ИТМО

Теория автоматического управления

Линеаризация

Управляемость и наблюдаемость

Классификация систем

С вводного занятия 1-го семестра:

Линейные	Нелинейные
Стационарные	Нестационарные
Непрерывные	Дискретные
Динамические	Статические
Сосредоточенные	Распределенные
Детерминированные	Стохастические

Классификация систем

Основной интерес данного курса:	
Линейные	Нелинейные
Стационарные	Нестационарные
Непрерывные	Дискретные
Динамические	Статические
Сосредоточенные	Распределенные
Детерминированные	Стохастические

Классификация систем

Иногда можно работать как с линейными

Линейные	Нелинейные
Стационарные	Нестационарные
Непрерывные	Дискретные
Динамические	Статические
Сосредоточенные	Распределенные
Детерминированные	Стохастические

Линейные и нелинейные системы: 1-й порядок

Линейные динамические системы

Нелинейные динамические системы

Линейные и нелинейные системы: 1-й порядок

Линейные (динамические) системы

Нелинейные (динамические) системы

или иногда

(Нелинейные) динамические системы

Линейные и нелинейные системы: 1-й порядок

Линейные (динамические) системы

Нелинейные (динамические) системы

или иногда

(Нелинейные) динамические системы

Для описания динамики существуют дифференциальные уравнения *(но не только, ещё существуют разностные и т.д.)*

Линейные и нелинейные системы: 1-й порядок

Линейные системы	Нелинейные системы
$\dot{y} = ay + bu$	$\dot{y} = f(y, u)$

Линейные и нелинейные системы: 1-й порядок

Линейные системы

$$\dot{y} = ay + bu$$

Нелинейные системы

$$\dot{y} = f(y, u)$$

Для простоты опустим управление

Случай $a = 0$ не рассматриваем, т.к. вырожденный

Линейные и нелинейные системы: 1-й порядок

Линейные системы

$$\dot{y} = ay$$

Нелинейные системы

$$\dot{y} = f(y)$$

Линейные и нелинейные системы: 1-й порядок

Линейные системы

$$\dot{y} = ay$$

Нелинейные системы

$$\dot{y} = f(y)$$

Как с нелинейными работать как с линейными?

Линейные и нелинейные системы: 1-й порядок

Линейные системы

$$\dot{y} = ay$$

Нелинейные системы

$$\dot{y} = f(y)$$

Как с нелинейными работать как с линейными?

В этом поможет понятие *точки равновесия*

Линейные и нелинейные системы: 1-й порядок

Линейные системы

$$\dot{y} = ay$$

Нелинейные системы

$$\dot{y} = f(y)$$

Точки равновесия: такие y, что $\dot{y} = 0$

Линейные и нелинейные системы: 1-й порядок

Линейные системы

Нелинейные системы

$$\dot{y} = ay$$

$$\dot{y} = f(y)$$

Точки равновесия: такие y, что $\dot{y} = 0$

$$y_0 = 0$$

Вспомните
Лабораторную работу №2

Может быть много

Могут быть устойчивыми и неустойчивыми

Линейные и нелинейные системы: 1-й порядок

Линейные системы

$$\dot{y} = ay$$

Нелинейные системы

$$\dot{y} = f(y)$$

Точки равновесия: такие y, что $\dot{y} = 0$

Как с нелинейными работать как с линейными?

Линейные и нелинейные системы: 1-й порядок

Линейные системы

Нелинейные системы

$$\dot{y} = ay \qquad \Leftarrow \qquad \dot{y} = f(y)$$

Точки равновесия: такие y, что $\dot{y} = 0$

Как с нелинейными работать как с линейными? ⇒ Линеаризовать у точки равновесия!

Линеаризация системы 1-го порядка

Как линеаризовать?

$\dot{y} = f(y)$,

точка равновесия y_0 ($f(y_0) = 0$)

Линеаризация системы 1-го порядка

$\dot{y} = f(y),$

точка равновесия y_0 ($f(y_0) = 0$)

Разложить в ряд Тейлора у точки равновесия!

Линеаризация системы 1-го порядка

Разложить в ряд Тейлора у точки равновесия!

$\dot{y} = f(y)$,

точка равновесия y_0 ($f(y_0) = 0$)

$$\dot{y} = f(y_0) + \frac{\partial f(y_0)}{\partial y} \cdot (y - y_0) + \frac{\partial^2 f(y_0)}{\partial y^2} \cdot \frac{(y - y_0)^2}{2!} + \frac{\partial^3 f(y_0)}{\partial y^3} \cdot \frac{(y - y_0)^3}{3!} + \cdots$$

Линеаризация системы 1-го порядка

Разложить в ряд Тейлора у точки равновесия!

$\dot{y} = f(y)$,
точка равновесия y_0 ($f(y_0) = 0$)

$$\dot{y} = f(y_0) + \frac{\partial f(y_0)}{\partial y} \cdot (y - y_0) + \frac{\partial^2 f(y_0)}{\partial y^2} \cdot \frac{(y - y_0)^2}{2!} + \frac{\partial^3 f(y_0)}{\partial y^3} \cdot \frac{(y - y_0)^3}{3!} + \cdots$$

$$\boxed{f(y_0) = 0}$$

Линеаризация системы 1-го порядка

$\dot{y} = f(y),$
точка равновесия y_0 ($f(y_0) = 0$)

Разложить в ряд Тейлора у точки равновесия!

$$\dot{y} = f(y_0) + \frac{\partial f(y_0)}{\partial y} \cdot (y - y_0) + \frac{\partial^2 f(y_0)}{\partial y^2} \cdot \frac{(y - y_0)^2}{2!} + \frac{\partial^3 f(y_0)}{\partial y^3} \cdot \frac{(y - y_0)^3}{3!} + \cdots$$

$\boxed{f(y_0) = 0}$

Малое в квадрате – пренебрежительно малое.
В кубе и т.д. – тем более.

Вспомните построение асимптотических ЛАЧХ, использовали схожий по духу прием

Линеаризация системы 1-го порядка

Разложить в ряд Тейлора у точки равновесия!

$\dot{y} = f(y)$,
точка равновесия y_0 ($f(y_0) = 0$)

$$\dot{y} = f(y_0) + \frac{\partial f(y_0)}{\partial y} \cdot (y - y_0) + \frac{\partial^2 f(y_0)}{\partial y^2} \cdot \frac{(y - y_0)^2}{2!} + \frac{\partial^3 f(y_0)}{\partial y^3} \cdot \frac{(y - y_0)^3}{3!} + \cdots$$

$$\boxed{f(y_0) = 0}$$

Малое в квадрате – пренебрежительно малое. В кубе и т.д. – тем более.

⇩

Линеаризация возможна только у точки равновесия, иначе бы и после разложения в ряд функция осталась бы нелинейной!

Линеаризация системы 1-го порядка

$\dot{y} = f(y)$,
точка равновесия y_0 ($f(y_0) = 0$)

Разложить в ряд Тейлора у точки равновесия!

$$\dot{y} = \boxed{= 0} + \frac{\partial f(y_0)}{\partial y} \cdot (y - y_0) + \frac{\partial^2 f(y_0)}{\partial y^2} \cdot \frac{(\boxed{\approx 0})^2}{2!} + \frac{\partial^3 f(y_0)}{\partial y^3} \cdot \frac{(\boxed{\approx 0})^3}{3!} + \cdots$$

$\boxed{f(y_0) = 0}$

Малое в квадрате – пренебрежительно малое. В кубе и т.д. – тем более.

Линеаризация системы 1-го порядка

Разложить в ряд Тейлора у точки равновесия!

$\dot{y} = f(y)$,

точка равновесия y_0 ($f(y_0) = 0$)

$$\dot{y} = \frac{\partial f(y_0)}{\partial y} \cdot (y - y_0)$$

Похоже на линейную систему

$$\dot{y} = ay$$

Линеаризация системы 1-го порядка

Разложить в ряд Тейлора у точки равновесия!

$\dot{y} = f(y)$,
точка равновесия y_0 ($f(y_0) = 0$)

$$\dot{y} = \frac{\partial f(y_0)}{\partial y} \cdot (y - y_0) = \frac{\partial f(y_0)}{\partial y} \cdot y - \frac{\partial f(y_0)}{\partial y} \cdot y_0$$

Похоже на линейную систему

$$\dot{y} = ay$$

но мешает константа

Линеаризация системы 1-го порядка

Разложить в ряд Тейлора у точки равновесия!

$\dot{y} = f(y)$,

точка равновесия y_0 ($f(y_0) = 0$)

$$\dot{y} = \frac{\partial f(y_0)}{\partial y} \cdot (y - y_0) = \frac{\partial f(y_0)}{\partial y} \cdot y - \frac{\partial f(y_0)}{\partial y} \cdot y_0$$

Замена:

$$(y - y_0) = Y$$

$$\dot{Y} = (y - y_0)' = \dot{y}$$

Линеаризация системы 1-го порядка

Разложить в ряд Тейлора у точки равновесия!

$\dot{y} = f(y),$

точка равновесия y_0 ($f(y_0) = 0$)

$$\dot{y} = \frac{\partial f(y_0)}{\partial y} \cdot (y - y_0) = \frac{\partial f(y_0)}{\partial y} \cdot y - \frac{\partial f(y_0)}{\partial y} \cdot y_0$$

Замена:

$$(y - y_0) = Y$$

$$\dot{Y} = (y - y_0)' = \dot{y}$$

$\Rightarrow$

Линейная система:

$$\dot{Y} = \frac{\partial f(y_0)}{\partial y} \cdot Y$$

Линеаризация системы 1-го порядка

Разложить в ряд Тейлора у точки равновесия!

$\dot{y} = f(y)$,

точка равновесия y_0 ($f(y_0) = 0$)

$$\dot{y} = \frac{\partial f(y_0)}{\partial y} \cdot (y - y_0) = \frac{\partial f(y_0)}{\partial y} \cdot y - \frac{\partial f(y_0)}{\partial y} \cdot y_0$$

Замена:

$$(y - y_0) = Y$$
$$\dot{Y} = (y - y_0)' = \dot{y}$$

$\Rightarrow$

Линейная система:

$$\dot{Y} = \frac{\partial f(y_0)}{\partial y} \cdot Y$$

Можно анализировать как линейную систему, строить управление как для линейной системы и т.п.

Линейные и нелинейные системы: 2-й порядок

Линейные системы

$$\begin{cases}\dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ \dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2\end{cases}$$

Нелинейные системы

$$\begin{cases}\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2)\end{cases}$$

Линейные и нелинейные системы: 2-й порядок

Линейные системы

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

$$\dot{x} = Ax$$

Нелинейные системы

$$\begin{cases}\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2)\\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2)\end{cases}$$

Линейные и нелинейные системы: 2-й порядок

Линейные системы

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\dot{x} = Ax$$

Нелинейные системы

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2) \end{cases}$$

Точки равновесия:

$\mathrm{Rank}(A) = 2 \;\rightarrow$ точка $(0,0)$

$\mathrm{Rank}(A) = 1 \;\rightarrow$ прямая

$\mathrm{Rank}(A) = 0 \;\rightarrow$ плоскость

Линейные и нелинейные системы: 2-й порядок

Линейные системы

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\dot{x} = Ax$$

Нелинейные системы

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2) \end{cases}$$

Точки равновесия:

$\mathrm{Rank}(A) = 2 \;\rightarrow$ точка $(0{,}0)$

$\mathrm{Rank}(A) = 1 \;\rightarrow$ прямая

$\mathrm{Rank}(A) = 0 \;\rightarrow$ плоскость

любые (x_1, x_2), «неинтересный» вырожденный случай, аналогичный $a = 0$ для первого порядка

Линейные и нелинейные системы: 2-й порядок

Линейные системы

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

$$\dot{x}=Ax$$

Нелинейные системы

$$\begin{cases}\dot{x}_1=f_1(x_1,x_2)\\ \dot{x}_2=f_2(x_1,x_2)\end{cases}$$

Точки равновесия:

$\mathrm{Rank}(A)=2$ $\rightarrow$ точка $(0{,}0)$

$\mathrm{Rank}(A)=1$ $\rightarrow$ прямая

$\mathrm{Rank}(A)=0$ $\rightarrow$ плоскость
любые (x_1,x_2), «неинтересный» вырожденный случай, аналогичный $a=0$ для первого порядка

Множество решений

$$\begin{cases}f_1(x_1,x_2)=0\\ f_2(x_1,x_2)=0\end{cases}$$

Линеаризация системы 2-го порядка

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2) \end{cases},$$

точка равновесия (x_{10}, x_{20})

Линеаризация системы 2-го порядка

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2) \end{cases},$$

Ряд Тейлора функции 2-х переменных

точка равновесия (x_{10}, x_{20})

$$\dot{x}_1 = f_1(x_{10}, x_{20}) + \frac{\partial f_1(x_{10}, x_{20})}{\partial x_1} \cdot (x_1 - x_{10}) + \frac{\partial f_1(x_{10}, x_{20})}{\partial x_2} \cdot (x_2 - x_{20}) + \cdots$$

$$\dot{x}_2 = f_2(x_{10}, x_{20}) + \frac{\partial f_2(x_{10}, x_{20})}{\partial x_1} \cdot (x_1 - x_{10}) + \frac{\partial f_2(x_{10}, x_{20})}{\partial x_2} \cdot (x_2 - x_{20}) + \cdots$$

Линеаризация системы 2-го порядка

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2) \end{cases},$$

точка равновесия (x_{10}, x_{20})

Ряд Тейлора функции 2-х переменных

$$\dot{x}_1 = \underbrace{f_1(x_{10}, x_{20})}_{\boxed{=0}} + \frac{\partial f_1(x_{10}, x_{20})}{\partial x_1} \cdot (x_1 - x_{10}) + \frac{\partial f_1(x_{10}, x_{20})}{\partial x_2} \cdot (x_2 - x_{20}) + \cdots$$

$$\dot{x}_2 = \underbrace{f_2(x_{10}, x_{20})}_{\boxed{=0}} + \frac{\partial f_2(x_{10}, x_{20})}{\partial x_1} \cdot (x_1 - x_{10}) + \frac{\partial f_2(x_{10}, x_{20})}{\partial x_2} \cdot (x_2 - x_{20}) + \underbrace{\cdots}_{\boxed{\approx 0}}$$

Линеаризация системы 2-го порядка

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2) \end{cases},$$

точка равновесия (x_{10}, x_{20})

Ряд Тейлора функции 2-х переменных

$$\dot{x}_1 = \frac{\partial f_1(x_{10}, x_{20})}{\partial x_1} \cdot (x_1 - x_{10}) + \frac{\partial f_1(x_{10}, x_{20})}{\partial x_2} \cdot (x_2 - x_{20})$$

$$\dot{x}_2 = \frac{\partial f_2(x_{10}, x_{20})}{\partial x_1} \cdot (x_1 - x_{10}) + \frac{\partial f_2(x_{10}, x_{20})}{\partial x_2} \cdot (x_2 - x_{20})$$

Линеаризация системы 2-го порядка

$$\begin{cases}\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2)\\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2)\end{cases},$$

Ряд Тейлора функции 2-х переменных

точка равновесия (x_{10}, x_{20})

$$\dot{x}_1 = \frac{\partial f_1(x_{10}, x_{20})}{\partial x_1} \cdot (x_1 - x_{10}) + \frac{\partial f_1(x_{10}, x_{20})}{\partial x_2} \cdot (x_2 - x_{20})$$

$$\dot{x}_2 = \frac{\partial f_2(x_{10}, x_{20})}{\partial x_1} \cdot (x_1 - x_{10}) + \frac{\partial f_2(x_{10}, x_{20})}{\partial x_2} \cdot (x_2 - x_{20})$$

Замена:

$$(x_1 - x_{10}) = X_1$$
$$(x_2 - x_{20}) = X_2$$

$\Rightarrow$

Линейная система:

$$\begin{bmatrix}\dot{X}_1\\ \dot{X}_2\end{bmatrix} = A \begin{bmatrix}X_1\\ X_2\end{bmatrix}$$

Линеаризация системы 2-го порядка

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2) \end{cases},$$

точка равновесия $(x_{10}, x$

$$\dot{x}_1 = \frac{\partial f_1(x_{10}, x_{20})}{\partial x_1} \cdot (x_1 - x_{10}) + $$

$$\dot{x}_2 = \frac{\partial f_2(x_{10}, x_{20})}{\partial x_1} \cdot (x_1 - x_{10}) + $$

$$A = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1(x_{10}, x_{20})}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1(x_{10}, x_{20})}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial f_2(x_{10}, x_{20})}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2(x_{10}, x_{20})}{\partial x_2} \end{bmatrix}$$

Замена:

$$(x_1 - x_{10}) = X_1$$
$$(x_2 - x_{20}) = X_2$$

$\Rightarrow$

Линейная система:

$$\begin{bmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$$

Линеаризация системы 2-го порядка

$$\begin{cases}\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2)\end{cases},$$

точка равновесия $(x_{10}, x$

$$\dot{x}_1 = \frac{\partial f_1(x_{10}, x_{20})}{\partial x_1} \cdot (x_1 - x_{10}) + $$

$$\dot{x}_2 = \frac{\partial f_2(x_{10}, x_{20})}{\partial x_1} \cdot (x_1 - x_{10}) + $$

$$A = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1(x_{10}, x_{20})}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1(x_{10}, x_{20})}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial f_2(x_{10}, x_{20})}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2(x_{10}, x_{20})}{\partial x_2} \end{bmatrix}$$

Замена:

$(x_1 - x_{10}$

$(x_2 - x_{20}$

Знакома ли вам эта матрица? Встречали ли вы подобное на других предметах?

Линейная алгебра, теория машин и механизмов, теоретическая механика, прикладная механика и т.п.

Линеаризация системы 2-го порядка

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2) \end{cases},$$

точка равновесия $(x_{10}, x$

$$\dot{x}_1 = \frac{\partial f_1(x_{10}, x_{20})}{\partial x_1} \cdot (x_1 - x_{10}) + $$

$$\dot{x}_2 = \frac{\partial f_2(x_{10}, x_{20})}{\partial x_1} \cdot (x_1 - x_{10}) + $$

Матрица Якóби

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x_{10}, x_{20})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(x_{10}, x_{20})}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2(x_{10}, x_{20})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(x_{10}, x_{20})}{\partial x_2} \end{bmatrix} = J$$

Замена:

$(x_1 - x_{10}$

$(x_2 - x_{20}$

Знакома ли вам эта матрица? Встречали ли вы подобное на других предметах?

Линейная алгебра, теория машин и механизмов, теоретическая механика, прикладная механика и т.п.

Линеаризация: многомерный случай

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2) \\ \quad \dots \\ \dot{x}_n = f_n(x_1, x_2) \end{cases},$$

точка равновесия $(x_{10}, \dots, x_{n0})$

$\Rightarrow$

Замена:

$$(x_1 - x_{10}) = X_1$$
$$\dots$$
$$(x_n - x_{n0}) = X_n$$

$\Rightarrow$

Линейная система:

$$\begin{bmatrix} \dot{X}_1 \\ \dots \\ \dot{X}_n \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} X_1 \\ \dots \\ X_n \end{bmatrix}$$

Линеаризация: многомерный случай

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2) \\ \quad\quad \dots \\ \dot{x}_n = f_n(x_1, x_2) \end{cases},$$

точка равновесия $(x_{10}, \dots, x_{n0})$

$\Rightarrow$ Замена:

$$(x_1 - x_{10}) = X_1$$
$$\dots$$
$$(x_n - x_{n0}) = X_n$$

$\Rightarrow$ Линейная система:

$$\begin{bmatrix} \dot{X}_1 \\ \dots \\ \dot{X}_n \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} X_1 \\ \dots \\ X_n \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\dots)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(\dots)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1(\dots)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(\dots)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(\dots)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2(\dots)}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_2(\dots)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(\dots)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n(\dots)}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

Линеаризация: многомерный случай

$$\begin{cases}\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2)\\ \dots \\ \dot{x}_n = f_n(x_1, x_2)\end{cases},$$

точка равновесия

$\Rightarrow$

Замена:

$$(x_1 - x_{10}) = X_1$$
$$\dots$$
$$(x_n - x_{n0}) = X_n$$

$\Rightarrow$

Линейная система:

$$\begin{bmatrix}\dot{X}_1\\ \dots \\ \dot{X}_n\end{bmatrix} = A\begin{bmatrix}X_1\\ \dots \\ X_n\end{bmatrix}$$

Важные с точки зрения практики линеаризации для малых x:

$$\sin(x) = x$$
$$\cos x = 1$$
$$x^2 = 0$$
$$x^3 = 0$$
$$\dots$$

$$A = \begin{bmatrix}\frac{\partial f_1(\dots)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(\dots)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1(\dots)}{\partial x_n}\\ \frac{\partial f_2(\dots)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(\dots)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2(\dots)}{\partial x_n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{\partial f_2(\dots)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(\dots)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n(\dots)}{\partial x_n}\end{bmatrix}$$

Устойчивость точек равновесия: пример

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + x_1^3 \\ \dot{x}_2 = -2x_2 \end{cases}$$

Устойчивость точек равновесия: пример

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + x_1^3 \\ \dot{x}_2 = -2x_2 \end{cases}$$

точки равновесия: $(-1,\quad 0)$

$(\quad 0,\quad 0)$

$(\quad 1,\quad 0)$

Устойчивость точек равновесия: пример

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + x_1^3 \\ \dot{x}_2 = -2x_2 \end{cases}$$

точки равновесия: $(-1,\quad 0)$

$(\ \ 0,\quad 0)$

$(\ \ 1,\quad 0)$

Устойчиво ли равновесие?

Устойчивость точек равновесия: пример

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + x_1^3 \\ \dot{x}_2 = -2x_2 \end{cases}$$

точки равновесия: $(-1, \quad 0)$

$$(\quad 0, \quad 0)$$

$$(\quad 1, \quad 0)$$

Замена:

$X_1 = x_1 + 1$

$X_2 = x_2$

Устойчивость точек равновесия: пример

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + x_1^3 \\ \dot{x}_2 = -2x_2 \end{cases}$$

точки равновесия: $(-1,\ \ 0)$

$(\ \ 0,\ \ 0)$

$(\ \ 1,\ \ 0)$

Замена:

$X_1 = x_1 + 1$

$X_2 = x_2$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = (-1 + 3x_1^2)\Big|_{x_1=-1} = 2$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_2} = 0$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_1} = 0$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_2} = -2$$

Устойчивость точек равновесия: пример

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + x_1^3 \\ \dot{x}_2 = -2x_2 \end{cases}$$

точки равновесия: $(-1, \quad 0)$

$(\ \ 0, \quad 0)$

$(\ \ 1, \quad 0)$

Замена:

$X_1 = x_1 + 1$

$X_2 = x_2$

$$+ \boxed{\begin{gathered} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} = (-1 + 3x_1^2)\Big|_{x_1=-1} = 2 \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_2} = 0 \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} = 0 \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = -2 \end{gathered}} \Rightarrow$$

Линейная система:

$$\begin{bmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$$

Устойчивость точек равновесия: пример

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + x_1^3 \\ \dot{x}_2 = -2x_2 \end{cases}$$

точки равновесия: $(-1,\ 0)$

$(0,\ 0)$

$(1,\ 0)$

Замена:

$X_1 = x_1 + 1$

$X_2 = x_2$

$+$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = (-1 + 3x_1^2)\Big|_{x_1=-1} = 2$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_2} = 0$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_1} = 0$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_2} = -2$$

$\Rightarrow$

Линейная система:

$$\begin{bmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$$

Собственные числа:

$$\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -2$$

Устойчивость точек равновесия: пример

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + x_1^3 \\ \dot{x}_2 = -2x_2 \end{cases}$$

точки равновесия: $(-1,\ 0)$
$(0,\ 0)$
$(1,\ 0)$

Линеаризованная система **неустойчива**

$\Downarrow$

Неустойчива и точка равновесия

Замена:

$X_1 = x_1 + 1$

$X_2 = x_2$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = (-1 + 3x_1^2)\Big|_{x_1=-1} = 2$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_2} = 0$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_1} = 0$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_2} = -2$$

Линейная система:

$$\begin{bmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$$

Собственные числа:

$\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -2$

Устойчивость точек равновесия: пример

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + x_1^3 \\ \dot{x}_2 = -2x_2 \end{cases}$$

точки равновесия: $(-1,\ \ 0)$

$(\ \ 0,\ \ 0)$

$(\ \ 1,\ \ 0)$

Линеаризованная система **неустойчива**

⇩

Неустойчива и точка равновесия

Замена:

$X_1 = x_1 - 1$

$X_2 = x_2$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = (-1 + 3x_1^2)\Big|_{x_1=1} = 2$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_2} = 0$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_1} = 0$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_2} = -2$$

⇨

Линейная система:

$$\begin{bmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$$

Собственные числа:

$\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -2$

Устойчивость точек равновесия: пример

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + x_1^3 \\ \dot{x}_2 = -2x_2 \end{cases}$$

точки равновесия: $(-1, \quad 0)$

$(\ \ 0, \quad 0)$

$(\ \ 1, \quad 0)$

Линеаризованная система асимптотически устойчива

$\Downarrow$

Асимптотически устойчива и точка равновесия

Замена:

$X_1 = x_1$

$X_2 = x_2$

$+$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = (-1 + 3x_1^2)\Big|_{x_1=0} = -1$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_2} = 0$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_1} = 0$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_2} = -2$$

$\Rightarrow$

Линейная система:

$$\begin{bmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$$

Собственные числа:

$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2$

Устойчивость точек равновесия: пример

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + x_1^3 \\ \dot{x}_2 = -2x_2 \end{cases}$$

точки равновесия: $(-1,\ 0)$

$(0,\ 0)$

$(1,\ 0)$

Линеаризованная система

на границе устойчивости

⇩

Определить устойчивость

так не выйдет

Замена:

$X_1 = x_1$

$X_2 = x_2$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = (-1 + 3x_1^2)\Big|_{x_1=0} = -1$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_2} = 0$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_1} = 0$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_2} = -2$$

Линейная система:

$$\begin{bmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$$

Собственные числа:

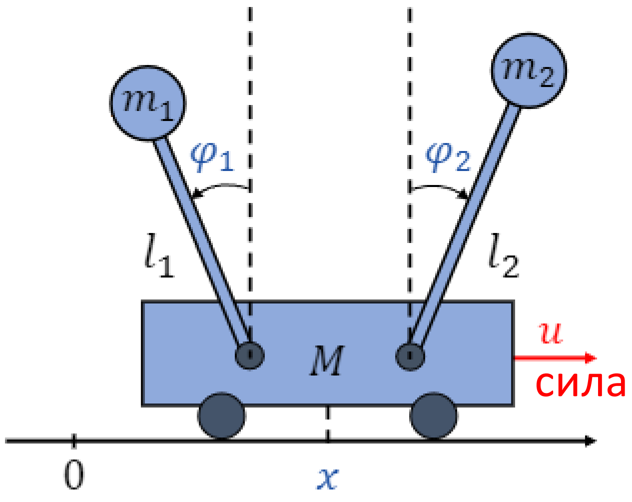
$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2$

Линеаризация: управляемость (и наблюдаемость)

Понятия управляемости и наблюдаемости, а также критерии см. на лекции

Линеаризация: управляемость (и наблюдаемость)

Пример: парный маятник на подвижном основании

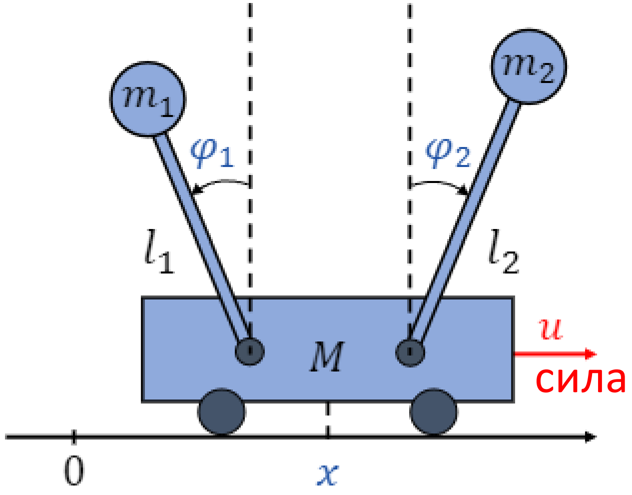


Понятия управляемости и наблюдаемости, а также критерии см. на лекции

Линеаризованные системы также можно исследовать на управляемость и наблюдаемость и делать выводы о нелинейных!

Линеаризация: управляемость (и наблюдаемость)

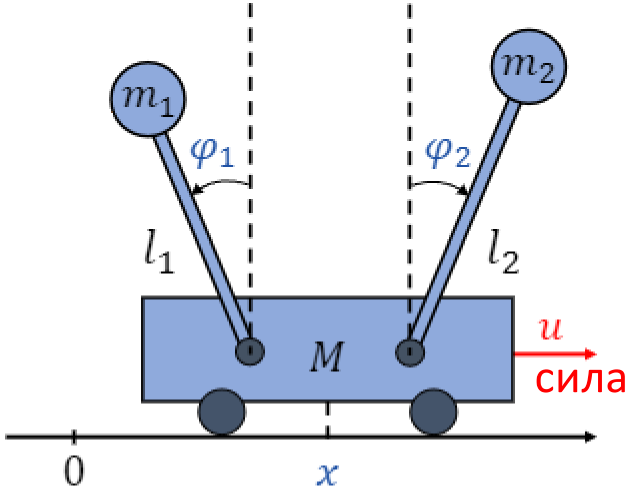
Пример: парный маятник на подвижном основании



Управляема ли система?

Линеаризация: управляемость (и наблюдаемость)

Пример: парный маятник на подвижном основании

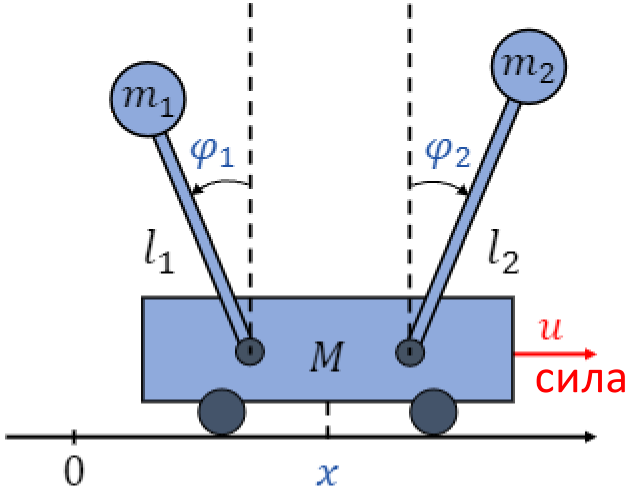


Управляема ли система?

«Физику» системы можно получить на основании уравнения Ньютона или уравнения Лагранжа

Линеаризация: управляемость (и наблюдаемость)

Пример: парный маятник на подвижном основании

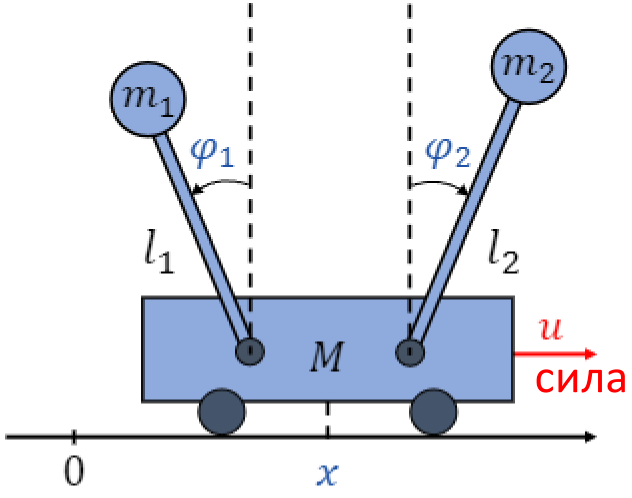


$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{v} \\ \dot{\varphi}_1 \\ \dot{\omega}_1 \\ \dot{\varphi}_2 \\ \dot{\omega}_2 \end{bmatrix}$$

Управляема ли система?

Линеаризация: управляемость (и наблюдаемость)

Пример: парный маятник на подвижном основании



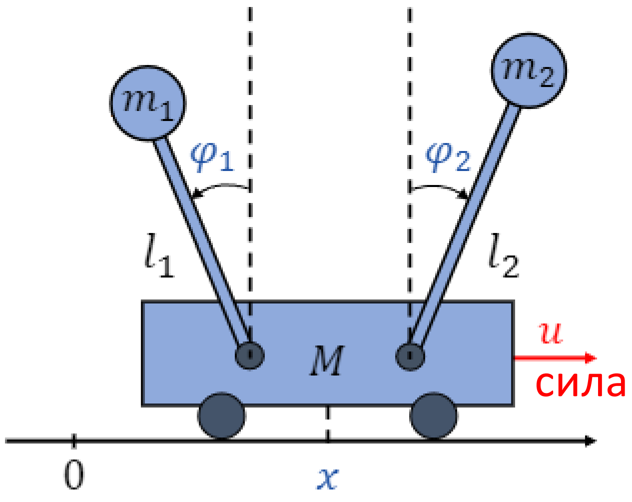
Результат линеаризации около верхнего положения (точка неустойчивого равновесия):

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{v} \\ \dot{\varphi}_1 \\ \dot{\omega}_1 \\ \dot{\varphi}_2 \\ \dot{\omega}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_1 g/M & 0 & m_2 g/M & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (M+m_1)g/Ml_1 & 0 & m_2 g/Ml_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & m_1 g/Ml_2 & 0 & (M+m_2)g/Ml_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ v \\ \varphi_1 \\ \omega_1 \\ \varphi_2 \\ \omega_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/M \\ 0 \\ 1/Ml_1 \\ 0 \\ 1/Ml_2 \end{bmatrix} u$$

Управляема ли система?

Линеаризация: управляемость (и наблюдаемость)

Пример: парный маятник на подвижном основании



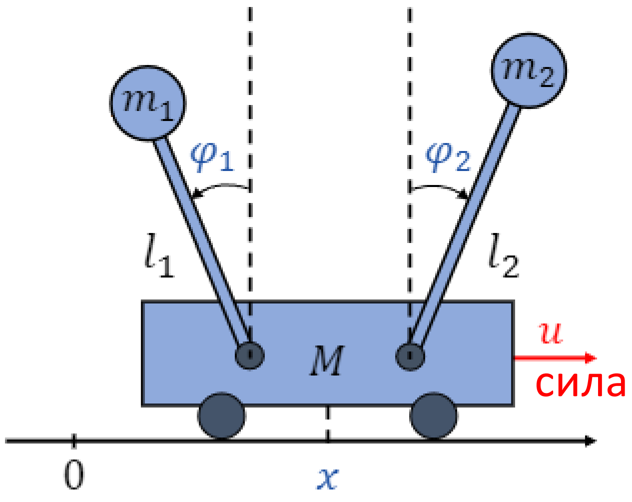
Результат линеаризации около верхнего положения (точка неустойчивого равновесия):

$$\begin{bmatrix}\dot{x}\\ \dot{v}\\ \dot{\varphi}_1\\ \dot{\omega}_1\\ \dot{\varphi}_2\\ \dot{\omega}_2\end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & m_1 g/M & 0 & m_2 g/M & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & (M+m_1)g/Ml_1 & 0 & m_2 g/Ml_1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & m_1 g/Ml_2 & 0 & (M+m_2)g/Ml_2 & 0\end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix}x\\ v\\ \varphi_1\\ \omega_1\\ \varphi_2\\ \omega_2\end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix}0\\ 1/M\\ 0\\ 1/Ml_1\\ 0\\ 1/Ml_2\end{bmatrix}}_{B} u$$

Управляема ли система?

Линеаризация: управляемость (и наблюдаемость)

Пример: парный маятник на подвижном основании



Результат линеаризации около верхнего положения (точка неустойчивого равновесия):

$$\begin{bmatrix}\dot{x}\\ \dot{v}\\ \dot{\varphi}_1\\ \dot{\omega}_1\\ \dot{\varphi}_2\\ \dot{\omega}_2\end{bmatrix} = \underbrace{\left[\begin{array}{cc|cccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & m_1g/M & 0 & m_2g/M & 0\\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & (M+m_1)g/Ml_1 & 0 & m_2g/Ml_1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & m_1g/Ml_2 & 0 & (M+m_2)g/Ml_2 & 0\end{array}\right]}_{A} \begin{bmatrix}x\\ v\\ \varphi_1\\ \omega_1\\ \varphi_2\\ \omega_2\end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix}0\\ 1/M\\ 0\\ 1/Ml_1\\ 0\\ 1/Ml_2\end{bmatrix}}_{B} u$$

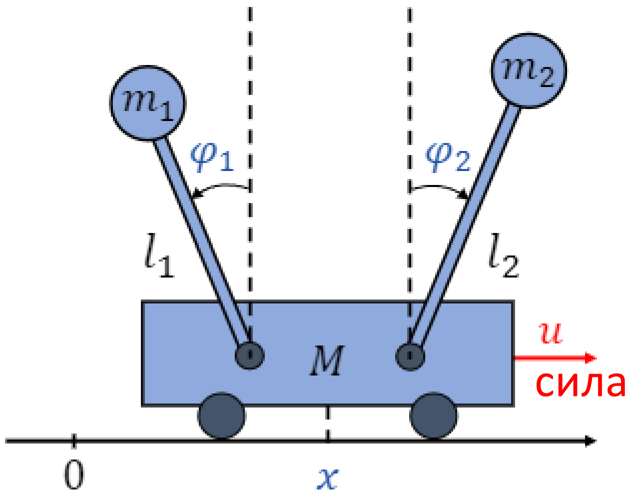
Управляема ли система?

Матрица A – блочно-треугольная

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & \dots \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}$$

Линеаризация: управляемость (и наблюдаемость)

Пример: парный маятник на подвижном основании



Результат линеаризации около верхнего положения (точка неустойчивого равновесия):

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{v} \\ \dot{\varphi}_1 \\ \dot{\omega}_1 \\ \dot{\varphi}_2 \\ \dot{\omega}_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\left[\begin{array}{cc|cccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_1 g/M & 0 & m_2 g/M & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (M+m_1)g/Ml_1 & 0 & m_2 g/Ml_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & m_1 g/Ml_2 & 0 & (M+m_2)g/Ml_2 & 0 \end{array}\right]}_{A} \begin{bmatrix} x \\ v \\ \varphi_1 \\ \omega_1 \\ \varphi_2 \\ \omega_2 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1/M \\ 0 \\ 1/Ml_1 \\ 0 \\ 1/Ml_2 \end{bmatrix}}_{B} u$$

Управляема ли система?

Матрица A – блочно-треугольная

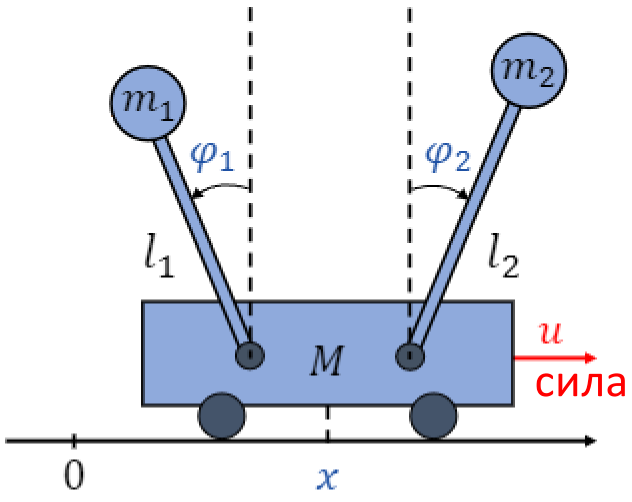
$$A = \begin{bmatrix} A_1 & \dots \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$

Можно отдельно посмотреть управляемость A_1 и A_2

Линеаризация: управляемость (и наблюдаемость)

Пример: парный маятник на подвижном основании



Результат линеаризации около верхнего положения (точка неустойчивого равновесия):

$$\begin{bmatrix}\dot x\\ \dot v\\ \dot\varphi_1\\ \dot\omega_1\\ \dot\varphi_2\\ \dot\omega_2\end{bmatrix}=\underbrace{\left[\begin{array}{cc|cccc}0&1&0&0&0&0\\0&0&m_1g/M&0&m_2g/M&0\\ \hline 0&0&0&1&0&0\\0&0&(M+m_1)g/Ml_1&0&m_2g/Ml_1&0\\0&0&0&0&0&1\\0&0&m_1g/Ml_2&0&(M+m_2)g/Ml_2&0\end{array}\right]}_{A}\begin{bmatrix}x\\ v\\ \varphi_1\\ \omega_1\\ \varphi_2\\ \omega_2\end{bmatrix}+\underbrace{\begin{bmatrix}0\\1/M\\0\\1/Ml_1\\0\\1/Ml_2\end{bmatrix}}_{B}u$$

Управляема ли система?

Матрица A – блочно-треугольная
$$A=\begin{bmatrix}A_1&\dots\\0&A_2\end{bmatrix}$$

⇨

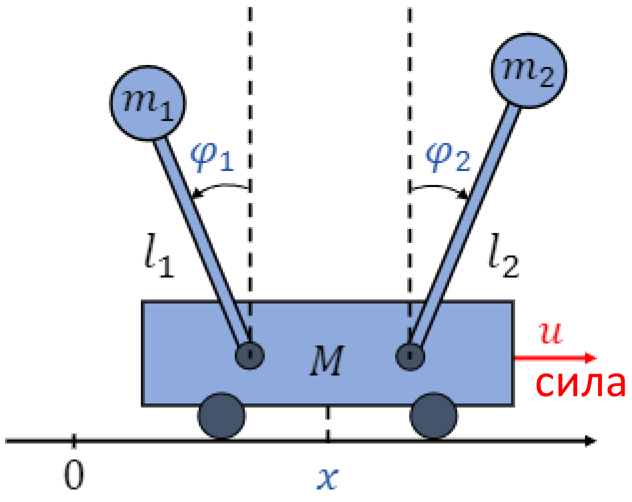
Можно отдельно посмотреть управляемость A_1 и A_2

⇨

A_1 управляема исходя из формы (см. старую версию лекции), рассмотрим A_2

Линеаризация: управляемость (и наблюдаемость)

Пример: парный маятник на подвижном основании



Результат линеаризации около верхнего положения (точка неустойчивого равновесия):

$$\begin{bmatrix} \dot{\varphi}_1 \\ \dot{\omega}_1 \\ \dot{\varphi}_2 \\ \dot{\omega}_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ (M+m_1)g/Ml_1 & 0 & m_2 g/Ml_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ m_1 g/Ml_2 & 0 & (M+m_2)g/Ml_2 & 0 \end{bmatrix}}_{A_2} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \omega_1 \\ \varphi_2 \\ \omega_2 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1/Ml_1 \\ 0 \\ 1/Ml_2 \end{bmatrix}}_{B_2} u$$

Управляема ли система?

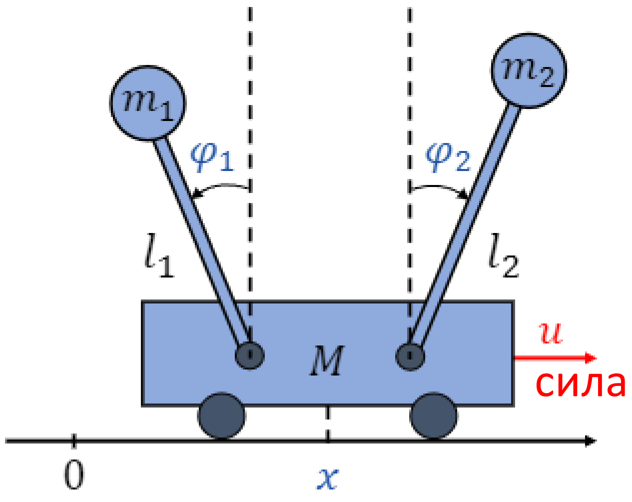
Матрица A – блочно-треугольная
$$A = \begin{bmatrix} A_1 & \dots \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}$$

Можно отдельно посмотреть управляемость A_1 и A_2

A_1 управляема исходя из формы (см. старую версию лекции), рассмотрим A_2

Линеаризация: управляемость (и наблюдаемость)

Пример: парный маятник на подвижном основании



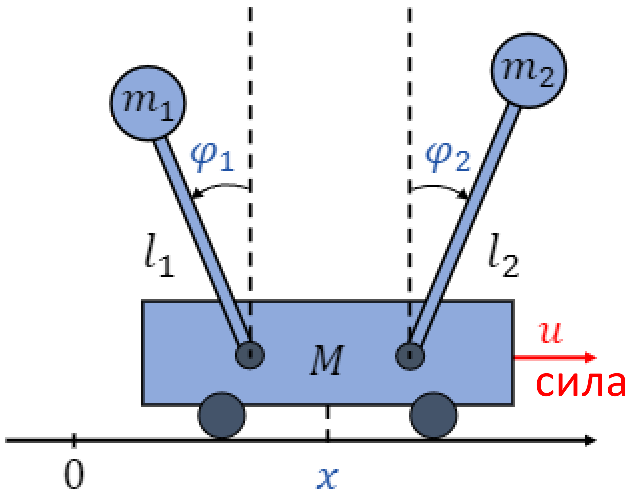
Результат линеаризации около верхнего положения (точка неустойчивого равновесия):

$$\begin{bmatrix}\dot\varphi_1\\ \dot\omega_1\\ \dot\varphi_2\\ \dot\omega_2\end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ (M+m_1)g/Ml_1 & 0 & m_2 g/Ml_1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ m_1 g/Ml_2 & 0 & (M+m_2)g/Ml_2 & 0\end{bmatrix}}_{A_2} \begin{bmatrix}\varphi_1\\ \omega_1\\ \varphi_2\\ \omega_2\end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix}0\\ 1/Ml_1\\ 0\\ 1/Ml_2\end{bmatrix}}_{B_2} u$$

Управляема ли система?

Линеаризация: управляемость (и наблюдаемость)

Пример: парный маятник на подвижном основании



Результат линеаризации около верхнего положения (точка неустойчивого равновесия):

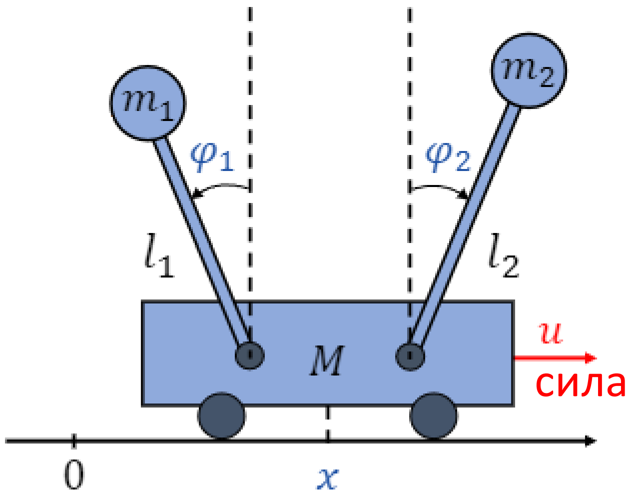
$$\begin{bmatrix} \dot{\varphi}_1 \\ \dot{\omega}_1 \\ \dot{\varphi}_2 \\ \dot{\omega}_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ (M+m_1)g/Ml_1 & 0 & m_2 g/Ml_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ m_1 g/Ml_2 & 0 & (M+m_2)g/Ml_2 & 0 \end{bmatrix}}_{A_2} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \omega_1 \\ \varphi_2 \\ \omega_2 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1/Ml_1 \\ 0 \\ 1/Ml_2 \end{bmatrix}}_{B_2} u$$

Матрица управляемости:

$$U = [B_2 \quad A_2 B_2 \quad A_2^2 B_2 \quad A_2^3 B_2]$$

Линеаризация: управляемость (и наблюдаемость)

Пример: парный маятник на подвижном основании



Результат линеаризации около верхнего положения (точка неустойчивого равновесия):

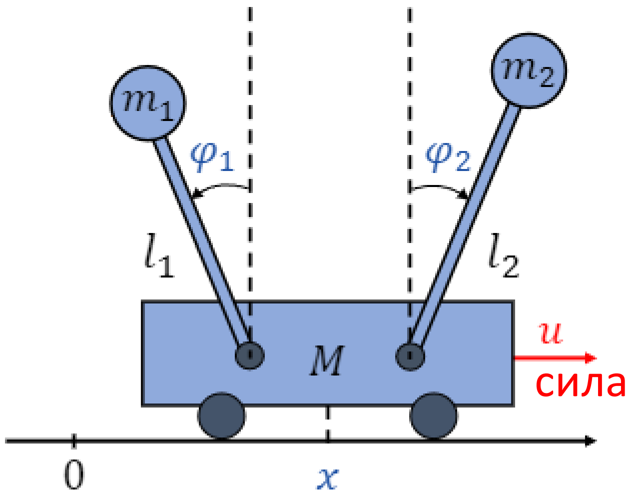
$$\begin{bmatrix} \dot{\varphi}_1 \\ \dot{\omega}_1 \\ \dot{\varphi}_2 \\ \dot{\omega}_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ (M+m_1)g/Ml_1 & 0 & m_2 g/Ml_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ m_1 g/Ml_2 & 0 & (M+m_2)g/Ml_2 & 0 \end{bmatrix}}_{A_2} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \omega_1 \\ \varphi_2 \\ \omega_2 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1/Ml_1 \\ 0 \\ 1/Ml_2 \end{bmatrix}}_{B_2} u$$

Матрица управляемости:

$$U = \begin{bmatrix} 0 & 1/Ml_1 & & \\ 1/Ml_1 & 0 & A_2^2 B_2 & A_2^3 B_2 \\ 0 & 1/Ml_2 & & \\ 1/Ml_2 & 0 & & \end{bmatrix}$$

Линеаризация: управляемость (и наблюдаемость)

Пример: парный маятник на подвижном основании



Результат линеаризации около верхнего положения (точка неустойчивого равновесия):

$$\begin{bmatrix}\dot\varphi_1\\ \dot\omega_1\\ \dot\varphi_2\\ \dot\omega_2\end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ (M+m_1)g/Ml_1 & 0 & m_2g/Ml_1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ m_1g/Ml_2 & 0 & (M+m_2)g/Ml_2 & 0\end{bmatrix}}_{A_2}\begin{bmatrix}\varphi_1\\ \omega_1\\ \varphi_2\\ \omega_2\end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix}0\\ 1/Ml_1\\ 0\\ 1/Ml_2\end{bmatrix}}_{B_2}u$$

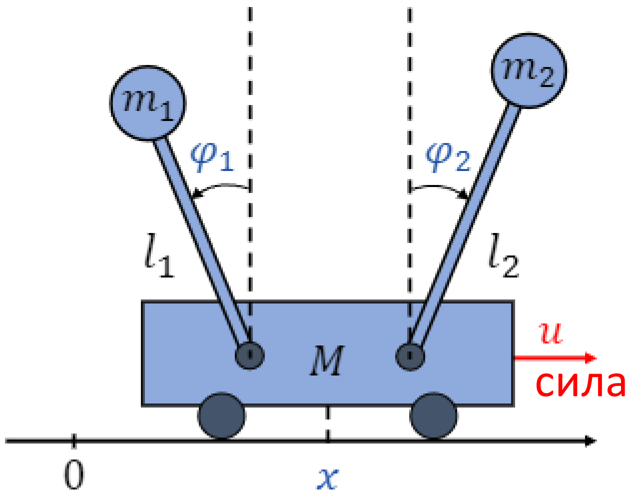
Матрица управляемости:

$$U = \begin{bmatrix}0 & 1/Ml_1 & 0 & g\big((M+m_1)/Ml_1 + m_2/Ml_2\big)/Ml_1\\ 1/Ml_1 & 0 & g\big((M+m_1)/Ml_1 + m_2/Ml_2\big)/Ml_1 & 0\\ 0 & 1/Ml_2 & 0 & g(m_1/Ml_1 + (M+m_2)/Ml_2)/Ml_2\\ 1/Ml_2 & 0 & g(m_1/Ml_1 + (M+m_2)/Ml_2)/Ml_2 & 0\end{bmatrix}$$

$\boxed{\text{Rank(U)=?}}$

Линеаризация: управляемость (и наблюдаемость)

Пример: парный маятник на подвижном основании



Результат линеаризации около верхнего положения (точка неустойчивого равновесия):

$$\begin{bmatrix}\dot\varphi_1\\ \dot\omega_1\\ \dot\varphi_2\\ \dot\omega_2\end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ (M+m_1)g/Ml_1 & 0 & m_2g/Ml_1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ m_1g/Ml_2 & 0 & (M+m_2)g/Ml_2 & 0\end{bmatrix}}_{A_2}\begin{bmatrix}\varphi_1\\ \omega_1\\ \varphi_2\\ \omega_2\end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix}0\\ 1/Ml_1\\ 0\\ 1/Ml_2\end{bmatrix}}_{B_2}u$$

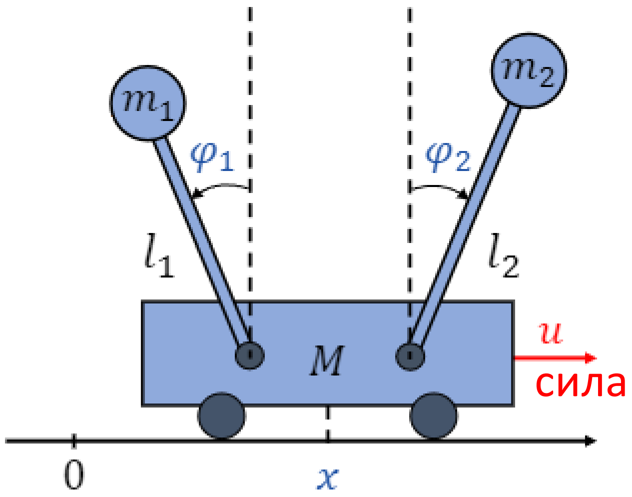
Матрица управляемости:

$$U = \begin{bmatrix}0 & 1/Ml_1 & 0 & g\big((M+m_1)/Ml_1 + m_2/Ml_2\big)/Ml_1\\ 1/Ml_1 & 0 & g\big((M+m_1)/Ml_1 + m_2/Ml_2\big)/Ml_1 & 0\\ 0 & 1/Ml_2 & 0 & g(m_1/Ml_1 + (M+m_2)/Ml_2)/Ml_2\\ 1/Ml_2 & 0 & g(m_1/Ml_1 + (M+m_2)/Ml_2)/Ml_2 & 0\end{bmatrix}$$

Первые 2 столбца линейно независимы.

Линеаризация: управляемость (и наблюдаемость)

Пример: парный маятник на подвижном основании



Результат линеаризации около верхнего положения (точка неустойчивого равновесия):

$$\begin{bmatrix}\dot\varphi_1\\ \dot\omega_1\\ \dot\varphi_2\\ \dot\omega_2\end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ (M+m_1)g/Ml_1 & 0 & m_2g/Ml_1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ m_1g/Ml_2 & 0 & (M+m_2)g/Ml_2 & 0\end{bmatrix}}_{A_2}\begin{bmatrix}\varphi_1\\ \omega_1\\ \varphi_2\\ \omega_2\end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix}0\\ 1/Ml_1\\ 0\\ 1/Ml_2\end{bmatrix}}_{B_2}u$$

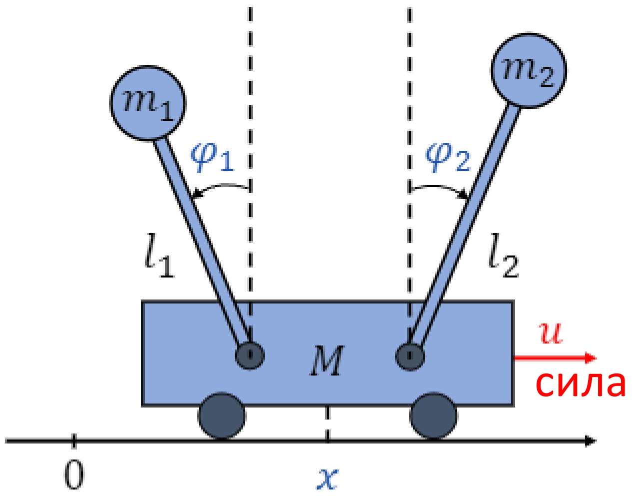
Матрица управляемости:

$$U = \begin{bmatrix}0 & 1/Ml_1 & 0 & g\big((M+m_1)/Ml_1 + m_2/Ml_2\big)/Ml_1\\ 1/Ml_1 & 0 & g\big((M+m_1)/Ml_1 + m_2/Ml_2\big)/Ml_1 & 0\\ 0 & 1/Ml_2 & 0 & g\big(m_1/Ml_1 + (M+m_2)/Ml_2\big)/Ml_2\\ 1/Ml_2 & 0 & g\big(m_1/Ml_1 + (M+m_2)/Ml_2\big)/Ml_2 & 0\end{bmatrix}$$

Если $\big((M+m_1)/Ml_1 + m_2/Ml_2\big) = \big(m_1/Ml_1 + (M+m_2)/Ml_2\big)$, то $\mathrm{Rank}(U) = 2$.

Линеаризация: управляемость (и наблюдаемость)

Пример: парный маятник на подвижном основании



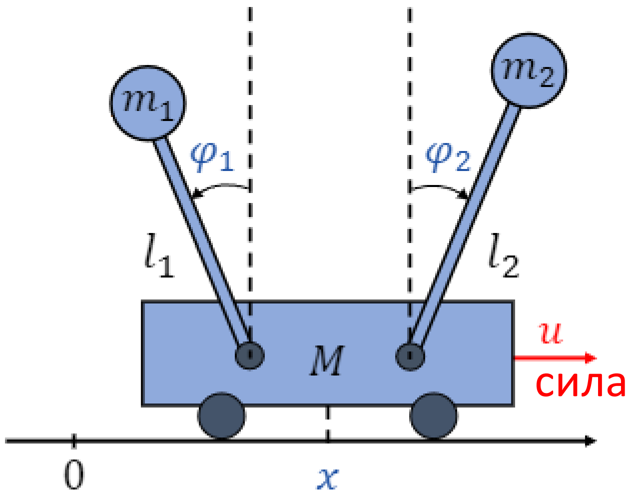
Результат линеаризации около верхнего положения (точка неустойчивого равновесия):

$$\begin{bmatrix}\dot\varphi_1\\ \dot\omega_1\\ \dot\varphi_2\\ \dot\omega_2\end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ (M+m_1)g/Ml_1 & 0 & m_2 g/Ml_1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ m_1 g/Ml_2 & 0 & (M+m_2)g/Ml_2 & 0\end{bmatrix}}_{A_2} \begin{bmatrix}\varphi_1\\ \omega_1\\ \varphi_2\\ \omega_2\end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix}0\\ 1/Ml_1\\ 0\\ 1/Ml_2\end{bmatrix}}_{B_2} u$$

$$\big((M+m_1)/Ml_1 + m_2/Ml_2\big) = (m_1/Ml_1 + (M+m_2)/Ml_2)$$

Линеаризация: управляемость (и наблюдаемость)

Пример: парный маятник на подвижном основании



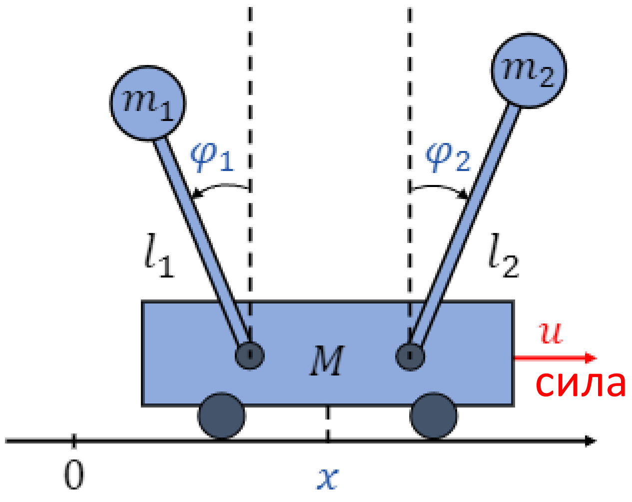
Результат линеаризации около верхнего положения (точка неустойчивого равновесия):

$$\begin{bmatrix}\dot{\varphi}_1\\ \dot{\omega}_1\\ \dot{\varphi}_2\\ \dot{\omega}_2\end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ (M+m_1)g/Ml_1 & 0 & m_2 g/Ml_1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ m_1 g/Ml_2 & 0 & (M+m_2)g/Ml_2 & 0\end{bmatrix}}_{A_2} \begin{bmatrix}\varphi_1\\ \omega_1\\ \varphi_2\\ \omega_2\end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix}0\\ 1/Ml_1\\ 0\\ 1/Ml_2\end{bmatrix}}_{B_2} u$$

$$\frac{M}{Ml_1} + \frac{m_1}{Ml_1} + \frac{m_2}{Ml_2} = \frac{M}{Ml_2} + \frac{m_1}{Ml_1} + \frac{m_2}{Ml_2}$$

Линеаризация: управляемость (и наблюдаемость)

Пример: парный маятник на подвижном основании



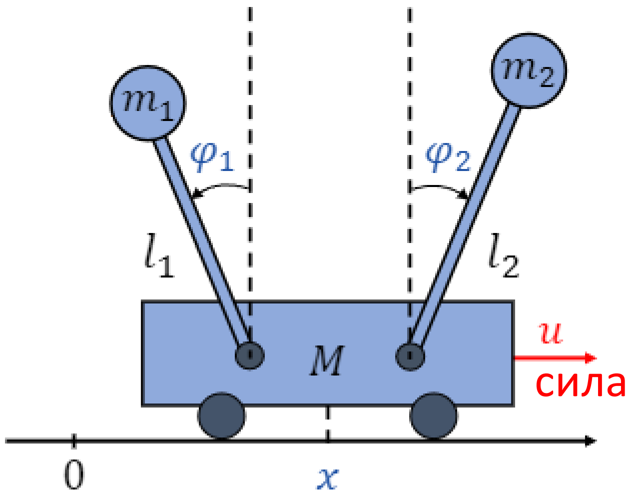
Результат линеаризации около верхнего положения (точка неустойчивого равновесия):

$$\begin{bmatrix}\dot{\varphi}_1\\ \dot{\omega}_1\\ \dot{\varphi}_2\\ \dot{\omega}_2\end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ (M+m_1)g/Ml_1 & 0 & m_2 g/Ml_1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ m_1 g/Ml_2 & 0 & (M+m_2)g/Ml_2 & 0\end{bmatrix}}_{A_2} \begin{bmatrix}\varphi_1\\ \omega_1\\ \varphi_2\\ \omega_2\end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix}0\\ 1/Ml_1\\ 0\\ 1/Ml_2\end{bmatrix}}_{B_2} u$$

$$\frac{M}{Ml_1} + \frac{m_1}{Ml_1} + \frac{m_2}{Ml_2} = \frac{M}{Ml_2} + \frac{m_1}{Ml_1} + \frac{m_2}{Ml_2}$$

Линеаризация: управляемость (и наблюдаемость)

Пример: парный маятник на подвижном основании



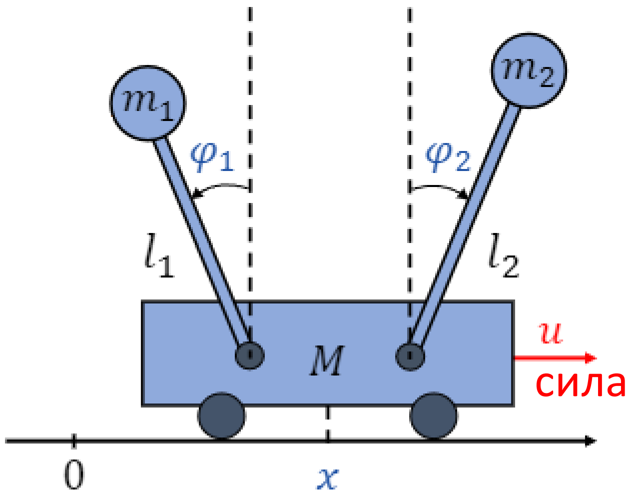
Результат линеаризации около верхнего положения (точка неустойчивого равновесия):

$$\begin{bmatrix}\dot{\varphi}_1\\ \dot{\omega}_1\\ \dot{\varphi}_2\\ \dot{\omega}_2\end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ (M+m_1)g/Ml_1 & 0 & m_2 g/Ml_1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ m_1 g/Ml_2 & 0 & (M+m_2)g/Ml_2 & 0\end{bmatrix}}_{A_2} \begin{bmatrix}\varphi_1\\ \omega_1\\ \varphi_2\\ \omega_2\end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix}0\\ 1/Ml_1\\ 0\\ 1/Ml_2\end{bmatrix}}_{B_2} u$$

$$\frac{M}{Ml_1} = \frac{M}{Ml_2}$$

Линеаризация: управляемость (и наблюдаемость)

Пример: парный маятник на подвижном основании



Результат линеаризации около верхнего положения (точка неустойчивого равновесия):

$$\begin{bmatrix}\dot\varphi_1\\ \dot\omega_1\\ \dot\varphi_2\\ \dot\omega_2\end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ (M+m_1)g/Ml_1 & 0 & m_2g/Ml_1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ m_1g/Ml_2 & 0 & (M+m_2)g/Ml_2 & 0\end{bmatrix}}_{A_2}\begin{bmatrix}\varphi_1\\ \omega_1\\ \varphi_2\\ \omega_2\end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix}0\\ 1/Ml_1\\ 0\\ 1/Ml_2\end{bmatrix}}_{B_2}u$$

$$l_1 = l_2$$

Если длины маятников одинаковые, то система неуправляема!

Иначе – полностью управляема.

Управляемость по выходу

Система 1:

$$\begin{cases} \dot{x} = x + u \\ y = 0 \end{cases}$$

Система 2:

$$\begin{cases} \dot{x} = x \\ y = u \end{cases}$$

Управляемость по выходу

Система 1:

$$\begin{cases} \dot{x} = x + u \\ y = 0 \end{cases}$$

В какие y можно привести системы за конечное время?

Система 2:

$$\begin{cases} \dot{x} = x \\ y = u \end{cases}$$

Управляемость по выходу

Система 1:

$$\begin{cases} \dot{x} = x + u \\ y = 0 \end{cases}$$

В какие y можно привести системы за конечное время?

$U = [1], \mathrm{Rank}(U) = 1$, система полностью управляема.

Система 2:

$$\begin{cases} \dot{x} = x \\ y = u \end{cases}$$

$U = [0], \mathrm{Rank}(U) = 0$, система неуправляема.

Управляемость по выходу

Система 1:

$$\begin{cases} \dot{x} = x + u \\ y = 0 \end{cases}$$

В какие y можно привести системы за конечное время?

$U = [1], \mathrm{Rank}(U) = 1$, система полностью управляема.

Но y изменить нельзя!

Система 2:

$$\begin{cases} \dot{x} = x \\ y = u \end{cases}$$

$U = [0], \mathrm{Rank}(U) = 0$, система неуправляема.

Но y можно сделать любым!

Управляемость по выходу

Система 1:

$$\begin{cases} \dot{x} = x + u \\ y = 0 \end{cases}$$

В какие y можно привести системы за конечное время?

$U = [1], \mathrm{Rank}(U) = 1$, система полностью управляема.

Но y изменить нельзя!

Система 2:

$$\begin{cases} \dot{x} = x \\ y = u \end{cases}$$

$U = [0], \mathrm{Rank}(U) = 0$, система неуправляема.

Но y можно сделать любым!

Для определения управляемости с точки зрения выхода системы существует своя матрица управляемости!

Управляемость по выходу

Определение:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du' \end{cases} \qquad x(t) \in \mathbb{R}^n, u(t) \in \mathbb{R}^m, y(t) \in \mathbb{R}^k$$

Управляемое по выходу пространство – множество выходов линейной системы $y_1 \in \mathbb{R}^k$ таких, что найдется ограниченное управление $u(t), t \in [0, t_1]$, переводящее систему из $y(0) = 0$ в $y(t_1) = y_1$ за конечное время $t_1 \geq 0$.

Управляемость по выходу

Определение:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}, \qquad x(t) \in \mathbb{R}^n, u(t) \in \mathbb{R}^m, y(t) \in \mathbb{R}^k$$

Управляемое по выходу пространство – множество выходов линейной системы $y_1 \in \mathbb{R}^k$ таких, что найдется ограниченное управление $u(t), t \in [0, t_1]$, переводящее систему из $y(0) = 0$ в $y(t_1) = y_1$ за конечное время $t_1 \geq 0$.

$$U = [B \quad AB \quad \dots \quad A^{n-1}B]$$

Управляемость по выходу

Определение:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du' \end{cases} \qquad x(t) \in \mathbb{R}^n, u(t) \in \mathbb{R}^m, y(t) \in \mathbb{R}^k$$

Управляемое по выходу пространство – множество выходов линейной системы $y_1 \in \mathbb{R}^k$ таких, что найдется ограниченное управление $u(t), t \in [0, t_1]$, переводящее систему из $y(0) = 0$ в $y(t_1) = y_1$ за конечное время $t_1 \geq 0$.

Определяется как $\mathrm{Range}(U_{\text{вых}})$,
$\mathrm{Im}(U_{\text{вых}})$ в «классических» обозначениях,
линейная оболочка матрицы.

$$U = [B \quad AB \quad \ldots \quad A^{n-1}B]$$

$$U_{\text{вых}} = [CU \quad D]$$

Управляемость по выходу

Определение:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du' \end{cases} \qquad x(t) \in \mathbb{R}^n, u(t) \in \mathbb{R}^m, y(t) \in \mathbb{R}^k$$

Линейная система полностью управляема по выходу, если для любых $t_0 \geq 0$ и $y_1 \in \mathbb{R}^k$ существует $t_1 \geq t_0$ и ограниченное управление $u(t)$, переводящее систему из произвольного начального состояния $y(t_0) = y_0$ в $y(t_1) = y_1$ за конечное время.

$$U = \begin{bmatrix} B & AB & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix}$$

$$U_{\text{вых}} = \begin{bmatrix} CU & D \end{bmatrix}$$

Управляемость по выходу

Определение:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du' \end{cases} \qquad x(t) \in \mathbb{R}^n, u(t) \in \mathbb{R}^m, y(t) \in \mathbb{R}^k$$

Линейная система полностью управляема по выходу, если для любых $t_0 \geq 0$ и $y_1 \in \mathbb{R}^k$ существует $t_1 \geq t_0$ и ограниченное управление $u(t)$, переводящее систему из произвольного начального состояния $y(t_0) = y_0$ в $y(t_1) = y_1$ за конечное время.

Критерий управляемости по выходу:
$\mathrm{Rank}(U_{\text{вых}}) = k$.

$$U = [B \quad AB \quad \dots \quad A^{n-1}B]$$

$$U_{\text{вых}} = [CU \quad D]$$

Канонические формы: связь с управляемостью и наблюдаемостью (или про подобие систем)

Пример 1:

Система 1:

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} x \end{cases}$$

Система 2:

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x \end{cases}$$

Канонические формы: связь с управляемостью и наблюдаемостью (или про подобие систем)

Пример 1:

Система 1: Каноническая управляемая

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} x \end{cases}$$

Система 2: Каноническая наблюдаемая

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x \end{cases}$$

Канонические формы: связь с управляемостью и наблюдаемостью (или про подобие систем)

Пример 1:

Система 1: Каноническая управляемая

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} x \end{cases}$$

Система 2: Каноническая наблюдаемая

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x \end{cases}$$

Это одна и та же система или разные?

Канонические формы: связь с управляемостью и наблюдаемостью (или про подобие систем)

Пример 1:

Система 1: Каноническая управляемая

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} x \end{cases}$$

Система 2: Каноническая наблюдаемая

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x \end{cases}$$

Это одна и та же система или разные?

Если это одна и та же система, то матрицы должны быть подобны и существует матрица перехода, позволяющая сменить базис!

Канонические формы: связь с управляемостью и наблюдаемостью (или про подобие систем)

Пример 1:

Система 1: Каноническая управляемая

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} x \end{cases}$$

Система 2: Каноническая наблюдаемая

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x \end{cases}$$

Это одна и та же система или разные?

$$P^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} P = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix},$$

$$P^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Если это одна и та же система, то матрицы должны быть подобны и существует матрица перехода, позволяющая сменить базис!

Канонические формы: связь с управляемостью и наблюдаемостью (или про подобие систем)

Пример 1:

Система 1: Каноническая управляемая

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} x \end{cases}$$

Система 2: Каноническая наблюдаемая

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x \end{cases}$$

Это одна и та же система или разные?

$$P^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} P = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix},$$

$$P^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Без вычислений: Да, P существует!

Если это одна и та же система, то матрицы должны быть подобны и существует матрица перехода, позволяющая сменить базис!

Канонические формы: связь с управляемостью и наблюдаемостью (или про подобие систем)

Пример 1:

Система 1: Каноническая управляемая

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} x \end{cases}$$

Система 2: Каноническая наблюдаемая

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x \end{cases}$$

Это одна и та же система или разные?

$$P^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} P = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix},$$

$$P^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Без вычислений: Да, P существует!

Это одна система!

Канонические формы: связь с управляемостью и наблюдаемостью (или про подобие систем)

Пример 2:

Система 1: Каноническая управляемая

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} x \end{cases}$$

Система 2: Каноническая наблюдаемая

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x \end{cases}$$

Это одна и та же система или разные?

$$P^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} P = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix},$$

$$P^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Если это одна и та же система, то матрицы должны быть подобны и существует матрица перехода, позволяющая сменить базис!

Канонические формы: связь с управляемостью и наблюдаемостью (или про подобие систем)

Пример 2:

Система 1: Каноническая управляемая

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} x \end{cases}$$

Система 2: Каноническая наблюдаемая

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x \end{cases}$$

Это одна и та же система или разные?

$$P^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} P = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix},$$

$$P^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Без вычислений: Нет, P не существует!

Если это одна и та же система, то матрицы должны быть подобны и существует матрица перехода, позволяющая сменить базис!

Канонические формы: связь с управляемостью и наблюдаемостью (или про подобие систем)

Пример 2:

Система 1: Каноническая управляемая

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} x \end{cases}$$

Система 2: Каноническая наблюдаемая

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x \end{cases}$$

Это одна и та же система или разные?

$$P^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} P = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix},$$

$$P^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Без вычислений: Нет, P не существует!

В чем подвох?

Канонические формы: связь с управляемостью и наблюдаемостью (или про подобие систем)

Найдем передаточные функции

Пример 1:

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} x \end{cases}$$

Пример 2:

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x \end{cases}$$

Канонические формы: связь с управляемостью и наблюдаемостью (или про подобие систем)

Найдем передаточные функции

Пример 1:

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} x \end{cases}$$

$$W(s) = \frac{2s + 1}{s^2 + 2s + 1}$$

Пример 2:

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x \end{cases}$$

$$W(s) = \frac{s + 1}{s^2 + 2s + 1}$$

Канонические формы: связь с управляемостью и наблюдаемостью (или про подобие систем)

Найдем передаточные функции

Пример 1:

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} x \end{cases}$$

$$W(s) = \frac{2s+1}{s^2+2s+1}$$

Пример 2:

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x \end{cases}$$

$$W(s) = \frac{s+1}{s^2+2s+1} = \frac{1}{s+1}$$

Что это значит?

Канонические формы: связь с управляемостью и наблюдаемостью (или про подобие систем)

Вернемся к Примеру 2

Пример 2:

Система 1: Каноническая управляемая

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} x \end{cases}$$

Система 2: Каноническая наблюдаемая

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x \end{cases}$$

Если у системы существует каноническая управляемая форма, то система полностью управляема

Если у системы существует каноническая наблюдаемая форма, то система полностью наблюдаема

Канонические формы: связь с управляемостью и наблюдаемостью (или про подобие систем)

Пример 2:

Вернемся к Примеру 2

Система 1: Каноническая управляемая

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} x \end{cases}$$

Система ненаблюдаема!

Из-за этого и сократилась ПФ!

Если у системы существует каноническая управляемая форма, то система полностью управляема

Система 2: Каноническая наблюдаемая

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x \end{cases}$$

Система неуправляема!

Из-за этого и сократилась ПФ!

Если у системы существует каноническая наблюдаемая форма, то система полностью наблюдаема