Ρίζες πολυωνύμου μέσω eig (Πολ. παρεμβολής Newton)

γ) $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 93.5230 \\ 1 & 0 & -78.1138 \\ 0 & 1 & 2.3523 \end{bmatrix}$ 1ο

άνω φράγμα σφάλματος μεθόδου μέσου σημείου

$e = \frac{(0.5-0)^3}{24} \cdot 8 = \frac{0.125}{24} \cdot 8 = \frac{1}{24}$ 4ο

Lagrange $\overset{x_0\, y_0}{(0,0)}\ \overset{x_1\, y_1}{(1,-1)}\ \overset{x_2\, y_2}{(2,2)}\ \overset{x_3\, y_3}{(3,4)}$

$P_n(x) = L_0(x) \cdot f(x_0) + L_1(x) \cdot f(x_1) + \dots L_n(x) \cdot f(x_n)$

$f(x_0) = y_0 = 0$ άρα δεν χρειάζεται να υπολογίσουμε το $L_0(x)$

- $L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} = \frac{x(x-2)(x-3)}{(1-0)\overset{-1}{(1-2)}\overset{-2}{(1-3)}} = \frac{x(x-2)(x-3)}{2}$

- $L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} = \frac{x(x-1)(x-3)}{(2-0)\overset{1}{(2-1)}\overset{-1}{(2-3)}} = \frac{-x(x-1)(x-3)}{2}$

- $L_3(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)} = \frac{x(x-1)(x-2)}{(3-0)\overset{2}{(3-1)}\overset{1}{(3-2)}} = \frac{x(x-1)(x-2)}{6}$

$P_3(x) = -\frac{x(x-2)(x-3)}{2} - \frac{\cancel{2}x(x-1)(x-3)}{\cancel{2}} + \frac{x(x-1)(x-2)}{6} \cdot 4$

$P_3(x) = \frac{x(x-1)(x-2)}{3} \cdot 2 - x(x-1)(x-3) - \frac{x(x-2)(x-3)}{2}$

το 2ο

άνω φράγμα σφάλματος quarteroni

Simpson

$$\boxed{e = -\frac{1}{16} \cdot \frac{(b-a)^5}{180} \cdot f^{(4)}(\xi)}$$

$$f(x) = -\sin\left(\frac{\pi x}{3}\right)$$
$$f'(x) = -\frac{\pi}{3}\cos\left(\frac{\pi x}{3}\right)$$
$$f^{(2)}(x) = +\frac{\pi^2}{9}\sin\left(\frac{\pi x}{3}\right)$$
$$f^{(3)}(x) = \frac{\pi^3}{27}\cos\left(\frac{\pi x}{3}\right)$$
$$f^{(4)}(x) = -\frac{\pi^4}{81}\sin\left(\frac{\pi x}{3}\right)$$

$$e = -\frac{1}{16} \cdot \frac{(0.5)^5}{180} \cdot \left(-\frac{\pi^4}{81}\right)$$

$$\boxed{(0.5)^5 = \frac{1}{32}}$$

$$\sin\left(\frac{\pi \cdot 0.5}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$$

$$e = -\frac{1}{16} \cdot \frac{1}{32} \cdot \frac{1}{180} \cdot \left(\frac{-\pi^4}{81}\right) \cdot \frac{1}{2}$$

$$e = \frac{\pi^4}{7464960} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\pi^4}{14929920}$$

άρα 4ο

πολυώνυμο παρεμβολής Newton

$x_0 = -2,\ x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ x_3 = 3$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x_1 - x_0 & 0 & 0 \\ 1 & x_2 - x_0 & (x_2 - x_0)\cdot(x_2 - x_1) & 0 \\ 1 & x_3 - x_0 & (x_3 - x_0)(x_3 - x_1) & (x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2) \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 4 & 0 \\ 1 & 5 & 10 & 10 \end{bmatrix}$$

NaN = 4

2ο και 5ο

Διαδικασία προσέγγισης κοινής ρίζας (επίλυση μη γραμμικού συστήματος με αλγόριθμο Newton)

$f(x) = x^2 + y^2 - 1$ $\qquad x^{(0)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$g(x) = 5x^2 + 21y^2 - 9$

$J(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f(x)}{\partial x} & \frac{\partial f(x)}{\partial y} \\ \frac{\partial g(x)}{\partial x} & \frac{\partial g(x)}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 10 & 42 \end{bmatrix}$

$F_n(x^{(0)}) = \begin{bmatrix} f(x^{(0)}, y^{(0)}) \\ g(x^{(0)}, y^{(0)}) \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 32 \end{pmatrix}.$

η μορφή που ζητείται είναι η παρακάτω (μην το ξεχάσεις αυτό)

$x^{(1)} = x^{(0)} - J(x)^{-1} (-F_n(x^{(0)}))$ (το πλην απο το $-F_n$)

$x^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 10 & 42 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 4 \\ 32 \end{pmatrix}$

άρα το 2ο

το δεύτερο καθώς είναι το πιο κοντινό μάλλον έχει γίνει κάποιο λάθος στις πράξεις

Προσέγγιση της μεγίστης σε μέτρο ιδιοτιμής (Rayleigh)

$z = \begin{bmatrix} -0.2098 \\ 1.0000 \\ -1.5856 \\ 0.8409 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -0.8858 \\ 1 & 0 & 0 & 4.1697 \\ 0 & 1 & 0 & -2.3664 \\ 0 & 0 & 1 & 5.1200 \end{bmatrix}$

- από πηλίκο Rayleigh

$max\lambda = \frac{z^T \cdot A \cdot z}{z^T \cdot z}$

$z^T \cdot z = [-0.2098, 1, -1.5856, 0.8409] \cdot \begin{bmatrix} -0.2098 \\ 1 \\ -1.5856 \\ 0.8409 \end{bmatrix} = 4.2652$

$z^T \cdot A = [-0.2098, 1, -1.5856, 0.8409] \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -0.8858 \\ 1 & 0 & 0 & 4.1697 \\ 0 & 1 & 0 & -2.3664 \\ 0 & 0 & 1 & 5.1200 \end{bmatrix} =$

$[1, -1.5856, 0.8409, 20.3835]$

$$z^T \cdot A \cdot z = [1, -1.5856\ 0.8409, 20.3285] \begin{bmatrix} -0.2098 \\ 1.0000 \\ -1.5856 \\ 0.8409 \end{bmatrix}$$

$$z^T \cdot A \cdot z = 13.9655$$

$$\frac{z^T \cdot A \cdot z}{z^T \cdot z} = \frac{13.9655}{4.2652} = 3.2742$$ άρα το 4º

Σχετικό σφάλμα προσέγγισης αριθμού

$x = 0.1090$ $\quad y = $ προσέγγιση $= 0.1094 = \hat{x}$

$$\theta_c^{rel} = \frac{\|x - \hat{x}\|}{\|x\|} \leftarrow \text{μέτρο}$$

$$\theta_c^{rel} = \frac{0.0004}{0.1090} = 0.0036697$$ η τιμή που είναι πλησιέστερη στο σφάλμα είναι η 0.0034 άρα 4º

Πολυώνυμο αναπαράστασης Newton

$\underset{x_0\ y_0}{(0,1)}$ $\quad \underset{x_1\ y_1}{(1,-1)}$ $\quad \underset{x_2\ y_2}{(2,4)}$:

$$\begin{array}{lllll} x_0 & f(x_0) & & & \\ & & f[x_0,x_1] & & \\ x_1 & f(x_1) & & & f[x_0,x_1,x_2] \\ & & f[x_1,x_2] & & \\ x_2 & f(x_2) & & & \end{array}$$

$$f[x_0,x_1] = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{-2}{1} = -2$$

$$f[x_0,x_1,x_2] = \frac{f[x_1,x_2] - f[x_0,x_1]}{x_2 - x_0}$$

$$f[x_1,x_2] = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{5}{1} = 5$$

$$f[x_0,x_1,x_2] = \frac{7}{2} = 3.5$$

$$P_3(x) = f[x_0] + f[x_0,x_1](x - x_0) + f[x_0,x_1,x_2](x - x_0)(x - x_1)$$

$$P_3(x) = 1 - 2(x - 0) + 3.5(x - 0)(x - 1)$$

$$\boxed{P_3(x) = 1 - 2x + 3.5x(x - 1)}$$ άρα το 2º