόντια) διεύθυνση (βλέπε σχήμα), τότε αυτές τέμνονται σε $O(n)$ σημεία.



Άσκηση 4 [18]
Δίδεται σύνολο I κατακόρυφων ευθυγράμμων τμημάτων για τα οποία ισχύει ότι το ένα άκρο τους βρίσκεται στον θετικό ημιάξονα των x και το άλλο άκρο τους έχει θετική y-συντεταγμένη (βλέπε σχήμα). Θέλουμε να καθορίσουμε, για κάθε ευθύγραμμο τμήμα $s \in I$, τον αύξοντα αριθμό του ευθύγραμμου τμήματος το οποίο βλέπει ένας παρατηρητής τοποθετημένος στο άνω άκρο του s που κοιτάζει οριζόντια και προς τα αριστερά (εάν ο παρατηρητής δεν βλέπει κάποιο ευθύγραμμο τμήμα, τότε ο ζητούμενος αύξων αριθμός είναι 0). Στα δεξιά του σχήματος δίδεται ο αντίστοιχος αύξων αριθμός για κάθε ένα από τα ευθύγραμμα τμήματα.



1: 0
2: 1
3: 2
4: 0
5: 4
6: 5
7: 5
8: 4
9: 0
10: 9

Εφαρμόστε τη μέθοδο σάρωσης επιπέδου με κατακόρυφη γραμμή σάρωσης που κινείται από τα **αριστερά προς τα δεξιά** για να περιγράψετε έναν αλγόριθμο για αυτό το πρόβλημα, δικαιολογήστε την ορθότητά του και δώστε την πολυπλοκότητα χρόνου και χώρου του. Μπορείτε να επιτύχετε πολυπλοκότητα χρόνου $O(|I|)$; Η είσοδος είναι η ακολουθία των υψών των ευθυγράμμων τμημάτων στο σύνολο I **με τη σειρά από αριστερά προς τα δεξιά**. Η έξοδος θα πρέπει να είναι όπως στα δεξιά του σχήματος.

Άσκηση 5 [16]
Η *κορυφογραμμή* μιας πόλης ορίζεται ως το περίγραμμα των κτηρίων της πόλης (δες σχήμα), όπου θεωρούμε ότι κάθε κτήριο της πόλης είναι ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με τη μία πλευρά του επάνω στον άξονα των x. Για δοθέν σύνολο n κτηρίων, θέλουμε να εκτυπώσουμε τις συντεταγμένες των κορυφών της κορυφογραμμής αυτών των κτηρίων με τη σειρά από αριστερά προς τα δεξιά.

Περιγράψτε αλγόριθμο σάρωσης επιπέδου για το συγκεκριμένο πρόβλημα καθώς και τις δομές δεδομένων που απαιτούνται θεωρώντας ότι η σάρωση γίνεται από **επάνω προς τα κάτω** με οριζόντια γραμμή σάρωσης. Δικαιολογήστε την ορθότητα του αλγορίθμου σας και δώστε την πολυπλοκότητα χρόνου του ως συνάρτηση του πλήθους n των δοθέντων κτηρίων.

Άσκηση 6 [17]
Έστω πολύγωνο P με h «τρύπες» και συνολικά n κορυφές (συμπεριλαμβάνονται οι κορυφές του εξωτερικού συνόρου του πολυγώνου και των τρυπών). Χρησιμοποιήστε τον τύπο του Euler για να υπολογίσετε το πλήθος των τριγώνων (ως συνάρτηση των h και n) στα οποία χωρίζεται το P σε οποιαδήποτε διαίρεσή του σε τρίγωνα με χρήση διαγωνίων.

Άσκηση Bonus →

Άσκηση Bonus [15]

Έστω απλό πολύγωνο P που έχει χωριστεί σε τρίγωνα με χρήση διαγωνίων. Ο αριθμός τομής (*stabbing number*) της τριγωνοποίησης του P ορίζεται ως το **μέγιστο** πλήθος διαγωνίων που τέμνονται από οποιοδήποτε ευθύγραμμο τμήμα που ανήκει εξ ολοκλήρου στο P.

Προτείνετε έναν τρόπο χωρισμού ενός **κυρτού** n-γώνου σε τρίγωνα ώστε ο αριθμός τομής να είναι $O(\log n)$. Δικαιολογήστε την απάντησή σας.