Σειρά 3

Άσκηση

1. • Έστω ο αριθμός των περιττών κορυφών σε ένα connected $G=(V,E)$ είναι $2k$ (άρτιος)

• Ν.Δ.Ο. το E μπορεί να χωριστεί σε k υποσύνολα ώστε οι ακμές σε $\forall$ υπο-σύνολο να αποτελούν ίχνος μεταξύ 2 περιττών κορυφών.

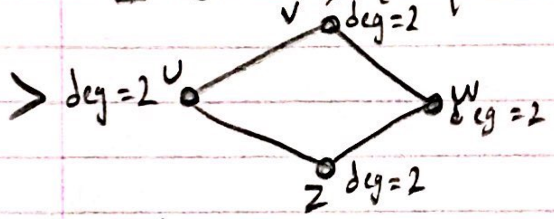
Λύση:

- Trail: Vertices can be repeated, Edges can't
- Trail: a Walk with all edges distinct
- $\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E| = even \Longleftrightarrow$

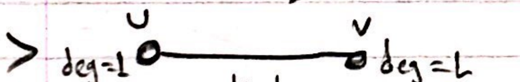
$|\text{even degree vertices}| + |\text{odd degree vertices}| = 2|E|$

Άρα $2k + 2l = 2E$, $k, l \in \mathbb{R}^+$

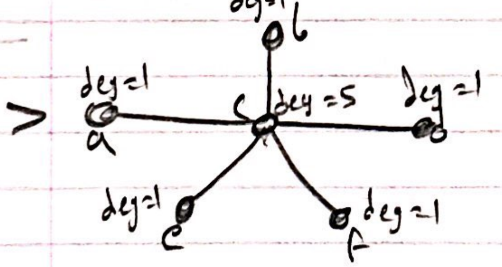
- Θα επιχειρήσουμε "κατασκευαστική" απόδειξη.

> 

Κανένα ίχνος (trail), $k=0$
Άρα: 0 κορυφές περιττού βαθμού.

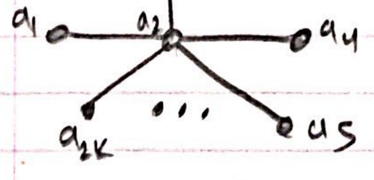
> 

Έχουμε 1 υποσύνολο μεταξύ 2 περιττών κορυφών, $k=1$.
Δηλ. 1 ίχνος

> 

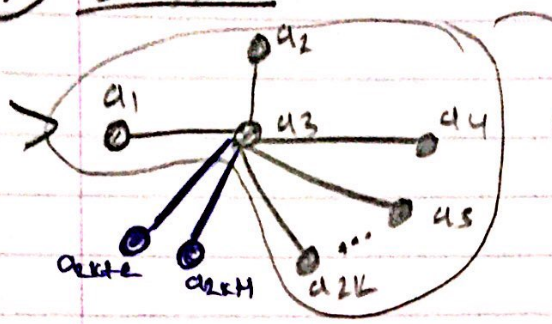
Έχουμε 6 περιττούς κόμβους, $k=3$
Ίχνοι: $a-c-b$
$d-c-f$
$c-e$

> Έστω ότι ισχύει για $2k$ κορυφές περιττού βαθμού



Συνεπώς θα δείξουμε ότι ισχύει για $2(k+1) = 2k+2$

2 συνέχεια



Άρα 2κ κόμβοι με περιττό degree παράγουν κ-1 ίχνοι.
Είναι φανερό ότι οι 2κ+1 κορυφές με περιττό degree, μπορούν να περάσουν κ+1 ίχνοι.

Άρα αποδείξαμε το ζητούμενο

Δεδομένα

2. Ν.Δ.Ο. ένα $G=(V,E)$ είναι γράφημα Euler αν είναι συνδεδεμένο & αν το σύνολο των ακμών του μπορεί να χωριστεί σε μια ένωση από ανεξάρτητους (ξένους μεταξύ τους) κύκλους

Λύση:
- Γνωρίζουμε ότι 1 walk ενός G είναι πάντα connected
- Εφόσον ένα Eulerian walk περιέχει όλες τις ακμές του G, ένας γράφος Euler θα είναι συνδεδεμένος εκτός αν $\exists$ κάποιος κόμβος έστω w, με degree $= 0$

Proof:

$\Rightarrow$
- Έστω $G=(V,E)$ συνδεδεμένος
- Έστω επίσης ότι ο G αποτελείται από κύκλους
- Αν l από αυτούς τους κύκλους έχουν σχέση με ένα συγκεκριμένο κόμβο v τότε degree$(v) = 2*l$
- Συνεπώς το degree $\forall$ κόμβου θα είναι άρτιος & ο G είναι γράφος Euler

$\Leftarrow$
- Τώρα έστω ο $G=(V,E)$ είναι γράφος Euler. Θέλουμε να δείξουμε ότι μπορεί να αποτελείται από κύκλους (ή καλύτερα να "σπάσει" σε κύκλους)
- Εφόσον degree$(v) \geq 2$ για $v \in V$, τότε το G θα έχει κύκλο! Έστω C.
- Άρα $G-C$ μπορεί να είναι ένα μη-συνδεδεμένο γράφημα του οποίου τα components $C_1, C_2 \dots C_l$ να είναι γράφοι άρτιου degree $\Longrightarrow$ Δηλαδή Euler.
- Τα C_i είναι ένα disjoint union από κύκλους
- Άρα τα C_i με το C "δίνουν" ένα "σπάσιμο" του $G=(V,E)$ σε κύκλους

③ Αν οι n κορυφές (με $n \geq 3$) ενός γράφου $G=(V,E)$, ε.ω οι βαθμοί των d_i, $i=1,2,\dots n$ να μπορούν να ταξινομηθούν ως ακολουθία $S: d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_n$ $\forall$ αν $d_k > d \Longrightarrow 1 \leq k \leq n/2$, τότε το $G=(V,E)$ είναι Hamiltonian.

<u>Λύση</u>:
- Α.Ν.Δ.Ο.: $Cl(G)$ είναι complete για $\forall$ G που ικανοποιούν την παραπάνω υπόθεση
- Έστω ότι G γράφημα με $E(G)$ maximal που ικανοποιεί την παραπάνω υπόθεση, αλλά $Cl(G)$ όχι complete (άτοπο)
- Από την υπόθεση που κάναμε για το maximal έχουμε:
  $G = Cl(G)$
- Τώρα επιλέγουμε μη-γειτονικά vertices u,v με:
  $deg(u) + deg(v) = maximum$.
- Υποθέτουμε ότι $deg(u) < deg(v)$
- Θέτουμε $deg(u) = k \Longrightarrow$
  $deg(u) + deg(v) \leq n-1$, άρα $k < \frac{n}{2}$ & $deg(v) \leq n-k-1$
- Εφόσον $deg(v) \leq n-k-1$ $\exists$ τουλ. k vertices που δεν γειτονεύουν στο v & για $\forall$ degree ισχύει:
  degrees $\leq deg(u) = k$. Άρα το G θα έχει τουλ. k κόμβους με $deg \leq k$ & $d_k \leq k$
- Ομοίως $deg(u) = k$, άρα $\exists$ ακριβώς $n-k-1$ κορυφές που δεν γειτονεύουν με το u.
- Από υπόθεση: όλοι έχουν degree $\leq deg(v) \leq n-k-1$
- Εφόσον u κόμβος έχει degree $k = deg(u) \leq deg(v) \leq n-k-1$, θα έχουμε τουλ. $n-k$ κορυφές με:
  degree $< n-1$, άρα $d_k > d$
- Επομένως δεν ισχύει η αρχική υπόθεση & αποδείξαμε το ζητούμενο

4. Έστω $G=(V,E)$ με n κορυφές & m ακμές ($n \geq 3$) & αν $m \geq (n-1)(n-2)+2$, τότε να δειχθεί ότι το G είναι Hamiltonian

Λύση

- Πρέπει να δειχθεί ότι $\exists$ Hamiltonian κύκλος στο G (Έστω & ($n \geq 3$))
- Γνωρίζουμε ότι ένας Hamiltonian cycle είναι ένας γράφος που θα επισκεφτεί $\forall$ κορυφή 1 μοναδική φορά.
- Έστω λοιπόν ότι ο $G(V,E)$ δεν περιέχει τέτοιο κύκλο.
  Δηλ: Για $\forall$ κύκλο στο G θα $\exists$ τουλάχιστον 1 κορυφή που δεν μέρος του κύκλου
- $m \geq (n-1)(n-2)+2 = n^2-2n-n+2+2 = n^2-3n+4 \Longleftrightarrow$
  $m \geq n^2-3n+4 = (n-1)(n-2)+3$