

ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ

Computer – Ανάλυση



ανάληψη
COMPUTER

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΕΛΕΥΘΕΡΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΣΤΗΝ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ

**...λυση
σπουδων**

ΑΓ. ΑΝΔΡΕΟΥ 130-132 & ΓΟΥΝΑΡΗ, Τ.Κ. 26222, ΠΑΤΡΑ
ΤΗΛ: 310-097, 324-900 - ΤΗΛ/FAX: 313-547
E-MAIL: jjanelisj@otenet.gr, jjanelisk@otenet.gr

Περιεχόμενα

1. Νόρμες διανυσμάτων – μητρώων	2
2. Δείκτης κατάστασης μητρώου – συνέπειες του μεγάλου δείκτη κατάστασης.....	2
3. Μειονεκτήματα αντιστροφής μητρώου συγκριτικά με τη χρήση της LU παραγοντοποίησης	2
4. LU χωρίς οδήγηση/LU με μερική οδήγηση (PLU παραγοντοποίηση).....	2
5. Συμπλήρωμα Schur	2
6. Ιδιότητες μητρώων – ιδιοτιμές – χαρακτηριστικό πολυώνυμο.....	2
7. Κριτήρια ελέγχου Σ.Θ.Ο. για Cholesky	3
8. Παραγοντοποίηση - θεώρημα Sylvester – IC (ελλιπής Cholesky).....	3
9. Μέθοδος δύναμης - Πηλίκο Rayleigh – Σταθερά ασυμπτωτικού σφ. - Αντίστροφη μέθοδος δύναμης με μετατόπιση – Θ. Perron-Frobenius.....	3
10. Βασικά θεωρήματα - Απόλυτο/Σχετικό σφάλμα υπολογισμού – Μετασχηματισμός ομοιότητας.....	4
11. Τρόποι δημιουργίας συμμετρικού μητρώου/ΣΘΟ μητρώου	4
12. Πλήθος/ πολυπλοκότητα πράξεων επίλυσης γραμμικού συστήματος $A * x = b$	4
13. Προεπιλεγμένη παραγοντοποίηση για επίλυση γραμμικού συστήματος $A*x=b$	4
14. Κριτήρια σύγκλισης/τερματισμού επαναληπτικών μεθόδων επίλυσης γραμμικού συστήματος $A * x = b$ 4	
15. Ιδιότητες επαναληπτικών μεθόδων - Τυπολόγιο επαναληπτικών μεθόδων - Αθροιστική διάσπαση - Ρυθμός σύγκλισης – Κόστος	4
16. Πολυωνυμική και γραμμική παρεμβολή και σφάλματα παρεμβολής - Σύγκριση π.π. - Κόμβοι Chebyshev.....	5
17. Μέθοδοι προσεγγιστικού υπολογισμού ριζών συναρτήσεων – Ρυθμός σύγκλισης επαναληπτικών μεθόδων.....	7
18. Συνοδευτικό μητρώο – Εύρεση ριζών χαρακτηριστικού πολυωνύμου μέσω ιδιοτιμών συνοδευτικού μητρώου.....	8
19. Επίλυση μη γραμμικών εξισώσεων με τη μέθοδο Newton.....	8
20. Κανόνες υπολογισμού ολοκληρωμάτων (μέθοδοι τετραγωνισμού) και σφάλματα	8
21. Αριθμητική κινητής υποδιαστολής - Πρότυπο IEEE 754.....	9
22. Εμπρός/πίσω σχετικό σφάλμα επίλυσης γρ. συστήματος– Ευστάθεια προβλήματος/αλγόριθμου.....	9
23. Τύποι QR παραγοντοποίησης – σχέση QR/Cholesky – επίλυση ελαχ. τετραγώνων με QR – Θεώρημα Schur 9	
24. Τυπολόγιο είδους αντίστροφων μητρώων – είδους μητρώων L και U.....	10
25. Σύνοψη άμεσων μεθόδων.....	10
26. Είδη σφαλμάτων/ Πηγές σφάλματος.....	11
27. Προσέγγιση αριθμού με δεκαδικά και σημαντικά ψηφία.....	11
28. SVD (ιδιάζουσα) παραγοντοποίηση - Σχέση ιδιζουσών τιμών/ιδιοτιμών	11
29. Επίλυση ελαχ. τετραγώνων - Μειονεκτήματα κανονικών εξισώσεων $A^T * A * x = A^T * b$	11
30. Εμπρός – πίσω Euler	12
31. Συναρτήσεις MATLAB	12

1. Νόρμες διανυσμάτων – μητρώων

Νόρμες διανυσμάτων:

- $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$
- $\|x\|_2 = [\sum_{i=1}^n |x_i|^2]^{1/2}$
- $\|x\|_\infty = \max_i |x_i|$

Νόρμες μητρώων:

- $\|A\|_1 = \max_j \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$, μέγιστο κατ' απόλυτη τιμή άθροισμα από όλες τις στήλες.
- $\|A\|_2 = [\rho(A^T A)]^{1/2}$
- $\|A\|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$, μέγιστο κατ' απόλυτη τιμή άθροισμα από όλες τις γραμμές.
- $\|A\|_F = \sqrt{\text{sum}(\text{diag}(A^T * A))}$

2. Δείκτης κατάστασης μητρώου – συνέπειες του μεγάλου δείκτη κατάστασης

$\kappa(A) = \|A\|_1 * \|A^{-1}\|_1$ ή $\|A\|_\infty * \|A^{-1}\|_\infty$ με **απώλεια των ψηφίων** λόγω δ.κ.: $\log_{10}(\kappa(A))$.

$A = \text{συμμετρικό} \rightarrow \kappa(A) = \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}} = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{\min}}$

$Q = \text{ορθογώνιο} \rightarrow \kappa(Q) = 1$.

Συνέπειες (μειονεκτήματα) μεγάλου δ.κ. $\kappa(A)$

- $A = \text{μη - αντιστρέψιμο} \rightarrow \kappa(A) = \infty$, όσο μεγαλώνει ο δ.κ. το μητρώο πλησιάζει να γίνει μη - αντιστρέψιμο (ιδιάζον)
- Μεγάλη απώλεια** δ.ψ. στην επίλυση του γραμμικού συστήματος $Ax=b$.

3. Μειονεκτήματα αντιστροφής μητρώου συγκριτικά με τη χρήση της LU παραγοντοποίησης

Σπατάλη αποθηκευτικού χώρου.

Από υπολογιστική άποψη είναι **πιο δαπανηρός ο υπολογισμός** του αντίστροφου μητρώου από την παραγοντοποίηση LU.

Ενδέχεται να **μεγεθύνει τα σφάλματα** στρογγυλοποίησης

4. LU χωρίς οδήγηση/LU με μερική οδήγηση (PLU παραγοντοποίηση)

Προϋπόθεση εφαρμογής της απλής LU παραγοντοποίησης χωρίς οδήγηση είναι i) είτε όλα τα κύρια υπομητρώα να είναι αντιστρέψιμα ($\det \neq 0$) ii) είτε να έχει ΑΔΚ κατά στήλες (αρκεί να ισχύει μια εκ' των δύο προϋποθέσεων).

Προεπιλεγμένη μορφή παραγοντοποίησης στη MATLAB: LU με **μερική οδήγηση**. Η οδήγηση εφαρμόζεται προκειμένου να **αποφευχθούν αστάθειες της απλής LU παραγοντοποίησης** και να αυξηθεί η αξιοπιστία της λύσης

Μερική οδήγηση σχεδόν πάντα πίσω ευσταθής \rightarrow μεγάλος συντελεστής αύξησης p_n^p , πολυπλοκότητα $O(n^2)$.

Πλήρης οδήγηση πάντα πίσω ευσταθής \rightarrow μικρός συντελεστής αύξησης p_n^c , πολυπλοκότητα $O(n^3)$.

5. Συμπλήρωμα Schur

Το **συμπλήρωμα Schur** εμφανίζεται με φυσικό τρόπο σε διάφορες εφαρμογές και αλγόριθμους, π.χ. στη block - LU διάσπαση ενός μητρώου:

$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} = L_B U_B = \begin{pmatrix} I & 0 \\ A_{21}A_{11}^{-1} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} \end{pmatrix}$ και είναι το **$S = A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$** . Έχει σημασία κάθε φορά ως προς τι υπολογίζεται το συμπλήρωμα Schur, π.χ. ως προς το ως προς υπομητρώο A_{11} , το υπομητρώο $A_{1:2,1:2}$ κ.λ.π.

6. Ιδιότητες μητρώων – ιδιοτιμές – χαρακτηριστικό πολώνυμο

Αν **$A = A^T$ (συμμετρικό)** τότε:

- πραγματικές** ιδιοτιμές και **πραγματικά** ιδιοδιανύσματα,
- διαγωνοποιείται **πάντα**,
- ταυτίζονται οι κύκλοι Gerschgorin κατά γραμμές/στήλες,
- $\|A\|_2 = |a_{ii}|$ **μέγιστο σε απόλυτη τιμή στοιχείο της κύριας διαγωνίου**,
- αν $A = A^T$ τότε και **$B = PAP^T$ συμμετρικό**, όπου P = μητρώο μετάθεσης,
- το αντίστοιχο **άνω Hessenberg** μητρώο ενός συμμετρικού μητρώου που προκύπτει με **ορθογώνιο μετασχηματισμό ομοιότητας** $Q^T A Q$ είναι **τριδιαγώνιο και συμμετρικό**,
- χαμηλότερο κόστος υπολογισμών και μεγαλύτερη ευστάθεια.**

Αν **$A \neq A^T$ (μη - συμμετρικό) \rightarrow μιγαδικές ιδιοτιμές**

A με αυστηρή διαγώνια κυριαρχία (Α.Δ.Κ.) / διαγώνια κυριαρχία (Δ.Κ.) \rightarrow θετικές ιδιοτιμές / μη αρνητικές ιδιοτιμές

Αν **$A = \text{διαγώνιο ή τριγωνικό (άνω/κάτω)}$** τότε:

- ιδιοτιμές** τα στοιχεία της κύριας διαγωνίου,
- ορίζουσα** $\det(A) = |A| = a_{11} * a_{22} * \dots * a_{nn}$,
- Στο **τριγωνικό (άνω/κάτω) και στο διαγώνιο $\rightarrow \|A\|_2 \neq \rho(A)$ και $\|A\|_2 \neq \text{norm}(A, 'fro')$** , ενώ στο **ΣΘΟ μητρώο $\rightarrow \|A\|_2 = \rho(A)$**
- Αν κάποιο (έστω και ένα) στοιχείο της κύριας διαγωνίου είναι «0», το τριγωνικό μητρώο **(άνω/κάτω) και το διαγώνιο δεν αντιστρέφονται.**

$A = \text{block τριγωνικό (άνω/κάτω)}$ \rightarrow ιδιοτιμές είναι οι ιδιοτιμές των υπομητρώων της κύριας διαγωνίου.

Αν **$A = \Sigma \Theta \Theta$** τότε:

- \exists μητρώο H τέτοιο ώστε $A = H^T * H$ και επίσης ισχύει ότι $A = LDL^T$
- έχει **μόνο θετικές ιδιοτιμές**,
- δεν είναι κατ' ανάγκη ΜΑΔΚ.**
- δεν είναι κατ' ανάγκη ένα υπομητρώο του ΣΘΟ**
- $\|A\|_2 = \rho(A)$**
- Ο συντελεστής αύξησης $p_n = 1$ οπότε **δεν χρειάζεται οδήγηση** στην LU παραγοντοποίηση,
- έχει **θετικά διαγώνια στοιχεία**

Ο δ.κ. υπολογίζεται απευθείας από τον τύπο: $\kappa(A) = \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}} = \frac{\text{μέγιστη ιδιοτιμή (αλλιώς φασματική ακτίνα)}}{\text{ελάχιστη ιδιοτιμή}} = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{\min}} = \frac{\text{μέγιστη ιδιάζουσα τιμή}}{\text{ελάχιστη ιδιάζουσα τιμή}}$

Για **οποιοδήποτε** μητρώο ισχύει ότι η **φασματική ακτίνα του** είναι ουσιαστικά η μέγιστη ιδιοτιμή του, δηλ. **$\rho(A) = \max_i |\lambda_i(A)| \leq \|A\|$**

$A = \text{ορθογώνιο μητρώο}$:



- $\kappa(A) = 1$ (ιδανικός δ.κ. μητρώου)
- Η $2^{\text{η}}$ νόρμα του είναι ίση με «1»
- $A^T = A^{-1}$
- Οι στήλες του είναι κάθετες μεταξύ τους, δηλ. αν πάρουμε το εσωτερικό γινόμενο των στηλών ανά δύο αυτό κάνει 0.

- Αν **P** (μητρώο αντιμετάθεσης/εναλλαγής):

- i) συμμετρικό $A = A^T$,
- ii) ορθογώνιο $A^{-1} = A^T$

iii) **Ορίζουσα** = -1 και το μέγεθος της ορίζουσας δεν καθορίζει το δ.κ. ενός μητρώου, καθώς μπορεί να είναι $O(1)$, ενώ ο δ.κ. να είναι πολύ μεγάλος.

- Αν **A** **αντιστρέψιμο** (μη – ιδιάζον):

- i) $\det(A) \neq 0$,
- ii) όλοι οι οδηγοί $\neq 0$,
- iii) όλες οι ιδιοτιμές του $\neq 0$,
- iv) διαθέτει Α.Δ.Κ.

- **A** **μη αναγωγίσιμο** → κάθε γραμμή και στήλη θα έχει ένα τουλάχιστον μη μηδενικό στοιχείο πέραν της διαγωνίου.

- Αν **A** **αναγωγίσιμο**:

- i) \exists μητρώο P τέτοιο ώστε το μητρώο PAP^T να είναι κατά πλοκάδες άνω τριγωνικό,
- ii) οι ιδιοτιμές προκύπτουν από τον τύπο $\lambda(A) = \lambda(A_{11}) \cup \lambda(A_{22})$, όπου A_{11} και A_{22} είναι οι πλοκάδες (υπομητρώα) της κύριας διαγωνίου iii) η επίλυση του $A * x = b$ μπορεί να επιτευχθεί μέσω επίλυσης μικρότερων συστημάτων.

- Για να είναι ένα μητρώο **A** **διαγωνοποιήσιμο**:

- i) Πρέπει να έχει **διαφορετικές** (διακριτές) ιδιοτιμές.
- ii) Πρέπει να είναι **συμμετρικό**.
- iii) **Εφόσον** διαγωνοποιείται, γράφεται στη μορφή $A = P * D * P^{-1}$, D = διαγώνιο μητρώο με τις ιδιοτιμές του A στην κύρια διαγώνιο

- Αν το μητρώο A στο $A * x = b$, είναι **μη τετραγωνικό** → το σύστημα $A * x = b$ θα έχει είτε μία ή καμία λύση.

- Κάθε **χαρακτηριστικό πολυώνυμο** $p(\lambda) = \det(\lambda I - A) = 0$ είναι **μονικό** (συντελεστής μεγιστοβάθμιου όρου ίσος με «1»).

- Το **αντίστροφο** μητρώο ενός **μητρώου απαλοιφής Gauss**, L_1 , L_2 , υπολογίζεται **απευθείας** αντιστρέφοντας απλώς το **πρόσημο** των στοιχείων απαλοιφής, τα υπόλοιπα στοιχεία του μητρώου παραμένουν ίδια.

7. Κριτήρια ελέγχου Σ.Θ.Ο. για Cholesky

Η συμμετρία $A^T = A$ ελέγχεται από παρατήρηση του μητρώου. Για **θετική ορισμότητα** (Θ.Ο.) αρκεί να ισχύει ένα από τα εξής

- α) Το μητρώο A να έχει Α.Δ.Κ. και θετικά διαγώνια στοιχεία
- β) όλες οι **ιδιοτιμές** του μητρώου A να είναι **θετικές**
- γ) **όλοι** οι **οδηγοί** του μητρώου A να είναι **θετικοί** Μόνο Ικανές συνθήκες → δεν ισχύει κάποια, εξετάζεται η επόμενη
- δ) $\forall x \in \mathbb{R}^n$ με $x \neq 0$, να ισχύει ότι: $x^T * A * x > 0$
- ε) Όλες οι κύριες ορίζουσες είναι θετικές

8. Παραγοντοποίηση - θεώρημα Sylvester – IC (ελλιπής Cholesky)

- Αν $A=A^T$ (συμμετρικό) → για την αριθμητική προσέγγιση της λύσης x του συστήματος $A * x = b$ εφαρμόζεται **προεπιλεγμένα** η Cholesky.

- Αν $A \neq A^T$ (μη συμμετρικό) → για την αριθμητική προσέγγιση της λύσης x του συστήματος $A * x = b$ εφαρμόζεται **προεπιλεγμένα** η PLU.

- Ένα μητρώο μορφής $A = \mu * I + u * u^T$ είναι **ΣΘΟ** και μπορεί σε αυτό να εφαρμοστεί η Cholesky

- Ένα μητρώο μορφής $A = \mu * I - u * u^T$ είναι μόνο **συμμετρικό** και πρέπει να διερευνηθεί η εφαρμογή της Cholesky. Για το σκοπό χρησιμοποιείται (για την υπολογισμό της ορίζουσάς του) το θεώρημα **Sylvester**: $\det(A) = \mu^3 * (1 - \frac{1}{\mu} * u^T * u)$. i) Αν $\det(A) > 0 \rightarrow$ παραγοντοποίηση **Cholesky** και αν **ευστοχίσει** το αποτέλεσμα θα είναι ο ζητούμενος παράγοντας L. Αν αποτύχει, τότε το μητρώο **δεν** είναι ΣΘΟ και δεν υπάρχει το ζητούμενο L. ii) Αν $\det(A) < 0 \rightarrow$ μητρώο **δεν** είναι ΣΘΟ.

- Η **παραγοντοποίηση Cholesky** έχει ως αποτέλεσμα να προκύπτουν **πολύ πιο πυκνοί παράγοντες** σε σχέση με το A → χρησιμοποιείται η **ατελής ή ελλιπής Cholesky** (IC = Incomplete Cholesky) η οποία είναι **επαναληπτική** μέθοδος και χρησιμοποιεί προρρυθμισμό, $P = FF^T$.

9. Μέθοδος δύναμης - Πηλίκο Rayleigh – Σταθερά ασυμπτωτικού σφ. - Αντίστροφη μέθοδος δύναμης με μετατόπιση – Θ. Perron-Frobenius

- Μέθοδος δύναμης κ' Αντίστροφη μέθοδος δύναμης με μετατόπιση: επαναληπτικές μέθοδοι υπολογισμού **κυρίαρχης ιδιοτιμής** (ή **αλλιώς φασματικής ακτίνας**) ενός μητρώου (εφόσον υπάρχει).

- Η **πρώτη** έχει **πολυπλοκότητα πράξεων** $O(n^2)$ και είναι **απλούστερη/ταχύτερη ανά επανάληψη**, αλλά **μπορεί να απαιτεί περισσότερες επαναλήψεις για να συγκλίνει**. Η **τάξη σύγκλισης** μεθόδου δύναμης → **γραμμική**. **Βασική πράξη**: γινόμενο μητρώου – διανύσματος.

- Η **δεύτερη** είναι **πιο ακριβή υπολογιστικά ανά επανάληψη** καθώς έχει **πολυπλοκότητα πράξεων** $O(n^3)$, αλλά **μπορεί να συγκλίνει πιο γρήγορα**, i) Απαιτεί **επιπλέον** την ύπαρξη **κάποιας προσέγγισης** αναφορικά με την ιδιοτιμή και χρησιμοποιεί ii) **παραγοντοποίηση LU** για τον υπολογισμό της **κυρίαρχης ιδιοτιμής** iii) **Βασική πράξη**: επίλυση γραμμικού συστήματος σε κάθε βήμα.

- **Υποθέσεις εγγυημένης σύγκλισης** μεθόδου δυνάμεων:

- a. Το μητρώο $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ να έχει **μοναδική κυρίαρχη ιδιοτιμή** (η αλγεβρική πολλαπλότητα της κυρίαρχης ιδιοτιμής του μητρώου A ίση με 1)
- b. Το μητρώο $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ να διαθέτει **n γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα**.
- c. Αν το μητρώο $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ έχει **όλα τα στοιχεία του θετικά**, ισχύει το θεώρημα **Perron – Frobenius** και λόγω αυτού i) μπορεί να εφαρμοστεί η μέθοδος των δυνάμεων, ii) Η φασματική ακτίνα του $\rho > 0$.

```
for k = 1, 2, ...
    x(k) = Ay(k-1)
    y(k) =  $\frac{x^{(k)}}{\|x^{(k)}\|}$ 
    λ(k) = (y(k))T Ay(k)
end
```

Διαιρώντας τις δύο μεγαλύτερες κατ' απόλυτη τιμή ιδιοτιμές ενός μητρώου, με την κυρίαρχη ιδιοτιμή στον παρανομαστή (**σταθερά ασυμπτωτικού σφάλματος** $\left| \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right|$), υπολογίζεται ο **ρυθμός σύγκλισης της μεθόδου των δυνάμεων**. Όσο πιο μακριά/κοντά σε σχέση με το «1» είναι το κλάσμα αυτό, τόσο **λιγότερα/περισσότερα βήματα** σύγκλισης της κυρίαρχης ιδιοτιμής απαιτούνται.



- Για εύρεση όλων των ιδιοτιμών ενός μητρώου, χρησιμοποιείται το **χαρακτηριστικό πολώνυμο** $\det(\lambda I - A) = 0$, είναι άμεση μέθοδος.
- **Πηλίκο/κλάσμα Rayleigh** κάθε ιδιοδιάνυσματος είναι η ιδιοτιμή: $\lambda = \frac{(x^{(k)})^T A x^{(k)}}{(x^{(k)})^T x^{(k)}}$ και αποτελεί καλή προσέγγιση μιας ιδιοτιμής για ένα δοθέν ιδιοδιάνυσμα.
- Οι κύκλοι Gerschgorin υπολογίζουν διαστήματα ιδιοτιμών. Κάθε απομονωμένος κύκλος Gerschgorin περιέχει μια **πραγματική** ιδιοτιμή.
- Αν μετά την **αφαίρεση των απομονωμένων κύκλων**, απομένει **περιττός/άρτιος** αριθμός κύκλων, τότε θα υπάρχει σίγουρα μια **πραγματική** ιδιοτιμή και οι υπόλοιπες θα είναι ζεύγη **πραγματικών ή ζεύγη συζυγών μιγαδικών/αντές θα είναι ζεύγη πραγματικών ή ζεύγη συζυγών μιγαδικών**

10. Βασικά θεωρήματα - Απόλυτο/Σχετικό σφάλμα υπολογισμού – Μετασχηματισμός ομοιότητας

- Ισχύει: $|\cos(x)|, |\sin(x)| \leq 1$. Αυτά χρειάζονται στον υπολογισμό σφάλματος της τμηματικής γραμμικής παρεμβολής, όπου απαιτείται η μεγιστοποίηση της 2ης παραγώγου

Αλλαγή βάσης λογαρίθμου: $\log_2 x = \frac{\log_{10} x}{\log_{10} 2}$

- Απόλυτο σφάλμα υπολογισμού: $e^{abs} = \|x - \tilde{x}\|$ και σχετικό σφάλμα υπολογισμού: $e^{rel} = \frac{\|x - \tilde{x}\|}{\|x\|}$, με $x \neq 0$.

Ενας **μετασχηματισμός ομοιότητας** (το γινόμενο ενός μητρώου A με μητρώα εναλλαγής P: $P^T A P$) διατηρεί **αμετάβλητες** τις ιδιοτιμές του μητρώου A με ακριβή αριθμητική

11. Τρόποι δημιουργίας συμμετρικού μητρώου/ΣΘΟ μητρώου

- Το άθροισμα $\text{tril}(A) + \text{tril}(A, -1)'$ δημιουργεί **συμμετρικό μητρώο με ίδια κύρια διαγώνιο με το A από το οποίο προέρχεται**
- Το άθροισμα $\text{triu}(A) + \text{triu}(A, 1)'$ δημιουργεί **συμμετρικό μητρώο με ίδια κύρια διαγώνιο με το A από το οποίο προέρχεται**
- Το άθροισμα $A + A'$ ή $A' + A$ δημιουργεί **συμμετρικό μητρώο** (δηλ. μετά το άθροισμα ισχύει ότι $A = A^T$).
- Το γινόμενο $A' * A$ ή $A * A'$, δημιουργεί **μητρώο ΣΘΟ**, όπου A μπορεί να είναι τετραγωνικό/μη τετραγωνικό
- Η συνάρτηση **toeplitz** με ένα όρισμα εισόδου δημιουργεί μητρώο συμμετρικό που ταυτόχρονα είναι και τριδιαγώνιο

12. Πλήθος/πολυπλοκότητα πράξεων επίλυσης γραμμικού συστήματος $A * x = b$

- Αν $A = \text{τυχαίο (πυκνό) μητρώο} \rightarrow$ πράξεις: $\Omega = O(n^3)$.
- Αν $A = \Sigma.\Theta.O. \rightarrow$ πράξεις: $\Omega = O(n^3)$.
- Αν $A = \text{τριγωνικό μητρώο} \rightarrow$ πράξεις: $\Omega = O(n^2)$.
- Αν $A = \text{τριδιαγώνιο μητρώο ή διαγώνιο} \rightarrow$ πράξεις: $\Omega = O(n)$.

13. Προεπιλεγμένη παραγοντοποίηση για επίλυση γραμμικού συστήματος $A * x = b$

Κανόνας: Αν μητρώο A **συμμετρικό**, εκκίνηση της παραγοντοποίησης Cholesky και στη συνέχεια αν η Cholesky είναι **επιτυχής**, υπολογισμός του παράγοντα L, έτσι ώστε $A = L * L^T$ και στη συνέχεια επίλυση του $L * y = b$ και του $L^T * x = y$. Αν η Cholesky δεν είναι **επιτυχής**, υπολογισμός της παραγοντοποίησης LU με έξοδο τα μητρώα P, L, U (μερική οδήγηση) και στη συνέχεια υπολογισμός του $\tilde{b} = P^T * b$ και επίλυση του $L * y = \tilde{b}$ και του $U * x = y$.

14. Κριτήρια σύγκλισης/τερματισμού επαναληπτικών μεθόδων επίλυσης γραμμικού συστήματος $A * x = b$

Κριτήρια Σύγκλισης: τα 4 πρώτα μόνο ικανά, το τελευταίο ικανό και αναγκαίο. Επίσης, τα 3 πρώτα εφαρμόζονται στο μητρώο των συντελεστών A, ενώ τα 2 τελευταία εφαρμόζονται στο μητρώο επανάληψης T.

(α) Αν το A έχει **A.Δ.Κ.** (είτε κατά γραμμές/κατά στήλες) \rightarrow συγκλίνουν **Jacobi** και **Gauss – Seidel**.

(β) Αν το A είναι **μη – αναγωγίσιμο και διαγώνια κυρίαρχο (MAΔΚ)** \rightarrow συγκλίνουν **Jacobi** και **Gauss – Seidel**. Όταν ένα μητρώο A περιέχει **αποκλειστικά μη μηδενικά στοιχεία**, τότε το αντίστοιχο γράφημα γειτνίασης θα περιέχει όλες τις πιθανές ακμές, συνεπώς θα είναι ισχυρά συνεκτικό \rightarrow Μη – Αναγωγίσιμο μητρώο (MA). Αν έχει επιπλέον **και A.Δ.Κ.** για μια τουλάχιστον γραμμή/στήλη \rightarrow MAΔΚ.

(γ) Αν το A είναι **Σ.Θ.Ο.** \rightarrow συγκλίνουν **Gauss – Seidel** και **Richardson**, ενώ για σύγκλιση Jacobi, πρέπει να είναι **Σ.Θ.Ο.** και το μητρώο $2 * D - A$. Επιπλέον, για σύγκλιση Richardson για συμμετρικά μητρώα, πρέπει όλες οι ιδιοτιμές του A να είναι **θετικές και μικρότερες του 2**.

(δ) Αν μια οποιαδήποτε νόρμα του **μητρώου επανάληψης T** (κατά προτίμηση όμως η $1^{\text{η}}$ ή η νόρμα απείρου), είναι μικρότερη από 1, δηλ. $\|T\| < 1$ \rightarrow συγκλίνουν **Jacobi** και **Gauss – Seidel**.

(ε) Το $\rho(T) < 1$, δηλαδή η **φασματική ακτίνα του μητρώου επανάληψης T** (μεγαλύτερη κατ' απόλυτη τιμή ιδιοτιμή) θα πρέπει να είναι μικρότερη από «1» για να συγκλίνουν και οι τρεις μέθοδοι. Η τελευταία συνθήκη είναι **ικανή και αναγκαία**.

Σημείωση: Για **πραγματικά συμμετρικά ή μιγαδικά ερμιτιανά μητρώα** η σύγκλιση της μεθόδου **Richardson** εξασφαλίζεται αν $|1 - \lambda(A)| < 1 \Rightarrow 0 < \lambda(A) < 2$ για κάθε ιδιοτιμή. Για **γενικά μητρώα**, η σύγκλιση της Richardson εξασφαλίζεται αν οι **ιδιοτιμές** του A περιέχονται στο εσωτερικό του μοναδιαίου δίσκου ή κύκλου, δηλαδή αυτού του κύκλου που έχει κέντρο στο 0 και ακτίνα 1.

Κριτήρια Τερματισμού: 1. Απόλυτο σφάλμα: $\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| \leq \eta_1 = 10^{-m}$ 2. Σχετικό σφάλμα: $\frac{\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\|}{\|x^{(k+1)}\|} \leq \eta_2 = \frac{1}{2} 10^{-m}$

Εμπρός σχετικό σφάλμα εξαρτάται από το δ.κ. του μητρώου A: $\left\| \frac{x^{(k)} - x^{(k-1)}}{x^{(k)}} \right\| \leq \frac{\|r^{(k)}\|}{\|b\|} \leq \kappa(A) \text{ tol}$, όπου $r = b - A\tilde{x}$, $\frac{\|r^{(k)}\|}{\|b\|} \leq \frac{\varepsilon}{\kappa(A)}$.

15. Ιδιότητες επαναληπτικών μεθόδων - Τυπολόγιο επαναληπτικών μεθόδων - Αθροιστική διάσπαση - Ρυθμός σύγκλισης – Κόστος

Ιδιότητες/χαρακτηριστικά επαναληπτικών μεθόδων:

- Κατασκευάζεται μια ακολουθία διαδοχικών βημάτων της λύσης και η διαδικασία σταματά, όταν η **προσέγγιση** θεωρηθεί αρκετά ακριβής.
- **Εφαρμόζονται για πολύ μεγάλα γραμμικά συστήματα**, δηλαδή για πολύ μεγάλα μητρώα, αλλά και για μητρώα **ειδικής δομής**.
- Προσφέρουν **χαμηλό κόστος** και **ταχύ ρυθμό προσέγγισης** λύσης.

Γενική μορφή επαναληπτικού σχήματος: $P * x^{(k+1)} = (P - A) * x^{(k)} + b$ ή $x^{(k+1)} = T * x^{(k)} + g$ με δοθέν $x^{(0)}$

Με δεδομένο ότι $D = \text{diag}(\text{diag}(A))$, $L = -\text{tril}(A, -1)$, $U = -\text{triu}(A, 1)$ με **βάση το πρώτο γενικό σχήμα** έχουμε:

- **Jacobi:** $P = D$, $P - A = L + U$. Γενική μορφή: $D * x^{(k+1)} = (L + U) * x^{(k)} + b$

- **Gauss – Seidel:** $P = (D - L) = \text{tril}(A)$, $P - A = U$. Γενική μορφή: $(D - L) * x^{(k+1)} = U * x^{(k)} + b$

- **Richardson:** $P = \omega I$, $P - A = \omega I - A$. Γενική μορφή: $\omega * I * x^{(k+1)} = (\omega I - A) * x^{(k)} + b$ ή $x^{(k+1)} = x^{(k)} + a_k z^{(k)}$, $a_k = \frac{z^{(k)T} r^{(k)}}{z^{(k)T} A z^{(k)}}$, $r^{(k)} = b - A x^{(k)}$



Με βάση το **δεύτερο γενικό σχήμα** (που περιέχει το μητρώο επανάληψης T και το διάνυσμα g) έχουμε:

- **Jacobi**: $T = D^{-1} * (L + U)$, $g = D^{-1} * b$. Άρα $x^{(k+1)} = D^{-1} * (L + U) * x^{(k)} + D^{-1} * b$

- **Gauss-Seidel**: $T = (D - L)^{-1} * U$, $g = (D - L)^{-1} * b$. Άρα: $x^{(k+1)} = (D - L)^{-1} * U * x^{(k)} + (D - L)^{-1} * b$. **Εναλλακτικά** $P = \text{tril}(A)$; $Q = -\text{triu}(A, 1)$, $T = P \backslash Q$

- **Richardson**: $T = I - \omega A$ όπου $0 < \omega < 1$. Άρα $x^{(k+1)} = (I - \omega A) * x^{(k)} + \omega g = (I - \omega A) * x^{(k)} + \omega b$

- **SOR** (Μέθοδος διαδοχικής υπερχαλάρωσης): $T = (L + \frac{1}{\omega} D)^{-1} (\frac{1}{\omega} D - D - U)$

- **Μέθοδος συζυγών κλίσεων (CG)**: $x^{(k+1)} \leftarrow x^{(k)} + d^{(k)}$ όπου $d^{(k)} = \alpha_k * p^{(k)}$, **ίδια προϋπόθεση με Cholesky** (μητρώο συντελεστών Σ.Θ.Ο.)

- Αν δεν υπάρχουν σφάλματα στρογγύλευσης, βρίσκει την **ακριβή λύση** σε **πλήθος βημάτων \leq μέγεθος διανύσματος b** .

- Αν το ΣΘΟ μητρώο A έχει μόνο **m διακριτές ιδιοτιμές**, το **πλήθος** των επαναλήψεων της CG είναι το πολύ ίσο με m .

- Απαιτούνται **μόνο $O(\sqrt{\kappa(A)})$ επαναλήψεις** για να μειωθεί η νόρμα $\|e_k\|_A$ του σφάλματος κατά μια σταθερή ποσότητα, με το φράγμα του σφάλματος να είναι $\|e_k\|_A \leq 2 \left(\frac{\sqrt{\kappa(A)} - 1}{\sqrt{\kappa(A)} + 1} \right)^{-1} \|e_0\|$.

- Παρότι εκτελούνται πολλές πράξεις σε κάθε επανάληψη, **συνήθως ο κυρίαρχος παράγοντας στον υπολογισμό είναι το πλήθος των πολλαπλασιασμών μητρώου - διανύσματος**.

- **Μέθοδος συζυγών κλίσεων με προϋποβασμένη (PCG - Preconditioned Conjugate Gradient)**: $PAP^T * (P^T x) = P b$ για ειδικά επιλεγμένο μητρώο μετάθεσης P ώστε $\kappa(PAP^T) \ll \kappa(A)$ (μείωση του δείκτη κατάστασης του μητρώου των συντελεστών A). Όπως και η CG, η PCG εφαρμόζεται σε ΣΘΟ μητρώα.

Σύγκριση επαναληπτικών μεθόδων

• **Πολυπλοκότητα επαναλήψεων**: **Jacobi** και **Gauss-Seidel** είναι τάξης $O(n^2)$, ενώ **Richardson**, **SOR**, **CG** είναι τάξης $O(n)$.

• **Ενημέρωση**: Η Jacobi χρησιμοποιεί πληροφορία **μόνο** από την προηγούμενη επανάληψη, ενώ η Gauss-Seidel χρησιμοποιεί πληροφορία και από την προηγούμενη, αλλά και από την τρέχουσα, μέχρι το σημείο στο οποίο έχει εκτελεστεί ο αλγόριθμος \rightarrow πιο ενημερωμένη.

• **Ταχύτητα σύγκλισης επαναληπτικών μεθόδων (φθίνουσα ταξινόμηση)**: **CG - Richardson - SOR - Gauss-Seidel - Jacobi**

• **Υπολογισμός συνιστωσών**: **Jacobi/Gauss-Seidel**: υπολογισμός όλων των συνιστωσών της προσέγγισης **παράλληλα**, σε μια επανάληψη/όχι

Αθροιστική διάσπαση $Mx^{(k+1)} = Nx^{(k)} + b$

Τρόπος διευκόλυνσης επίλυσης γραμμικού συστήματος $A * x = b$, με **συνδυασμό επίλυσης**, δηλαδή με τις πληροφορίες που περιέχει ένα τμήμα του A (το M), λαμβάνοντας υπόψη τις υπόλοιπες πληροφορίες (το N) και επαναλαμβάνοντας τη διαδικασία μέχρι τον τερματισμό. **$M = N - A$**

• **Περισσότερες πληροφορίες στο μητρώο M** , ίσως $\rho(A) \ll 1 \rightarrow$ **μεγάλο κόστος/επανάληψη \rightarrow λίγες επαναλήψεις**.

• **Λιγότερες πληροφορίες στο μητρώο M** , ίσως $\rho(A) < 1 \rightarrow$ **μικρό κόστος/επανάληψη \rightarrow πολλές επαναλήψεις**.

• **Τετριμμένο μητρώο**: **$M = A$, $N = 0$** , η επαναληπτική μέθοδος ολοκληρώνεται σε 1 βήμα, ίδιο με την άμεση μέθοδο.

• **Μέθοδος Richardson**: **$M = I$, $N = M - A = I - A$**

• **Μέθοδος Jacobi**: **$M =$ διαγώνιο τμήμα του A , $N = M - A$**

• **Μέθοδος Gauss-Seidel**: **$M =$ κάτω τριγωνικό τμήμα του A , $N = M - A$**

• **Μέθοδος μπλοκ Jacobi**: **$M =$ μπλοκ διαγώνιο τμήμα του A , $N = M - A$**

Ρυθμός σύγκλισης - Κόστος επαναληπτικών μεθόδων

- **Ρυθμός (Ταχύτητα) σύγκλισης επαναληπτικής μεθόδου**: εξαρτάται από τις ιδιότητες του μητρώου (π.χ. τη φασματική ακτίνα του μητρώου επανάληψης T , την κατανομή των ιδιοτιμών, κ.λ.π.). Όσο **μικρότερη** η φασματική ακτίνα του T , δηλ. το $\rho(T)$, τόσο **ταχύτερα** (σε λιγότερα

βήματα) συγκλίνει η επαναληπτική μέθοδος, ρυθμός σύγκλισης $k = -\frac{1}{\log_{10} \rho(T)}$

- **Κόστος επαναληπτικής μεθόδου σε πράξεις**: (πράξεις/επανάληψη) \times πλήθος επαναλήψεων

16. Πολυωνυμική και γραμμική παρεμβολή και σφάλματα παρεμβολής - Σύγκριση π.π. - Κόμβοι Chebyshev

- **Πλεονεκτήματα πολυωνυμικής παρεμβολής**:

i. Τα πολώνυμα είναι εύκολο να κατασκευαστούν και να υπολογιστούν.

ii. Είναι εύκολο να αθροιστούν και να πολλαπλασιαστούν καθώς το αποτέλεσμα σε κάθε περίπτωση είναι πολώνυμο.

iii. Είναι εύκολη η παραγωγή και η ολοκλήρωση των πολωνύμων.

iv. Έχουν πολλά διαφορετικά χαρακτηριστικά, παρά την απλότητά τους

- **Μειονέκτημα πολυωνυμικής παρεμβολής**: Απαιτείται $\frac{2}{3} n^3$ πράξεις

- **Βαθμός πολωνύμου παρεμβολής**: κατά «1» μικρότερος από το **πλήθος των σημείων παρεμβολής = πλήθος συντελεστών πολωνύμου**.

- **Προσδιορισμός συντελεστών πολωνύμου $P_n(x)$** : μέσω επίλυσης ενός γραμμικού συστήματος, όπου το μητρώο των συντελεστών των αγνώστων είναι τύπου **Vandermonde** (έχει πολύ κακό δείκτη κατάστασης όταν πολ/ζεται με άλλα μητρώα).

- **Πλήθος σημείων παρεμβολής**: περισσότερα σημεία παρεμβολής σημαίνει **καλύτερη προσέγγιση**, αλλά ταυτόχρονα και **μεγαλύτερο κόστος**.

- **Αντίστροφη πολυωνυμική παρεμβολή**:

- Θέτουμε ως **κόμβους παρεμβολής** τις τιμές $f(x_i) = f_i$ και ως **τιμές** τα x_i . Δηλαδή, έχουμε υπολογισμό π.π με ζεύγη $\{(f_i, x_i), i = k, \dots, k + r - 1\}$.

- Για να μην υπάρχει **αστοχία** στη μέθοδο, πρέπει σε κάθε βήμα, οι τιμές $\{f_i\}$ που αντιστοιχούν σε διακριτά x_i να είναι **επίσης διακριτές**.

- **Διαφορές παρεμβολής συναρτήσεων και προσαρμογής δεδομένων**:

- Στην **παρεμβολή συναρτήσεων** έχουμε κάποια ελευθερία επιλογής των σημείων x_i με έξυπνο τρόπο.

- Στην **προσαρμογή δεδομένων** ενδέχεται να είμαστε σε θέση να λάβουμε υπόψη το καθολικό σφάλμα παρεμβολής.

- **Μοναδικότητα πολωνύμου παρεμβολής**: για οποιαδήποτε πραγματικά σημεία δεδομένων $\{(x_i, y_i), i = 0, 1, 2, \dots, n\}$ με **διαφορετικές τετμημένες** x_i υπάρχει **μοναδικό** πολώνυμο παρεμβολής βαθμού το πολύ n , που ικανοποιεί τις συνθήκες παρεμβολής: $p(x_i) = y_i, i = 0, 1, \dots, n$



- **Μονωνυμική παρεμβολή (βάση):** $P_n(x) = \sum_{j=0}^n c_j \varphi_j(x) = \sum_{j=0}^n c_j x^j = c_0 x^0 + c_1 x^1 + \dots + c_n x^n$, κόστος κατασκευής $\frac{2}{3}n^3$, κόστος υπολογισμού $2n$, ελκυστικό χαρακτηριστικό: **απλή. Το μητρώο των συντελεστών είναι μορφής Vandermode, που έχει μεγάλο δ.κ. κ(A), επομένως μεγάλη απώλεια δεκαδικών ψηφίων. Αναγνωρίζουμε τη μορφή Vandermode με τον όρο δυνάμομορφή που εμφανίζεται στην εκφώνηση ή/και με τον όρο τα στοιχεία του μητρώου A είναι της μορφής: x_i^{j-1} .**

$$V = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{bmatrix}$$

- **Παρεμβολή Lagrange (βάση):** $P_n(x) = \sum_{j=0}^n c_j \varphi_j(x)$, όπου $\varphi_j(x) = L_i(x) = \frac{(x-x_0)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)}$ $i = 0, \dots, n$ και π.π.

$P_n(x) = \sum_{i=0}^n \frac{\prod_{j=0, j \neq i}^n (x-x_j)}{\prod_{j=0, j \neq i}^n (x_i-x_j)} * f_i$, κόστος κατασκευής n^2 , κόστος υπολογισμού $5n$, ελκυστικό χαρακτηριστικό: **πιο ευσταθής.**

Ένα **πλεονέκτημα της παρεμβολής Lagrange** είναι ότι α) η μέθοδος **δεν** χρειάζεται ομοιόμορφα καταναμημένες τιμές στο x . β) Τα πολυώνυμα Lagrange εξαρτώνται **μόνο** από τους κόμβους και όχι από τις τιμές

- **Παρεμβολή Newton (βάση):** $P_n(x) = \sum_{j=0}^n c_j \varphi_j(x)$, όπου $\varphi_j(x) = \prod_{i=0}^{j-1} (x-x_i)$, κόστος κατασκευής $\frac{3}{2}n^2$, κόστος υπολογισμού $2n$, ελκυστικό χαρακτηριστικό: **προσαρμοστική και έχει το πλεονέκτημα της οικονομικής ανανέωσης.**

- $P_n(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1] * (x-x_0) + f[x_0, x_1, x_2] * (x-x_0) * (x-x_1) + \dots + f[x_0, x_1, x_2, \dots, x_n] * (x-x_0) * (x-x_1) * \dots * (x-x_{n-1})$,

- Οι συντελεστές $f[x_0]$, $f[x_0, x_1]$, $f[x_0, x_1, x_2]$ κ.λ.π. υπολογίζονται από πίνακα Δ.Δ. (**απαιτεί $n^2/2$ διαιρέσεις και n^2 προσθέσεις/αφαιρέσεις για τον υπολογισμό του**)

- **Παρεμβολή ελαχίστων τετραγώνων:**

- $C * x = y$ με $y = (y_1, \dots, y_n)^T$ το διάνυσμα με τους σταθερούς όρους (περιέχει τιμές της συνάρτησης), $C = [\text{ones}(m, 1), x]$, και το $x = (x_1, \dots, x_m)^T$ περιέχει τα σημεία παρεμβολής $\rightarrow x_{LS} = (C^T C)^{-1} C^T y = (\alpha, \beta)^T$ με σφάλμα πολυωνυμικής παρεμβολής $\|y - C * x_{LS}\|_2$

- Το **αντίστροφο μητρώο** ενός μητρώου $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ είναι: $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} * \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$

- Πολυώνυμο παρεμβολής ελαχίστων τετραγώνων: $\varphi(t) = x_0 + x_1 * t + x_2 * t^2 + \dots$

δεν επιβαρυνόμαστε με τον υπολογισμό του $\Pi_{n+1}(x)$ κάθε φορά που υπολογίζεται το $L_n(x)$

- **Βαρυκεντρική παρεμβολή:** $P_n(x) = \frac{\sum_{j=0}^n \frac{w_j}{x-x_0} f_j}{\sum_{j=0}^n \frac{w_j}{x-x_0}}$ πιο ευσταθής και γρήγορη από Lagrange, έχει ευστάθεια + ταχύτητα + ανανέωση

- **Παρεμβολή Hermite:** παρόμοια με Newton, υπό την προϋπόθεση ότι δίνονται παράγωγοι της συνάρτησης f .

- **Τμηματική παρεμβολή:** Πλεονέκτημα: **βελτίωση** στην προσέγγιση, μέσω **αύξησης** κόμβων παρεμβολής, ενώ ο βαθμός του πολυωνύμου σε κάθε υποδιάστημα παραμένει γραμμικός. Κατηγορίες **τμηματικής** παρεμβολής είναι οι εξής:

- **Τμηματική γραμμική παρεμβολή:** $\Pi_1^f f(x) = f(x_i) + \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} * (x - x_i), \forall x \in [x_i, x_{i+1}]$.

- Μειονεκτήματα: **ασυνέχεια** στις παραγώγους, **περιορισμένη** ακρίβεια, **έλλειψη ομαλότητας** μεταξύ γειτονικών σημείων.

- Για τον ορισμό της συγκεκριμένης παρεμβολής πρέπει η ακολουθία των πραγματικών αριθμών x_i (δηλ. των σημείων παρεμβολής) είναι **αύξουσα**.

- **Τμηματική παρεμβολή Hermite:** μειονέκτημα ότι απαιτείται να είναι **γνωστές οι τιμές της παραγώγου της συνάρτησης**, που προσεγγίζουμε.

- **Τμηματική κυβική παρεμβολή:** μειονέκτημα ότι επιλέγεται με τρόπο ώστε να είναι και **δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη στο διάστημα παρεμβολής** $S_i(x) = a_i + b_i(x-x_i) + c_i(x-x_i)^2 + d_i(x-x_i)^3, i = 0, 1, \dots, n-1, a_i = f(x_i) = f_i, b_i = \frac{1}{h_i}(f_{i+1} - f_i) - \frac{h_i}{3}(2c_i + c_{i+1}), d_i = \frac{1}{3h_i}(c_{i+1} - c_i), h_i = x_{i+1} - x_i$, και οι συντελεστές c_i προκύπτουν από την επίλυση του γραμμικού συστήματος $A * c = q$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ h_0 & 2(h_0 + h_1) & h_1 & \dots & 0 \\ 0 & h_1 & 2(h_1 + h_2) & \dots & h_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \text{ και } q = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{3}{h_1}(f_2 - f_1) - \frac{3}{h_0}(f_1 - f_0) \\ \vdots \\ \frac{3}{h_{n-1}}(f_n - f_{n-1}) - \frac{3}{h_0}(f_{n-1} - f_{n-2}) \\ 0 \end{bmatrix}$$

Σφάλμα παρεμβολής: εξαρτάται από τη **συνέχεια της συνάρτησης και την κατανομή των κόμβων**

- **Σφάλμα πολυωνυμικής παρεμβολής:** $e_n f(x) = f(x) - \Pi_n f(x) = L(x) * \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) * \prod_{i=0}^n (x-x_i)$

- **Μέγιστο άνω φράγμα σφάλματος πολυωνυμικής παρεμβολής:** $\max |e_n f(x)| \leq \frac{\max_{x \in \Omega} |f^{(n+1)}(x)|}{4(n+1)} h^{(n+1)}$ όπου $h = \frac{x_n - x_0}{n}$.

- **Σφάλμα τμηματικής γραμμικής παρεμβολής:** $\max |f(x) - \Pi_1^f f(x)| \leq \max_{x \in \Omega} \frac{|f''(x)|}{8} H^2, H = x_i - x_{i-1}$ Αυτό υπολογίζεται σε **μεμονωμένα σημεία**.

- **Σφάλμα μη - ισαπεχόντων κόμβων (Chebyshev):** $\max |e_n f(x)| \leq \frac{1}{2^n(n+1)!} * \left| \frac{b-a}{2} \right|^{n+1}$ με $x \in \Omega$

Συγκριση πολυωνύμων παρεμβολής:

	Πλεονεκτήματα	Μειονεκτήματα
Πολυώνυμο παρεμβολής σε μορφή Lagrange	1. Δεν χρειάζεται ομοιόμορφα καταναμημένες τιμές στο x . Τα πολυώνυμα Lagrange εξαρτώνται μόνο από τους κόμβους παρεμβολής και όχι από τις τιμές	1. Η παρεμβολή σε ένα επιπλέον σημείο απαιτεί τον υπολογισμό νέων πολυωνύμων Lagrange από την αρχή. 2. Ο υπολογισμός της τιμής του πολυωνύμου σε ένα σημείο στη μορφή Lagrange απαιτεί περισσότερες πράξεις σε σχέση με τις πράξεις της μορφής Newton. 3. Ο υπολογισμός κάθε όρου του πολυωνύμου απαιτεί $O(n^2)$ πράξεις για τον υπολογισμό του π.π. Αν το n είναι μεγάλο, υπάρχει περίπτωση ο υπολογισμός της δυνάμομορφής για κάθε πολυώνυμο Lagrange $L_i(x)$ να οδηγήσει σε σημαντικά σφάλματα.
Πολυώνυμο παρεμβολής σε μορφή Newton	1. Οικονομική ανανέωση (εφικτή η προσθήκη νέου στοιχείου (x_{n+1}, y_{n+1}) , χωρίς αλλαγή των ήδη υπολογισμένων συντελεστών). 2. Αν υλοποιηθεί με τη μέθοδο των διαιρεμένων διαφορών, οδηγεί στον ταχύτερο υπολογισμό των συντελεστών του πολυωνύμου παρεμβολής, σε σχέση με τη μέθοδο Lagrange.	1. Απαιτείται η υλοποίηση με πίνακα διαιρεμένων διαφορών, για να υπάρχει η οικονομική ανανέωση.



	3. Εξελικτική ή αναδρομική.	
Πολ. παρεμβολής σε μορφή ελαχίστων τετραγώνων	1. Αποτελεί τη μέθοδο επιλογής όταν έχουμε πολλές μετρήσεις και επιθυμούμε να τις μοντελοποιήσουμε με συνάρτηση που εξαρτάται από λίγες παραμέτρους. 2. Επιλύει υπερπροσδιορισμένα συστήματα, όπου $m \geq n$.	1. Αποτελεί προσεγγιστική μέθοδο προσδιορισμού ενός π. π. (δηλ. δεν ικανοποιούνται ακριβώς οι συνθήκες ταύτισης).
Πολ. παρεμβολής σε βαρυκεντρική αναπαράσταση	1. Πιο ευσταθής/γρήγορη από παρεμβολή Lagrange. 2. Δεν επιβαρυνόμαστε με τον υπολογισμό του $\Pi_{n+1}(x)$ κάθε φορά που υπολογίζεται το $L_n(x)$.	
Πολυώνυμο παρεμβολής σε μορφή Hermite		1. Πρέπει να δίνονται μαζί με τα σημεία παρεμβολής, οι παράγωγοι της συνάρτησης $f(x)$ στα σημεία αυτά.
Κοινό χαρακτηριστικό όλων των πολυωνύμων παρεμβολής είναι ότι ο βαθμός του πολυωνύμου εξαρτάται άμεσα από το πλήθος των σημείων παρεμβολής και είναι βαθμού n για $n + 1$ σημεία. Επίσης, απαιτείται μια συνάρτηση να είναι συνεχής σε κάποιο κλειστό διάστημα, για να μπορεί να προσεγγιστεί όσο καλά θέλουμε από ένα πολυώνυμο παρεμβολής .		
Τμηματική κυβική spline	1. Η καλύτερη παρεμβολή (δηλαδή αυτή με τη μικρότερη απόκλιση) επιτυγχάνεται με τη χρήση της κυβικής spline και με τους -μη ισαπέχοντες- κόμβους Chebyshev. 2. Οι συνθήκες παρεμβολής με splines συχνά οδηγούν σε γραμμικό τριδιαγώνιο σύστημα εξισώσεων για τον υπολογισμό των συντελεστών των πολυωνύμων κάθε υποδιαστήματος.	1. Επιλέγεται με τέτοιο τρόπο ώστε να είναι και δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη στο διάστημα παρεμβολής.
Τμηματικό γραμμικό πολυώνυμο παρεμβολής	1. Η βελτίωση στην προσέγγιση επιτυγχάνεται μέσω αύξησης των κόμβων παρεμβολής, ενώ ο βαθμός του πολυωνύμου σε κάθε υποδιάστημα παραμένει γραμμικός.	1. Υπάρχει ασυνέχεια στις παραγώγους
Τμηματικό πολυώνυμο τύπου Hermite		1. Απαιτείται να είναι γνωστές οι τιμές της παραγώγου της συνάρτησης, την οποία επιθυμούμε να προσεγγίσουμε.

Κόμβοι Chebyshev – Φαινόμενο Runge

Κόμβοι 1^{ου} είδους: $x_j = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2} \cos\left(\frac{(2j+1)}{(2n)}\pi\right)$, a, b άκρα του διαστήματος.

Κόμβοι 2^{ου} είδους: $x_j = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2} \cos\left(\frac{j}{n}\pi\right)$, a, b άκρα του διαστήματος.

Σφάλμα μη ισαπέχοντων κόμβων: $\max|e_n f(x)| \leq |f^{(n+1)}(\xi)| * \frac{1}{2^{n(n+1)!}} * \left|\frac{b-a}{2}\right|^{n+1}$ με $x \in \Omega$

Αντιμετωπίζουν την αστάθεια της πολυωνυμικής παρεμβολής, δηλ. το φαινόμενο Runge

17. Μέθοδοι προσεγγιστικού υπολογισμού ριζών συναρτήσεων – Ρυθμός σύγκλισης επαναληπτικών μεθόδων

Θεώρημα Bolzano

- Αν η συνάρτηση $f(x)$ είναι **συνεχής** στο διάστημα $[a, b]$, τότε:

- Αν το κριτήριο ύπαρξης ριζών του Bolzano **ισχύει** $\rightarrow f(x)$ έχει **περιττό** πλήθος ριζών στο διάστημα $[a, b]$.

- Αν το κριτήριο ύπαρξης ριζών του Bolzano **δεν ισχύει** \rightarrow **δεν** γνωρίζουμε αν υπάρχουν ρίζες στο διάστημα $[a, b]$.

- Αν η συνάρτηση $f(x)$ είναι **επιπλέον και γνησίως μονότονη** (αύξουσα ή φθίνουσα) στο διάστημα $[a, b]$ και ισχύει το κριτήριο ύπαρξης ριζών του Bolzano, δηλαδή $f(a) f(b) < 0 \rightarrow$ υπάρχει μία και μοναδική ρίζα της $f(x)$ στο διάστημα (a, b) .

Μέθοδος διχοτόμησης

- Αριθμός βημάτων (επαναλήψεων) $k \geq \lceil \log_2((b-a)\epsilon^{-1}) \rceil$, (ϵ = ακρίβεια και a, b = άκρα διαστήματος), εξαρτάται **κυρίως** από την ακρίβεια.

- Πρέπει να ικανοποιείται το θεώρημα **Bolzano**: στο διάστημα $[a, \beta]$ δηλ. $f(a) * f(\beta) < 0 \rightarrow$ **γραμμική** σύγκλιση (συγκλίνει αργά, με πολλά βήματα προς τη ρίζα).

- **Μέθοδος ολικής σύγκλισης** (δεν απαιτείται αρχική εκτίμηση της λύσης), συγκλίνει πάντα στο διάστημα που εφαρμόζεται.

- **Δεν** αποτυγχάνει ποτέ στο να βρει μια λύση με μια δεδομένη ακρίβεια

Μέθοδος Newton – Raphson: $x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$ ή $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$. Δεν είναι μέθοδος ολικής σύγκλισης

- **Τετραγωνική** σύγκλιση, **αλλά** σε περίπτωση **πολλαπλότητας ρίζας ίση με m**: $x_n = x_{n-1} - m \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})} \rightarrow$ **υπεργραμμική** σύγκλιση.

- Αν η ρίζα είναι **πολλαπλή**, $f(\xi) = f'(\xi) = 0$, η σύγκλιση της Newton-Raphson υποβιβάζεται σε **γραμμική** από τετραγωνική.

- Απόλυτο σφάλμα μεθόδου: $|e_{k+1}| \approx |e_k|^2 * \frac{f''(\eta)}{f'(\eta)}$

- Αν η μέθοδος Newton **δεν** συγκλίνει, **δεν** σημαίνει ότι δεν υπάρχει ρίζα σε κάποιο διάστημα, απλώς υποδεικνύει ότι η **αρχική εκτίμηση της ρίζας δεν είναι η κατάλληλη** (όχι αρκετά κοντά στην πραγματική ρίζα).

Μέθοδος τέμνουσας (χορδής):

- $x_{k+1} = x_k - \frac{(x_k - x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})} * f(x_k) \rightarrow$ **υπεργραμμική** σύγκλιση, απαιτούνται δύο αρχικές εκτιμήσεις ρίζας που είναι οι x_k και x_{k-1}

- Σε κάθε βήμα χρησιμοποιείται **πολύ λίγη πληροφορία** για τη συνάρτηση, **δύσκολη** η επιλογή μεμονωμένων σημείων (2) κοντά σε ρίζα.

- Αν η μέθοδος τέμνουσας **δεν** συγκλίνει, **δεν** σημαίνει ότι δεν υπάρχει ρίζα σε κάποιο διάστημα, απλώς υποδεικνύει ότι οι δύο αρχικές εκτιμήσεις της ρίζας να μην είναι καλές (δηλ. κοντά στην πραγματική ρίζα) ή η συνάρτηση έχει **πολλαπλές** ρίζες στο μελετώμενο διάστημα.

- Σε σχέση με τη Newton-Raphson είναι πιο **οικονομική**, αφού απαιτεί σε κάθε βήμα της ένα συναρτησιακό υπολογισμό, αλλά είναι πιο **αργή** από αυτή

Μέθοδος εσφαλμένης θέσης (Regula – Falsi): $x_{k+1} = x_k - \frac{(x_k - b)}{f(x_k) - f(b)} * f(x_k)$, $k = 1, 2, 3, \dots$

Μέθοδος (Πλαίσιο) αντίστροφης παρεμβολής: θέτουμε ως κόμβους παρεμβολής τα f_i και ως τιμές τα x_i $\{(f_i, x_i), i = k, \dots, k+r-1\}$, για να μην υπάρχει **αστοχία**, θα πρέπει σε κάθε βήμα οι τιμές $\{f_i, i = k, \dots, k+r-1\}$ που αντιστοιχούν σε διακριτά x_i , να είναι **διακριτές**.

Μέθοδος σταθερού σημείου:

- Για **βαθμωτή** συνάρτηση μιας μεταβλητής $f(x)$, επιλέγεται συνάρτηση $g(x)$ τέτοια ώστε το x να ικανοποιεί τη συνθήκη $f(x) = 0 \Leftrightarrow g(x) = x$.

- Για προσδιορισμό **ποιο από τα σταθερά σημεία που υπολογίστηκαν, θα συγκλίνει κάτω από την επανάληψη σταθερού σημείου $x_{k+1} = g(x_k)$** , πρέπει να υπολογιστεί η παράγωγος της $g(x)$ σε κάθε σταθερό σημείο **και θα πρέπει η απόλυτη τιμή της παραγώγου σε αυτό το σταθερό σημείο να είναι μικρότερη από 1**

- **Προϋπόθεση σύγκλισης επανάληψης σταθερού σημείου** είναι η συνάρτηση επανάληψης $g(x)$ να **έχει ένα σταθερό σημείο** μέσα σε ένα δεδομένο διάστημα. Ένα σταθερό σημείο είναι μια τιμή x^* τέτοια ώστε $g(x^*) = x^*$.



- Για την **ταχύτητα σύγκλισης** της επανάληψης σταθερού σημείου, εξετάζεται η παράγωγος $g'(x)$ στο σταθερό σημείο.
- Αν \exists η $g'(x^*)$ και είναι $(|g'(x^*)| < 1) \rightarrow$ η επανάληψη σταθερού σημείου συγκλίνει **γραμμικά**.
- Αν η $|g'(x^*)| = 0$, η επανάληψη σταθερού σημείου συγκλίνει με **υπεργραμμική** σύγκλιση.
- Αν η $|g'(x^*)| > 1$, η επανάληψη σταθερού σημείου **αποκλίνει**.
- Όλες οι προαναφερόμενες συνθήκες σύγκλισης προϋποθέτουν ότι η επανάληψη εκτελείται **αρκετά κοντά** στο σταθερό σημείο.
- Εάν η επανάληψη σταθερού σημείου **δεν** συγκλίνει, δεν σημαίνει απαραίτητα ότι δεν υπάρχει ρίζα στο σχετικό διάστημα.
- **Ρυθμός σύγκλισης (rate of convergence)** επαναληπτικής μεθόδου εύρεσης ριζών: **rate** = $-\log_{10} p$, όπου **p** **τάξη σύγκλισης** και όσο **μικρότερη** είναι η τάξη σύγκλισης p, τόσο **μεγαλύτερος** είναι ο ρυθμός σύγκλισης και αντίστοιχα τόσο **λιγότερες επαναλήψεις** απαιτούνται

18. Συνοδευτικό μητρώο – Εύρεση ριζών χαρακτηριστικού πολυωνύμου μέσω ιδιοτιμών συνοδευτικού μητρώου

Εύρεση ριζών μονικού ($a_n = 1$) πολυωνύμου $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \leftrightarrow$ εύρεση ιδιοτιμών συνοδευτικού μητρώου, μορφής:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & -a_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

Ειδική περίπτωση: πολυώνυμο παρεμβολής σε μορφή Newton:

$$p(x) = \gamma_0 + \gamma_1(x - p_1) + \gamma_2(x - p_1)(x - p_2) + \gamma_3(x - p_1)(x - p_2)(x - p_3), \text{ έχει}$$

$$\text{συνοδευτικό μητρώο το } C = \begin{bmatrix} p_1 & 1 & 0 \\ 0 & p_2 & 1 \\ -\gamma_0 & -\gamma_1 & -\gamma_2 + p_3 \gamma_3 \end{bmatrix}$$

19. Επίλυση μη γραμμικών εξισώσεων με τη μέθοδο Newton

Σύστημα εξισώσεων:

$$f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$

$$f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$

$$\dots$$

$$f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

Ιακωβιανό μητρώο με μερικές παραγώγους

$$J(x^k) * s^k = -F_n(x^k), s^k = \text{διάνυσμα διόρθωσης}$$

$$x^{k+1} = x^k - J(x^k)^{-1} * F_n(x^k)$$

$$\text{Γενικός τύπος: } \begin{bmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \\ \dots \\ x_n^{(k+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ \dots \\ x_n^{(k)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} s_1^{(k)} \\ s_2^{(k)} \\ \dots \\ s_n^{(k)} \end{bmatrix}, s^{(k)} = \text{διάνυσμα διόρθωσης}$$

20. Κανόνες υπολογισμού ολοκληρωμάτων (μέθοδοι τετραγωνισμού) και σφάλματα

- **Απλός κανόνας παραλληλογράμμου:** $P(f) = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx \approx (x_{i+1} - x_i) * f(x_i) = h * f(x_i)$, Στο τέλος παίρνουμε άθροισμα εμβαδών

- **Απλός κανόνας Τραπεζίου:** $T(f) = \frac{x_{i+1} - x_i}{2} * (f(x_i) + f(x_{i+1})) = \frac{h}{2} * (f(x_i) + f(x_{i+1}))$ με σφάλμα: $\left| \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx - T(f) \right| \leq \frac{M}{12} * (x_{i+1} - x_i)^3$. Έχει **βαθμό ακρίβειας 1** και **τάξη ακρίβειας $O(h^2)$** .

- **Απλός κανόνας Simpson:** $S(f) = \frac{h}{6} * (f(x_i) + 4f(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}) + f(x_{i+1}))$ με σφάλμα: $\left| \int_a^b f(x) dx - S(f) \right| \leq \frac{f^{(4)}(\eta)}{2880} * (x_{i+1} - x_i)^5$. Έχει **βαθμό ακρίβειας 3** και **τάξη ακρίβειας $O(h^4)$** .

- **Απλός κανόνας μέσου σημείου:** $M(f) = f(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}) * (x_{i+1} - x_i)$ με σφάλμα: $\left| \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx - M(f) \right| \leq \frac{K}{24} * (x_{i+1} - x_i)^3$. Έχει **βαθμό ακρίβειας 1** και **τάξη ακρίβειας $O(h^2)$** . Το $K \geq \max\{|f^2(x_0)|, |f^2(x_n)|\}$

- Σε όλους τους τύπους το $h = \text{λεπτότητα διαμέρισης} = (b - a)/n$, όπου $n = \text{αριθμός υποδιαστημάτων}$ (ξεκινάμε με $n = 2$) και $a, b = \text{άκρα διαστήματος}$.

- Όσο **υψηλότερος** ο βαθμός ακρίβειας μιας **μεθόδου ολοκλήρωσης** \rightarrow τόσο πιο **ακριβής είναι η μέθοδος** για δεδομένο μέγεθος βήματος.

- Ο κανόνας **τραπεζίου** και **Simpson** είναι παράδειγμα τύπου **κλειστής μορφής**, ενώ του **μέσου σημείου** είναι τύπου **ανοικτής μορφής**.

- Το **κόστος** των **απλών** μεθόδων ολοκλήρωσης $<$ **κόστος σύνθετων** μεθόδων ολοκλήρωσης.

- Το **σφάλμα των προσεγγιστικών κανόνων αριθμητικής ολοκλήρωσης** εξαρτάται από α) άνω φράγμα K, M της τάξης της παραγώγου που αντιστοιχεί στη μέθοδο και β) από το μήκος $b - a$ του διαστήματος $[a, b]$.

- **Τάξη ακρίβειας κανόνα αριθμητικής ολοκλήρωσης:** ένας κανόνας αριθμητικής ολοκλήρωσης έχει **τάξη ακρίβειας m**, αν είναι ακριβής για κάθε πολυώνυμο p , για το οποίο $\deg p \leq m$. Η τάξη της μεθόδου ολοκλήρωσης είναι $M = m + 1$

- Στους **σύνθετους κανόνες ολοκλήρωσης**

- **Δυνατότητα επιλογής μεγέθους υποδιαστήματος (πλεονέκτημα)** \rightarrow **σφάλμα διακριτοποίησης μικρότερο** κάποιου κατωφλίου (ορίου), κάτι που **δεν μπορεί να γίνει στους απλούς κανόνες**, εκτός αν έχουμε κάνει επιλογή του κανόνα που θα χρησιμοποιήσουμε.

- Ο κανόνας **Simpson** έχει το **μεγαλύτερο κόστος υπολογισμού**.

- **Αυξημένο υπολογιστικό κόστος (μειονέκτημα).**

- **Σύνθετος τύπος παραλληλογράμμου:** $CP(f) = h \sum_{j=0}^{n-1} f_j$

- **Σύνθετος τύπος τραπεζίου h:** $CT(f) = \frac{h}{2} (f(x_0) + f(x_n) + 2 * \sum_{j=1}^{n-1} f_j)$ με σφάλμα: $\left| \int_a^b f(x) dx - CT(f) \right| \leq \frac{(b-a)f''(\eta)}{12} h^2 = \frac{(b-a)M}{12} h^2$. Ιδιαίτερα ακριβής για **περιοδικές συναρτήσεις**. Έχει **τάξη ακρίβειας $O(h^2)$** .

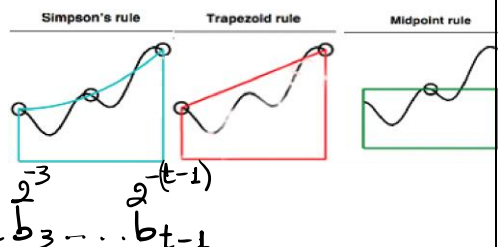
- **Σύνθετος τύπος Simpson:** $CS(f) = \frac{h}{3} (f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) + \dots + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n))$ με σφάλμα: $\left| \int_a^b f(x) dx - CS(f) \right| \leq \frac{(b-a)|f^{(4)}(\eta)|}{180} h^4 = \frac{(b-a)M}{180} h^4$. Έχει **τάξη ακρίβειας $O(h^4)$** .

- **Σύνθετος τύπος μέσου σημείου:** $CM(f) = h \sum_{i=0}^{n-1} f(a + h \frac{2i+1}{2})$ με σφάλμα: $\left| \int_a^b f(x) dx - CM(f) \right| \leq \frac{(b-a)f^2(\eta)}{24} h^2 = \frac{(b-a)M}{24} h^2$ με **τάξη ακρίβειας $O(h^2)$**

- **Ακριβής ολοκλήρωση:** Μέθοδος **Simpson** έχει 3 κόμβους στο διάστημα $[x_i, x_{i+1}] \rightarrow$ **ακριβής ολοκλήρωση πολυωνύμων έως $2^{\text{ος}}$ βαθμού**, ακόμη και με αριθμητική άπειρης ακρίβειας.

Μέθοδος **τραπεζίου** έχει 2 κόμβους στο διάστημα $[x_i, x_{i+1}] \rightarrow$ **ακριβής ολοκλήρωση πολυωνύμων έως $1^{\text{ος}}$ βαθμού**.

Μέθοδος **μέσου σημείου** έχει 1 κόμβο στο διάστημα $[x_i, x_{i+1}] \rightarrow$ **ακριβής ολοκλήρωση πολυωνύμων $0^{\text{ος}}$ βαθμού**.





- Μέσω μεθόδου κανονικών εξισώσεων: $x = (A^T * A) \backslash (A^T * b)$, που προκύπτει από $A * x = b \rightarrow A^T * A * x = A^T * b$, όπου $B = A^T * A$ είναι συμμετρικό, αν οι στήλες του μητρώου A είναι γ.α. ισχύει: $x^T * A^T * A * x \geq 0, \rightarrow$ μητρώο $A^T * A$ είναι ΣΘΟ.

- Ο πολλαπλασιασμός $A^T A$ μπορεί να καταστρέψει όποια ειδική δομή έχει το αρχικό μητρώο A .

- Ο πολλαπλασιασμός $A^T A$ μπορεί να έχει σαν αποτέλεσμα την απώλεια σημαντικών ψηφίων και αλλοίωση του αποτελέσματος ή υπερχειλίση.

- Ευαισθησία της μεθόδου σε συσσώρευση αριθμητικών σφαλμάτων $\rightarrow \kappa_2(A^T A) = [\kappa_2(A)]^2$

- Μέσω QR παραγοντοποίησης: $x = (R_1) \backslash ((R_1^T) \backslash (A^T * b))$

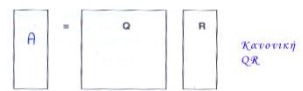
- Εύρεση ορθοκανονικών βάσεων για χώρο στηλών $\text{range}(A)$ και αριστερό μηδενόχωρο $\text{null}(A^T)$.

- Ισχύει ότι: $\kappa(A) \leq \kappa(R), \kappa(Q) = 1, \kappa(A) \geq 1$

- Παράγεται από μητρώο Householder: $H(n) = I - 2 * [(u * u^T) / (u^T * u)]$, όπου $u =$ διάνυσμα Householder $= u_j = A^{(j)} \pm \|A^{(j)}\|_2 * e_j$

- Η QR παραγοντοποίηση ενός άνω Hessenberg/πλήρους μητρώου απαιτεί $O(n^2)/O(n^3)$ πράξεις

- Στην QR παραγοντοποίηση τετραγωνικού μητρώου, οι ιδιοτιμές του διατηρούνται και στο γινόμενο των μητρώων της διάσπασης: π.χ. αν η παραγοντοποίηση QR του $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ παράγει τα μητρώα Q, R , τότε το μητρώο $B = RQ$ έχει ίδιες ιδιοτιμές με το A .



- Η QR είναι πάντα πίσω ευσταθής υπολογισμός, δηλ. το $\text{cond}(f_{\text{prog}}) = 1$.

- Πλήρης (κανονική): μητρώο R ίδιο μέγεθος με το A και μητρώο Q τετραγωνικό με ίδιο αριθμό γραμμών με το A .

- Οικονομική (λεπτή): Q ίδιο μέγεθος με το A και R τετραγωνικό με ίδιο αριθμό στηλών με το A .

- Σε οποιαδήποτε μορφή QR παραγοντοποίησης (κανονική – οικονομική) το μητρώο Q είναι ορθογώνιο.

- Στην οικονομική QR παραγοντοποίηση του μητρώου $A \in \mathbb{R}^{100 \times 10}$ το Q επιστρέφει ορθογώνια βάση για τον \mathbb{R}^{10} (μικρότερη διάσταση)

- Όταν το μητρώο $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ πλήρους τάξης στηλών:

a) Ισχύει $\text{rank}(A) = r = m = n$,

b) Η κανονική QR αλλά και η οικονομική (λεπτή) QR επιστρέφουν τα ίδια αποτελέσματα.

c) Το R^T θα είναι ο παράγοντας Cholesky του $A^T A$.

- Όταν το μητρώο $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ δεν είναι πλήρους τάξης:

a) Ισχύει $\text{rank}(A) = r < n < m$. Σε ένα μητρώο μη – τετραγωνικό το rank (τάξη) του μητρώου = με τη μικρότερη διάσταση του μητρώου.

b) Οι πρώτες r στήλες του μητρώου Q μπορεί να μην αποτελούν βάση για το χώρο στηλών του A .

b) Εφαρμόζεται QR παραγοντοποίηση με οδήγηση στηλών.

c) Το παραγόμενο μητρώο R περιέχει μηδενικό στοιχείο στην κύρια διαγώνιο.

d) Το R^T θα είναι ο παράγοντας Cholesky του $A^T A$, μόνο για την περίπτωση της οικονομικής QR παραγοντοποίησης.

- 1^η ιδιότητα οικονομικής QR: το μητρώο R_1 περιέχει τον άνω παράγοντα Cholesky του $A^T * A$, διότι: $A = Q * R = [Q_1 \ Q_2] * \begin{bmatrix} R_1 \\ 0 \end{bmatrix} = Q_1 * R_1$. οπότε $A^T * A = (Q_1 * R_1)^T * (Q_1 * R_1) = R_1^T * Q_1^T * Q_1 * R_1 = R_1^T * R_1 \Rightarrow A^T * A = R_1^T * R_1$.

- 2^η ιδιότητα οικονομικής QR: επίλυση προβλήματος ελαχίστων τετραγώνων. Με χρήση οικονομικής QR: $A = Q * R = [Q_1 \ Q_2] * \begin{bmatrix} R_1 \\ 0 \end{bmatrix} = Q_1 * R_1$ οπότε $A * x = b \Rightarrow A^T * A * x = A^T * b \Rightarrow x = (A^T * A)^{-1} * A^T * b \Rightarrow x = ((Q_1 R_1)^T * (Q_1 R_1))^{-1} = (R_1^T * Q_1^T * Q_1 * R_1)^{-1} = (R_1^T * R_1)^{-1} * A^T * b = (R_1)^{-1} * (R_1^T)^{-1} * A^T * b = (R_1) \backslash ((R_1^T) \backslash (A^T * b))$. Άρα $x = (R_1) \backslash ((R_1^T) \backslash (A^T * b))$

Θεώρημα Schur: ισχύει ότι αν $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, υπάρχει ορθογώνιο μητρώο $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$, τέτοιο ώστε $Q^T * A * Q = R$ (άνω τριγωνικό μητρώο με διαγώνια στοιχεία τις ιδιοτιμές του A). Αυτό ονομάζεται ορθογώνιος μετασχηματισμός ομοιότητας. Ισοδύναμα, το μητρώο $A = Q * R * Q^T$

Σημείωση: Η δεύτερη νόρμα παραμένει αμετάβλητη κάτω από ορθογώνιους μετασχηματισμούς: $\|Qx\|_2^2 = (Q^T * x)^T * (Q * x) = x^T * Q^T * Q * x = x^T * x = \|x\|_2^2 \Rightarrow \|Qx\|_2 = \|x\|_2$.

24. Τυπολόγιο είδους αντίστροφων μητρώων – είδους μητρώων L και U

Δομή μητρώου A	Δομή αντιστρόφου A ⁻¹
Διαγώνιο	Διαγώνιο
Τριγωνικό	Τριγωνικό ίδιου τύπου
Κάτω Διδιαγώνιο	Κάτω τριγωνικό
Τριδιαγώνιο	Πυκνό
Πενικό αραιό	Πυκνό
Άνω Hessenberg	Πυκνό
Πυκνό	Πυκνό

Αντιστρέψιμο μητρώο	Θ.Ο. μητρώο
Όλες οι ιδιοτιμές του $\neq 0$	Όλες οι ιδιοτιμές του > 0
Όλοι οι οδηγόι του $\neq 0$	Όλοι οι οδηγόι του > 0
A.Δ.Κ.	A.Δ.Κ. και θετικά διαγώνια στοιχεία
-	$x^T * A * x > 0, \forall x \neq 0, x \in \mathbb{R}^n$

Δομή μητρώου A (διαθέτει AΔΚ κατά στήλες)	L	U
Διαγώνιο	Διαγώνιο	Διαγώνιο
Τριγωνικό	Αν το A[άνω/κάτω τριγωνικό] τότε [διαγώνιο/κάτω τριγωνικό] αντίστοιχα	Αν το A[άνω/κάτω τριγωνικό] τότε [άνω τριγωνικό/διαγώνιο] αντίστοιχα
Διδιαγώνιο	Αν το A[άνω/κάτω διδιαγώνιο] τότε [διαγώνιο/κάτω διδιαγώνιο] αντίστοιχα	Αν το A[άνω/κάτω διδιαγώνιο] τότε [άνω διδιαγώνιο/διαγώνιο] αντίστοιχα
Τριδιαγώνιο	κάτω διδιαγώνιο	άνω διδιαγώνιο
Πενικό αραιό	κάτω τριγωνικό	άνω τριγωνικό
Άνω Hessenberg	κάτω διδιαγώνιο	άνω τριγωνικό
Πυκνό	κάτω τριγωνικό	άνω τριγωνικό

25. Σύνοψη άρσεων μεθόδων

Παραγοντοποίηση	Αλγόριθμος επίλυσης του γραμμικού συστήματος $A * x = b$	Κόστος πράξεων (Ω)	Πίσω ευστάθεια
-----------------	----------------------------------------------------------	--------------------	----------------

LU $A = L * U$ Προϋπόθεση: όλα τα κύρια υπομητρώα αντιστρέφονται ή Α.Δ.Κ κατά στήλες	$[L, U] = lu(A)$ $L * y = b$ (εμπρός αντικατάσταση) $\Rightarrow y = L^{-1} * b \Rightarrow y = L \backslash b$ $U * x = y$ (πίσω αντικατάσταση) $\Rightarrow x = U^{-1} * y = U \backslash y$ Αν ενώσουμε εμπρός/πίσω αντικατάσταση: $x = U \backslash y = U \backslash (L \backslash b)$ Το μητρώο L της LU είναι: $L = L_1^{-1} L_2^{-1} \dots L_{n-1}^{-1}$ όπου το μητρώο απαλοιφής Gauss $L_k = I - u_k e_k^T$ οπότε το αντίστροφο μητρώο απαλοιφής Gauss: $L_k^{-1} = I + u_k e_k^T$	$\Omega = \frac{2}{3}n^3 + 2n^2$	Όχι πάντα
LU με μερική οδήγηση (PLU) $P * A = L * U$	$[L, U, P] = lu(A)$ $L * y = P * b = \hat{b} \Rightarrow y = L^{-1} * P * b = L \backslash (P * b)$ $U * x = y$ (πίσω αντικατάσταση) $\Rightarrow x = U^{-1} * y = U \backslash y$ Αν ενώσουμε εμπρός/πίσω αντικατάσταση: $x = U \backslash y = U \backslash (L \backslash \hat{b})$	$\Omega = \frac{2}{3}n^3 + 2n^2$	Σχεδόν πάντα
Cholesky $A = L * L^T$ Προϋπόθεση: μητρώο A ΣΘΘ	$L = chol(A)$, $L = \text{άνω τριγωνικό}$. Εναλλακτικά $[L, L1] = chol(A)$, όπου $L = \text{κάτω τριγωνικό και } L1 = L^T = \text{άνω τριγωνικό}$ $L' * y = b$ (εμπρός αντικατάσταση) $\Rightarrow y = (L')^{-1} * b \Rightarrow y = L' \backslash b$ $L * x = y$ (πίσω αντικατάσταση) $\Rightarrow x = L \backslash y = L \backslash (L' \backslash b)$, $L = \text{άνω τριγωνικό, } L' = \text{κάτω τριγωνικό}$. Μαθηματική διατύπωση $A = L$ (κάτω τριγωνικό) $* L^T$ (άνω τριγωνικό).	$\Omega = \frac{1}{3}n^3 + 2n^2$	Πάντα
QR $A = Q * R$	$[Q, R] = qr(A)$, όπου Q = ορθογώνιο και R = άνω τριγωνικό $x = R \backslash (Q^T * b)$ (συνένωση εμπρός και πίσω αντικατάστασης)	$\Omega = \frac{4}{3}n^3 + 2n^2$	Πάντα
LDL^T Προϋπόθεση: μητρώο A συμμετρικό	$A = L * D * L^T$, μητρώα A, D όμοια μεταξύ τους, έχουν ίδια ορίζουσα $\det(A) = \det(D)$ και ίδιες ιδιοτιμές $\lambda(A) = \lambda(D)$. Από την παραγοντοποίηση αυτή υπολογίζουμε την αδράνεια ενός συμμετρικού μητρώου $(\zeta, \theta, \nu) = (\text{πλήθος μηδενικών στοιχείων κ.δ., πλήθος θετικών στοιχείων κ.δ., πλήθος αρνητικών στοιχείων κ.δ.} + q)$		

26. Είδη σφαλμάτων/ Πηγές σφάλματος

- A. Σφάλματα στο πρόβλημα που πρέπει να επιλυθεί (σφάλματα στο μαθηματικό μοντέλο λόγω της προσέγγισης).
- B. Σφάλματα προσέγγισης
- Σφάλματα διακριτοποίησης (discretization errors) προκαλούνται από τη διακριτοποίηση συνεχών διαδικασιών, όπως η παρεμβολή (interpolation), η παραγωγή (differentiation) και η ολοκλήρωση (integration).
 - Σφάλματα σύγκλισης (convergence errors) προκύπτουν στις επαναληπτικές μεθόδους (iterative methods).
- Γ. Σφάλματα στρογγυλοποίησης (Όλοι οι υπολογισμοί με πραγματικούς αριθμούς εμπεριέχουν κάποιο σφάλμα στρογγυλοποίησης (roundoff error)).
- Αναφορικά με τις πηγές σφάλματος, αυτές είναι οι εξής:
- Στρογγυλοποίηση: λόγω της πεπερασμένης αναπαράστασης
 - Διακριτοποίηση: λόγω της προσέγγισης του συνεχούς με το πεπερασμένο
 - Απλοποιήσεις στη μοντελοποίηση: μαθηματικό μοντέλο και απλοποιήσεις
 - Εμπειρικές σταθερές, εμπειρικοί τύποι: τιμές και τύποι που προέρχονται από παρατηρήσεις και πειράματα και όχι από επαγωγική διαδικασία από τις πρώτες αρχές.
 - Σφάλματα και ασάφειες στα δεδομένα εισόδου

27. Προσέγγιση αριθμού με δεκαδικά και σημαντικά ψηφία

- Αν ο προσεγγιστικός αριθμός x^* είναι ακριβής σε **k δεκαδικά ψηφία**: απόλυτο σφάλμα $|e| \leq 0.5 * 10^{-k}$,
- Αν ο προσεγγιστικός αριθμός x^* είναι ακριβής σε **k σημαντικά ψηφία**: απόλυτο σφάλμα $|e| \leq 5 * 10^{-k} = 0.5 * 10^{1-k}$

28. SVD (ιδιάζουσα) παραγοντοποίηση - Σχέση ιδιζουσών τιμών/ιδιοτιμών

- $\|A\|_2 = \sigma_{\max}(A)$. Δεύτερη νόρμα μητρώου ίση με τη μέγιστη ιδιάζουσα τιμή του.
- Οι **ιδιάζουσες τιμές** σ_i ενός μητρώου υπολογίζονται με την SVD παραγοντοποίηση του μητρώου (ιδιάζουσα παραγοντοποίηση) και είναι ίσες με τις ιδιοτιμές του, δηλ. $\sigma_i = \lambda_i$ αν το $A = A^T$. Αλλιώς, αν $A \neq A^T$, $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$
- Με **ιδιάζουσα παραγοντοποίηση (SVD)** εύρεση ιδιζουσών τιμών/ιδιζόντων διανυσμάτων για οποιαδήποτε μητρώα, όχι κατ' ανάγκη τετραγωνικά.
- Η SVD προσφέρει ορθοκανονικές βάσεις για κάθε θεμελιώδη υπόχωρο του μητρώου A, ενώ η QR μόνο για χώρο στηλών και μηδενόχωρο.
- Οι **ιδιοτιμές** λ_i ενός μητρώου είναι οι ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου του μητρώου $p(\lambda) = \det(\lambda I - A) = 0$.
- $\kappa_2(A) = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{\min}} = \frac{|\lambda_{\max}|}{|\lambda_{\min}|}$ για συμμετρικό μητρώο A.
- Αν $x \in \mathbb{R}^n$, ισχύει: $\|x\|_2 = \sqrt{x^T * x} \Rightarrow \|x\|_2^2 = x^T * x$.

29. Επίλυση ελαχ. τετραγώνων - Μειονεκτήματα κανονικών εξισώσεων $A^T * A * x = A^T * b$

Διατύπωση: $\min \|Ax - b\|_2$ (εύρεση προσεγγιστικής λύσης γραμμικού συστήματος $A * x = b$).

A' Τρόπος επίλυσης (με QR παραγοντοποίηση): $A * x = b \Rightarrow A^T * A * x = A^T * b \Rightarrow (QR)^T * (QR) * x = (QR)^T * b \Rightarrow R^T * Q^T * Q * R * x = R^T * Q^T * b \Rightarrow R^T * R * x = R^T * Q^T * b \Rightarrow x = (R^T * R)^{-1} * R^T * Q^T * b = R^{-1} (R^T)^{-1} R^T * Q^T * b = R^{-1} Q^T * b \Rightarrow R * x = R * R^{-1} * Q^T * b \Rightarrow R * x = Q^T * b \Rightarrow x = R \backslash (Q^T * b)$ ή ισοδύναμα $x = R(1:n, :) \backslash (Q^T * b)$

B' Τρόπος επίλυσης (με κανονικές εξισώσεις): $A * x = b \Rightarrow A^T * A * x = A^T * b \Rightarrow x = (A^T A)^{-1} * A^T * b = (A' * A) \backslash (A' * b)$. Ο τρόπος αυτός παρουσιάζει τα εξής μειονεκτήματα:

- Ο πολλαπλασιασμός $A^T A$ μπορεί να καταστρέψει όποια ειδική δομή έχει το αρχικό μητρώο A (π.χ. πολλά μηδενικά). Αυτό σημαίνει ότι ενώ το αρχικό μητρώο A είναι αραιό, το γινόμενο $A^T A$ το κάνει πυκνό.
- Ο πολλαπλασιασμός $A^T A$ μπορεί να έχει σαν αποτέλεσμα απώλεια σημαντικών ψηφίων και αλλοίωση του αποτελέσματος/υπερχείλιση.
- **Ευαισθησία της μεθόδου σε συσσώρευση αριθμητικών σφαλμάτων.** ακρίβεια αποτελεσμάτων εξαρτάται από το δείκτη κατάστασης $\kappa(A^T A)$, αφού $\kappa(A^T A) = [\kappa_2(A)]^2$.



30. Εμπρός – πίσω Euler

- Μέθοδοι επίλυσης Σ.Δ.Ε. $\frac{du}{dt} = -Au(t)$, με δοθέν $u(0) \Rightarrow u(t) = e^{-At}u(t_0)$. Ιδιοτιμές μητρώου A με θετικό πραγματικό μέρος, αλλιώς πρόβλημα ασταθές
- Στην εμπρός Euler:
 - $u(t+h) = (I - hA)u(t)$ ή $U_{k+1} = U_k + h f(t_k, U_k)$ με αρχική τιμή $U_0 = c$. Άμεση μέθοδος.
 - Εύκολη και οικονομική υλοποίηση (πλεονέκτημα)
 - Ο περιορισμός του βήματος $h = \Delta t$ για την εξασφάλιση **ευστάθειας** μπορεί να οδηγήσει σε πολλές επαναλήψεις (μειονέκτημα).
 - Για **εξασφάλιση ευστάθειας**, πρέπει το βήμα $h < \frac{2}{\lambda_{\max}}$ ή $\rho(I - hA) < 1$.
 - Πράξεις μεταξύ μητρώου και διανύσματος **ανά βήμα**. Κόστος ενδέχεται να υπολογιστεί περισσότερες φορές, είναι πολυπλοκότητας $O(\frac{T}{h}n^2)$.
- Στην Πίσω Euler:
 - $u(t+h) = (I + hA)^{-1}u(t) = (I + hA)u(t+h) = u(t)$ ή $U_{k+1} = U_k + h f(t_{k+1}, U_{k+1})$ με αρχική τιμή $U_0 = c$. Έμμεση μέθοδος.
 - Ευστάθεια **εγγυημένη** (πλεονέκτημα)
 - Λύση γραμμικού συστήματος είναι ανά βήμα \rightarrow **πιο ακριβή/πολύπλοκη υλοποίηση** (μειονέκτημα).
 - Κόστος πολυπλοκότητας $O(\frac{T}{h}n^3)$, διότι έχουμε επίλυση συστήματος με τυχαίο μητρώο συντελεστών για την επίλυση του $A * x = b$.
- Για την επίλυση της ΣΔΕ $u_t = -Au$ χρησιμοποιούνται λύσεις που ανήκουν στην εμπρός/πίσω Euler (Ο αρνητικός εκθέτης συμβολίζει **πίσω Euler** και ο θετικός συμβολίζει εμπρός Euler):

$(I - A)^h u$, για διαφορετικές τιμές του h : εμπρός Euler

$(I - A/h)^h u$, για διαφορετικές τιμές του h : εμπρός Euler

$(I + hA)^{-1} u$, για διαφορετικές τιμές του h : πίσω Euler

$(I + A)^4 u$, $(I + 2A)^2 u$, $(I + 4A)^{-1} u$ για διαφορετικές τιμές του h : πίσω Euler

$(I + \frac{1}{2}A)^{-8} u$, $(I + A)^{-4} u$, $(I + 2A)^{-2} u$ για διαφορετικές τιμές του h : πίσω Euler

31. Συναρτήσεις MATLAB

ΌΤΙ ΧΕΡΑ

- **abs(x)**: επιστρέφεται η απόλυτη τιμή της μεταβλητής x , όπου x = βαθμωτός, διάνυσμα, μητρώο (εφαρμόζεται σε όλα τα στοιχεία του).
- **diag(A)**: αν A = **μητρώο**, επιστρέφει διάνυσμα με την κύρια διαγώνιο του μητρώου. Αν A = **διάνυσμα** δημιουργεί διαγώνιο μητρώο με όρισμα το A . αν A = **βαθμωτός**, επιστρέφει την τιμή του, π.χ. $\text{diag}(8) = 8$.
- **eye(n)**: επιστρέφεται το ταυτοτικό μητρώο $I_{n \times n}$.
- **eig(A)**: υπολογισμός των ιδιοτιμών ενός μητρώου A . Αν δώσουμε ως όρισμα ένα βαθμωτό, τότε επιστρέφεται ο βαθμωτός αυτός, π.χ. $\text{eig}(8) = 8$.
- **inv(A)**: επιστρέφεται ο αντίστροφος του μητρώου $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, δηλ. ο A^{-1}
- **n = length(v)**: επιστρέφεται το μήκος του διανύσματος $v \in \mathbb{R}^n$. Στην περίπτωση μητρώου $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ επιστρέφει τη μεγαλύτερη διάσταση του μητρώου
- **max/min(v)**: επιστρέφεται η μεγαλύτερη/μικρότερη τιμή του διανύσματος $v \in \mathbb{R}^n$
- **nnz(A)**: επιστρέφει το πλήθος των **μη μηδενικών στοιχείων** του μητρώου A .
- **ones(n)/ones(m, n)**: επιστρέφεται μητρώο $n \times n / m \times n$ με όλα τα στοιχεία ίσα με '1'. - **ones(n, 1)**: επιστρέφεται διάνυσμα $n \times 1$ με στοιχεία ίσα με '1'
- **rand(n)/rand(m, n)**: επιστρέφεται μητρώο διαστάσεων $n \times n$ ή $m \times n$ με τυχαίες μη - μηδενικές τιμές στο διάστημα $(0, 1)$.
- **randn(n)/randn(m, n)**: επιστρέφεται μητρώο διαστάσεων $n \times n$ ή $m \times n$ με τυχαίες μη - μηδενικές τιμές με βάση την κανονική κατανομή.
- **randi(9, 4)** δημιουργία μητρώου με τιμές ακέραιες από 1 έως 9, διαστάσεων 4×4 .
- **rank(A)**: επιστρέφει την τάξη ενός μητρώου, δηλ. το πλήθος των γραμμικά ανεξάρτητων γραμμών/στηλών ή αλλιώς το πλήθος των οδηγών του.
- **size(x)**: επιστρέφονται **οι δύο διαστάσεις** του διανύσματος $x \in \mathbb{R}^n$ ή του μητρώου $x \in \mathbb{R}^{n \times n}$
- **size(x, 1)/size(x, 2)**: επιστρέφεται η πρώτη/δεύτερη διάσταση του διανύσματος $x \in \mathbb{R}^n$ ή του μητρώου $x \in \mathbb{R}^{n \times n}$ (αριθμός γραμμών)/αριθμός στηλών
- **sum(x)**: επιστρέφει το άθροισμα **όχι κατ' απόλυτη τιμή** των στοιχείων του διανύσματος.
- **sum(x>3)**: επιστρέφει το πλήθος των στοιχείων του διανύσματος $x \in \mathbb{R}^n$ που είναι μεγαλύτερα από 3.
- **sum(A)/sum(A, 1)**: επιστρέφει το άθροισμα (όχι κατ' απόλυτη τιμή) κάθε στήλης του μητρώου $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$
- **sum(A, 2)**: επιστρέφει το άθροισμα (όχι κατ' απόλυτη τιμή) κάθε γραμμής του μητρώου $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$
- **toeplitz(r)**: επιστρέφει μητρώο τριδιαγώνιο και συμμετρικό και μορφής Toeplitz (στοιχεία ανά διαγώνιο σταθερά).
- **toeplitz(r, p)**: επιστρέφει μητρώο τριδιαγώνιο, μη - συμμετρικό και μορφής Toeplitz (στοιχεία ανά διαγώνιο σταθερά).
- **tril(A, k)**: με $k > 0 / k < 0$ επιστρέφεται το κάτω/άνω τριγωνικό τμήμα του μητρώου A , **ξεκινώντας** από μια υπερδιαγώνιο/υποδιαγώνιο του και κάτω.
- **triu(A, k)**: με $k > 0 / k < 0$ επιστρέφεται το άνω τριγωνικό τμήμα του μητρώου A , **ξεκινώντας** από μια υπερδιαγώνιο/υποδιαγώνιο του και πάνω.

π.χ. $\text{triu}(M \leq q, 1)$: επιστρέφει τα στοιχεία του μητρώου M που είναι από την υπερδιαγώνιο και πάνω και μάλιστα όσα από τα στοιχεία αυτά είναι μικρότερα από τη μεταβλητή q παίρνουν τιμή «1» αφού επαληθεύουν τη συνθήκη, τα υπόλοιπα παίρνουν τιμή «0».

- **zeros(n)/ones(m, n)**: επιστρέφεται μητρώο $n \times n / m \times n$ με όλα τα στοιχεία ίσα με '0'. - **zeros(1, n)**: επιστρέφεται διάνυσμα $1 \times n$ με στοιχεία ίσα με '0'

$x = [1:10]$

$x =$

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

>> $x = [2; 5; 9; 16]$

$x =$

2

5

9

16

>> $x = [2 \ 5, 9, 16]$

$x =$

2 5 9 16



```
>> x'  
ans =  
2  
5  
9  
16  
>> eye(1,10)  
ans =  
1 0 0 0 0 0 0 0 0 0  
>> eye(2,10)  
ans =  
1 0 0 0 0 0 0 0 0 0  
0 1 0 0 0 0 0 0 0 0
```