Ψηφιακές Τηλεπικοινωνίες

Ενότητα: Ασκήσεις Αυτοαξιολόγησης

Καθηγητής Κώστας Μπερμπερίδης
Εργαστήριο Επεξεργασίας Σημάτων και Τηλεπικοινωνιών
Τμήμα Μηχανικών Η/Υ και Πληροφορικής

Περιεχόμενα

Σκοπός Ενότητας

Στο έγγραφο αυτό, θα βρείτε μια σειρά από λυμένες ασκήσεις αυτό-αξιολόγησης οι οποίες καλύπτουν τη βασική ύλη του μαθήματος “Ψηφιακές Τηλεπικοινωνίες”, όπως αυτό διδάσκεται στο Τμήμα Μηχανικών Ηλεκτρονικών Υπολογιστών και Πληροφορικής (ΤΜΗΥΠ) του Πανεπιστημίου Πατρών. Ο ενδιαφερόμενος φοιτητής καλείται να επιλύσει τις ασκήσεις αυτές και να συμβουλευτεί τις διαθέσιμες λύσεις μόνο όταν έχει ολοκληρώσει την προσπάθειά του.

1 Θεωρία Πληροφορίας

Άσκηση 1.1
Θεωρούμε μια διακριτή πηγή χωρίς μνήμη (Discrete Memoryless Source, DMS) με αλφάβητο

$$\Phi = \{s_0, s_1, s_2\} \ ,$$

όπου οι πιθανότητες εμφάνισης των τριών συμβόλων της πηγής είναι

$$p(s_0) = p_0 = 0.4, \quad p(s_1) = p_1 = 0.3, \quad p(s_2) = p_2 = 0.3 \quad .$$

(α) Να υπολογίσετε την εντροπία της πηγής αυτής και (β), αν γνωρίζουμε πως η πηγή παράγει σύμβολα με ρυθμό $r_s = 1000$ σύμβολα/Sec, να υπολογίσετε το μέσο ρυθμό πληροφορίας στην έξοδο της πηγής.

Λύση

(α). Σε κάθε σύμβολο s, το οποίο παράγει μια πηγή χωρίς μνήμη στην έξοδό της με πιθανότητα $p(s)$, μπορούμε να αντιστοιχίσουμε την *πληροφορία*

$$I(s) = \log_2\left(\frac{1}{p(s)}\right) \ .$$

Η εντροπία, ή μέσο πληροφοριακό περιεχόμενο, μιας διακριτής πηγής χωρίς μνήμη είναι η αναμενόμενη τιμή (άθροισμα με βάρη τις πιθανότητες) της πληροφορίας όλων των συμβόλων στην έξοδο της πηγής αυτής. Πιο συγκεκριμένα,

$$H(\Phi) = \sum_{s\in\Phi} p(s)I(s) = \sum_{s\in\Phi} p(s)\log_2\left(\frac{1}{p(s)}\right) \ .$$

Αντικαθιστώντας τις πιθανότητες που μας έχουν δοθεί, θα έχουμε για την πηγή μας:

$$\begin{aligned}
H(\Phi) &= p_0\log_2\left(\frac{1}{p_0}\right) + p_1\log_2\left(\frac{1}{p_1}\right) + p_2\log_2\left(\frac{1}{p_2}\right) \\
&= p_0\log_2\left(p_0^{-1}\right) + p_1\log_2\left(p_1^{-1}\right) + p_2\log_2\left(p_2^{-1}\right) \\
&= -p_0\log_2(p_0) - p_1\log_2(p_1) - p_2\log_2(p_2) \\
&= -0.4\log_2(0.4) - 0.3\log_2(0.3) - 0.3\log_2(0.3) \\
&\approx 1.571 \quad \text{bit/σύμβολο}
\end{aligned}$$

(β) Για να βρούμε το μέσο ρυθμό πληροφορίας στην έξοδο της πηγής, θα πρέπει να πολλαπλασιάσουμε το μέσο πληροφοριακό περιεχόμενο (εντροπία) με το ρυθμό με τον οποίο η πηγή παράγει σύμβολα στην έξοδό της. Έτσι, θα είναι

$$\begin{aligned}
R_\Phi &= H(\Phi)\cdot r_s \\
&\approx 1.571 \quad \text{bit/σύμβολο} \cdot 1000 \quad \text{σύμβολα/Sec} \\
&= 1571 \quad \text{bit/Sec}
\end{aligned}$$

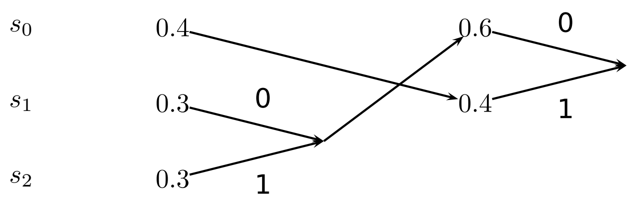
■

Άσκηση 1.2
Για την πηγή της Άσκησης 1.1, να βρείτε τον κώδικα Huffman και στη συνέχεια να υπολογίσετε το μέσο μήκος κώδικα και την απόδοση της κωδικοποίησης.

Λύση

Ο κώδικας Huffman είναι ένας προθεματικός κώδικας (prefix code) ο οποίος αντιστοιχίζει κάθε σύμβολο ενός αλφαβήτου μιας διακριτής πηγής σε μια ακολουθία από δυαδικά ψηφία (κωδική λέξη), με σκοπό να πετύχει χαμηλό μέσο μήκος. Για να υπολογίσουμε την κωδικοποίηση Huffman ενός αλφαβήτου με N σύμβολα ακολουθούμε μια διαδικασία από $N-1$ φάσεις. Σε κάθε φάση, γράφουμε τα σύμβολα που έχουμε, από το πιο πιθανό προς το λιγότερο πιθανό, και στα 2 λιγότερο πιθανά σύμβολα αντιστοιχίζουμε τα δυαδικά ψηφία 0 και 1 ενώ τα σύμβολα αυτά ομαδοποιούνται σε ένα σύμβολο στην επόμενη φάση. Η πιθανότητα εμφάνισης του νέου κάθε φορά συμβόλου είναι το άθροισμα των πιθανοτήτων των συμβόλων που ομαδοποιήθηκαν. Μετά το τέλος της παραπάνω διαδικασίας, η κωδική λέξη για κάθε σύμβολο προκύπτει από τις αναθέσεις δυαδικών ψηφίων που κάναμε σε κάθε φάση, με αντίστροφη όμως σειρά.

Ακολουθώντας τη διαδικασία που περιγράψαμε για την πηγή της προηγούμενης άσκησης, θα έχουμε:



Από το διάγραμμα αυτό, βρίσκουμε την αντιστοίχιση:

Σύμβολο	Κωδική λέξη	Μήκος κωδικής λέξης ($l(s)$)
s_0	1	1
s_1	00	2
s_2	01	2

Σύμφωνα με τα παραπάνω, το μέσο μήκος κώδικα θα είναι

$$\begin{aligned} \overline{L} &= \sum_{s\in\Phi} p(s)l(s) \\ &= 0.4\cdot 1 + 0.3\cdot 2 + 0.3\cdot 2 \\ &= 1.6 \quad \text{bit/σύμβολο.} \end{aligned}$$

Παρατηρούμε, όπως περιμέναμε, πως το μέσο μήκος κώδικα είναι μεγαλύτερο από την εντροπία της πηγής, την οποία υπολογίσαμε στην προηγούμενη άσκηση. Θυμίζουμε πως η εντροπία αποτελεί ένα κάτω φράγμα στο μέσο μήκος κώδικα οποιουδήποτε κώδικα πηγής. Η απόδοση του κώδικα Huffman θα είναι

$$n = \frac{H(\Phi)}{\overline{L}} = 0.9819\ .$$

Παρατηρούμε πως ο κώδικας που υπολογίσαμε πετυχαίνει σχεδόν βέλτιστη απόδοση. ∎

Άσκηση 1.3
Θεωρούμε τη δεύτερης τάξης επέκταση της πηγής της Άσκησης 1.1. Η νέα πηγή θα αποτελείται από $3^2 = 9$ σύμβολα και πιο συγκεκριμένα το νέο αλφάβητο θα είναι το

$$\Phi^2 = \{s_0s_0, s_0s_1, s_0s_2, s_1s_0, \ldots, s_2s_2\} = \{\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_8\}$$

Για την πηγή αυτή, να υπολογιστεί η εντροπία και ο μέσος ρυθμός πληροφορίας στην έξοδό της.

Λύση

Αρχικά θα υπολογίσουμε τις πιθανότητες των νέων συμβόλων. Αφού η αρχική πηγή πληροφορίας δεν έχει μνήμη (δηλαδή διαδοχικά σύμβολα που εκπέμπονται από την πηγή είναι στατιστικά ανεξάρτητα) οι πιθανότητες των ομαδοποιημένων συμβόλων θα δίνονται από το γινόμενο των πιθανοτήτων εμφάνισης των επιμέρους συμβόλων. Έτσι θα έχουμε για τις πιθανότητες των συμβόλων της νέας πηγής:

Σύμβολο:	σ_0	σ_1	σ_2	σ_3	σ_4	σ_5	σ_6	σ_7	σ_8
Επιμέρους σύμβολα:	s_0s_0	s_0s_1	s_0s_2	s_1s_0	s_1s_1	s_1s_2	s_2s_0	s_2s_1	s_2s_2
Πιθανότητα	0.16	0.12	0.12	0.12	0.09	0.09	0.12	0.09	0.09

Η εντροπία της νέας πηγής υπολογίζεται ως:

$$\begin{aligned} H(\Phi^2) &= \sum_{s\in\Phi^2} p(s) \log_2\left(\frac{1}{p(s)}\right) \\ &= -0.16 \log_2(0.16) - 4\cdot 0.12 \log(0.12) - 4\cdot 0.09 \log(0.09) \\ &\approx 0.4230 + 1.4683 + 1.2506 \\ &= 3.142 \quad \text{bit/σύμβολο} \end{aligned}$$

Γενικά, η σχέση που συνδέει την εντροπία μιας πηγής $H(\Phi)$ με την εντροπία της n τάξης επέκτασής της $H(\Phi^n)$ είναι

$$H(\Phi^n) = n \cdot H(\Phi)$$

που εύκολα μπορούμε να επιβεβαιώσουμε πως ισχύει και στην περίπτωσή μας.

Ο ρυθμός συμβόλων της νέας πηγής θα δίνεται από τον τύπο

$$r_s' = \frac{r_s}{2} = 500 \quad \text{σύμβολα/Sec}$$

αφού κάθε σύμβολο της νέας πηγής αντιστοιχεί σε δύο σύμβολα της αρχικής. Τελικά, ο μέσος ρυθμός πληροφορίας στην έξοδο της νέας πηγής θα είναι:

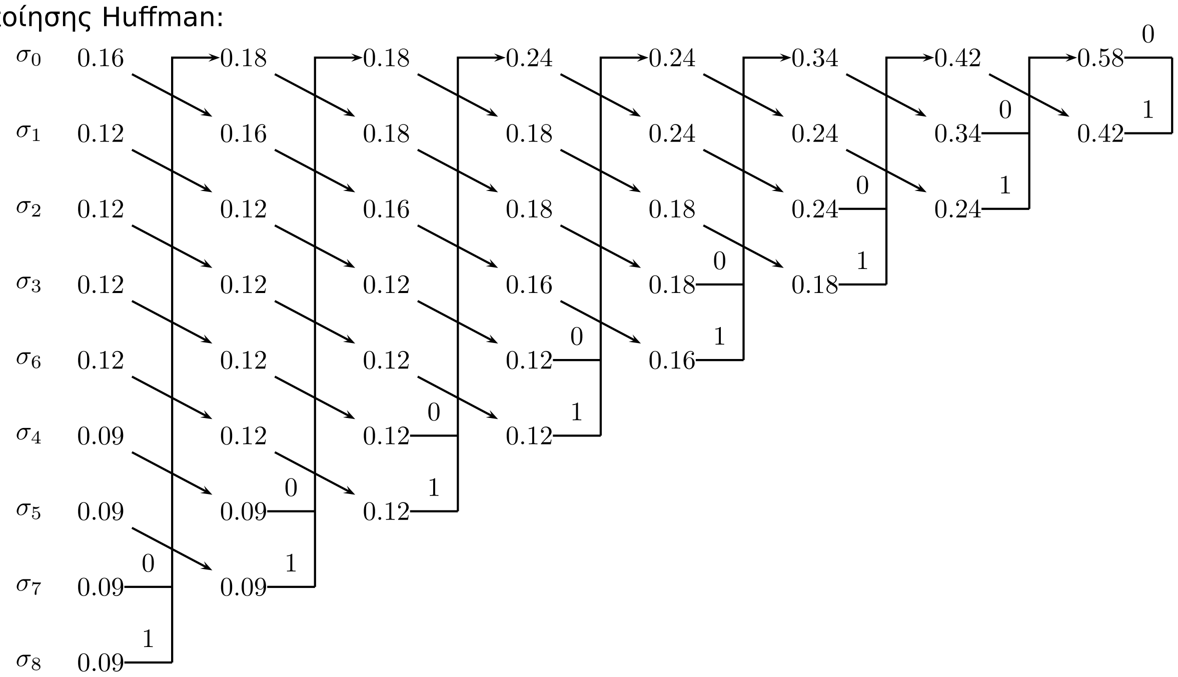
$$R_{\Phi^2} = 500 \quad \text{σύμβολα/Sec} \ \cdot 3.142 \quad \text{bits/Sec} = R_\Phi$$

Δηλαδή, ο ρυθμός παραγωγής πληροφορίας δεν άλλαξε με την δεύτερης τάξης επέκταση της πηγής. ■

Άσκηση 1.4
Για την πηγή της Άσκησης 1.3, να βρεθεί η κωδικοποίηση Huffman και να υπολογιστεί η απόδοση της κωδικοποίησης αυτής.

Λύση

Σύμφωνα με τη μέθοδο που περιγράψαμε στην Άσκηση 1.2 θα έχουμε για την εύρεση της κωδικοποίησης Huffman:



Με βάση το παραπάνω σχήμα, βρίσκουμε την ακόλουθη κωδικοποίηση για τα σύμβολα:

Σύμβολο (s)	σ_0	σ_1	σ_2	σ_3	σ_4	σ_5	σ_6	σ_7	σ_8
Κώδικας	001	010	011	100	110	111	101	0000	0001
Μήκος $(l(s))$	3	3	3	3	3	3	3	4	4

Έτσι, το μέσο μήκος κώδικα θα δίνεται από τον τύπο:

$$
\begin{aligned}
\overline{L} &= \sum_{s \in \Phi^2} p(s) l(s) \\
&= 0.16 \cdot 3 + 0.12 \cdot 3 + 0.12 \cdot 3 + 0.12 \cdot 3 + 0.09 \cdot 3 + 0.09 \cdot 3 + 0.12 \cdot 3 \\
&\quad + 0.09 \cdot 4 + 0.09 \cdot 4 \\
&= 3.18 \quad \text{bits/σύμβολο}
\end{aligned}
$$

Τελικά, η απόδοση της κωδικοποίησης αυτής θα είναι:

$$n = \frac{H(\Phi^2)}{\overline{L}} = \frac{3.14}{3.18} = 0.9881$$

Παρατηρούμε εδώ πως με τη δεύτερης τάξης επέκταση της πηγής, ενώ ο μέσος ρυθμός πληροφορίας παραμένει ίδιος, πετυχαίνουμε καλύτερη απόδοση κωδικοποίησης. Αυτό μπορούμε να το δείξουμε γενικά ξεκινώντας από το γνωστό τύπο:

$$H(\Phi) \leq \overline{L} < H(\Phi) + 1$$

όπου $\overline{L}$ το μήκος ενός προθεματικού κώδικα. Η εφαρμογή του τύπου αυτού στην n τάξης επέκταση της πηγής δίνει:

$$
\begin{aligned}
H(\Phi^n) \leq \overline{L}_n < H(\Phi^n) + 1 \quad &\Leftrightarrow \\
n \cdot H(\Phi) \leq \overline{L}_n < n \cdot H(\Phi) + 1 \quad &\Leftrightarrow \\
H(\Phi) \leq \frac{\overline{L}_n}{n} < H(\Phi) + \frac{1}{n} &
\end{aligned}
$$

Δηλαδή, καθώς το n αυξάνεται τόσο περισσότερο το μήκος του προθεματικού κώδικα πλησιάζει την εντροπία της πηγής (=βέλτιστο μήκος κώδικα) και η απόδοση της κωδικοποίησης τείνει στο 1 καθώς το n τείνει στο άπειρο.

Σημείωση: Στο σημείο αυτό θα πρέπει να σημειωθεί ότι η διαδικασία κωδικοποίησης Huffman δεν είναι μοναδική. Συγκεκριμένα, υπάρχουν αρκετά σημεία του αλγορίθμου που μπορούν να υλοποιηθούν με διαφορετικό τρόπο, καταλήγοντας σε άλλη κωδικοποίηση. Ως τέτοια αναφέρουμε:

(α) Αν δύο σύμβολα έχουν την ίδια πιθανότητα εμφάνισης υπάρχουν 2 τρόποι αρχικής διάταξής τους.

(β) Η ανάθεση των ψηφίων “0” και “1” μπορεί να γίνει από πάνω προς τα κάτω ή από κάτω προς τα πάνω.

(γ) Αμφιβολία συναντάμε όταν ένα σύμβολο που προκύπτει από συνδυασμό δύο άλλων έχει την ίδια πιθανότητα με κάποιο ήδη υπάρχον. Στην περίπτωση αυτή μπορεί να τοποθετηθεί όσο ψηλότερα ή όσο χαμηλότερα γίνεται. Γενικά, είναι προτιμότερο να τοποθετείται όσο ψηλότερα γίνεται.

Εφαρμόζοντας τη μια ή την άλλη διαφοροποίηση του αλγορίθμου ενδεχομένως να οδηγηθούμε σε περιπτώσεις όπου ένα σύμβολο έχει διαφορετικό κώδικα ή ακόμα και διαφορετικό μήκος κώδικα (διαφορετικό αριθμό bits). Ωστόσο, σε όλες τις περιπτώσεις το μέσο μήκος κώδικα $\overline{L}$ διατηρείται σταθερό. ■

Άσκηση 1.5
Η έξοδος μιας έγχρωμης ψηφιακής κάμερας η οποία έχει ανάλυση 500×400 εικονοστοιχεία κωδικοποιείται με χρήση παλέττας 256 χρωμάτων. Αν υποθέσουμε πως οι τιμές γειτονικών pixels είναι μεταξύ τους στατιστικά ανεξάρτητες και ότι σε κάθε pixel τα 256 επίπεδα εμφανίζονται με τις εξής πιθανότητες:

Περιοχή Επιπέδων	0-99	100-149	150-209	210-255
Πιθανότητα Εμφάνισης	0.1	0.5	0.3	0.1

Υποθέτουμε ακόμα πως στα πλαίσια κάθε περιοχής τα χρώματα εμφανίζονται ισοπίθανα. Να υπολογιστούν:

(α) Το μέσο πληροφοριακό περιεχόμενο κάθε pixel.

(β) Το ολικό πληροφοριακό περιεχόμενο μιας εικόνας.

(γ) Ο μέσος ρυθμός πληροφορίας στην έξοδο της κάμερας αν γνωρίζουμε πως αυτή δίνει $r = 25$ frames/sec.

Λύση

Το μέσο πληροφοριακό περιεχόμενο ενός pixel είναι ίσο με την εντροπία της πηγής. Για να υπολογίσουμε την εντροπία της πηγής διαπιστώνουμε πως τα σύμβολα της πηγής είναι οι αριθμοί από 0 έως 255 (256 σύμβολα) και απομένει να υπολογίσουμε τις πιθανότητες κάθε συμβόλου. Δεδομένου ότι σε κάθε περιοχή επιπέδων τα χρώματα εμφανίζονται ισοπίθανα, η πιθανότητα ενός pixel να λάβει μια (συγκεκριμένη) τιμή στην πρώτη περιοχή θα είναι

$$p_0 = \frac{1}{100} \cdot 0.1 = 0.001$$

αφού η περιοχή αποτελείται από 100 σύμβολα. Όμοια, για τις άλλες περιοχές θα έχουμε:

$$p_1 = \frac{1}{50} \cdot 0.5 = 0.01$$

$$p_2 = \frac{1}{60} \cdot 0.3 = 0.005$$

και

$$p_3 = \frac{1}{46} \cdot 0.1 = \frac{0.1}{46}$$

Έτσι, η εντροπία της πηγής θα είναι:

$$\begin{aligned}
H &= \sum_{i=0}^{255} p(s_i) \log_2 \left(\frac{1}{p(s_i)} \right) \\
&= \sum_{i=0}^{99} p_0 \log_2 \left(\frac{1}{p_0} \right) + \sum_{i=100}^{149} p_1 \log_2 \left(\frac{1}{p_1} \right) + \sum_{i=150}^{209} p_2 \log_2 \left(\frac{1}{p_2} \right) + \sum_{i=210}^{256} p_3 \log_2 \left(\frac{1}{p_3} \right) \\
&= 100 \cdot 0.001 \log_2 \left(\frac{1}{0.001} \right) + 50 \cdot 0.01 \log_2 \left(\frac{1}{0.01} \right) + 60 \cdot 0.005 \log_2 \left(\frac{1}{0.005} \right) + 46 \cdot \frac{0.1}{46} \log_2 \left(\frac{46}{0.1} \right) \\
&= 0.1 \log_2(10^3) + 0.5 \log_2(10^2) + 0.3 \log_2(2 \cdot 10^2) + 0.1 \log_2(46 \cdot 10) \\
&= 0.3 \log_2(10) + \log_2(10) + 0.3 + 0.6 \log_2(10) + 0.1 \log_2(2 \cdot 23 \cdot 10) \\
&= 0.3 \log_2(10) + \log_2(10) + 0.3 + 0.6 \log_2(10) + 0.1 + 0.1 \log_2(23) + 0.1 \log_2(10) \\
&= 0.4 + 2 \log_2(10) + 0.4 + 0.1 \log_2(23) \\
&\approx 7.496 \quad \text{bits/pixel}
\end{aligned}$$

Κάθε εικόνα (frame) αποτελείται από:

$$N = 500 \times 400 = 200000 \quad \text{pixels}$$

Επειδή τα pixels θεωρούνται στατιστικά ανεξάρτητα μεταξύ τους, το ολικό πληροφοριακό περιεχόμενο μιας εικόνας θα είναι:

$$I = N \cdot H = 200000 \quad \text{pixels} \; \cdot 7.496 \quad \text{bits/pixel} = 14992 \cdot 10^5 \quad \text{bits/frame}$$

Τέλος, ο ρυθμός πληροφορίας της κάμερας θα δίνεται από τον τύπο

$$R = I \cdot r = 374.8 \cdot 10^5 \quad \text{bits/Sec}$$

■

Άσκηση 1.6
Ο διεθνής κώδικας Morse χρησιμοποιεί μια ακολουθία από τελείες και παύλες για τη μετάδοση γραμμάτων του αγγλικού αλφαβήτου. Η παύλα παριστάνεται με ένα παλμό ρεύματος διάρκειας 3 μονάδων και η τελεία με έναν παλμό ρεύματος διάρκειας 1 μονάδας. Η πιθανότητα εμφάνισης της παύλας είναι το 1/3 της πιθανότητας εμφάνισης της τελείας.

(α) Υπολογίστε το πληροφοριακό περιεχόμενο της τελείας και της παύλας.

(β) Υπολογίστε τη μέση πληροφορία των συμβόλων του κώδικα αυτού.

(γ) Δεχθείτε ότι η τελεία κρατάει 1 mSec, όσο είναι και το χρονικό διάστημα παύσης μεταξύ δυο συμβόλων, και βρείτε το μέσο ρυθμό μετάδοσης πληροφορίας.

Λύση

(α) Ας συμβολίσουμε με s_0 το σύμβολο της παύλας και με s_1 το σύμβολο της τελείας. Έστω ακόμα πως τα σύμβολα αυτά έχουν πιθανότητες εμφάνισης p_0 και p_1 αντίστοιχα. Από τα δεδομένα της εκφώνησης μπορούμε τότε να υπολογίσουμε τις πιθανότητες αυτές:

$$\left.\begin{aligned} p_0 + p_1 &= 1 \\ p_0 &= \tfrac{1}{3}p_1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} p_0 &= \tfrac{1}{4} \\ p_1 &= \tfrac{3}{4} \end{aligned}\right\}$$

Έτσι, μπορούμε να υπολογίσουμε το πληροφοριακό περιεχόμενο της τελείας και της παύλας:

$$I(s_0) = \log_2 \frac{1}{p_0} = 2 \quad \text{bits}$$

$$I(s_1) = \log_2 \frac{1}{p_1} \approx 0.41504 \quad \text{bits}$$

(β) Η μέση πληροφορία των συμβόλων του κώδικα είναι η εντροπία της πηγής που τον παράγει και δίνεται από τον τύπο:

$$H = p_0 \cdot I(s_0) + p_1 \cdot I(s_1) = 0.81128 \quad \text{bits/σύμβολο}$$

(γ) Για να υπολογίσουμε το μέσο ρυθμό μετάδοσης της πληροφορίας υπολογίζουμε αρχικά το μέσο ρυθμό μετάδοσης συμβόλων. Με δεδομένο πως η τελεία κρατάει 1 mSec, η παύλα θα κρατάει 3 mSec. Αν τώρα συνυπολογίσουμε για κάθε ένα σύμβολο και το χρονικό διάστημα του 1 mSec το οποίο μεσολαβεί ανάμεσα στα σύμβολα, ο συνολικός χρόνος μετάδοσης για κάθε σύμβολο θα είναι

$$t_0 = 4 \quad \text{mSec}$$

και

$$t_1 = 2 \quad \text{mSec} .$$

Ο μέσος χρόνος για τη μετάδοση ενός συμβόλου θα είναι

$$\bar{t} = p_0 \cdot t_0 + p_1 \cdot t_1 = 2.5 \quad \text{mSec} ,$$

και ο μέσος ρυθμός συμβόλων

$$r = \frac{1}{\bar{t}} = \frac{1}{2.5} \quad \text{σύμβολα/mSec} = 400 \quad \text{σύμβολα/Sec} .$$

Τελικά, ο μέσος ρυθμός πληροφορίας υπολογίζεται ως:

$$R = r \cdot H = 324.512 \quad \text{bits/Sec} .$$

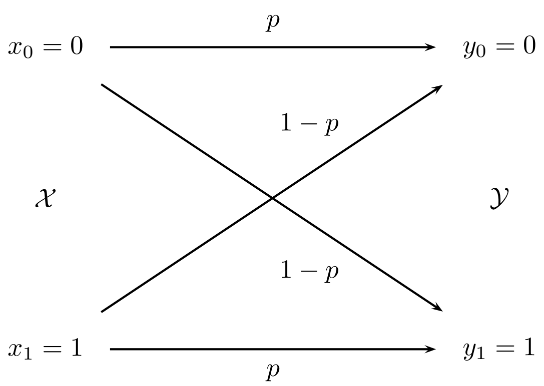
■

2 Χωρητικότητα Διαύλου

Άσκηση 2.1
Σε ένα δυαδικό συμμετρικό κανάλι εισέρχονται σύμβολα με ρυθμό $r_s = 1000$ σύμβολα ανά δευτερόλεπτο. Αν γνωρίζουμε πως τα σύμβολα 0 και 1 είναι ισοπίθανα, να υπολογιστεί ο ρυθμός μετάδοσης πληροφορίας μέσα από το κανάλι αυτό για κάθε μια από τις περιπτώσεις $p = 0.9$, $p = 0.8$ και $p = 0.6$, όπου p η πιθανότητα σωστής μετάδοσης.

Λύση

Το δυαδικό συμμετρικό κανάλι το οποίο εξετάζουμε μπορεί να παρασταθεί από το ακόλουθο σχήμα:



Ο ζητούμενος ρυθμός μετάδοσης πληροφορίας δίνεται από τον τύπο

$$D_t = I(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) \cdot r_s$$

όπου $I(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ η αμοιβαία πληροφορία (η πληροφορία που τελικά μεταδίδεται από το κανάλι). Την αμοιβαία πληροφορία θα την υπολογίσουμε από τον τύπο

$$I(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) = H(\mathcal{X}) - H(\mathcal{X}|\mathcal{Y}) \ ,$$

όπου

$$H(\mathcal{X}) = \frac{1}{2}\log_2 2 + \frac{1}{2}\log_2 2 = 1 \quad \text{bit/Sec} \ ,$$

η εντροπία της πηγής πληροφορίας (πριν το κανάλι) και

$$H(\mathcal{X}|\mathcal{Y}) = \sum_{i=0}^{1}\sum_{j=0}^{1} p(x_i, y_j) \log_2 \frac{1}{p(x_i|y_j)} \ ,$$

η υπό συνθήκη εντροπία (η απώλεια πληροφορίας κατά τη μετάδοση). Απομένει λοιπόν ο υπολογισμός των από κοινού (joint) πιθανοτήτων $p(x_i, y_j)$ καθώς και των υπο συνθήκη (conditional) πιθανοτήτων $p(x_i|y_j)$. Για τις απο κοινού πιθανότητες θα κάνουμε χρήση του τύπου

$$p(x_i, y_j) = p(x_i) \cdot p(y_j|x_i) \ ,$$

και έτσι βρίσκουμε άμεσα

$$p(x_0, y_0) = p(x_0) \cdot p(y_0|x_0) = \frac{1}{2}p \ ,$$

$$p(x_0, y_1) = p(x_0) \cdot p(y_1|x_0) = \frac{1}{2}(1-p) \ ,$$

$$p(x_1, y_0) = p(x_1) \cdot p(y_0|x_1) = \frac{1}{2}(1-p) \ ,$$

και

$$p(x_1, y_1) = p(x_1) \cdot p(y_1|x_1) = \frac{1}{2}p \ .$$

Απομένει ο υπολογισμός των υπό συνθήκη πιθανοτήτων. Για τις πιθανότητες αυτές θα κάνουμε χρήση του τύπου:

$$p(x_i|y_j) = \frac{p(x_i, y_j)}{p(y_j)} \ ,$$

επομένως αρκεί να υπολογίσουμε τις πιθανότητες $p(y_0)$ και $p(y_1)$. Σύμφωνα με μια γνωστή ιδιότητα (marginalization), είναι:

$$\begin{aligned} p(y_j) &= \sum_{i=0}^{1} p(x_i, y_j) \\ &= \sum_{i=0}^{1} p(x_i) p(y_j|x_i) \\ &= p(x_0) \cdot p(y_j|x_0) + p(x_1) \cdot p(y_j|x_1) \end{aligned}$$

οπότε για $j = 0$

$$\begin{aligned} p(y_0) &= p(x_0) \cdot p(y_0|x_0) + p(x_1) \cdot p(y_0|x_1) \\ &= \frac{1}{2}p + \frac{1}{2}(1-p) = \frac{1}{2} \ . \end{aligned}$$

Επομένως και τα σύμβολα y_0 και y_1 είναι ισοπίθανα. Έτσι, μπορούμε τώρα να υπολογίσουμε και τις τέσσερις υπό συνθήκη πιθανότητες:

$$p(x_0|y_0) = \frac{p(x_0, y_0)}{p(y_0)} = \frac{\frac{1}{2}p}{\frac{1}{2}} = p \ ,$$

$$p(x_0|y_1) = \frac{p(x_0, y_1)}{p(y_1)} = \frac{\frac{1}{2}(1-p)}{\frac{1}{2}} = 1 - p \ ,$$

$$p(x_1|y_0) = \frac{p(x_1, y_0)}{p(y_0)} = \frac{\frac{1}{2}(1-p)}{\frac{1}{2}} = 1 - p \ ,$$

και

$$p(x_1|y_1) = \frac{p(x_1, y_1)}{p(y_1)} = \frac{\frac{1}{2}p}{\frac{1}{2}} = p \ .$$

Η υπό συνθήκη εντροπία θα είναι

$$\begin{aligned} H(\mathcal{X}|\mathcal{Y}) &= \sum_{i=0}^{1}\sum_{j=0}^{1} p(x_i, y_j) \log_2 \frac{1}{p(x_i|y_j)} \\ &= \frac{1}{2}p \log_2 \frac{1}{p} + \frac{1}{2}(1-p) \log_2 \frac{1}{1-p} + \frac{1}{2}(1-p) \log_2 \frac{1}{1-p} + \frac{1}{2}p \log_2 \frac{1}{p} \\ &= p \log_2 \frac{1}{p} + (1-p) \log_2 \frac{1}{1-p} \ , \end{aligned}$$

και τελικά

$$D_t = \left(1 - p \log_2 \frac{1}{p} - (1-p) \log_2 \frac{1}{1-p}\right) \cdot r_s \ .$$

Για τις περιπτώσεις που πρέπει να εξετάσουμε, θα είναι

$p = 0.9$	$D_t = 531$ bits/Sec
$p = 0.8$	$D_t = 278$ bits/Sec
$p = 0.6$	$D_t = 29$ bits/Sec

από όπου παρατηρούμε ότι ο ρυθμός μετάδοσης πληροφορίας μειώνεται πολύ γρήγορα καθώς αυξάνεται η πιθανότητα σφάλματος $(1-p)$. Μάλιστα, παρατηρούμε ότι για $(1-p) = 1/2$ έχουμε $D_t = 0$. ■

Άσκηση 2.2
Να υπολογιστεί η χωρητικότητα C ενός διακριτού συμμετρικού καναλιού χωρίς μνήμη (Binary Symmetric Channel, BSC).

Λύση

Η χωρητικότητα ενός διακριτού καναλιού χωρίς μνήμη ορίζεται ως η μέγιστη δυνατή μέση μεταδιδόμενη πληροφορία ανά χρήση του καναλιού (π.χ. διάστημα συμβόλου). Η μεγιστοποίηση αυτή γίνεται ως προς όλες τις δυνατές κατανομές εισόδου.

$$C = \max_{p(x)} I(\mathcal{X}|\mathcal{Y}) \ .$$

Δηλαδή, η χωρητικότητα του καναλιού επιτυγχάνεται όταν στην είσοδο εφαρμόζεται πηγή "προσαρμοσμένη" στο κανάλι.

Λόγω συμμετρίας, σε ένα BSC η χωρητικότητα επιτυγχάνεται όταν τα σύμβολα εισόδου είναι ισοπίθανα, δηλαδή όταν

$$p(x_0) = p(x_1) = \frac{1}{2} \ .$$

Στη συνέχεια θα αποδείξουμε και μαθηματικά τον ισχυρισμό αυτό. Έστω ότι έχουμε τη γενική περίπτωση όπου η κατανομή εισόδου είναι:

$$p(x_0) = p_0 \quad \text{και} \quad p(x_1) = 1 - p_0 \ ,$$

και η πιθανότητα σωστής μετάδοσης του καναλιού είναι p. Αν ακολουθήσουμε τη διαδικασία υπολογισμού της αμοιβαίας πληροφορίας $I(\mathcal{X}|\mathcal{Y})$ όπως έγινε στην Άσκηση 2.1 χρησιμοποιώντας τη μεταβλητή p_0 αντί της τιμής $1/2$, τότε

$$\begin{aligned} I(p_0) &= p_0 p \log_2 \frac{p}{p_0 p + (1-p_0)(1-p)} \\ &+ p_0(1-p)\log_2 \frac{1-p}{p_0(1-p) + (1-p_0)p} \\ &+ (1-p_0)(1-p)\log_2 \frac{1-p}{p_0 p + (1-p_0)(1-p)} \\ &+ (1-p_0)p \log_2 \frac{p}{p_0(1-p) + (1-p_0)p} \ . \end{aligned}$$

Η πρώτη παράγωγος της παραπάνω συνάρτησης ως προς τη μεταβλητή p_0 είναι

$$\begin{aligned} \frac{\vartheta I(p_0)}{\vartheta p_0} &= (1-2p)\log_2 \frac{1-p-p_0+2p_0 p}{p+p_0-2p_0 p} \\ &= (1-2p)\log_2 \frac{(1-p)-p_0(1-2p)}{p+p_0(1-2p)} \ , \end{aligned}$$

και μπορεί να δειχθεί πως:

- Για $p_0 < 1/2$, $\frac{\vartheta I(p_0)}{\vartheta p_0} > 0$ και έτσι η $I(p_0)$ είναι γνησίως αύξουσα.
- Για $p_0 > 1/2$, $\frac{\vartheta I(p_0)}{\vartheta p_0} < 0$ και έτσι η $I(p_0)$ είναι γνησίως φθίνουσα.
- Για $p_0 = 1/2$, $\frac{\vartheta I(p_0)}{\vartheta p_0} = 0$ και έτσι στο σημείο αυτό έχουμε ολικό μέγιστο.

Αποδείξαμε έτσι τον αρχικό μας ισχυρισμό. ■

Άσκηση 2.3
Ένα τερματικό CRT χρησιμοποιείται για την αποστολή αλφαριθμητικών δεδομένων σε έναν υπολογιστή. Το CRT είναι συνδεδεμένο με τον υπολογιστή με μια τηλεφωνική γραμμή που έχει εύρος ζώνης 3000 Hz και S/N εξόδου 10 dB. Δεχόμαστε πως το τερματικό έχει 128 χαρακτήρες και ότι η αποστολή δεδομένων από το τερματικό αποτελείται από ακολουθίες ανεξάρτητων ισοπίθανων χαρακτήρων.

(α) Βρείτε τη χωρητικότητα του καναλιού.

(β) Βρείτε το μέγιστο (θεωρητικό) ρυθμό με τον οποίο μπορούμε να μεταδώσουμε δεδομένα από το τερματικό στον υπολογιστή χωρίς σφάλματα.

Λύση

(α) Η χωρητικότητα του ενθόρυβου καναλιού δίνεται από το θεώρημα Shannon-Hartley με τον τύπο:

$$C = B \log_2 \left(1 + \frac{S}{N}\right) \ ,$$

όπου B είναι το εύρος ζώνης του καναλιού και S/N είναι ο λόγος ισχύος σήματος προς θόρυβο στην έξοδο του καναλιού. Αφού ο λόγος σήματος προς θόρυβο είναι εκφρασμένος σε dB θα έχουμε:

$$10 \log_{10} \frac{S}{N} = 10 \Leftrightarrow \frac{S}{N} = 10 \ ,$$

και έτσι

$$C = 3000 \log_2 11 \approx 10378 \quad \text{bits/Sec} \ .$$

(β) Για να υπολογίσουμε το μέγιστο θεωρητικό ρυθμό με τον οποίο μπορούμε να μεταδώσουμε δεδομένα, υπολογίζουμε αρχικά την εντροπία της πηγής (CRT):

$$H = \sum_{i=1}^{128} p_i \log_2 \frac{1}{p_i} = \sum_{i=1}^{128} \frac{1}{128} \log_2 128 = 128 \frac{1}{128} \log_2 128 = 7 \quad \text{bits/σύμβολο} \ .$$

Ο περιορισμός που τίθεται από το θεώρημα κωδικοποίησης καναλιού του Shannon είναι

$$H \cdot r_s \leq C \Leftrightarrow r_s \leq \frac{C}{H} = 1482 \quad \text{σύμβολα/Sec} \ .$$

■

Άσκηση 2.4
Ένα Gaussian κανάλι έχει εύρος ζώνης 4 kHz και δίπλευρη φασματική πυκνότητα ισχύος του θορύβου $N_0/2$ ίση με 10^{-8} Watt/Hz. Η ισχύς του σήματος στη λήψη πρέπει να τηρείται σε μια στάθμη μικρότερη ή ίση του $1/10$ του mWatt. Υπολογίστε τη χωρητικότητα του καναλιού αυτού.

Λύση

Αρχικά, μπορούμε να υπολογίσουμε την ισχύ του θορύβου. Γνωρίζοντας τη δίπλευρη φασματική πυκνότητα ισχύος του θορύβου, η ισχύς του θορύβου θα δίνεται από το γινόμενο της δίπλευρης φασματικής πυκνότητας ισχύος επί το διπλάσιο του εύρους ζώνης, δηλαδή

$$N = \left(\frac{N_0}{2}\right) \cdot (2B) = 8 \cdot 10^{-5} \quad \text{Watt} .$$

Η χωρητικότητα του καναλιού θα δίνεται από τον τύπο

$$C = B \log_2 \left(1 + \frac{S}{N}\right) .$$

Ο περιορισμός που έχουμε εδώ είναι

$$S \leq 10^{-4} \quad \text{Watt} .$$

Έτσι, διαπιστώνουμε πως η χωρητικότητα του καναλιού θα δίνεται για τη μέγιστη τιμή της ισχύος του σήματος ($S = 10^{-4}$ Watt) και θα είναι έτσι:

$$\begin{aligned} C &= 4000 \cdot \log_2 \left(1 + \frac{10^{-4}}{8 \cdot 10^{-5}}\right) \\ &= 4000 \log_2 (1 + 1.25) \\ &\approx 4679,7 \quad \text{bits/Sec} \end{aligned}$$

■

Άσκηση 2.5
Ένας φίλος σου διατείνεται ότι μπορεί να σχεδιάσει ένα σύστημα για τη διαβίβαση της εξόδου ενός μίνι υπολογιστή σε έναν εκτυπωτή γραμμών που λειτουργεί με ταχύτητα 30 γραμμών ανά λεπτό μέσω μιας κοινής τηλεφωνικής γραμμής εύρους ζώνης 3.5 kHz με λόγο σήματος προς θόρυβο S/N=30 dB. Ας δεχθείτε ότι ο εκτυπωτής αυτός χρειάζεται δεδομένα των 8 bits ανά χαρακτήρα και τυπώνει γραμμές των 80 χαρακτήρων. Τον πιστεύεις?

Λύση

Ας υπολογίσουμε αρχικά τη χωρητικότητα του καναλιού

$$\frac{S}{N} = 30 \quad \text{dB} \Leftrightarrow 10\log_{10}\frac{S}{N} = 30 \Leftrightarrow \frac{S}{N} = 10^3$$

και έτσι

$$\begin{aligned} C &= B\log_2\left(1+\frac{S}{N}\right) \\ &= 3500 \cdot \log_2(1+10^3) \\ &\approx 34885 \quad \text{bits/Sec.} \end{aligned}$$

Ο ρυθμός δεδομένων του εκτυπωτή τώρα θα είναι:

$$\frac{30\text{γραμμές}}{\text{λεπτό}} \cdot \frac{80\text{χαρακτ.}}{\text{γραμμή}} \cdot \underbrace{\frac{8\ \text{bits}}{\text{χαρακτ.}}}_{\text{εντροπία}} = \frac{19200\text{bits}}{\text{λεπτό}} = 320 \quad \frac{\text{bits}}{\text{Sec}}$$

ο οποίος είναι μικρότερος από τη χωρητικότητα του καναλιού και άρα η μετάδοση είναι δυνατή.
■

Άσκηση 2.6
Η έξοδος της ψηφιακής κάμερας της Άσκησης 1.5 διοχετεύεται σε τηλεπικοινωνιακό κανάλι με θόρυβο τέτοιας ισχύος ώστε να έχουμε SNR=20dB. Να υπολογιστεί το ελάχιστο απαιτούμενο εύρος ζώνης ώστε να μεταδοθεί η πληροφορία χωρίς σφάλματα.

Λύση

Αρχικά, μετατρέπουμε το λόγο σήματος προς θόρυβο ο οποίος είναι εκφρασμένος σε dB:

$$\frac{S}{N} = 20dB \Rightarrow 10\log_{10}\frac{S}{N} = 20 \Rightarrow \frac{S}{N} = 100$$

Έστω τώρα πως το χρησιμοποιούμενο κανάλι έχει εύρος ζώνης B. Χρησιμοποιώντας το μέσο ρυθμό πληροφορίας R της κάμερας ο οποίος υπολογίστηκε στην Άσκηση 1.5, θα έχουμε:

$$\begin{aligned} R \leq C \quad &\Leftrightarrow \\ R \leq B\log_2\left(1+\frac{S}{N}\right) \quad &\Leftrightarrow \\ B \geq \frac{R}{\log_2\left(1+\frac{S}{N}\right)} \end{aligned}$$

και με αντικατάσταση βρίσκουμε

$$B \geq 5.63 \quad \text{MHz}$$

■

3 Δειγματοληψία - Κβαντισμός - Πολυπλεξία

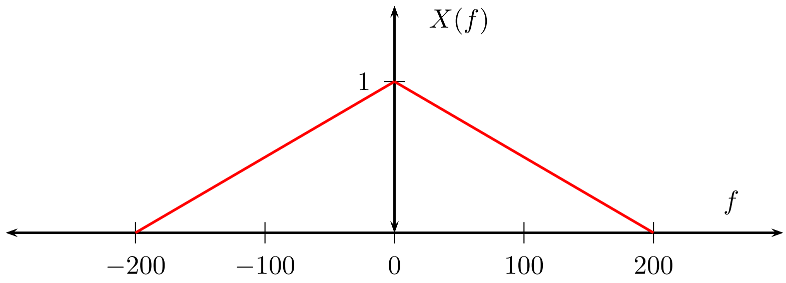
Άσκηση 3.1
Ένα σήμα χαμηλών συχνοτήτων $x(t)$ έχει φάσμα που δίνεται από την

$$X(f) = \begin{cases} 1 - \frac{|f|}{200}, & |f| < 200 \\ 0, & \text{παντού αλλού} \end{cases}$$

(α) Δεχθείτε ότι το $x(t)$ δειγματοληπτείται ιδανικά (με άπειρη αριθμητική ακρίβεια) χρησιμοποιώντας συχνότητα δειγματοληψίας $f_s = 300$ Hz. Σχεδιάστε το φάσμα του δειγματοληπτημένου σήματος.

(β) Επαναλάβετε το προηγούμενο ερώτημα για $f_s = 400$ Hz.

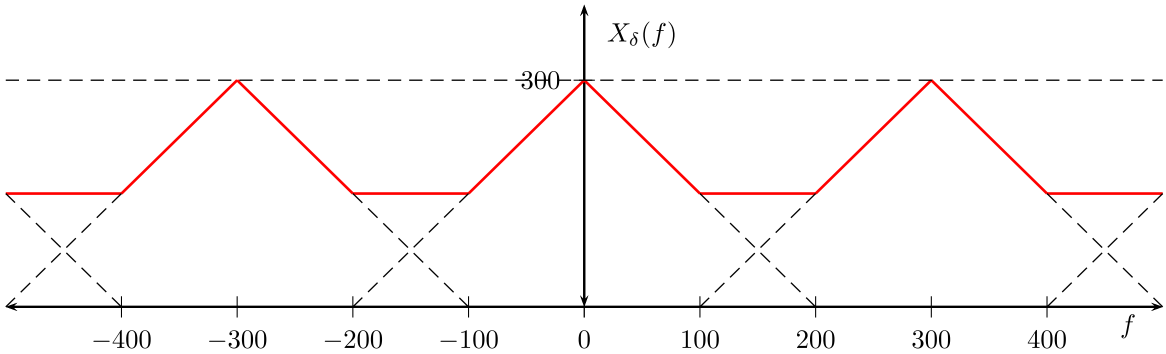
Λύση
Σχεδιάζουμε το φάσμα του αρχικού σήματος



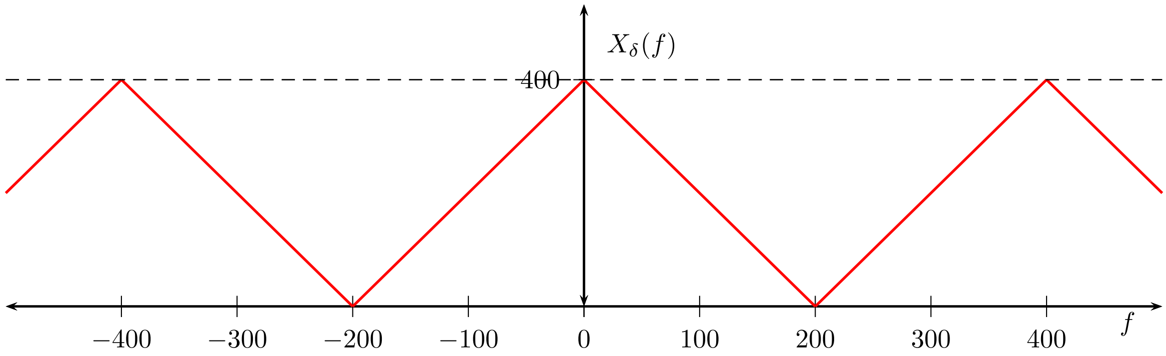
Γενικά, στην περίπτωση της ιδανική δειγματοληψίας, το φάσμα του δειγματοληπτημένου σήματος $X_\delta(f)$ σχετίζεται με το φάσμα του αρχικού σήματος με τη σχέση:

$$X_\delta(f) = \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X\left(f - \frac{n}{T_s}\right)$$

όπου $T_s = 1/f_s$ η περίοδος δειγματοληψίας. Στην περίπτωση που εξετάζουμε, όπου $f_s = 300$ Hz, το φάσμα του δειγματοληπτημένου σήματος θα είναι η περιοδική επανάληψη του φάσματος του αρχικού σήματος με περίοδο 300 Hz και επειδή το εύρος του φάσματος του αρχικού σήματος είναι 400 Hz (από -200 έως 200) θα έχουμε περιοχές επικάλυψης εύρους 100 Hz. Με άλλα λόγια, δεν πληρείται το κριτήριο του Nyquist ($f_s \geq 2 \cdot f_{max}$) για δειγματοληψία χωρίς απώλεια πληροφορίας. Έτσι, σχεδιάζουμε το φάσμα $X_\delta(f)$.



Αντίθετα, στην περίπτωση όπου $f_s = 400$ Hz, το κριτήριο Nyquist πληρείται έστω και οριακά, οπότε δεν έχουμε περιοχές επικάλυψης. Το φάσμα του δειγματοληπτημένου σήματος τότε θα είναι:



$X_\delta(f)$
400
-400
-300
-200
-100
0
100
200
300
400
f

■

Άσκηση 3.2
Το αναλογικό σήμα $x(t) = 2\cos(400\pi t) + 6\cos(640\pi t)$ δειγματοληπτείται ιδανικά με συχνότητα δειγματοληψίας $f_s = 500$ Hz και δίνει έτσι το σήμα διακριτού χρόνου x_n. Να υπολογιστεί το συχνοτικό περιεχόμενο $X(e^{j\omega})$ του σήματος x_n.

Λύση
Ένα από τα γνωστά ζεύγη Fourier δίνεται από τη σχέση

$$\cos(2\pi f_0 t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{2}\left(\delta(f-f_0)+\delta(f+f_0)\right)$$

Το σήμα $x(t)$ γράφεται έτσι:

$$\begin{aligned} x(t) &= 2\cos(400\pi t) + 6\cos(640\pi t) \\ &= 2\cos(2\pi 200t) + 6\cos(2\pi 320t) \end{aligned}$$

και έτσι το φάσμα του θα δίνεται από τον τύπο

$$\begin{aligned} X(f) &= 2\frac{1}{2}(\delta(f-200)+\delta(f+200)) + 6\frac{1}{2}(\delta(f-320)+\delta(f+320)) \\ &= \delta(f-200)+\delta(f+200)+3\delta(f-320)+3\delta(f+320) \end{aligned}$$

Παρατηρούμε στο σημείο αυτό πως η συχνότητα δειγματοληψίας που έχει επιλεγεί βρίσκεται κάτω από το όριο Nyquist το οποίο στην περίπτωσή μας είναι η συχνότητα 640 Hz. Έτσι, θα έχουμε αναδίπλωση συχνοτήτων. Η αναδίπλωση συχνοτήτων γίνεται με τους ακόλουθους 2 κανόνες:

- Συχνότητες οι οποίες στο αρχικό σήμα είναι μεγαλύτερες από τη συχνότητα δειγματοληψίας χάνουν ακέραια πολλαπλάσια της συχνότητας δειγματοληψίας και εμφανίζονται στο διάστημα $[0, f_s)$. Αν για παράδειγμα μια συχνότητα f_a στο αρχικό σήμα είναι ίση με

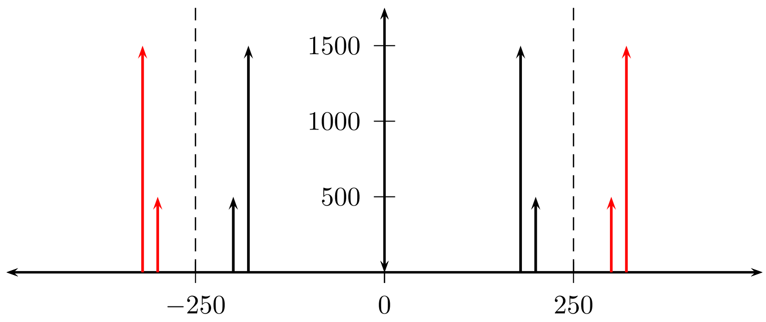
  $$f_a = k \cdot f_s + f'_a$$

  τότε αυτή θα αναδιπλωθεί στη συχνότητα f'_a η οποία ανήκει στο διάστημα $[0, f_s)$ και έχει χάσει k ακέραια πολλαπλάσια.

- Επιπρόσθετα, αν η συχνότητα f'_a ανήκει στο διάστημα $(\frac{f_s}{2}, f_s)$ τότε αυτή υφίσταται επιπλέον αναδίπλωση και μάλιστα αντικατοπτρίζεται στη συμμετρική της ως προς $\frac{f_s}{2}$ συχνότητα.

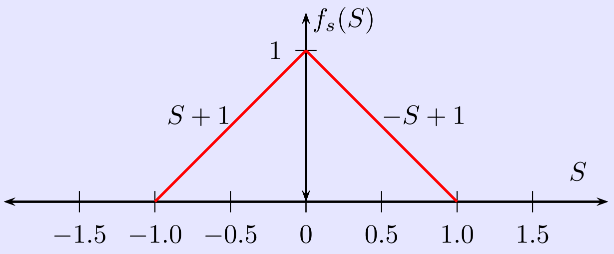
Τέλος, το δειγματοληπτημένο σήμα θα παρουσιάζει περιοδικό φάσμα με περίοδο f_s.

Με βάση τους παραπάνω κανόνες, η συχνότητα 200 Hz θα παραμείνει ανεπηρέαστη από το φαινόμενο της αναδίπλωσης αφού είναι μικρότερη από $\frac{F_s}{2}$=250 Hz. Αντίθετα, η συχνότητα 320 Hz είναι μεγαλύτερη από 250 Hz και άρα θα αντικατοπτριστεί στη συμμετρική της ως προς $\frac{F_s}{2}$ συχνότητα, δηλαδή στη συχνότητα 180 Hz. Στο ακόλουθο σχήμα έχουμε σχεδιάσει το συχνοτικό περιεχόμενο του σήματος x_n όπου οι συναρτήσεις δέλτα που εμφανίζονται εκτός των διακεκομμένων γραμμών αντιστοιχούν σε περιοδικές επαναλήψεις του βασικού φάσματος. Το ύψος των δέλτα συναρτήσεων υπολογίζεται ως $1/T_s$ επί το ύψος των αντίστοιχων δέλτα συναρτήσεων του φάσματος του αναλογικού σήματος.



■

Άσκηση 3.3
Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f_s()$ των τιμών ενός αναλογικού σήματος παρουσιάζεται στο ακόλουθο σχήμα



Σχεδιάστε έναν ομοιόμορφο κβαντιστή 4 σταθμών και υπολογίστε το λόγο (ισχύος) σήματος προς θόρυβο κβάντισης του δειγματοληπτημένου σήματος.

Λύση

Η δυναμική περιοχή του σήματος είναι το διάστημα $[-1,1]$ η οποία έχει εύρος 2. Στην περιοχή αυτή ο κβαντιστής θα πρέπει να εισάγει 4 στάθμες κβάντισης και αφού είναι ομοιόμορφος οι στάθμες αυτές θα πρέπει να ισαπέχουν. Εύκολα βρίσκουμε πως η απόσταση ανάμεσα σε 2 διαδοχικές στάθμες κβάντισης θα είναι

$$\Delta = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

και έτσι τα άκρα των περιοχών θα είναι τα σημεία $x_0 = -1$, $x_1 = -1/2$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1/2$ και $x_4 = 1$. Οι στάθμες κβάντισης θα είναι τα κέντρα των περιοχών αυτών και έτσι θα έχουμε

$$m_1 = -\frac{3}{4} \quad m_2 = -\frac{1}{2} \quad m_3 = \frac{1}{2} \quad m_4 = \frac{3}{4}$$

Αν θεωρήσουμε το αρχικό σήμα ως S και το δειγματοληπτημένο ως S_q, τότε η μέση ισχύς του θορύβου κβάντισης θα είναι

$$\begin{aligned}
N_q &= \int_{-1}^{+1} (S - S_q)^2 f_s(S) dS \\
&= \sum_{i=0}^{3} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (S - m_{i+1})^2 f_s(S) dS \\
&= \int_{x_0}^{x_1} (S - m_1)^2 f_s(S) dS + \int_{x_1}^{x_2} (S - m_2)^2 f_s(S) dS \\
&\quad + \int_{x_2}^{x_3} (S - m_3)^2 f_s(S) dS + \int_{x_3}^{x_4} (S - m_4)^2 f_s(S) dS \\
&= \int_{x_0}^{x_1} (S - m_1)^2 (S+1) dS + \int_{x_1}^{x_2} (S - m_2)^2 (S+1) dS \\
&\quad + \int_{x_2}^{x_3} (S - m_3)^2 (-S+1) dS + \int_{x_3}^{x_4} (S - m_4)^2 (-S+1) dS
\end{aligned}$$

Υπολογίζουμε τις μορφές των ολοκληρωμάτων που εμφανίζονται

$$\begin{aligned}
\int_a^b (x-c)^2 (x+1) dx &= \int_a^b (x^2 + c^2 - 2xc)(x+1) dx \\
&= \int_a^b (x^3 + c^2 x - 2x^2 c + x^2 + c^2 - 2xc) dx \\
&= \int_a^b (x^3 + (1-2c)x^2 + (c^2 - 2c)x + c^2) dx \\
&= \frac{1}{4}(b^4 - a^4) + \frac{1-2c}{3}(b^3 - a^3) \\
&\quad + \frac{c^2 - 2c}{2}(b^2 - a^2) + c^2(b-a)
\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}
\int_a^b (x-c)^2(-x+1)dx &= \int_a^b (-x^3 - c^2x + 2x^2c + x^2 + c^2 - 2xc)dx \\
&= \int_a^b (-x^3 + (1+2c)x^2 - (c^2+2c)x + c^2)dx \\
&= -\frac{1}{4}(b^4 - a^4) + \frac{1+2c}{3}(b^3 - a^3) \\
&\quad -\frac{c^2+2c}{2}(b^2 - a^2) + c^2(b-a)
\end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας τις παραπάνω σχέσεις και αντικαθιστώντας τις κατάλληλες τιμές τελικά υπολογίζουμε πως

$$N_q = \frac{1}{48}$$

Για την ισχύ του σήματος τώρα θα έχουμε

$$\begin{aligned}
P &= \int_{-1}^{+1} S^2 f_s(S)dS \\
&= \int_{-1}^{0} S^2(S+1)dS + \int_{0}^{+1} S^2(-S+1)dS \\
&= \left.\frac{S^4}{4}\right|_{-1}^{0} + \left.\frac{S^3}{3}\right|_{-1}^{0} - \left.\frac{S^4}{4}\right|_{0}^{1} + \left.\frac{S^3}{3}\right|_{0}^{1} \\
&= \frac{1}{6}
\end{aligned}$$

και τελικά, ο λόγος σήματος προς θόρυβο θα είναι

$$\frac{P}{N_q} = \frac{48}{6} = 8$$

■

Άσκηση 3.4
Έξι ανεξάρτητες πηγές με εύρη ζώνης (bandwidth) W, W, $2W$, $2W$, $3W$ και $3W$ Hertz πρόκειται να μεταδοθούν με πολυπλεξία διαίρεσης χρόνου (TDM) σε ένα κοινό τηλεπικοινωνιακό κανάλι. Πως μπορεί να γίνει αυτό και ποιο το απαιτούμενο bandwidth του καναλιού?

Λύση

Σύμφωνα με το κριτήριο Nyquist, οι πηγές με μεγαλύτερο εύρος ζώνης χρειάζονται πιο πυκνή δειγματοληψία. Συγκεκριμένα οι πηγές με εύρος ζώνης W θα πρέπει να δειγματοληπτηθούν με συχνότητα τουλάχιστον $2W$.

Ένας απλός τρόπος να τις πολυπλέξουμε είναι να δειγματοληπτούμε όλες τις πηγές με τη μεγαλύτερη συχνότητα δειγματοληψίας $6W$ (ή να παρεμβάλουμε μηδενικά). Έτσι, σε κάθε περίοδο διάρκειας $1/(6W)$ θα υπάρχουν 6 δείγματα, επομένως ο συνολικός ρυθμός θα είναι $36W$ και το εύρος ζώνης $18W$ για να μεταδοθεί το σήμα.

Ένας πιο αποδοτικός τρόπος είναι ο ακόλουθος: Δειγματοληπτούμε κάθε πηγή στον αντίστοιχο Nyquist ρυθμό της και ρυθμίζουμε τον μεταγωγέα σε κάθε κύκλο να μεταδίδει από 1 δείγμα των 2 πρώτων πηγών, 2 δείγματα των δύο πηγών με εύρος ζώνης $2W$ και 3 δείγματα από τις τελευταίες πηγές. (Αφού $T_s = 2T_s' = 3T_s''$).

Έτσι, στη χρονική διάρκεια της μεγαλύτερης περιόδου $(T_s = \frac{1}{2W})$ έχουμε στην πραγματικότητα 1+1+2+2+3+3=12 δείγματα, δηλαδή έχουμε ένα δείγμα κάθε $r = \frac{1}{24W}$ δευτερόλεπτα ή ο ρυθμός δειγμάτων είναι $24W$ και το απαιτούμενο εύρος ζώνης είναι τουλάχιστον $12W$. ■

Άσκηση 3.5
24 φωνητικά σήματα δειγματοληπτούνται ομοιόμορφα και κατόπιν πολυπλέκονται με διαίρεση χρόνου. Η δειγματοληψία είναι πρακτική (flat-top δείγματα) με διάρκεια 1 μ sec . Η πολυπλεξία περιλαμβάνει πρόβλεψη για συγχρονισμό με έναν επιπλέον παλμό ικανού πλάτους και διάρκειας 1 μ sec. Για κάθε σήμα η υψηλότερη συχνότητα δεν ξεπερνά τα 3.4 khz. Έστω ότι δειγματοληπτούμε με συχνότητα 8 khz. Να υπολογιστεί η απόσταση μεταξύ δυο διαδοχικών παλμών του πεπλεγμένου σήματος. Αν η δειγματοληψία γίνεται στο ρυθμό Nyquist, ποιά θα είναι η απόσταση?

Λύση

Η περίοδος δειγματοληψίας είναι

$$T_s = \frac{1}{8000Hz} = 125 \quad \text{μ sec}$$

και η διάρκεια κάθε παλμού είναι $T = 1$ μ sec. Στο πεπλεγμένο σήμα τώρα, σε μια περίοδο διάρκειας T_s θα έχουμε 24 παλμούς το πλάτος των οποίων θα αντιστοιχεί σε δειγματοληπτημένες τιμές των φωνητικών σημάτων (παλμοί δεδομένων), και έναν παλμό συγχρονισμού με κάθε παλμό (είτε είναι δεδομένων ή συγχρονισμού) να έχει διάρκεια 1 μ sec. Έτσι, από τα 125 μ sec της περιόδου T_s τα 25 μ sec διατίθενται σε παλμούς (24 παλμοί δεδομένων, 1 συγχρονισμού) και τα υπόλοιπα 100 μ sec αποτελούν διαστήματα χωρίς σήμα. Τα διαστήματα αυτά παρατηρούνται μετά από κάθε παλμό και έτσι κάθε ένα έχει διάρκεια

$$T_d = \frac{T_s - N \cdot T_p}{N} = \frac{125 - 25 \cdot 1}{25} = 4 \quad \text{μ sec}$$

όπου T_p=1 μ sec η χρονική διάρκεια ενός παλμού και $N = 25$ το πλήθος όλων των παλμών σε μια περίοδο.

Αν η δειγματοληψία γίνεται στο ρυθμό Nyquist, δηλαδή $f_s = 6800Hz$ και $T_s' = 147$ μ sec τότε ο παραπάνω τύπος δίνει

$$T_d' = 4.88 \quad \text{μ sec}$$

■

4 Μετάδοση Βασικής Ζώνης

Άσκηση 4.1
Σχεδιάστε ένα δυαδικό σύστημα PAM βασικής ζώνης για τη μετάδοση δεδομένων με ρυθμό $r_b = 3600$ bits/sec. Η απόκριση του καναλιού δίνεται από τη σχέση

$$H_c(f) = \begin{cases} 10^{-2} & \text{για} \quad |f| < 2400 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

Στο κανάλι υπεισέρχεται λευκός προσθετικός θόρυβος ο οποίος ακολουθεί την κατανομή Gauss.

Λύση

Από τη σχέση που δίνει την απόκριση του καναλιού διαπιστώνουμε πως το διαθέσιμο εύρος ζώνης είναι

$$W = 2400 \quad \text{Hz}$$

Θα χρησιμοποιήσουμε τον παλμό ανυψωμένου συνημιτόνου (raised cosine) για να σχεδιάσουμε τα φίλτρα πομπού και δέκτη. Το φάσμα του παλμού αυτού δίνεται από τη σχέση

$$X_{rc}(f) = \begin{cases} \frac{1}{2B_T} & |f| < f_1 \\ \frac{1}{4B_T}\left(1 + \cos\left[\frac{\pi(|f|-f_1)}{2B_T - 2f_1}\right]\right) & f_1 \leq |f| \leq 2B_T - f_1 \\ 0 & |f| > 2B_T - f_1 \end{cases}$$

όπου $B_T = \frac{r_b}{2}$ είναι το ελάχιστο απαιτούμενο εύρος ζώνης για τη μετάδοση ενός σήματος με ρυθμό δεδομένων r_b, $(2B_T - f_1)$ είναι το χρησιμοποιούμενο εύρος ζώνης από τον παλμό raised cosine και $(B_T - f_1)$ είναι το πλεονάζον εύρος ζώνης. Στην περίπτωσή μας, για να χρησιμοποιήσουμε όλο το διαθέσιμο εύρος ζώνης W, θέτουμε

$$2B_T - f_1 = W \Leftrightarrow f_1 = 1200 \quad \text{Hz}$$

και έτσι το φάσμα του παλμού που θα χρησιμοποιήσουμε στο σχεδιασμό του συστήματός μας θα είναι

$$X_{rc}(f) = \begin{cases} \frac{1}{3600} & |f| < 1200 \text{ Hz} \\ \frac{1}{7200}\left(1 + \cos\left[\frac{\pi(|f|-1200)}{1200}\right]\right) & 1200 \leq |f| \leq 2400 \\ 0 & |f| > 2400 \end{cases}$$

και ο συντελεστής αναδίπλωσης (roll-off factor) που εκφράζει το ποσοστό του ελάχιστου εύρους ζώνης B_T που αποτελεί το πλεονάζον εύρος ζώνης θα είναι

$$\rho = \frac{B_T - f_1}{B_T} = \frac{1}{3}$$

Έτσι, για τα φίλτρα πομπού και δέκτη θα έχουμε

$$|G_r(f)| = |G_t(f)| = \frac{|X_{rc}(f)|^{1/2}}{|H_c(f)|^{1/2}} = 10|X_{rc}(f)|^{1/2}$$

για να ικανοποιείται η σχέση

$$G_t(f) \cdot H_c(f) \cdot G_r(f) = X_{rc}(f)$$

■

Άσκηση 4.2
Καθορίστε τα βέλτιστα φίλτρα πομπού και δέκτη για ένα δυαδικό τηλεπικοινωνιακό σύστημα που μεταδίδει δεδομένα με ρυθμό $r_b = 4800$ bits/sec σε ένα κανάλι με απόκριση συχνοτήτων

$$|C(f)| = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{f}{W}\right)^2}}, \quad |f| \leq W$$

όπου $W = 4800$ Hz. Ο προσθετικός θόρυβος που εισάγει το κανάλι είναι λευκός, γκαουσιανός και έχει μηδενική μέση τιμή.

Λύση

Το ελάχιστο απαιτούμενο εύρος ζώνης για τη μετάδοση των δεδομένων υπολογίζεται ως

$$B_T = \frac{r_b}{2} = 2400 \quad \text{Hz}$$

Εφόσον το διαθέσιμο εύρος ζώνης του καναλιού $W = 4800$ Hz είναι μεγαλύτερο, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε παλμό μορφοποίησης ανυψωμένου συνημιτόνου. Ο συντελεστής αναδίπλωσής του υπολογίζεται ως:

$$B_T \cdot (1+p) = W \Leftrightarrow p = 1$$

Όπως είδαμε στην Άσκηση 4.1, το φάσμα του παλμού ανυψωμένου συνημιτόνου αποτελείται από τρία τμήματα που ορίζονται με τη βοήθεια των τιμών B_T και f_1. Στην περίπτωσή μας, η f_1 θα έχει την τιμή:

$$f_1 = B_T \cdot (1-p) = 0$$

άρα για $p = 1$ εξαφανίζεται το επίπεδο τμήμα της απόκρισης συχνότητας και αυτή απλοποιείται ως:

$$X_{rc}(f) = \begin{cases} \frac{1}{9600}\left(1+\cos\frac{\pi|f|}{4800}\right) & |f| < 4800 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

Το πλάτος της απόκρισης συχνότητας των φίλτρων πομπού και δέκτη θα πρέπει να ακολουθεί τη σχέση:

$$\begin{aligned} |G_t(f)| = |G_r(f)| &= \frac{|X_{rc}(f)|^{1/2}}{|C(f)|^{1/2}} \\ &= \frac{\left\{\frac{1}{9600}\left(1+\cos\frac{\pi|f|}{4800}\right)\right\}^{1/2}}{\left\{1+\left(\frac{f}{4800}\right)^2\right\}^{-1/4}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{9600}}\left(1+\cos\frac{\pi|f|}{4800}\right)^{1/2}\left(1+\left(\frac{f}{4800}\right)^2\right)^{1/4}, \\ & \quad |f| \leq 4800 \end{aligned}$$

Για να απλοποιήσουμε περαιτέρω τη σχέση, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την ταυτότητα

$$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$$

οπότε

$$\left(1+\cos\frac{\pi|f|}{4800}\right) = \left(2\cos^2\frac{\pi|f|}{9600}\right)^{1/2} = \sqrt{2}\cos\frac{\pi|f|}{9600}$$

οπότε τελικά έχουμε

$$|G_r(f)| = |G_t(f)| = \frac{1}{\sqrt{4800}}\left(1+\left(\frac{f}{4800}\right)^2\right)^{1/4}\cos\frac{\pi|f|}{9600}, \quad |f| \leq 4800$$

■

Άσκηση 4.3
Τηλεοπτικό σήμα με εύρος ζώνης 10 MHz οδηγείται σε κύκλωμα δειγματοληψίας που λειτουργεί με ρυθμό ίσο με 1.2 φορές το ρυθμό Nyquist. Τα δείγματα που προκύπτουν από τη δειγματοληψία (υποθέτουμε πως είναι στατιστικά ανεξάρτητα) κβαντίζονται με τη χρήση ενός κβαντιστή 8 bits. Η δυαδική ακολουθία που προκύπτει, μεταδίδεται δια μέσου ιδανικού χαμηλοπερατού διαύλου με εύρος ζώνης 30 MHz και προσθετικό λευκό θόρυβο με κατανομή Gauss και ισχύ τέτοια ώστε να είναι SNR = 20 dB. Είναι δυνατή η χωρίς σφάλματα μετάδοση της δυαδικής ακολουθίας μέσα από το συγκεκριμένο δίαυλο?

Λύση

Σύμφωνα με τα δεδομένα της άσκησης, ο ρυθμός δειγματοληψίας είναι

$$f_s = (1.2 \cdot 2 \cdot 10) \text{ MHz} = 24 \text{ MHz}$$

δηλαδή έχουμε $24 \cdot 10^6$ δείγματα ανά δευερόλεπτο. Κάθε δείγμα απαιτεί στη συνέχεια 8 bits για αποθήκευση, και έτσι ο ρυθμός δυαδικών ψηφίων θα είναι

$$r_b = 8 \cdot 24 \cdot 10^6 \text{ bits/sec} = 192 \cdot 10^6 \text{ bits/sec}$$

Ας υπολογίσουμε τώρα τη χωρητικότητα του διαύλου που εξετάζουμε. Σύμφωνα με το νόμο Shannon-Hartley η χωρητικότητα του καναλιού μετάδοσης θα είναι:

$$C = B_T \log_2 \left(1 + \frac{S}{N}\right) \text{ bits/sec}$$

όπου = 30 MHz και

$$\frac{S}{N} = 20dB \Leftrightarrow 10 \log_{10} \frac{S}{N} = 20 \Leftrightarrow \frac{S}{N} = 100$$

Έτσι η χωρητικότητα ή ο μέγιστος δυνατός ρυθμός πληροφορίας από το δοσμένο κανάλι για χωρίς σφάλματα μετάδοση θα είναι

$$C = 30 \cdot 10^6 \log_2(101) \approx 199.75 \cdot 10^6 \text{ bits/sec}$$

Παρατηρούμε πως $C > r_b$ και άρα η μετάδοση διαμέσου του συγκεκριμένου διαύλου είναι δυνατή.
■

Άσκηση 4.4
Δύο σήματα με πεπερασμένα εύρη ζώνης 20 kHz και 30 kHz αντίστοιχα, δειγματοληπτούνται και πολυπλέκονται χρονικά. Η δειγματοληψία γίνεται κατά τρόπο που για το κάθε σήμα χωριστά να ικανοποιείται το κριτήριο του Nyquist. Τα προκύπτοντα δείγματα κβαντίζονται από έναν ομοιόμορφο κβαντιστή 256 επιπέδων και στη συνέχεια κωδικοποιούνται δυαδικά. Η δυαδική πηγή πληροφορίας μετασχηματίζεται σε Μιαδική (M-ary) με M=16. Οι παλμοί των συμβόλων της Μιαδικής πηγής μορφοποιούνται με χρήση συνάρτησης τύπου raised cosine και μεταδίδονται στη βασική ζώνη μέσω ενός καναλιού με εύρος ζώνης B=120 kHz. Ζητούνται τα εξής

(α) Να υπολογιστεί το ελάχιστο απαιτούμενο εύρος ζώνης (B_{min}). Είναι το διαθέσιμο εύρος ζώνης αρκετό ώστε να γίνει σωστά η μετάδοση?

(β) Έστω $B_{min} < 120$ kHz. Πως μπορεί να αξιοποιηθεί το πλεονάζον ευρος ζώνης? (Σημείωση: Η προφανής απάντηση για μετάδοση άλλης πηγής δεν θα ληφθεί υπόψη)

(γ) Έστω $B_{min} > 120$ kHz. Ποιο βασικό πρόβλημα θα προκύψει? Σε ποιο σημείο του όλου συστήματος θα επεμβαίνατε ώστε να πετύχετε τελικά σωστή μετάδοση?

Λύση

Και τα δύο σήματα δειγματοληπτούνται στους αντίστοιχους Nyquist ρυθμούς τους. Στη συνέχεια κβαντίζονται με τη χρήση ενός κβαντιστή των 8 bits. Έτσι, υπολογίζουμε τους αντίστοιχους ρυθμούς bits/sec.

$$W_1 = 20 \text{ kHz} \Rightarrow F_{s1} = 40 \text{ kHz (δείγματα/ sec)} \Rightarrow r_{b1} = 320000 \text{ bits/sec}$$

$$W_2 = 30 \text{ kHz} \Rightarrow F_{s2} = 60 \text{ kHz (δείγματα/ sec)} \Rightarrow r_{b2} = 480000 \text{ bits/sec}$$

Οι δυαδικές ακολουθίες στη συνέχεια μετασχηματίζονται σε ακολουθίες 16-αδικών συμβόλων, άρα έχουμε 4 bits/ σύμβολο και προκύπτουν οι ακόλουθοι ρυθμοί συμβόλων:

$$r_{s1} = \frac{r_{b1}}{4} = 80000 \text{ symbols/sec} , \quad T_{s1} = \frac{1}{80} \text{ msec}$$

$$r_{s2} = \frac{r_{b2}}{4} = 120000 \text{ symbols/sec} , \quad T_{s2} = \frac{1}{120} \text{ msec}$$

Οι δύο πηγές πολυπλέκονται χρονικά. Η μεγαλύτερη περίοδος είναι η T_{s1}. Επειδή όμως η T_{s1} δεν είναι ακέραιο πολλαπλάσιο της T_{s2}, που σημαίνει ότι σε διάρκεια T_{s1} δεν παράγεται ακέραιος αριθμός συμβόλων από τη δεύτερη πηγή, κάνουμε το εξής: Βρίσκουμε το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των T_{s1} και T_{s2}, έστω T_s, και επιλέγουμε αυτό ως διάρκεια ενός πλαισίου. Στην περίπτωσή μας το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο είναι το

$$T_s = \frac{1}{40} = 2\frac{1}{80} = 3\frac{1}{120} \quad \text{msec}$$

πράγμα που σημαίνει ότι σε μια περίοδο T_s του πεπλεγμένου σήματος θα έχουμε 2 δείγματα από την πρώτη πηγή και 3 δείγματα από τη δεύτερη πηγή, δηλαδή συνολικά 5 δείγματα σε χρόνο T_s ή ένα δείγμα σε χρόνο

$$r = \frac{T_s}{5} = \frac{1}{200} \quad \text{msec}$$

Έτσι, στο πεπλεγμένο σήμα έχουμε τελικά ρυθμό

$$r_s = \frac{1}{r} = 200 \quad \text{kHz} = 200000 \quad \text{σύμβολα /sec}$$

και για τη μετάδοση του σήματος αυτού απαιτείται εύρος ζώνης τουλάχιστον

$$B_{min} = \frac{r_s}{2} = 100 \quad \text{kHz}$$

και έτσι διαπιστώνουμε πως το διαθέσιμο εύρος ζώνης είναι αρκετό. ■

5 Μετάδοση Ευρείας Ζώνης

Άσκηση 5.1
Δυαδικά δεδομένα μεταδίδονται μέσω μικροκυματικής ζεύξης με ρυθμό $r_b = 10^6$ bits/sec. Η πυκνότητα φάσματος ισχύος στην είσοδο του δέκτη είναι 10^{-10} Watt/Hz. Να βρεθεί η μέση ισχύς του φέροντος που απαιτείται για να διατηρηθεί μια μέση πιθανότητα σφάλματος $P_e \leq 10^{-4}$ για ομόδυνη δυαδική FSK και για ομόδυνη δυαδική PSK.

Λύση

Στην ομόδυνη δυαδική FSK ο τύπος που δίνει την πιθανότητα εσφαλμένης μετάδοσης ενός bit είναι:

$$P_e = \frac{1}{2} erfc\left(\sqrt{\frac{E_b}{2N_0}}\right)$$

οπότε έχουμε διαδοχικά

$$\begin{aligned} P_e &\leq 10^{-4} \Rightarrow \\ erfc\left(\sqrt{\frac{E_b}{2N_0}}\right) &\leq 2 \cdot 10^{-4} \Rightarrow \\ 1 - erf\left(\sqrt{\frac{E_b}{2N_0}}\right) &\leq 2 \cdot 10^{-4} \Rightarrow \\ erf\left(\sqrt{\frac{E_b}{2N_0}}\right) &\geq 0.9998 \end{aligned}$$

και προσεγγιστικά

$$\sqrt{\frac{E_b}{2N_0}} \geq 2.6 \Rightarrow \frac{E_b}{2N_0} \geq 6.76$$

και χρησιμοποιώντας την εξίσωση

$$\frac{N_0}{2} = 10^{-10} \Rightarrow N_0 = 2 \cdot 10^{-10}$$

λαμβάνουμε

$$E_b \geq 2 \cdot N_0 \cdot 6.67 = 27.04 \cdot 10^{-10} \Rightarrow E_{b,min} = 27.04 \cdot 10^{-10}$$

επομένως η ελάχιστη μέση ισχύς είναι

$$\overline{P}_{b,min}^{FSK} = \frac{E_{b,min}}{T_b} = E_{b,min} \cdot r_b = 27.04 \cdot 10^{-4} \quad \text{Watt/sec}$$

Ακριβώς τους ίδιους υπολογισμούς θα κάνουμε στη συνέχεια και για την περίπτωση της ομόδυνης δυαδικής PSK. Στην περίπτωση αυτή η πιθανότητα εσφαλμένης μετάδοσης ενός bit δίνεται από τον τύπο:

$$P_e = \frac{1}{2} erfc\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right)$$

οπότε καταλήγουμε πως

$$E_b \geq 13.52 \cdot 10^{-10} \quad \text{Watt}$$

και

$$\overline{P}_{b,min}^{PSK} = \frac{E_{b,min}}{T_b} = E_{b,min} \cdot r_b = 13.52 \cdot 10^{-4} \quad \text{Watt/Hz} = \frac{1}{2}\overline{P}_{b,min}^{FSK}$$

■

Άσκηση 5.2
Τηλεπικοινωνιακό σύστημα μεταδίδει δυαδικά δεδομένα με ρυθμό $2.5 \cdot 10^6$ bits/sec. Κατά τη διάρκεια της μετάδοσης, λευκός θόρυβος Gauss, μηδενικής μέσης τιμής και πυκνότητας φάσματος ισχύος 10^{-20} Watt/Hz προστίθεται στο σήμα. Απουσία θορύβου, το πλάτος της λαμβανόμενης ημιτονικής κυματομορφής για το ψηφίο 1 ή 0 είναι 1 μ V. Βρείτε τη μέση πιθανότητα σφάλματος για ομόδυνη δυαδική FSK και PSK σηματοδοσία.

Λύση

Στην ομόδυνη δυαδική FSK διαμόρφωση γνωρίζουμε πως το πλάτος του παλμού των συμβόλων είναι

$$A = \sqrt{\frac{2E_b}{T_b}}$$

Έτσι θα είναι

$$\sqrt{\frac{2E_b}{T_b}} = 10^{-6} \Rightarrow \sqrt{2E_b r_b} = 10^{-6} \Rightarrow E_b^{FSK} = 2 \cdot 10^{-19} \text{ Watt}$$

Ακόμα θα έχουμε

$$\frac{N_0}{2} = 10^{-20} \Rightarrow N_0 = 2 \cdot 10^{-20} \text{ Watt}$$

οπότε τελικά

$$\begin{aligned} P_e^{FSK} &= \frac{1}{2} erfc\left(\sqrt{\frac{E_b}{2N_0}}\right) \\ &= \frac{1}{2} erfc\left(\sqrt{\frac{2 \cdot 10^{-19}}{4 \cdot 10^{20}}}\right) \\ &= \frac{1}{2} erfc(\sqrt{5}) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} erf(\sqrt{5}) \\ &\approx 7.8 \cdot 10^{-4} \end{aligned}$$

Στην ομόδυνη δυαδική PSK το πλάτος των παλμών είναι ίσο με αυτό των παλμών της FSK διαμόρφωσης. Έτσι θα είναι

$$E_b^{PSK} = E_b^{FSK} = 2 \cdot 10^{-19} \text{ Watt}$$

Ο τύπος όμως που δίνει την πιθανότητα σφάλματος είναι διαφορετικός, και πιο συγκεκριμένα έχουμε:

$$\begin{aligned} P_e^{PSK} &= \frac{1}{2} erfc\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right) \\ &= \frac{1}{2} erfc\left(\sqrt{\frac{2 \cdot 10^{-19}}{2 \cdot 10^{20}}}\right) \\ &= \frac{1}{2} erfc(\sqrt{10}) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} erf(\sqrt{10}) \\ &\approx 3.9 \cdot 10^{-6} \end{aligned}$$

η οποία είναι πολύ μικρότερη. ■

Άσκηση 5.3

Η εκπεμπόμενη κυματομορφή σε ένα σύστημα ομόδυνης δυαδικής PSK σηματοδοσίας ορίζεται ως:

$$S(t) = A_c k \sin(2\pi f_c t) \pm A_c\sqrt{1-k^2}\cos(2\pi f_c t), \quad 0 \le t \le T_b$$

όπου το θετικό πρόσημο αντιστοιχεί στο σύμβολο 1 και το αρνητικό στο σύμβολο 0. Ο πρώτος όρος αντιπροσωπεύει μια συνιστώσα φέροντος που χρησιμοποιείται για συγχρονισμό του δέκτη με τον πομπό. Σε αυτό το σύστημα, παρουσία προσθετικού λευκού θορύβου Gauss μηδενικής μέσης τιμής και πυκνότητας φάσματος ισχύος $N_0/2$, η μέση πιθανότητα σφάλματος είναι

$$P_e = \frac{1}{2}erfc\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}(1-k^2)}\right) \quad \text{όπου} \quad E_b = \frac{1}{2}A_c^2 T_b$$

(α) Υποθέστε ότι το 10% της ισχύος του μεταδιδόμενου σήματος διατείθεται στη συνιστώσα συγχρονισμού. Βρείτε το λόγο E_b/N_0 που απαιτείται για την επίτευξη πιθανότητας σφάλματος ίσης με 10^{-4}.

(β) Συγκρίνετε αυτή την τιμή E_b/N_0 με αυτή που απαιτείται για ένα συμβατικό PSK σύστημα με την ίδια πιθανότητα σφάλματος.

Λύση

(α) Είναι γνωστό πως η ισχύς μιας ημιτονικής κυματομορφής πλάτους είναι ίση με $^2/2$. Άρα, η ισχύς του μεταδιδόμενου σήματος $S(t)$ θα είναι

$$P_s = \underbrace{\frac{(A_c k)^2}{2}}_{\text{συγχρονισμός}} + \underbrace{\frac{\left(A_c\sqrt{1-k^2}\right)^2}{2}}_{\text{σήμα}} = \frac{A_c^2 k^2}{2} + \frac{A_c^2(1-k^2)}{2} = \frac{A_c^2}{2}$$

Η εκφώνηση της άσκησης μας δίνει την πληροφορία πως η ισχύς της συνιστώσας συγχρονισμού είναι το 10% της συνολικής ισχύος, δηλαδή

$$\frac{A_c^2 k^2}{2} = \frac{1}{10}\frac{A_c^2}{2} \Rightarrow k^2 = \frac{1}{10} \rightarrow k = \sqrt{0.1}$$

Για να πετύχουμε τώρα πιθανότητα λάθους ίση με 10^{-4}, θα έχουμε διαδοχικά

$$\begin{aligned}
P_e &= 10^{-4} \quad \Leftrightarrow \\
\frac{1}{2}erfc\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}(1-k^2)}\right) &= 10^{-4} \quad \Leftrightarrow \\
erfc\left(\sqrt{0.9\frac{E_b}{N_0}}\right) &= 2\cdot 10^{-4} \quad \Leftrightarrow \\
1 - erf\left(\sqrt{0.9\frac{E_b}{N_0}}\right) &= 2\cdot 10^{-4} \quad \Leftrightarrow \\
erf\left(\sqrt{0.9\frac{E_b}{N_0}}\right) &= 0.9998
\end{aligned}$$

και προσεγγιστικά

$$\sqrt{0.9}\sqrt{\frac{E_b}{N_0}} \approx 2.6 \Rightarrow \frac{E_b}{N_0} \approx 7.51$$

(β) Σε ένα συμβατικό PSK σύστημα, για την επίτευξη ίδιας πιθανότητας σφάλματος προκύπτει

$$\frac{E_b}{N_0} = 6.76$$

όπως είδαμε στην Άσκηση 5.1. Συμπεραίνουμε δηλαδή πως όταν χρησιμοποιούμε και συνιστώσα συγχρονισμού απαιτείται μεγαλύτερη ισχύς για να πετύχουμε την ίδια πιθανότητα σφάλματος. ■

6 Σημειώματα

Σημείωμα Ιστορικού Εκδόσεων Έργου

Το παρόν έργο αποτελεί την έκδοση 1.01 (3 Νοεμβρίου 2021).

Σημείωμα Αναφοράς

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.