

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ  
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

***ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ  
В ЗАДАЧАХ ТЕПЛОПЕРЕНОСА***

Томск  
2009

Рецензенты:

Заведующий кафедрой Теоретической физики, профессор А.В. Шаповалов (Томский государственный университет)

Заведующий кафедрой Прикладной математики и информатики профессор С.В. Тимченко (Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники)

Учебно-методическое пособие составлено для проведения самостоятельной работы и практических занятий студентов по курсу «Численные методы в задачах теплообмена» при подготовке бакалавров по направлениям 140400 – Техническая физика и выпускников по специальностям 160701 – Баллистика, 140303 – Физика кинетических явлений на физико-техническом факультете ТГУ.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке грантов РФФИ № 08–08–90701 моб\_ст и № 08–08–12029–офи

Составители:

А.Ю. Крайнов, Ю.Н. Рыжих, А.М. Тимохин

Численные методы в задачах теплопереноса: Учебно-методическое пособие. Томск: Том. ун-т, 2009. 114 с.

## Оглавление

### ГЛАВА 1. ЛИНЕЙНЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ .....6

#### ВВЕДЕНИЕ .....6

1.1. Численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений .....	6
1.1.1. Метод Эйлера .....	9
1.1.1.1. Краткая биография Леонарда Эйлера.....	12
1.1.2. Методы Рунге– Кутты .....	14
1.2. Постановка краевой задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка .....	15
1.3. Методы решения систем линейных дифференциальных уравнений .....	17
1.3.1. Метод линейной интерполяции (метод Хорд).....	17
1.3.2. Метод Ньютона .....	21
1.3.3. Метод суперпозиции.....	23
1.3.4. Метод прогонки .....	26
1.3.5. Метод прогонки III рода .....	29
1.3.5.1. Дифференциальные уравнения третьего порядка с одним условием в начальной точке.....	29
1.3.5.2. Дифференциальные уравнения третьего порядка с граничными условиями, заданными в трех точках .....	30
1.4. РЕШЕНИЕ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ (СЕТОК) .....	32
1.5. НЕЛИНЕЙНЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ.....	35
1.5.1. Метод квазилинеаризации.....	35
1.5.2. Метод Ньютона .....	36
1.5.3. Примеры.....	38
1.5.3.1. Нестационарное течение газа в пористой среде .....	38
1.5.3.2. Задача о брахистохроне .....	40
1.5.3.3. Задача Блазиуса .....	43

### ГЛАВА 2. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ТЕПЛОПЕРЕНОСА.....49

#### ВВЕДЕНИЕ .....49

2.1. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ.....	49
2.1.1. Уравнение теплопроводности .....	49
2.1.2. Начальные и граничные условия .....	54

для уравнения теплопроводности .....	54
2.1.3. Постановка задачи о теплопередаче слоя вещества.....	57
2.2. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ .....	60
ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ.....	60
2.2.1. Идея метода численного решения.....	60
задач теплопроводности .....	60
2.2.2. Понятие аппроксимации .....	63
2.2.3. Понятие устойчивости разностной схемы .....	66
2.2.4. Исследование устойчивости разностных схем .....	69
2.2.5. Аппроксимации дифференциальных операторов.....	70
2.2.6. Явная разностная схема для уравнения	
теплопроводности с постоянными коэффициентами .....	72
2.2.7. Неявная разностная схема для уравнения	
теплопроводности с постоянными коэффициентами .....	72
2.2.8. Схема с «весами» для уравнения теплопроводности .....	73
с постоянными коэффициентами.....	73
2.2.9. Явная разностная схема для уравнения	
теплопроводности с переменным коэффициентом	
теплопроводности.....	74
2.2.10. Неявная разностная схема для уравнения	
теплопроводности с переменным коэффициентом	
теплопроводности.....	75
2.2.11. Аппроксимация граничных условий .....	76
2.2.12. Алгоритм решения задачи теплопроводности .....	77
с использованием явной схемы.....	77
2.2.13. Алгоритм решения задачи теплопроводности .....	78
с использованием неявной схемы .....	78
2.2.14. Аппроксимация правых частей.....	80
уравнения теплопроводности .....	80
2.2.15. Особенности решения задач в цилиндрических .....	82
и сферических координатах.....	82
2.2.16. Способы задания неравномерной сетки .....	83
2.2.17. Метод прямых для решения.....	85
уравнения теплопроводности.....	85
2.2.18. Пример численного решения задачи .....	86
о теплопроводности в стержне конечной длины.....	86
2.3. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ МНОГОМЕРНЫХ ЗАДАЧ	
ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ.....	92
2.3.1. Метод покоординатного расщепления.....	94
2.3.2. Метод продольно-поперечной прогонки .....	95
2.3.2. Разностные схемы для трехмерных уравнений .....	96
теплопроводности.....	96

2.4. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ.....	97
КОНДУКТИВНО-КОНВЕКТИВНОГО ТЕПЛОПЕРЕНОСА.....	97
2.4.1. Явная разностная схема для уравнения.....	98
кондуктивно-конвективного теплопереноса.....	98
2.4.2. Неявная разностная схема для уравнения.....	100
кондуктивно-конвективного теплопереноса.....	100
2.4.3. Построение схемы второго порядка точности для	
уравнения кондуктивно-конвективного теплопереноса.....	101
Преобразование А.А. Самарского.....	101
2.5. «ПРОПИСНЫЕ ИСТИНЫ» НАЧИНАЮЩЕГО.....	104
ВЫЧИСЛИТЕЛЯ.....	104
Контрольные вопросы к Главе 1.....	108
Контрольные вопросы к Главе 2.....	108
Индивидуальные задания к Главе 1.....	109
Индивидуальные задания к Главе 2.....	111
ЛИТЕРАТУРА.....	113
ОСНОВНАЯ.....	113
ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ.....	114

# **Глава 1. ЛИНЕЙНЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ**

## **Введение**

Первая глава посвящена решению двухточечных задач, которые встречаются во всех областях науки и техники. Для таких задач граничные условия задаются в двух точках, а дифференциальные уравнения часто нелинейны, так что получить аналитическое решение невозможно и поэтому для получения решения необходимо использовать численные методы.

Численные методы решения таких задач делятся на два типа – итерационные и неитерационные. Для линейных задач решение можно получить без использования итераций при решении нелинейных задач без итерационных методов не обойтись. Однако следует отметить, что существует несколько способов, позволяющих исключить итерации, в результате чего существенно сокращается время расчета. В данной главе изложены как итерационные методы – метод Эйлера, метод линейной интерполяции, метод конечных разностей, так и безитерационные методы это метод прогонки, суперпозиций. Каждый метод сначала излагается в теоретическом аспекте, а затем приводятся примеры. В этих примерах четко выделены основные шаги вычислительных алгоритмов, а результаты представлены в виде графиков или таблиц.

## **1.1. Численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений**

Математическое моделирование задач механики, физики и других отраслей науки и техники сводятся к дифференциальным уравнениям. В связи с этим решение дифференциальных уравнений является одной из важнейших математических задач. В вычислительной математике изучаются численные методы решения дифференциальных уравнений, которые особенно эффективны в сочетании с использованием вычислительной техники. Прежде чем обсуждать методы решения дифференциальных уравнений, напомним некоторые сведения из курса дифферен-

циальных уравнений [1], и в особенности те, которые понадобятся при дальнейшем изложении.

Дифференциальные уравнения делятся на две существенно различные категории в зависимости от числа переменных: обыкновенные дифференциальные уравнения, содержащие одну независимую переменную, и уравнения с частными производными, содержащие несколько независимых переменных. Данный раздел посвящен методам решения обыкновенных дифференциальных уравнений. Обыкновенными дифференциальными уравнениями называются такие уравнения, которые содержат одну или несколько производных от искомой функции  $y = y(x)$ . Их можно записать в виде

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0, \quad (1.1.1)$$

где  $x$  – независимая переменная.

Наивысший порядок  $n$  входящей в уравнение (1.1.1) производной называется порядком дифференциального уравнения. В частности, запишем уравнения первого и второго порядков:

$$F(x, y, y') = 0, \quad F(x, y, y', y'') = 0.$$

Линейным дифференциальным уравнением называется уравнение, линейное относительно искомой функции и ее производных. Например,  $y' - x^2 y = \sin x$  – линейное уравнение первого порядка.

Решением дифференциального уравнения (1.1.1) называется всякая  $n$  раз дифференцируемая функция  $y = \varphi(x)$ , которая после ее подстановки в уравнение превращает его в тождество.

Общее решение обыкновенного дифференциального уравнения  $n$ -го порядка (1.1.1) содержит  $n$  произвольных постоянных  $C_1, C_2, \dots, C_n$ :

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n), \quad (1.1.2)$$

где (1.1.2) является решением уравнения (1.1.1) при любых значениях  $C_1, C_2, \dots, C_n$ , а любое решение уравнения (1.1.1) можно представить в виде (1.1.2) при некоторых  $C_1, C_2, \dots, C_n$ .

Частное решение дифференциального уравнения получается из общего, если произвольным постоянным придать определенные значения. Для уравнения первого порядка общее решение зависит от одной произвольной постоянной:

$$y = \varphi(x, C). \quad (1.1.3)$$

Если постоянная принимает определенное значение  $C = C_0$ , то получается частное решение

$$y = \varphi(x, C_0).$$

Для выделения частного решения из общего нужно задавать столько дополнительных условий, сколько произвольных постоянных в общем решении, т. е. каков порядок уравнения. Следовательно, для уравнения второго порядка нужно задать два дополнительных условия, благодаря которым можно найти значения двух произвольных постоянных. В зависимости от способа задания дополнительных условий для получения частного решения дифференциального уравнения существуют два различных типа задач: задача Коши<sup>1</sup> и краевая задача. В качестве дополнительных условий могут задаваться значения искомой функции и ее производных при некоторых значениях независимой переменной, т. е. в некоторых точках. Если эти условия задаются в одной точке, то такая задача называется задачей Коши. Дополнительные условия в задаче Коши называются начальными условиями, а точка  $x = x_0$ , в которой они задаются, – начальной точкой.

Для уравнения первого порядка дополнительное условие одно, поэтому в этом случае может быть сформулирована только задача Коши.

---

<sup>1</sup> **Коши Огюстен Луи** (Cauchy Augustin Louis), род. 21.08.1789, Париж – ум. 23.05.1857, Со. Французский математик, иностранный почётный член Петербургской АН (с 14.12.1831), чл. Парижской АН (1816). Окончил Политехническую школу (1807) и Школу мостов и дорог (1810) в Париже. В 1810 – 1813 работал инженером в Шербуре. В 1816 – 1830 преподавал в Политехнической школе и в Коллеж де Франс, с 1848 – в Парижском университете и в Коллеж де Франс. Труды Коши относятся к различным областям математики (преимущественно к математическому анализу) и математической физики. Его курсы анализа («Курс анализа», 1821, «Резюме лекций по исчислению бесконечно малых», 1823, «Лекции по приложениям анализа к геометрии», т. 1–2, 1826–28), основанные на систематическом использовании понятия предела, послужили образцом для большинства курсов позднейшего времени. В них он дал определение понятия непрерывности функции, чёткое построение теории сходящихся рядов (признак Коши, критерий Коши), определение интеграла как предела сумм и др. Коши систематически развивал основы теории аналитических функций комплексного переменного (уравнения Коши – Римана); дал выражение аналитической функции в виде т.н. интеграла Коши, разложение функции в степенной ряд; разработал теорию вычетов. В области теории дифференциальных уравнений Коши принадлежат: постановка т.н. задачи Коши, основные теоремы существования решений и метод интегрирования уравнений с частными производными 1-го порядка. В работах по теории упругости он рассматривал тело как сплошную среду и оперировал напряжением и деформацией, относимой к каждой точке. В работах по оптике Коши дал математическую разработку теории Френеля и теории дисперсии. Коши принадлежат также исследования по теории чисел, алгебре, геометрии.



Если же для уравнения порядка  $n > 1$  дополнительные условия задаются в более чем одной точке, т. е. при разных значениях независимой переменной, то такая задача называется краевой. Сами дополнительные условия называются при этом граничными (или краевыми) условиями. На практике обычно граничные условия задаются в двух точках  $x = a$  и  $x = b$ , являющихся границами отрезка, на котором рассматривается дифференциальное уравнение.

Методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений можно разбить на следующие группы: графические, аналитические, приближенные и численные.

Здесь мы будем рассматривать численные методы решения дифференциальных уравнений, которые в настоящее время являются основным инструментом при исследовании научно-технических задач, описываемых дифференциальными уравнениями.

### 1.1.1. Метод Эйлера

Простейшим численным методом решения задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения является метод Эйлера. Рассмотрим уравнение

$$y' = f(x, y) \quad (1.1.4)$$

в окрестностях узлов  $x = x_i$  ( $i = 0, 1, \dots$ ) и заменим в левой части производную  $y'$  правой разностью. При этом значения функции  $y$  в узлах  $x_i$  заменим значениями сеточной функций  $y(x_i) = y_i$ :

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} = f(x_i, y_i). \quad (1.1.5)$$

Полученная аппроксимация дифференциального уравнения (1.1.4) имеет первый порядок, поскольку при замене (1.1.4) на (1.1.5) допускается погрешность  $O(h_i)$ .

Будем считать для простоты узлы равноотстоящими, т. е.  $h_i = x_{i+1} - x_i = h = \text{const}$  ( $i = 0, 1, \dots$ ). Тогда из равенства (1.1.5) получаем

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i), \quad i = 0, 1, \dots \quad (1.1.6)$$

Заметим, что из уравнения (1.1.5) при  $h \rightarrow 0$  следует

$$y'(x_i) = f(x_i, y(x_i)) = f(x_i, y_i).$$

Поэтому (1.1.6) представляет собой приближенное нахождение значения функции  $y$  в точке  $x_{i+1}$  при помощи разложения в ряд Тейлора<sup>2</sup> с отбрасыванием членов второго и более высоких порядков. Другими словами, приращение функции полагается равным ее дифференциалу.

Полагая  $i = 0$ , с помощью соотношения (1.1.6) находим значение сечной функции  $y$  при  $x = x_1$ ,  $y_1$ :

$$y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0).$$

Требуемое здесь значение  $y_0$  задано начальным условием  $y(x_0) = y_0$ .

---

<sup>2</sup> Тейлор Брук (Taylor 1685 – 1731). Брук Тейлор родился 18 августа 1685 г. в деревне Эдмонтон в графстве Мидлсекс, в восьми милях от Лондона. Его отец был шталмейстером. Мальчик получил прекрасное воспитание, общее, а также художественное и музыкальное. Отец Тейлора, суровый пуританин, часто был недоволен поведением сына, недостаточно, по его мнению, соблюдавшего требования религии. Однако стоило юному музыканту начать играть, как досада отца таяла и мир восстанавливался. В 1701 г., когда Тейлору исполнилось 15 лет, он поступил в Кембриджский университет, в колледж Сент-Джон. Как раз в это время Ньютон окончательно расстался с Кембриджем, но, конечно, оставался кумиром молодых математиков. К ним присоединился с самого своего появления в Кембридже и молодой Брук Тейлор. К 1712 г. в его активе числятся уже два мемуара: "О центре колебаний" и "О подъеме воды между двумя плоскостями". Статьи Тейлора были признаны настолько ценными, что в 1712 г. его избрали членом Королевского общества. В 1714 г. Тейлор представил Обществу рукопись своей книги "Метода приращений прямая и обратная". В 1716 г. Тейлор предпринял поездку в Париж. Внимание со стороны ученых, знаки уважения, интересные знакомства в Париже – все это произвело самое отрадное впечатление на Тейлора. Но роковая "болезнь века" – переход от естественных наук к теологии и мистике завладела и Тейлором. В 1718 г. он уходит с поста секретаря Королевского общества, чтобы освободить время для философской работы. Он возвращается к увлечениям молодости – занимается музыкой и живописью. В 1721 г. Тейлор женился, что вызвало разрыв с отцом. Счастье, купленное такой дорогой ценой, оказалось непрочным. В 1723 г. Тейлор теряет жену и ребенка. В 1725 г. он снова женится – уже при полном одобрении отца. Но счастье и на этот раз не пришло к Тейлору: в 1730 г. жена умерла от родов. Правда осталась девочка, но Тейлор был неутешен в своем горе. Его здоровье резко ухудшалось и больше не восстанавливалось. 29 декабря 1731 г. он скончался и был погребен в Лондоне. Тейлор исследовал свойства функций. В 1712 г. нашел, в 1715 г. опубликовал общую формулу разложения функций в степенной ряд, которая носит теперь его имя. Тейлор положил начало математическому изучению задачи о колебании струны, разрабатывал теорию конечных разностей.

Аналогично могут быть найдены значения сеточной функции в других узлах:

$$\begin{aligned} y_2 &= y_1 + hf(x_1, y_1), \\ &\dots\dots\dots \\ y_n &= y_{n-1} + hf(x_{n-1}, y_{n-1}), \\ &\dots\dots\dots \end{aligned} \tag{1.1.7}$$

Построенный алгоритм называется методом Эйлера. Разностная схема этого метода представлена соотношениями (1.1.6), (1.1.7). Они имеют вид рекуррентных формул, с помощью которых значение сеточной функции  $y_{i+1}$  в любом узле  $x_{i+1}$  вычисляется по ее значению  $y_i$  в предыдущем узле  $x_i$ . В связи с этим метод Эйлера относится к одношаговым методам.

Рассмотрим подробнее вопрос о погрешности метода Эйлера [2]. Погрешность  $\delta_i$  в точке  $x_i$  равна разности между точным значением искомой функции  $y(x_i)$  и значением сеточной функции  $y_i$ :  $\delta_i = y(x_i) - y_i$ . Выясним, чему будет равна погрешность при вычислении  $y_{i+1}$ . Для этого подставим  $\delta_i = y(x_i) - y_i$  и  $\delta_{i+1} = y(x_{i+1}) - y_{i+1}$  в (1.1.6). Имеем

$$y_{i+1} - \delta_{i+1} = y(x_i) - \delta_i + hf(x_i, y(x_i) - \delta_i). \tag{1.1.8}$$

Разложим функцию  $f$  в ряд в окрестности точки  $(x_i, y(x_i))$ :

$$\begin{aligned} f(x_i, y(x_i) - \delta_i) &= f(x_i, y(x_i)) - \frac{\partial f}{\partial y} \delta_i + O(\delta_i^2) = \\ &= f(x_i, y(x_i)) + O(\delta_i). \end{aligned}$$

Используя полученное разложение, выразим  $\delta_{i+1}$  из (1.1.8):

$$\delta_{i+1} = \delta_i + y(x_{i+1}) - y(x_i) - hf(x_i, y(x_i)) + hO(\delta_i).$$

Учитывая, что  $y(x_{i+1}) = y(x_i) + hf(x_i, y(x_i)) + O(h^2)$ , получаем

$$\delta_{i+1} = \delta_i + O(h^2) + hO(\delta_i). \quad (1.1.9)$$

Таким образом, погрешность  $\delta_{i+1}$  отличается от погрешности  $\delta_i$  на два слагаемых:  $O(h^2)$  есть следствие погрешности аппроксимации (1.1.5), а  $hO(\delta_i)$  есть следствие неточности значения  $y_i$ .

При нахождении  $y_1$  начальное значение  $y_0$  задается, как правило, точно:  $\delta_0 = 0$ . Отсюда

$$\delta_1 = O(h^2), \delta_2 = \delta_1 + O(h^2) + hO(\delta_1) = \delta_1 + O(h^2) = O(h^2), \dots$$

Мы видим, что последнее слагаемое в (1.1.9) можно отбросить:

$$\delta_{i+1} = \delta_i + O(h^2),$$

т. е. погрешность на каждом шаге увеличивается на величину  $O(h^2)$ .

При нахождении решения в точке  $x_n$ , отстоящей на конечном расстоянии  $L$  от точки  $x_0$ , погрешность состоит из  $n$  слагаемых  $O(h^2)$ . Если учесть, что  $h = L/n$ , то для погрешности  $\delta_n$  получаем окончательное выражение:

$$\delta_n = nO(h^2) = \frac{L}{h}O(h^2) = O(h). \quad (1.1.10)$$

Таким образом, мы показали, что метод Эйлера имеет первый порядок точности.

#### 1.1.1.1. Краткая биография Леонарда Эйлера

**ЭЙЛЕР, ЛЕОНАРД** (Euler, Leonhard) (1707–1783). Идеальный математик XVIII века – так часто называют Эйлера. Эйлеру повезло: он родился в маленькой тихой Швейцарии, куда из всей Европы приезжали мастера и ученые, не желавшие тратить дорогое рабочее время на гражданские смуты или религиозные распри. Так переселилась в Базель семья Бернулли: уникальное созвездие научных талантов. По воле случая Эйлер попал в эту компанию и вскоре сделался достойным членом базельского "питомника гениев". Но когда ученые подросли, выяснилось, что в Швейцарии не хватит места. Зато в далекой России, по замыслу Петра I и по проекту Лейбница, была учреждена в 1725 году Петербургская Академия Наук. Русских ученых не хватало, и тройка дру-

зей отправилась туда. Чем только не пришлось заниматься Эйлеру на новом месте! Он обрабатывал данные всероссийской переписи населения. Эту огромную работу Эйлер вел в одиночку, быстро проделывая все вычисления в уме. Он расшифровывал дипломатические депеши, перехваченные русской контрразведкой. Оказалось, что эту работу математики выполняют быстрее и надежнее прочих специалистов. Он обучал молодых моряков высшей математике и астрономии, а также основам кораблестроения и управления парусным судном в штиль или в бурю. И еще составлял таблицы для артиллерийской стрельбы и таблицы движения Луны. Только гений мог, выполняя всю эту работу, не забыть о большой науке. За 15 лет своего первого пребывания в России он успел написать первый в мире учебник теоретической механики, а также курс математической навигации и другие труды. Писал Эйлер легко и быстро, простым и понятным языком. Математика поглощала все его время и силы. В 26 лет Эйлер был избран российским академиком, но через 8 лет он переехал из Петербурга в Берлин. Эйлер уже почувствовал себя одним из сильнейших математиков Европы - и вдруг заметил, что ему не с кем на равных поговорить о своей науке. Эйлер решил переехать туда, где накал ученых дискуссий был повыше. Он выбрал Берлин, где король Фридрих 2 Прусский решил создать научный центр не слабее парижского. Эйлер провел в Берлине четверть века, и считал эти годы лучшими в своей жизни. В Берлине Эйлер занимался всей математикой сразу. Например, захотелось ему перенести все методы математического анализа на функции, зависящие от комплексных чисел – и создал он теорию функций комплексного переменного. Попутно Эйлер выяснил, что показательная функция и синусоида суть две стороны одной медали. Аналогично было с Большой Теоремой Ферма. Услышав о ней, Эйлер решил сам придумать утраченное доказательство - и вскоре обнаружил "метод спуска", найденный Ферма веком раньше. В геометрии Эйлер также оставил значительный след. Например, теорема о связи между числами вершин, ребер и граней выпуклого многогранника. В Берлине "король математиков" Леонард Эйлер работал с 1741 по 1766 год; потом он покинул Берлин и вернулся в Россию. Надвигалась старость, выросла огромная семья, а новая российская царица Екатерина 2 предложила Эйлеру гораздо лучшие условия жизни, чем предоставлял своим академиком Фридрих 2. Переезд Эйлера в Петербург мало что изменил для математиков Европы. Великое светило лишь сместилось на восток, не исчезая с горизонта. Удивительно другое: слава Эйлера не закатилась и после того, как ученого поразила слепота. Неукротимый старец продолжал размышлять о математике и диктовать очередные

статьи или книги до самой смерти. Она настигла его на 77 году жизни и на 16 году слепоты... В 1770-е годы вокруг Эйлера выросла Петербургская математическая школа, более чем наполовину состоявшая из русских ученых. Тогда же завершилась публикация главной его книги – "Основ дифференциального и интегрального исчисления", по которой учились все европейские математики с 1755 по 1830 год. Она выгодно отличается от "Начал" Евклида и от "Принципов" Ньютона. Возведя стройное здание математического анализа от самого фундамента, Эйлер не убрал те леса и лестницы, по которым он сам карабкался к своим открытиям. Многие красивые догадки и начальные идеи доказательств сохранены в тексте, несмотря на содержащиеся в них ошибки – в поучение всем наследникам эйлеровой мысли.

### 1.1.2. Методы Рунге<sup>3</sup> – Кутты<sup>4</sup>

Существуют и другие явные одношаговые методы. Так, рассмотренный метод Эйлера (1.1.5) является частным случаем методов первого и второго порядков, относящихся к классу методов Рунге–Кутты. Эти методы используют для вычисления значения  $y_{i+1}$  ( $i = 0, 1, \dots$ ) значение  $y_i$ , а также значения функции  $f(x, y)$  при некоторых специальным образом выбираемых значениях  $x \in [x_i, x_{i+1}]$  и  $y(x)$ . На их основе могут быть построены разностные схемы разного порядка точности.

Широко распространен метод Рунге–Кутты четвертого порядка. Алгоритм метода записывается в виде

---

<sup>3</sup> Рунге Карл Давид Тольме (30.08.1856 – 03.01.1927) – немецкий физик и математик. Учился в Мюнхенском (1876 – 1877 гг) и Берлинском (1878 – 1880) университетах. Работал в Берлине, Ганновере, Гёттингене. Основные математические труды относятся к численным методам решения дифференциальных уравнений.

<sup>4</sup> Кутта Мартин Вильгельм (03.11.1867 – 25.12.1944) – немецкий физик и математик. Работал в Высшей технической школе в Штутгарде. В математике развил (1901) метод К.Рунге (метод Рунге - Кутты) численного решения задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

$$\begin{aligned}
y_{i+1} &= y_i + \frac{h}{6}(k_0 + 2k_1 + 2k_2 + k_3), \quad i = 0, 1, \dots, \\
k_0 &= f(x_i, y_i), \quad k_1 = f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{hk_0}{2}\right), \\
k_2 &= f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{hk_1}{2}\right), \quad k_3 = f(x_i + h, y_i + hk_2).
\end{aligned} \tag{1.1.11}$$

Данный метод Рунге–Кутты требует на каждом шаге четырехкратного вычисления правой части  $f(x, y)$  уравнения (1.1.4). Суммарная погрешность этого метода есть величина  $O(h^4)$ .

Метод Рунге–Кутты (1.1.11) требует большего объема вычислений по сравнению с методом Эйлера, однако это окупается повышенной точностью, что дает возможность проводить счет с большим шагом. Другими словами, для получения результатов с одинаковой точностью в методе Эйлера потребуется значительно меньший шаг, чем в методе Рунге–Кутты (1.1.11).

## 1.2. Постановка краевой задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка

На практике приходится часто решать задачи, когда условия задаются при двух значениях независимой переменной (на концах рассматриваемого отрезка). Такие задачи называются краевыми, получаются при решении уравнений высших порядков или систем уравнений [3].

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение второго порядка

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \rho(x) \frac{dy}{dx} + q(x)y + f(x) = 0, \quad 0 < x < l. \tag{1.2.1}$$

Краевые условия в общей форме запишем в виде:

$$-\alpha_1 \frac{dy(0)}{dx} + \beta_1 y(0) = \gamma_1, \tag{1.2.2}$$

$$\alpha_2 \frac{dy(l)}{dx} + \beta_2 y(l) = \gamma_2. \tag{1.2.3}$$

Здесь  $x$  – независимая переменная, изменяющаяся от  $x=0$  до  $x=l$ ;  $y=y(x)$  – искомая функция;  $\rho(x)$ ,  $q(x)$  и  $f(x)$  – заданные функции, которые чаще всего на промежутке  $x \in [0, l]$  являются непрерывными;  $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \alpha_2, \beta_2, \gamma_2$  – заданные числа. Требуется найти такое решение  $y(x)$  уравнения (1.2.1), которое при стремлении  $x$  к точке  $x=0$  справа удовлетворяло бы граничному условию (1.2.2), а при стремлении  $x$  к правой границе  $x=l$  слева (изнутри области) – удовлетворяло бы правому граничному условию (1.2.3).

Существуют различные частные случаи граничных условий (1.2.2) – (1.2.3). Так, например, если  $\alpha_1 = 0$ ,  $\beta_1 = 1$ , то говорят, что задано граничное условие первого рода:  $y(0) = \gamma_1$ ; если, например,  $\alpha_2 = 1$ ,  $\beta_2 = 0$ , то говорят, что на границе  $x = l$  задано граничное условие второго рода  $y'(l) = \gamma_2$ . Если же, например  $\alpha_1 > 0$  и  $\beta_1 > 0$ , то говорят, что на границе  $x = 0$  задано граничное условие третьего рода. В этом случае при корректной постановке задачи коэффициенты при  $y$  и  $y'$  в левом граничном условии должны быть различных знаков, а в правом – одного и того же знака, что и отражено в записи граничных условий (1.2.2) – (1.2.3).

Численные методы решения краевых задач (1.2.1) – (1.2.3) делятся на две группы. Отнесем условно к первой группе такие методы, когда решение краевой задачи сводится к решению нескольких (двух) задач Коши. Известно, что решение задач Коши можно реализовать с любой заданной точностью различными методами.

Ко второй группе методов решения краевых задач относится метод конечных разностей. При этом дифференциальные операторы заменяются разностными (чаще всего, на равномерной сетке), и задача сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений. При этом точность результатов оценивается путем двойного расчета при различных шагах сетки (часто при  $h$  и  $\frac{h}{2}$ ).



### 1.3. Методы решения систем линейных дифференциальных уравнений

#### 1.3.1. Метод линейной интерполяции (метод Хорд)

Рассмотрим смешанную краевую задачу для уравнения

$$y'' + p(x)y' + q(x)y + f(x) = 0, \quad 0 < x < l. \quad (1.3.1)$$

Граничные условия возьмем в виде

$$y(0) = a; \quad y'(l) + \alpha y(l) = b. \quad (1.3.2)$$

Здесь  $a, b, \alpha > 0$  – заданные числа.

Решать численно краевые задачи можно как слева направо (от  $x = 0$  к  $x = l$ ), так и наоборот  $x = l$  до  $x = 0$ .

Обсудим сначала порядок расчета слева направо. На левой границе в задаче задано значение функции  $y(0) = a$ , но не задано условие  $y'(0) = \lambda$  ( $\lambda$  – неизвестная величина). Значение «недостающего» начального условия  $\lambda$  нужно найти так, чтобы выполнялось правое граничное условие. Оказывается, что это можно сделать за две попытки. Выберем любые два значения  $\lambda = \lambda_1$  и  $\lambda = \lambda_2$  и решим две задачи Коши для уравнения (1.3.1) с граничными условиями:

$$\begin{aligned} y_1(0) &= a, \quad y_1'(0) = \lambda_1; \\ y_2(0) &= a, \quad y_2'(0) = \lambda_2. \end{aligned} \quad (1.3.3)$$

Полученные решения, обозначим как  $y = y_1(x)$  и  $y = y_2(x)$ . Посчитаем, чему оказались равны левые части в правом граничном условии (1.3.2). Пусть

$$\begin{aligned} y_1'(l) + \alpha y_1(l) &= b_1, \\ y_2'(l) + \alpha y_2(l) &= b_2. \end{aligned}$$

Здесь значения  $b_1$  и  $b_2$  получены в результате численного решения двух задач Коши (1.3.1), (1.3.3). Теперь искомое значение недостающего

начального условия  $y'(0) = \lambda$  можно найти с помощью линейной интерполяции:

$$\frac{\lambda - \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} = \frac{b - b_1}{b_2 - b_1}, \text{ т.е. } \lambda = \lambda_1 + (\lambda_2 - \lambda_1) \frac{b - b_1}{b_2 - b_1}. \quad (1.3.4)$$

Полученное значение  $\lambda$  и будет являться недостающим начальным условием. Объясняется это линейностью задачи. Как известно, дифференциальное уравнение (1.3.1) имеет общее решение

$$y(x) = c_1 u_1(x) + c_2 u_2(x) + y_n(x),$$

где  $u_1(x)$  и  $u_2(x)$  – линейно-независимые решения однородного уравнения (при  $f(x) \equiv 0$ ), а  $y_n(x)$  – какое-либо решение неоднородного уравнения (частное решение неоднородного уравнения). Удовлетворяя левому граничному условию (1.3.2), в общем решении останется одна неизвестная постоянная, которая входит в выражение для  $y(x)$  линейным образом. Проведя в плоскости  $(\lambda, b)$  прямую, проходящую через две точки  $(\lambda_1, b_1)$  и  $(\lambda_2, b_2)$  при заданном значении  $b$  мы однозначно найдем точное значение  $\lambda$ .

Теперь таблицу значений функции  $y(x)$  (и ее производной) можно найти интерполяцией

$$y(x) = y_1(x) + [y_2(x) - y_1(x)] \cdot \frac{\lambda - \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}.$$

Однако на практике, жертвуя машинным временем, обычно проводят третий расчет задачи Коши с условиями

$$y(0) = a, \quad y'(0) = \lambda.$$

Обсудим, как можно было бы провести расчет справа налево, отправляясь от точки  $x = l$  к точке  $x = 0$ . Выберем начальные условия:

$$y(l) = \lambda, \quad y'(l) = b - \alpha \lambda.$$

Решая две задачи Коши для  $\lambda = \lambda_1$  и  $\lambda = \lambda_2$ , при  $x = 0$  получим некоторые значения  $y_1(0) = a_1$ ,  $y_2(0) = a_2$ . Недостающее начальное условие получится опять с помощью линейной интерполяции

$$\lambda = \lambda_1 + (\lambda_2 - \lambda_1) \cdot \frac{a - a_1}{a_2 - a_1}.$$

Замечание. На практике обычно выбирают простейшие значения  $\lambda$ , например  $\lambda_1 = 1$  и  $\lambda_2 = 0$ . При этом, если уравнение (1.3.1) является однородным, т.е.  $f(x) \equiv 0$ , и граничное условие так же однородное – в (1.3.2)  $a = 0$ , то решение  $y_2(x) \equiv 0$ ,  $b_2 = 0$ . Тогда второй расчет (при  $\lambda_2 = 0$ ) нет необходимости производить и формула (1.3.4) даст ответ в виде

$$\lambda = \lambda_1 \frac{b}{b_1}.$$

Поэтому, если предложено решить однородное уравнение, то следует посмотреть, есть ли однородное граничное условие и если оно есть, то начинать расчет следует от этой границы! Эта рекомендация остается в силе и для других методов решения краевых задач.

Пример. Решить краевую задачу:

$$y'' + (1 - 4x)y' + 8y = 5, \quad 0 < x < 1;$$

$$y'(0) - y(0) = 0; \quad y(1) = 0.$$

Будем проводить расчет слева направо (от  $x = 0$  до  $x = 1$ ). Выберем начальные условия, удовлетворяющие левому граничному условию:

$$y_1(0) = \lambda_1; \quad y_1'(0) = \lambda_1;$$

$$y_2(0) = \lambda_2; \quad y_2'(0) = \lambda_2.$$

Чтобы показать универсальность метода, в расчете были выбраны, наверное, совсем неподходящие значения  $\lambda_1 = 20$ ,  $\lambda_2 = 10$ .

Т а б л и ц а 1.1

$x$	$y_1$	$y_1'$	$y_2$	$y_2'$	$y$	$y'$
0,00	20,000	20,000	10,000	10,000	1,000	1,000
0,10	21,140	2,961	10,582	1,718	1,080	0,600
0,20	20,622	-13,198	10,358	-6,146	1,120	0,200
0,30	18,529	-28,511	9,366	-13,611	1,120	-0,200
0,40	14,947	-42,979	7,649	-20,674	1,080	-0,600
0,50	9,963	-56,567	5,245	-27,321	1,000	-1,000
0,60	3,666	-69,201	2,200	-33,516	0,880	-1,400
0,70	-3,842	-80,758	-1,441	-39,201	0,720	-1,800
0,80	-12,444	-91,051	-5,621	-44,287	0,520	-2,200
0,90	-22,000	-99,797	-10,274	-48,641	0,280	-2,600
1,00	-32,338	-106,573	-15,318	-52,061	0,000	-3,000

В таб. 1.1 приведены результаты расчета. В первом столбце выданы значения  $x$  с шагом  $h = 0,1$ . Затем в двух столбцах выданы значения  $y_1(x)$  и  $y_1'(x)$ , в следующих двух –  $y_2(x)$  и  $y_2'(x)$  и в двух последних столбцах – решение краевой задачи. В результате интерполяции по формуле (1.3.4) получено значение  $\lambda = 1$ .

Обсудим результаты. Заслуживает внимание последний столбец (для  $y'(x)$ ). Нетрудно заметить, что значение  $y'(x)$  от одной точки к соседней изменяются на постоянную величину – 0,4. Это означает, что функция  $y'(x)$  – линейная (многочлен первой степени). Значит, точное решение  $y(x)$  – многочлен второй степени и, следовательно, можно найти в аналитической форме точное решение задачи. Оно имеет вид  $y = ax^2 + bx + c$ . Коэффициенты  $a$ ,  $b$  и  $c$  можно найти подстановкой этого выражения  $y(x)$  в дифференциальное уравнение и в граничные условия. Рекомендуем проделать эти выкладки и получить точное решение.

Можно поступить и проще. Найдем по таблице  $y''$ .

$$y'' = \frac{y_1' - y_0'}{h} = \frac{0,6 - 1}{0,1} = -4.$$

Откуда  $y'(x) = -4x + 1$ ;  $y(x) = -2x^2 + x + 1$ . При интегрировании использовались начальные условия  $y'(0) = 1$ ,  $y(0) = 1$ .

Рекомендуем проверить, что найденное решение действительно удовлетворяет заданному уравнению, и граничным условиям. Вот так численный счет помог найти аналитическое решение задачи!

### 1.3.2. Метод Ньютона<sup>5</sup>

Рассмотрим краевую задачу, определяемую дифференциальным уравнением второго порядка

$$d^2y/dx^2 = f(x, y, dy/dx) \quad (1.3.5)$$

и граничными условиями

$$y(0) = 0, \quad y(l) = A. \quad (1.3.6 \text{ а, б})$$

Запишем уравнение (1.3.5) в виде системы двух дифференциальных уравнений первого порядка

---

<sup>5</sup> **Ньютон Исаак** (Newton Isaac), род. 04.01.1643, Вулсторп, ок. Грантема – ум. 31.03.1727, Кенсингтон. Английский физик и математик, создавший теоретические основы механики и астрономии, открывший закон всемирного тяготения, разработавший (наряду с Г. Лейбницем) дифференциальное и интегральное исчисление, изобретатель зеркального телескопа и автор важнейших экспериментальных работ по оптике. Ньютон родился в семье фермера; отец Ньютона умер незадолго до рождения сына. В 12 лет Ньютон начал учиться в Грантемской школе, в 1661 поступил в Тринити-колледж Кембриджского университета в качестве субсайзера (так назывались бедные студенты, выполнявшие для заработка обязанности слуг в колледже), где лекции по математике с весны 1664 читал И. Барроу. С весны 1665 по весну 1667, во время эпидемии чумы, находился в своей родной деревне Вулсторп, лишь ненадолго приезжая в Кембридж; эти годы были наиболее продуктивными в научном творчестве Ньютона. Здесь у Ньютона сложились в основном те идеи, которые привели его к созданию варианта анализа бесконечно малых, к изобретению зеркального телескопа (собственноручно изготовленного им в 1668), открытию закона всемирного тяготения, здесь он провёл опыты над разложением света. В 1668 Ньютоном была присвоена степень магистра, а в 1669 И. Барроу передал ему почётную люкасовскую физико-математическую кафедру, которую Ньютон занимал до 1701. В 1671 Ньютоном построен второй зеркальный телескоп – больших размеров и лучшего качества. Демонстрация телескопа произвела сильное впечатление на современников, и вскоре после этого Ньютоном был избран (в январе 1672) членом Лондонского королевского общества (в 1703 стал его президентом). В 1687 он опубликовал свой грандиозный труд «Математические начала натуральной философии» (кратко – «Начала»). В 1695 получил должность смотрителя Монетного двора (этому, очевидно, способствовало то, что Ньютоном изучались свойства металлов). Ньютоном было поручено руководство перечеканкой всей английской монеты. Ему удалось привести в порядок расстроенное монетное дело Англии, за что он получил в 1699 пожизненное высокооплачиваемое звание директора Монетного двора. В том же году Ньютоном избран иностранным членом Парижской АН. В 1705 за научные труды он возведён в дворянское достоинство. Похоронен Ньютоном в английском национальном пантеоне – Вестминстерском аббатстве.

$$\begin{cases} dy/dx = u, \\ du/dx = f(x, y, u). \end{cases} \quad (1.3.7)$$

Обозначим недостающее начальное значение производной через  $s$ :

$$dy(0)/dx = u(0) = s. \quad (1.3.8)$$

Задача заключается в том, чтобы найти такое значение  $s$ , при котором решение задачи Коши (1.3.7), (1.3.6 а), (1.3.8) удовлетворяет граничному условию (1.3.6 б) во второй точке. Иначе говоря, если решение задачи Коши обозначить через  $y(x, s)$  и  $u(x, s)$ , то требуется найти такое значение  $s$ , что

$$y(l, s) - A = \varphi(s) = 0. \quad (1.3.9)$$

В методе Ньютона итерационная формула для  $s$  задается в виде

$$s^{(n+1)} = s^{(n)} - \frac{\varphi(s^{(n)})}{d\varphi(s^{(n)})/ds},$$

или

$$s^{(n+1)} = s^{(n)} - \frac{y(l, s^{(n)}) - A}{\partial y(l, s^{(n)})/\partial s}. \quad (1.3.10)$$

Чтобы найти производную  $y$  по  $s$ , продифференцируем (1.3.7), (1.3.6а) и (1.3.8) по  $s$  и получим

$$dY/dx = U, \quad dU/dx = (\partial f/\partial y)Y + (\partial f/\partial u)U \quad (1.3.11)$$

и

$$Y(0) = 0, \quad U(0) = 1, \quad (1.3.12)$$

где

$$Y = \partial y/\partial s, \quad U = \partial u/\partial s. \quad (1.3.13)$$

Решение системы уравнений (1.3.7), удовлетворяющее граничным условиям (1.3.6 а, б), может быть получено следующими действиями.

1. Выбирается значение  $s$  для недостающего начального значения производной (1.3.8). Это приближенное значение  $s$  обозначается через  $s^{(l)}$ .
2. Численно интегрируется задача Коши (1.3.7), (1.3.6 а), (1.3.8) от  $x = 0$  до  $x = l$ .

3. Численно интегрируются уравнения (1.3.11) начальными условиями (1.3.12) от  $x = 0$  до  $x = l$ .
4. Значения  $y(l, s^{(1)})$  и  $Y(l, s^{(1)})$ , подставляются в формулу (1.3.10), что дает

$$s^{(2)} = s^{(1)} - [y(l, s^{(1)}) - A] / Y(l, s^{(1)}),$$

следующее приближение  $s^{(2)}$  для недостающего начального значения производной.

5. Шаги 2 – 4 повторяются до тех пор, пока величина  $s$  не будет найдена с заданной точностью.

### 1.3.3. Метод суперпозиции

Рассмотрим сначала простейшую первую краевую задачу для уравнения

$$y'' + p(x)y' + q(x)y + f(x) = 0, \quad a < x < b. \quad (1.3.14)$$

На концах промежутка заданы граничные условия

$$y(a) = \alpha, \quad (1.3.15)$$

$$y(b) = \beta. \quad (1.3.16)$$

Здесь  $p(x)$ ,  $q(x)$ ,  $f(x)$  – заданные функции на промежутке  $a < x < b$ ,  $a, b, \alpha, \beta$  – заданные числа. Сущность метода суперпозиции состоит в представлении общего решения уравнения (1.3.14) в виде суммы общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения. Удовлетворяя одному из граничных условий, например, левому (1.3.15), найдем связь между произвольными постоянными, входящими в общее решение однородного уравнения. Проведем реализацию метода следующим образом:

Будем искать решение краевой задачи (1.3.14) – (1.3.16) в виде

$$y(x) = cu(x) + v(x) \quad (1.3.17)$$

И потребуем, чтобы это выражение удовлетворяло уравнению (1.3.14) и граничному условию (1.3.15) при любом значении постоянной  $c$ . Подставляя (1.3.17) в (1.3.14), получим

$$c[u'' + pu' + qu] + v'' + pv' + qv = f.$$

Чтобы это равенство имело место при любом значении постоянной  $c$ , необходимо выражение в квадратных скобках приравнять нулю. В результате получаем два дифференциальных уравнения

$$\begin{aligned} u'' + p(x)u' + q(x)u &= 0, \\ v'' + p(x)v' + q(x)v &= f(x). \end{aligned} \quad (1.3.18)$$

Подстановка (1.3.17) в граничное условие (1.3.15) дает

$$cu(a) + v(a) = \alpha,$$

откуда имеем

$$u(a) = 0, \quad v(a) = \alpha. \quad (1.3.19)$$

Чтобы получить задачу Коши для системы (1.3.18), необходимо задать значения производных  $u'(a)$  и  $v'(a)$ . Эти значения можно задать любыми, но обычно выбирают простейшими. Так, уравнение для  $u(x)$  – однородное, первое граничное условие (1.3.19) – однородное, и поэтому, чтобы получить нетривиальное решение  $u(x)$ , берут условие

$$u'(a) = 1. \quad (1.3.20)$$

Наоборот, уравнение для  $v(x)$  – неоднородное, и нетривиальное решение  $v(x)$  получится даже при условии

$$v'(a) = 0. \quad (1.3.21)$$

Решая задачу Коши (1.3.18) – (1.3.21), найдем в конечной точке  $x = b$   $u(b)$  и  $v(b)$ . Теперь осталось удовлетворить правому граничному условию (1.3.16)  $cu(b) + v(b) = \beta$ , откуда определяется постоянная

$$c = \frac{\beta - v(b)}{u(b)}. \quad (1.3.22)$$

Окончательно, имея таблицу значений функций  $u(x)$  и  $v(x)$  и, зная постоянную  $c$  из (1.3.22), по формуле (1.3.17) можем пересчитать таблицу значений искомого решения  $y(x)$ .

Замечание 1. Заметим, что пересчет решения  $y(x)$  по формуле (1.3.17) не всегда является удобным, т.к. требует накопления больших массивов  $u(x)$  и  $v(x)$ , поэтому иногда, жертвуя машинным временем, заново рассчитывают задачу Коши для исходного уравнения (1.3.14), т.к. недостающее начальное условие для этого уравнения оказалось уже найденным  $y'(a) = cu'(a) + v'(a) = c \cdot 1 + 0 = c$ .



Замечание 2. Рассмотренный алгоритм остается в силе с небольшими изменениями и при других линейных граничных условиях. Например, если заданы граничные условия третьего и второго рода:

$$-y'(a) + hy(a) = \alpha; \quad y'(b) = \beta, \quad (1.3.23)$$

подстановка (1.3.17) в левое граничное (1.3.23) дает

$$c[-u'(a) + hu(a)] - v'(a) + hv(a) = \alpha$$

и можно выбрать

$$u(a) = 1; \quad u'(a) = h;$$

$$v(a) = 0; \quad v'(a) = -\alpha,$$

при этом

$$c = \frac{\beta - v'(b)}{u'(b)},$$

и

$$y(a) = c, \quad y'(a) = ch - \alpha.$$

Замечание 3. Расчет краевой задачи несколько упрощается, если исходное дифференциальное уравнение (1.3.14) является однородным ( $f(x) \equiv 0$ ) и одно из граничных условий также однородное. Например

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0,$$

$$y'(a) = \alpha; \quad y'(b) = 0.$$

В этом случае следует проводить расчет справа налево (от точки  $x = b$  к точке  $x = a$ ) и можно обойтись расчетом одного уравнения. В самом деле, ищем решение в виде  $y = cu$

$$u'' + pu' + qu = 0; \quad u'(b) = 0.$$

Выбирая, например, условие  $u(b) = 1$ , проводим расчет (с отрицательным шагом) до точки  $x = a$  и из левого граничного условия находим  $cu'(a) = \alpha$ , откуда

$$c = \frac{\alpha}{u'(a)} = y(b).$$

### 1.3.4. Метод прогонки

Суть метода прогонки заключается в следующем. Основываясь на форме граничного условия в начальной точке, выводится обыкновенное дифференциальное уравнение, порядок которого на единицу меньше порядка заданного дифференциального уравнения и коэффициенты которого включают неизвестные функции. Количество таких неизвестных функций равно порядку исходного уравнения. Если выведенное уравнение продифференцировать, то новое уравнение будет иметь тот же порядок, что и заданное. Приравняв коэффициенты этих двух уравнений, получаем систему дифференциальных уравнений первого порядка, интегрированием которой можно получить неизвестные коэффициенты. В частности, решения в конечной точке совместно с граничными условиями в этой точке составляют полный набор уравнений для нахождения всех граничных значений. Этот этап называется прямой прогонкой [2]. Зная полный набор граничных условий в конечной точке, исходное уравнение можно проинтегрировать как задачу Коши от начальной до конечной точки. Таким образом, удастся избежать итераций.

Рассмотрим граничную задачу, определяемую дифференциальным уравнением

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = p(x)y + q(x), \quad (1.3.24)$$

где  $p(x)$  и  $q(x)$  – непрерывные функции, и граничными условиями

$$\frac{dy(a)}{dx} = \alpha_{00}y(a) + \alpha_{10}, \quad (1.3.25)$$

$$\frac{dy(b)}{dx} = \beta_{00}y(b) + \beta_{10}, \quad (1.3.26)$$

где  $\alpha_{00}, \alpha_{10}, \beta_{00}, \beta_{10}$  – константы.

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение первого порядка

$$\frac{dy}{dx} = \alpha_0(x)y + \alpha_1(x), \quad (1.3.27)$$

и выберем  $\alpha_0(x)$  и  $\alpha_1(x)$  так, чтобы  $y(x)$  удовлетворяло уравнению (1.3.24). Продифференцировав (1.3.27) по  $x$ , получим

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \left( d\alpha_0/dx \right) y + d\alpha_1/dx + \alpha_0 dy/dx. \quad (1.3.28)$$

Заменив здесь  $dy/dx$  выражением, стоящим в правой части уравнения (1.3.27) получим

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \left( d\alpha_0/dx + \alpha_0^2 \right) y + d\alpha_1/dx + \alpha_0 \alpha_1. \quad (1.3.29)$$

Из сравнения (1.3.29) с (1.3.24) получаем следующие уравнения:

$$d\alpha_0(x)/dx + \alpha_0^2 = p(x), \quad (1.3.30)$$

$$d\alpha_1(x)/dx + \alpha_0(x)\alpha_1(x) = q(x). \quad (1.3.31)$$

В качестве первого шага проинтегрируем на отрезке  $a \leq x \leq b$  уравнения (1.3.30) и (1.3.31) как задачу Коши, приняв в качестве начальных значений

$$\alpha_0(a) = \alpha_{00}, \quad \alpha_1(a) = \alpha_{10},$$

получим значения  $\alpha_0(b)$  и  $\alpha_1(b)$ . Подставив найденные значения в (1.3.27), получим

$$dy(b)/dx = \alpha_0(b)y(b) + \alpha_1(b). \quad (1.3.32)$$

С другой стороны, граничное условие (1.3.26) при  $x = b$  дает

$$dy(b)/dx = \beta_{00}y(b) + \beta_{10}. \quad (1.3.33)$$

Так как теперь  $\alpha_0(b)$  и  $\alpha_1(b)$  – известные величины, уравнения (1.3.32) и (1.3.33) можно разрешить относительно  $y(b)$  и  $dy(b)/dx$  и получить

$$y(b) = [\beta_{10} - \alpha_1(b)] / [\alpha_0(b) - \beta_{00}], \quad (1.3.34)$$

$$dy(b)/dx = [\beta_{00}\alpha_1(b) - \beta_{10}\alpha_0(b)] / [\beta_{00} - \alpha_0(b)]. \quad (1.3.35)$$

Теперь задачу Коши, определяемую уравнением (1.3.24) и начальными условиями (1.3.34) и (1.3.35), можно проинтегрировать назад от  $x = b$ . Другая возможность заключается в том, чтобы проинтегрировать (1.3.27), используя (1.3.34) в качестве начального условия.

Пример: Рассмотрим решение следующей граничной задачи

$$d^2 y/dx^2 = -y + x \cos x, \quad (1.3.36)$$

$$dy(0)/dx = 3y(0) + 2, \quad dy(\pi/2)/dx = -5y(\pi/2) + 2.$$

Известно точное решение этой задачи

$$y = -0.73 \cos x - 0.441 \sin x + \left(1/4\right)(x^2 \sin x + x \cos x),$$

откуда

$$y(\pi/2) = 0,175 \quad \text{и} \quad dy(\pi/2)/dx = 1,122.$$

Теперь найдем эти граничные значения, решая задачу методом прогонки.

Сравнивая уравнения (1.3.36) и (1.3.24) получаем

$$p(x) = -1, \quad q(x) = x \cos x, \quad (1.3.37)$$

так, что уравнения (1.3.30) и (1.3.31) записываются в виде

$$\begin{aligned} d\alpha_0(x)/dx &= -1 - \alpha_0^2(x), \\ d\alpha_1(x)/dx &= x \cos x - \alpha_0(x) \alpha_1(x). \end{aligned} \quad (1.3.38)$$

Граничные условия таковы:

$$\alpha_0(0) = 3, \quad \alpha_1(0) = 2.$$

Уравнения (1.3.38) можно проинтегрировать от  $x = 0$  до  $x = \pi/2$ .

Так как

$$dy(x)/dx = \alpha_0(x)y(x) + \alpha_1(x),$$

мы имеем

$$dy(\pi/2)/dx = \alpha_0(\pi/2)y(\pi/2) + \alpha_1(\pi/2).$$

Учитывая, кроме того, граничное значение во второй точке

$$dy(\pi/2)/dx = -5y(\pi/2) + 2, \quad (1.1.39)$$

можно разрешить систему уравнений (1.3.38), (1.3.39) относительно

$y(\pi/2)$  и  $dy(\pi/2)/dx$ :

$$y(\pi/2) = \left[2 - \alpha_1(\pi/2)\right] / \left[5 + \alpha_0(\pi/2)\right] = 0,176, \quad (1.3.40)$$

$$dy(\pi/2)/dx = -5y(\pi/2) + 2 = 1,122, \quad (1.3.41)$$

что согласуется с точным решением.

### 1.3.5. Метод прогонки III рода

Метод, развитый в предыдущем разделе для дифференциальных уравнений второго порядка, будет теперь распространен на дифференциальные уравнения третьего порядка. В разделе 1.3.5.1 рассматриваются задачи с одним граничным условием в начальной точке и двумя в конечной. В разделе 1.3.5.2 рассматривается более сложный случай, когда граничные условия заданы в трех точках. В этом случае необходимо ввести две системы уравнений вместо одной [2].

#### 1.3.5.1. Дифференциальные уравнения третьего порядка с одним условием в начальной точке

Рассмотрим граничную задачу, описываемую уравнением

$$d^3y/dx^3 = P(x) dy/dx + Q(x)y + R(x), \quad (1.3.42)$$

и граничными условиями

$$d^2y(0)/dx^2 = \alpha_{00} dy(0)/dx + \alpha_{10}y(0) + \alpha_{20}, \quad (1.3.43)$$

$$d^2y(1)/dx^2 = \beta_{00} dy(1)/dx + \beta_{10}y(1) + \beta_{20}, \quad (1.3.44)$$

$$d^2y(1)/dx^2 = \gamma_{00} dy(1)/dx + \gamma_{10}y(1) + \gamma_{20}. \quad (1.3.45)$$

Так как уравнение (1.3.42) является уравнением третьего порядка, нужно ввести дифференциальное уравнение второго порядка

$$d^2y/dx^2 = \alpha_0(x) dy/dx + \alpha_1(x)y + \alpha_2(x). \quad (1.3.46)$$

Дифференцируя (1.3.46) и исключая  $d^2y/dx^2$  с помощью (1.3.46), получаем

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \left( \frac{d\alpha_0}{dx} + \alpha_0^2 + \alpha_1 \right) \frac{dy}{dx} + \left( \frac{d\alpha_1}{dx} + \alpha_0\alpha_1 \right) y + \alpha_0\alpha_2. \quad (1.3.47)$$

Действуя так же, как и в случае задачи второго порядка, выберем  $\alpha_0(x)$ ,  $\alpha_1(x)$  и  $\alpha_2(x)$  так, чтобы  $y(x)$  удовлетворяло уравнению (1.3.42). Для этого нужно, чтобы удовлетворялись следующие уравнения:

$$d\alpha_0/dx + \alpha_0 + \alpha_1 = P(x), \quad (1.3.48a)$$

$$d\alpha_1/dx + \alpha_0\alpha_1 = Q(x), \quad (1.3.48б)$$

$$d\alpha_2/dx + \alpha_0\alpha_2 = R(x), \quad (1.3.48в)$$

Проинтегрируем систему (1.3.48) как задачу Коши с начальными значениями

$$\alpha_0(0) = \alpha_{00}, \quad \alpha_1(0) = \alpha_{10}, \quad \alpha_2(0) = \alpha_{20} \quad (1.3.49)$$

на интервале от  $x = 0$  до  $x = 1$ . В частности, получим значения величин  $\alpha_0(1)$ ,  $\alpha_1(1)$  и  $\alpha_2(1)$ . Из (1.3.46) следует, что

$$d^2y(1)/dx^2 = \alpha_0(1)dy(1)/dx + \alpha_1(1)y(1) + \alpha_2(1). \quad (1.3.50)$$

Используя полученные выше значения в качестве начальных, можно интегрированием назад найти решение уравнения (1.3.42). Этим завершается этап обратной прогонки.

### 1.3.5.2. Дифференциальные уравнения третьего порядка с граничными условиями, заданными в трех точках

Рассмотрим граничную задачу, определяемую дифференциальным уравнением третьего порядка

$$d^3y/dx^3 = P(x)dy/dx + Q(x)y + R(x), \quad (1.3.51)$$

$$a \leq x \leq c,$$

$$a < b < c.$$

и граничными условиями, заданными в трех точках:

$$dy(0)/dx = \alpha_{00}d^2y(0)/dx^2 + \alpha_{10}y(0) + \alpha_{20}, \quad (1.3.52)$$

$$y(b) = \beta_{00}d^2y(b)/dx^2 + \beta_{10}y(b)/a\lambda + \beta_{20}, \quad (1.3.53)$$

$$dy(c)/dx = \gamma_{00}d^2y(c)/dx^2 + \gamma_{10}y(c) + \gamma_{20}. \quad (1.3.54)$$

Здесь мы должны ввести два уравнения вместо одного, как в предыдущем разделе. Прежде всего, введем следующее дифференциальное уравнение второго порядка:

$$d^2y/dx^2 = \alpha_0(x)dy/dx + \alpha_1(x)y + \alpha_2(x). \quad (1.3.55)$$

Дифференцируя (1.3.55) по  $x$  и исключая  $d^2y/dx^2$  с помощью (1.3.55), получаем уравнение

$$\begin{aligned} \frac{d^3 y}{dx^3} = & \frac{1}{[\alpha_0(x)]^2} \left\{ \left[ 1 - \frac{d\alpha_0(x)}{dx} - \alpha_0(x) \alpha_1(x) \right] \frac{dy}{dx} + \right. \\ & + \left[ \alpha_1(x) \frac{d\alpha_0(x)}{dx} - \alpha_1(x) - \alpha_0(x) \frac{d\alpha_1(x)}{dx} \right] y - \\ & \left. - \left[ \alpha_2(x) - \alpha_2(x) \frac{d\alpha_0(x)}{dx} - \alpha_0(x) \frac{d\alpha_2(x)}{dx} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (1.3.56)$$

Если потребовать, чтобы решение  $y(x)$  уравнения (1.3.55) удовлетворяло также и уравнению (1.3.51), то нужно приравнять коэффициенты при соответствующих членах в (1.3.51) и (1.3.56). Это дает систему уравнений

$$d\alpha_0(x)/dx = 1 - \alpha_0(x) \alpha_1(x) - P(x) [\alpha_0(x)]^2, \quad (1.3.57)$$

$$d\alpha_1(x)/dx = -[\alpha_1(x)]^2 - P(x) \alpha_0(x) \alpha_1(x) - \alpha_0(x) Q(x), \quad (1.3.58)$$

$$d\alpha_2(x)/dx = -\alpha_1(x) \alpha_2(x) - P(x) \alpha_0(x) \alpha_2(x) - \alpha_0(x) R(x). \quad (1.3.59)$$

Систему (1.3.57) – (1.3.59) можно проинтегрировать как задачу Коши, так как начальные значения известны:

$$\alpha_0(0) = \alpha_{00}, \quad \alpha_1(0) = \alpha_{10}, \quad \alpha_2(0) = \alpha_{20}. \quad (1.3.60)$$

Введем другое дифференциальное уравнение, соответствующее граничному условию при  $x = b$

$$y = \beta_0(x) d^2 y / dx^2 + \beta_1(x) dy / dx + \beta_2(x). \quad (1.3.61)$$

Дифференцируя (1.3.61) по  $x$  и исключая  $d^2 y / dx^2$  с помощью (1.3.61) получим уравнение

$$\begin{aligned} \frac{d^3 y}{dx^3} = & \frac{\beta_0 - \beta_0 d\beta_1/dx + \beta_1 d\beta_0/dx + \beta_1^2}{\beta_0^2} \frac{dy}{dx} - \\ & - \frac{d\beta_0/dx + \beta_1}{\beta_0^2} y + \frac{\beta_2 d\beta_0/dx + \beta_1 \beta_2 - \beta_0 d\beta_2/dx}{\beta_0^2}. \end{aligned} \quad (1.3.62)$$

Вновь выберем  $\beta_0, \beta_1$  и  $\beta_2$  так, чтобы решение  $y(x)$  уравнения (1.3.61) удовлетворяло так же уравнению (1.3.51). Это требование будет выполнено, если будут равны соответствующие коэффициенты в урав-

нениях (1.3.51) и (1.3.62). Попарно приравнивая эти коэффициенты и переставляя некоторые члены, получаем систему уравнений

$$d\beta_0/dx = -\beta_1 - \beta_0^2 Q(x), \quad (1.3.63)$$

$$d\beta_1/dx = 1 - \beta_0\beta_1 Q(x) - \beta_0 P(x), \quad (1.3.64)$$

$$d\beta_2/dx = -\beta_0\beta_2 Q(x) - \beta_0 R(x). \quad (1.3.65)$$

Граничные условия имеют вид

$$\beta_0(0) = \beta_{00}, \quad \beta_1(0) = \beta_{10}, \quad \beta_2(0) = \beta_{20}. \quad (1.3.66)$$

Задачи (1.3.57) – (1.3.60) и (1.3.63) – (1.3.66) нужно интегрировать до  $x = c$ , конечной точки интервала. В частности, получим значения следующих величин:

$$\alpha_0(c), \quad \alpha_1(c), \quad \alpha_2(c),$$

$$\beta_0(c), \quad \beta_1(c), \quad \beta_2(c).$$

При  $x = c$  уравнения (1.3.55) и (1.3.61) дают

$$d^2y(c)/dx^2 = \alpha_0(c) dy(c)/dx + \alpha_1(c) y(c) + \alpha_2(c). \quad (1.3.67)$$

$$y(c) = \beta_0(c) d^2y(c)/dx^2 + \beta_1(c) dy(c)/dx + \beta_2(c). \quad (1.3.68)$$

В качестве третьего уравнения используем граничное условие  $x = c$  (условие (1.3.54))

$$dy(c)/dx = \gamma_{00} d^2y(c)/dx^2 + \gamma_{10} y(c) + \gamma_{20}. \quad (1.3.69)$$

Уравнения (1.3.67) – (1.3.69) можно разрешить относительно  $y(c)$ ,  $dy(c)/dx$  и  $d^2y(c)/dx^2$ , составляющих полный набор граничных значений в конечной точке  $x = c$ . Этим завершается этап прямой прогонки.

Используя полученные выше значения при  $x = c$  в качестве начальных, можно интегрированием назад найти решение уравнения (1.3.51). Этим завершается этап обратной прогонки.

#### 1.4. Решение краевых задач методом конечных разностей (сеток)

Наиболее распространенным и универсальным численным методом решения дифференциальных уравнений является метод конечных разностей. Его сущность состоит в следующем. Область непрерывного из-



менения аргумента (например, отрезок) заменяется дискретным множеством точек, называемых узлами. Эти узлы составляют разностную сетку. Искомая функция непрерывного аргумента приближенно заменяется функцией дискретного аргумента на заданной сетке. Эта функция называется сеточной. Исходное дифференциальное уравнение заменяется разностным уравнением относительно сеточной функции. При этом для входящих в уравнение производных используются соответствующие конечно-разностные соотношения. Такая замена дифференциального уравнения разностным называется его аппроксимацией на сетке (или разностной аппроксимацией). Таким образом, решение дифференциального уравнения сводится к отысканию значений сеточной функции в узлах сетки. Обоснованность замены дифференциального уравнения разностным, точность получаемых решений, устойчивость метода – важнейшие вопросы, которые требуют тщательного изучения.

Рассмотрим сущность такого метода решения для дифференциального уравнения второго порядка

$$y'' = f(x, y, y') \quad (1.4.1)$$

при заданных граничных условиях

$$y(0) = y_0, \quad y(1) = y_1. \quad (1.4.2)$$

Разобьем отрезок  $[0,1]$  на  $n$  равных частей точками  $x_i = ih$  ( $i = 0, 1, \dots, n$ ). Решение краевой задачи (1.4.1), (1.4.2) сведем к вычислению значений сеточной функции  $y_i$  в узловых точках  $x_i$ .

Для этого напомним уравнение (1.4.1) для внутренних узлов:

$$y''(x_i) = f(x_i, y(x_i), y'(x_i)), \quad i = 1, 2, \dots, n-1. \quad (1.4.3)$$

Заменим производные, входящие в эти соотношения, их конечно-разностными аппроксимациями:

$$\begin{aligned} y'(x_i) &= \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + O(h^2), \\ y''(x_i) &= \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + O(h^2). \end{aligned} \quad (1.4.4)$$

Подставляя эти выражения в (1.4.3), получаем систему разностных уравнений

$$F(x_i, y_{i-1}, y_i, y_{i+1}) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n-1, \quad (1.4.5)$$

являющуюся системой  $n-1$  алгебраических уравнений относительно значений сеточной функции  $y_1, y_2, \dots, y_{n-1}$ . Входящие в данную систему  $y_0$  (при  $i=1$ ) и  $y_n$  (при  $i=n-1$ ) берутся из граничных условий (1.4.2):

$$y_0 = y(0), \quad y_n = y(1).$$

На практике часто граничные условия задаются в более общем виде:

$$\begin{aligned} \alpha_1 y(0) + \beta_1 y'(0) &= A, \\ \alpha_2 y(1) + \beta_2 y'(1) &= B. \end{aligned} \quad (1.4.6)$$

В этом случае граничные условия также должны представляться в разностном виде путем аппроксимации производных  $y'(0)$  и  $y'(1)$  с помощью конечно-разностных соотношений. Если использовать односторонние разности (соответствующий шаблон показан на рис. 1.1.а), при которых производные аппроксимируются с первым порядком точности, то разностные граничные условия примут вид

$$\begin{aligned} \alpha_1 y_0 + \beta_1 \frac{y_1 - y_0}{h} &= A, \\ \alpha_2 y_n + \beta_2 \frac{y_n - y_{n-1}}{h} &= B. \end{aligned} \quad (1.4.7)$$

Из этих соотношений легко находятся значения  $y_0, y_n$ .

Однако, как правило, предпочтительнее аппроксимировать производные, входящие в (1.4.6), со вторым порядком точности с помощью центральных разностей

$$y'(0) = \frac{y_1 - y_{-1}}{2h} + O(h^2), \quad y'(1) = \frac{y_{n+1} - y_{n-1}}{2h} + O(h^2).$$

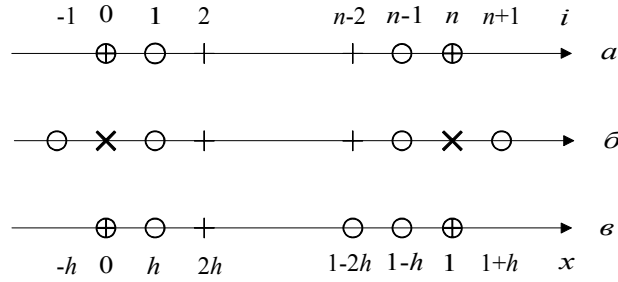


Рис. 1.1. Аппроксимация граничных условий

В данные выражения входят значения сеточной функции  $y_{-1}$  и  $y_{n+1}$  в так называемых фиктивных узлах  $x = -h$  и  $x = 1 + h$ , лежащих вне рассматриваемого отрезка (см. рис. 1.1 б). В этих узлах значения искомой функции также должны быть найдены. Следовательно, количество неизвестных значений сеточной функции увеличивается на два. Для замыкания системы привлекают еще два разностных уравнения (1.4.5) при  $i = 0$ ,  $i = n$ .

Аппроксимировать граничные условия со вторым порядком можно и иначе (см. рис. 1.1, в). В этом случае используются следующие аппроксимации:

$$y'(0) = \frac{-3y_0 + 4y_1 - y_2}{2h} + O(h^2),$$

$$y'(1) = \frac{y_{n-2} - 4y_{n-1} + 3y_n}{2h} + O(h^2).$$

Таким образом, решение краевой задачи для дифференциального уравнения сведено к решению системы алгебраических уравнений вида (1.4.5). Эта система является линейной или нелинейной в зависимости от того, линейно или нелинейно, искомое дифференциальное уравнение.

## 1.5. Нелинейные краевые задачи

### 1.5.1. Метод квазилинеаризации

Рассмотрим нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка

$$y'' = f(x, y, y') \quad (1.5.1)$$

С граничными условиями

$$y(0) = 0, \quad y(L) = A, \quad (1.5.2)$$

где символами  $y'$  и  $y''$  обозначены соответственно  $dy/dx$  и  $d^2y/dx^2$ .

Перепишем уравнение (1.5.1) в виде

$$\varphi(x, y, y', y'') = y'' - f(x, y, y') = 0. \quad (1.5.3)$$

Чтобы получить рекуррентное соотношение, обозначим  $n$ -ю и  $(n+1)$ -ю итерации через  $y_n$  и  $y_{n+1}$  и потребуем, чтобы для обеих итераций выполнялось условие  $\varphi = 0$ . Это позволяет написать для  $n$ -й итерации

$$y''_n - f(x, y, y') = 0. \quad (1.5.4)$$

Для  $(n+1)$ -й итерации получаем

$$\begin{aligned} \varphi(x_{n+1}, y_{n+1}, y'_{n+1}, y''_{n+1}) &= \varphi(x_n, y_n, y'_n, y''_n) + \\ &+ \left( \partial\varphi/\partial y \right)_n (y_{n+1} - y_n) + \left( \partial\varphi/\partial y' \right)_n (y'_{n+1} - y'_n) + \\ &+ \left( \partial\varphi/\partial y'' \right)_n (y''_{n+1} - y''_n) + \dots = 0, \end{aligned} \quad (1.5.5)$$

или

$$-\left( \partial f/\partial y \right)_n (y_{n+1} - y_n) - \left( \partial f/\partial y' \right)_n (y'_{n+1} - y'_n) + y''_{n+1} - y''_n = 0. \quad (1.5.6)$$

Подставляя в (1.5.6) выражение  $y''_n$  из (1.5.4) получаем

$$\begin{aligned} y''_{n+1} - \left( \partial f/\partial y' \right)_n y'_{n+1} - \left( \partial f/\partial y \right)_n y_{n+1} &= \\ = f(x, y_n, y'_n) - \left( \partial f/\partial y \right)_n y_n - \left( \partial f/\partial y' \right)_n y'_n. \end{aligned} \quad (1.5.7)$$

Граничные условия имеют вид

$$y_{n+1}(0) = 0, \quad y_{n+1}(L) = A. \quad (1.5.8)$$

Уравнение (1.5.7) с граничными условиями (1.5.8) – это линейная граничная задача, решение которой может быть получено одним из методов, применимых для решения линейных краевых задач.

### 1.5.2. Метод Ньютона

Метод Ньютона основывается на ньютоновском методе решения нелинейных алгебраических уравнений и обладает двумя важными свойствами: монотонной и квадратичной сходимостью. Для большинства задач метод Ньютона и метод квазилинеаризации одинаково эффективны. Но из-за того, что в методе Ньютона подгоняется лишь недосatisfакторное начальное условие, в то время как в методе квазилинеаризации

подгоняются функции во всех точках интервала, можно предположить, что последний обладает лучшей сходимостью.

Рассмотрим граничную задачу, определяемую дифференциальным уравнением

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = f(x, y, dy/dx) \quad (1.5.9)$$

и граничными условиями

$$y(0) = 0, \quad y(L) = A. \quad (1.5.10 \text{ а, б})$$

Сначала запишем уравнение (1.5.9) в виде двух дифференциальных уравнений первого порядка

$$\frac{dy}{dx} = u, \quad \frac{du}{dx} = f(x, y, u). \quad (1.5.11)$$

Обозначим недостающее начальное значение производной через  $s$  :

$$\frac{dy(0)}{dx} = s, \text{ или } u(0) = s. \quad (1.5.12 \text{ а, б})$$

Задача заключается в том, чтобы найти такое значение  $s$ , при котором решение задачи Коши (1.5.12), (1.5.10 а), (1.5.11) удовлетворяет граничному условию (1.5.10 б), во второй точке. Иначе говоря, если решение задачи Коши обозначить через  $y(x, s)$  и  $u(x, s)$ , то требуется найти такое значение  $s$ , что

$$y(L, s) - A = \varphi(s) = 0. \quad (1.5.13)$$

В методе Ньютона итерационная формула для  $s$  задается в виде

$$s^{(n+1)} = s^{(n)} - \frac{\varphi(s^{(n)})}{d\varphi(s^{(n)})/ds},$$

или

$$s^{(n+1)} = s^{(n)} - \frac{y(L, s^{(n)}) - A}{\partial y(L, s^{(n)})/\partial s}. \quad (1.5.14)$$

Чтобы найти производную  $y$  по  $s$ , продифференцируем (1.5.11), (1.5.10 а) и (1.5.12) по  $s$  и получим

$$\frac{dY}{dx} = U, \quad \frac{dU}{dx} = \left( \partial f / \partial y \right) Y + \left( \partial f / \partial u \right) U \quad (1.5.15)$$

и

$$Y(0) = 0, \quad U(0) = 1, \quad (1.5.16)$$

где

$$Y = \frac{\partial y}{\partial s}, \quad U = \frac{\partial u}{\partial s}. \quad (1.5.17)$$

Таким образом, решение системы уравнений (1.5.11), удовлетворяющее граничным условиям (1.5.10 а, б), может быть получено следующими действиями.

1. Выбирается значение  $s$  для недостающего начального значения производной (1.5.12). Это приближенное значение  $s$  обозначается через  $s^{(1)}$ .
2. Численно интегрируется задача Коши (1.5.11), (1.5.10 а), (1.5.12) от  $x = 0$  до  $x = L$ .
3. Численно интегрируются уравнения (1.5.15) с начальными условиями (1.5.16) от  $x = 0$  до  $x = L$ .
4. Значения  $y(L, s^{(1)})$  и  $Y(L, s^{(1)})$  подставляются в формулу (1.5.14), что дает

$$s^{(2)} = s^{(1)} - \frac{[y(L, s^{(1)}) - A]}{Y(L, s^{(1)})},$$

т.е. следующее приближение  $s^{(2)}$  для недостающего начального значения производной

5. Шаги 2 – 4 повторяются до тех пор, пока величина  $s$  не будет найдена с заданной точностью.

В качестве примера использования метода Ньютона приведено решение задачи о нестационарном течении газа в пористой среде.

### 1.5.3. Примеры

#### 1.5.3.1. Нестационарное течение газа в пористой среде

Рассмотрим нестационарное течение газа в полубесконечной пористой среде. Предположим, что первоначально среда была равномерно заполнена газом при давлении  $p_0$  [2]. В момент  $t = 0$  давление на поверхности внезапно падает от  $p_0$  до  $p_1$  и после этого поддерживается на постоянном уровне. Дифференциальное уравнение, описывающее

нестационарное изотермическое течение газа, может быть получено следующим образом. Рассмотрим бесконечно малый объем, изображенный на рис. 1.2.

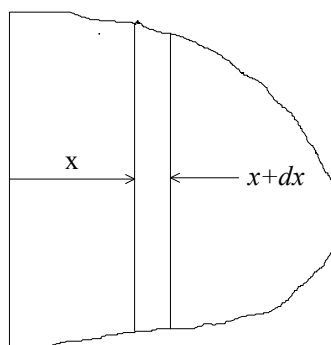


Рис.1.2. Полубесконечная пористая среда

В силу закона сохранения «массы поток массы в объем» – «поток массы из объема» = «скорость накопления массы в объеме», или в математической форме:

$$\rho u A - \left[ \rho u + \left( \partial(\rho u) / \partial x \right) dx \right] A = \partial[\rho(A dx \varphi)] / \partial t, \quad (1.5.18)$$

где  $A$  и  $u$  – площадь сечения и скорость течения газа, а  $\varphi$  – пористость среды, определяемая как объем пор на единицу объема среды. Уравнение (1.5.18) можно упростить, что дает

$$\varphi \partial \rho / \partial t = - \partial(\rho u) / \partial x. \quad (1.5.19)$$

Скорость потока в пористой среде связана с градиентом давления законом Дарси<sup>6</sup>:

$$u = - \left( k / \mu \right) \partial p / \partial x, \quad (1.5.20)$$

<sup>6</sup> Анри Филибер Гаспар Дарси , 10 июня 1803, Дижон, - 2 января 1858, Париж - французский инженер-гидравлик, обосновавший закон Дарси (1856), связывающий скорость фильтрации жидкости в пористой среде с градиентом давления. Именем Дарси названа единица измерения проницаемости пористой среды. Под руководством Дарси в г.Дижоне была создана первая в Европе система городских очистных сооружений с различными фильтрационными засыпками. Это настолько изменило город в лучшую сторону, что уже на следующий день после смерти Дарси от пневмонии главной площади города было присвоено его имя.

где константы  $k$  и  $\mu$  – проницаемость среды и вязкость газа. К тому же в изотермическом газе плотность и давление связаны уравнением состояния

$$p = \rho R T, \quad (1.5.21)$$

где  $R$  газовая постоянная.

Подставляя (1.5.20) и (1.5.21) в (1.5.19), получаем уравнение

$$\partial \left( p \frac{\partial p}{\partial x} \right) / \partial x = (\varphi \mu / k) \partial p / \partial t \quad (1.5.22)$$

с граничными условиями

$$p(x, 0) = p_0, \quad p(0, t) = p_1, \quad p(\infty, t) = p_0.$$

Вводя преобразование подобия получим

$$z = x t^{-1/2} \left[ \varphi \mu / (4 p_0 k) \right]^{1/2}$$

и

$$\omega(z) = \alpha^{-1} \left[ 1 - p_1^2 / p_0^2 \right].$$

где

$$\alpha = 1 - p_1^2 / p_0^2.$$

При этом уравнение (1.5.19) и граничные условия для него принимают вид

$$d^2 \omega / dz^2 + \left[ 2z (1 - \alpha \omega)^{-1/2} \right] d\omega / dz = 0 \quad (1.5.23)$$

и

$$\omega(0) = 1, \quad \omega(\infty) = 0.$$

### 1.5.3.2. Задача о брахистохроне

Задача о брахистохроне – наиболее известная задача из разделов оптимального управления и расчета траекторий. Она заключается в нахождении оптимального пути между двумя точками при движении в гравитационном поле.

Постановка задачи: в вертикально плоскости  $xOy$  (рис. 1.1) найти кривую линию  $AB$ , скатываясь с которой под действием силы тяжести материальная точка (шарик, саночки по ледяной горке) переместится из



точки  $A(0, y_0)$  в точку  $B(l, y_1)$  за кратчайшее время. (Начальная скорость точки по вертикали равна  $V_0$ ).

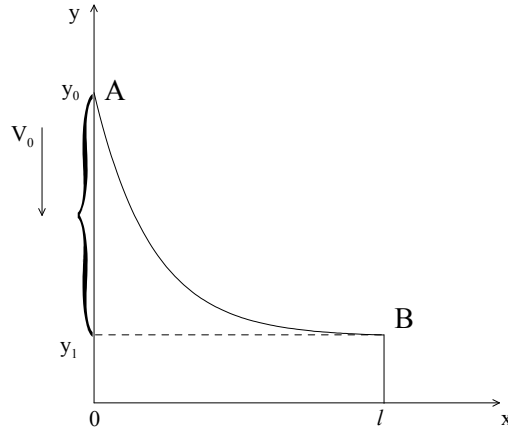


Рис.1.3. Область решения

Как известно из курса физики

$$V^2(y) = V_0^2 + 2g(y_0 - y).$$

Тогда

$$V(y)V'(y) = -g$$

и

$$\frac{V'(y)}{V(y)} = -\frac{g}{V^2(y)} = -\frac{g}{V_0^2 + 2g(y_0 - y)} = -\frac{1}{2} \frac{1}{\frac{V_0^2}{2g} + y_0 - y}.$$

Уравнение Эйлера для нахождения экстремума функционала принимает вид

$$-2 \left( \frac{V_0^2}{2g} + y_0 - y \right) \frac{d^2 y}{dx^2} + 1 + \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 = 0. \quad (1.5.24)$$

Граничные условия

$$y(0) = y_0; \quad y(l) = y_1. \quad (1.5.25)$$

Очевидно, значения  $y_0$  и  $y_1$  не играют особой роли. Значение имеет «высота» горки  $h = y_0 - y_1$ . Поэтому задачу (1.5.24), (1.5.25) записывают в других переменных, вводя новую искомую функцию

$$u = \frac{V_0^2}{2g} + y_0 - y.$$

Тогда задача (1.5.24), (1.5.25) принимает более простой вид

$$\begin{aligned} 2u \frac{d^2 u}{dx^2} + 1 + \left( \frac{du}{dx} \right)^2 &= 0; \\ u(0) &= \frac{V_0^2}{2g} = a; \\ u(l) &= a + h = b. \end{aligned} \quad (1.5.26)$$

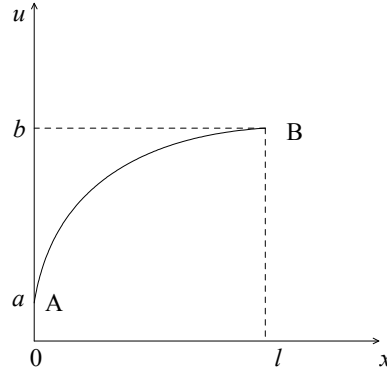


Рис.1.4. Область решения

Обсудим решение задачи (1.5.6) с использованием метода Ньютона при  $a > 0$  (рис. 1.4). Будем, например, решать серию задач Коши, вводя недостающее граничное условие:

$$2u \frac{d^2 u}{dx^2} + 1 + \left( \frac{du}{dx} \right)^2 = 0; \quad u(0) = a; \quad \frac{du(0)}{dx} = \lambda. \quad (1.5.27)$$

Параметр  $\lambda$  следует подобрать так, чтобы выполнилось правое граничное условие  $u(l, \lambda) = b$ .

Введем функцию  $W = \frac{du}{d\lambda}$ .

Дифференцируя (1.5.26) по  $\lambda$ , получим

$$2 \left( W \frac{d^2 u}{dx^2} + u \frac{d^2 W}{dx^2} \right) + 2 \frac{du}{dx} \cdot \frac{dW}{dx} = 0; \quad W(0) = 0; \quad \frac{dW(0)}{dx} = 1. \quad (1.5.28)$$

Решая задачу Коши (1.5.28), находим решение в конечной точке  $x = l$  и, согласно метода Ньютона, уточняем значение  $\lambda$  по формуле

$$\lambda_{n+1} = \lambda_n - \frac{u(l, \lambda_n) - b}{W(l, \lambda_n)}. \quad (1.5.29)$$

Итерации выполняются до выполнения условия сходимости

$$|u(l, \lambda_n) - b| < \varepsilon.$$

### 1.5.3.3. Задача Блазиуса<sup>7</sup>

Рассмотрим течение несжимаемой жидкости вдоль поверхности полубесконечной пластины, как показано на рис.1.5.

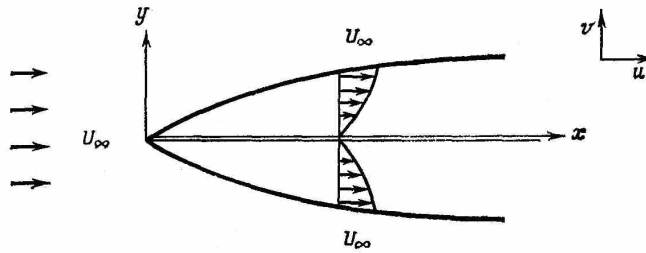


Рис.1.5. Пограничный слой при обтекании пластины

Такое течение обычно называют течением в пограничном слое, поскольку действие вязкости ограничивается узким слоем вблизи поверхности. При этом скорость жидкости в слое меняется от нуля на поверхности пластины до скорости внешнего потока  $U_\infty$  на границе слоя. Анализ таких течений требует привлечения уравнений Навье – Стокса,

<sup>7</sup> **Блазиус** (Blasius), Иоганн-Генрих, 1809 – 1870, немецкий естествоиспытатель, участник научной экспедиции в России Мурчисона и Кейзерлинга (1840 – 1841). Написал: “Reise durch d. europ. Russland”, 1841, “Fauna der Wirbelthieren Deutschlands”, 1857.

получаемых из закона сохранения массы и импульса. Вводя допущения, пограничного слоя, запишем уравнения Навье – Стокса в виде

$$\frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial U_y}{\partial y} = 0, \quad (1.5.30)$$

$$U_x \frac{\partial U_x}{\partial x} + U_y \frac{\partial U_y}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 U_x}{\partial y^2}, \quad (1.5.31)$$

а граничные условия – в виде

$$\text{при } y = 0 \quad U_x = U_y = 0,$$

$$\text{при } y = \infty \quad U_x = U_\infty,$$

где  $U_x$  и  $U_y$  – компоненты скорости в направлениях  $x$  и  $y$  соответственно, а  $\nu$  – коэффициент вязкости жидкости. Граничные условия на поверхности пластины ( $y = 0$ ) отражают отсутствие скольжения и переноса массы через поверхность. Условие на границе слоя означает, что компонента скорости  $U_x$  асимптотически приближается к скорости внешнего потока  $U_\infty$ .

Решение этой задачи было найдено Блазиусом в 1908 году. Введем функцию тока  $\psi$  согласно равенствам

$$U_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad U_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (1.5.32)$$

Кроме физических соображений (линии уровня  $\psi$  являются линиями тока) это удобно математически, поскольку уравнение (1.5.30) удовлетворяется тождественно. Тогда уравнение (1.5.31) принимает вид

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \nu \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3}, \quad (1.5.33)$$

а граничные условия становятся соответственно

$$\text{при } y = 0 \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0,$$

$$\text{при } y = \infty \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = U_\infty.$$

Иначе говоря, решение системы двух уравнений с двумя неизвестными  $U_x, U_y$  сводится к решению одного уравнения с одним неизвестным  $\psi$ .

Блазиус предложил преобразование

$$\eta = y \sqrt{\frac{U_{\infty}}{\nu x}} \quad (1.5.34)$$

и

$$f(\eta) = \frac{\psi}{\sqrt{\nu x U_{\infty}}},$$

которое дает вместо (1.5.33) уравнение

$$\frac{d^3 f}{d\eta^3} + \frac{1}{2} f \frac{d^2 f}{d\eta^2} = 0 \quad (1.5.35)$$

с граничными условиями

$$f(0) = \frac{df(0)}{d\eta} = 0, \quad \frac{df(\infty)}{d\eta} = 1.$$

Теперь нужно решить граничную задачу с нелинейным дифференциальным уравнением (1.5.35). Для сведения этой задачи к задаче Коши подробно рассмотрим решение уравнения (1.5.35) в виде степенного ряда.

$$f(\eta) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \eta^n. \quad (1.5.36)$$

Прежде чем подставить это выражение в уравнение (1.5.35), попытаемся найти из граничных условий некоторые из коэффициентов. Так, из условий на поверхности пластины

$$f(0) = 0, \quad \frac{df(0)}{d\eta} = 0.$$

получаем

$$C_0 = C_1 = 0. \quad (1.5.37)$$

Затем введем обозначение

$$\frac{d^2 f(0)}{d\eta^2} = \lambda, \quad (1.5.38)$$

где  $\lambda$  – неизвестная пока величина. Выразим коэффициент  $C_2$  через  $\lambda$ :

$$C_2 = \frac{\lambda}{2!}. \quad (1.5.39)$$

Подставляя теперь разложение (1.5.36) в уравнение (1.5.35) получаем выражение

$$\sum_{n=3}^{\infty} n(n-1)(n-2)C_n\eta^{n-3} + \left(\frac{1}{2}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} C_n\eta^n\right) \times \left[\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)C_n\eta^{n-2}\right] = 0, \quad (1.5.40)$$

раскрывая которое, имеем

$$\begin{aligned} & \left[(3)(2)(1)C_3 + \left(\frac{1}{2}\right)C_0(2)(1)C_2\right] + \\ & + \left[(4)(3)(2)C_4 + \left(\frac{1}{2}\right)C_0(3)(2)C_3 + \left(\frac{1}{2}\right)(2)(1)C_2C_1\right]\eta + \\ & + \left[(5)(4)(3)C_5 + \left(\frac{1}{2}\right)C_0(4)(3)C_4 + \left(\frac{1}{2}\right)(2)(1)C_2C_2 + \right. \quad (1.5.41) \\ & + \left.\left(\frac{1}{2}\right)C_1(3)(2)C_3\right]\eta^2 + (6)(5)(4)C_6 + \left(\frac{1}{2}\right)C_0(5)(4)C_5 + \\ & + \left(\frac{1}{2}\right)C_2(3)(2)C_3\eta^3 + \dots = 0. \end{aligned}$$

Полагая, коэффициенты при степенях  $\eta$  равными нулю, и учитывая соотношения (1.5.37) и (1.5.38), получаем

$$\begin{aligned} C_3 = C_4 = 0, \quad C_5 = -\frac{\lambda^2}{[5!(2)]}, \\ C_6 = C_7 = 0, \quad C_8 = \frac{11\lambda^3}{[8!(2)^2]}, \dots \end{aligned} \quad (1.5.42)$$

Таким образом, решение уравнения (1.5.35) можно записать в виде

$$f(\eta) = \frac{\lambda\eta^2}{2!} - \frac{\lambda^2\eta^5}{5!(2)} + \frac{11\lambda^3\eta^8}{8!(2)^2} - \frac{375\lambda^4\eta^{11}}{11!(2)^3} + \dots, \quad (1.5.43)$$

содержащем пока еще неизвестную  $\lambda$ . Второе граничное условие должно использоваться для нахождения  $\lambda$ , но в данном случае это невозможно, поскольку  $\eta = \infty$ . Блазиус использовал метод подбора, рассматривая решение вида (1.5.43) вблизи стенки и подбирая согласую-

щее с этим решением асимптотическое разложение для больших  $\eta$ . Такой процесс довольно утомителен и не представляет интереса.

Перепишем выражение (1.5.41) расположив переменные по-новому:

$$\lambda^{-1/3}f = \frac{(\lambda^{1/3}\eta)^2}{2!} - \frac{(\lambda^{1/3}\eta)^5}{5!(2)} + \frac{11(\lambda^{1/3}\eta)^8}{8!(2)^2} - \frac{375(\lambda^{1/3}\eta)^{11}}{11!(2)^3} + \dots \quad (1.5.44)$$

Такая запись позволит сделать следующее преобразование

$$F = \lambda^{-1/3}f, \quad \zeta = \lambda^{1/3}\eta, \quad (1.5.45)$$

После этого выражение (1.5.44) запишется в виде

$$F = \frac{\zeta^2}{2!} - \frac{\zeta^5}{5!(2)} + \frac{11\zeta^8}{8!(2)^2} - \frac{375\zeta^{11}}{11!(2)^3} + \dots \quad (1.5.46)$$

Значение этого преобразования становится ясным, если его применить непосредственно к уравнению (1.5.44) и соответствующим ему граничным условиям. Это дает уравнение

$$\frac{d^3F}{d\zeta^3} + \frac{1}{2} \frac{d^2F}{d\zeta^2} = 0 \quad (1.5.47)$$

с граничными условиями на пластине

$$F(0) = 0, \quad \frac{dF(\infty)}{d\zeta} = 0. \quad (1.5.48)$$

Преобразование условия (1.5.38) дает

$$\frac{d^2F(0)}{d\zeta^2} = 1. \quad (1.5.49)$$

Уравнение (1.5.47) с условиями (1.5.48) и (1.5.49) представляет собой задачу Коши. Нетрудно вычислить  $\eta$ ,  $f$ . С этой целью применим преобразование к граничному условию на бесконечности

$$\frac{df(\infty)}{d\eta} = 1$$

и получим

$$\lambda^{-2/3} \frac{dF(\infty)}{d\zeta} = 1,$$

или

$$\lambda = \left[ \frac{dF(\infty)}{d\zeta} \right]^{-3/2}. \quad (1.5.50)$$

Таким образом, решение исходной задачи проводится в три этапа.

1. Ищется решение уравнения (1.5.47) с начальными условиями (1.5.48), (1.5.49), в частности находится  $dF(\infty)/d\zeta$ .
2. По формуле (1.5.50) вычисляется  $\lambda$ .
3. Из соотношений (1.5.45) определяется  $f(\eta)$ .



## **Глава 2. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ТЕПЛОПЕРЕНОСА**

### **Введение**

Для решения задач теплопроводности существуют аналитические методы, однако решение некоторых неоднородных и нелинейных задач теплопроводности получить аналитическими методами не представляется возможным. Решение такого рода задач проводится с использованием численных методов.

В настоящее время имеется большое количество учебников и монографий по численным методам решения задач теплопроводности, тепло- и массопереноса [2–10].

Использование численных методов в задачах тепло- и массообмена позволяет решать многие практические задачи. Появление высокопроизводительной вычислительной техники позволяет в настоящее время решать нестационарные пространственные задачи тепло- и массопереноса.

Во второй главе пособия представлены основные численные методы, используемые для решения задач теплопереноса, даны способы построения разностных схем и алгоритмов численного решения задач теплопроводности.

### **2.1. Математическое моделирование процессов теплопроводности**

#### **2.1.1. Уравнение теплопроводности**

При неоднородном распределении температуры в среде поток тепла через единицу площади, перпендикулярную градиенту температуры, в единицу времени определяется законом Фурье<sup>8</sup>. В случае одномерного

---

<sup>8</sup> **Фурье Жан Батист Жозеф** (Fourier Jean Baptiste Joseph), род. 21.03.1768, Осер – ум. 16.05.1830, Париж. Французский математик, иностранный почетный член Петербургской АН (1829), член Парижской АН (1817). Окончив военную школу в Осере, работал там же преподавателем. 1796 – 1798 преподавал в Политехнической школе в Париже. В 1798 вместе с другими учеными принимал участие в Египетской экспедиции Наполеона Бонапарта. В 1802 – 1815 Фурье был префектом департамента Изер; в 1817 переехал в Париж. Первые труды Фурье отно-

распределения температуры например вдоль оси  $x$  тепловой поток определяется соотношением:

$$q = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}, \quad (2.1.1)$$

где  $q$  – величина теплового потока, Дж/(м<sup>2</sup> с);  $T$  – температура;  $\lambda$  – коэффициент теплопроводности, Дж/(м с К).

Рассмотрим стержень радиуса  $R$ , в котором имеется неоднородное распределение температуры по длине. По сечению стержня примем температуру одинаковой (рис. 2.1). Пусть на боковых стенках стержня происходит теплообмен с окружающей средой температуры  $T_0$ , а в объеме стержня расположены источники и стоки тепла интенсивности  $Q$ . Теплообмен с окружающей средой будем описывать законом Ньютона для теплообмена с коэффициентом теплообмена  $\alpha$ .

---

ся к алгебре. Уже в лекциях 1796 он изложил теорему о числе действительных корней алгебраического уравнения, лежащих между данными границами (опубл. 1820). В 1818 Фурье исследовал вопрос об условиях применимости разработанного И.Ньютоном метода численного решения алгебраических уравнений. Итогом работ Фурье по численным методам решения является "Анализ определенных уравнений" ("Analyse des équations déterminées", pt.1, P., 1831). Основной областью занятий Фурье была математическая физика. В 1807 и 1811 он представил Парижской АН свои первые открытия по теории распространения тепла в твердом теле, а в 1822 опубликовал известную работу "Аналитическая теория тепла" ("Théorie analytique de la chaleur"), сыгравшую большую роль в последующем развитии математики. В ней Фурье вывел дифференциальное уравнение теплопроводности и далеко развил идеи, в самых общих чертах намеченные ранее Д.Бернулли, разработал для решения уравнения теплопроводности при тех или иных заданных граничных условиях метод разделения переменных (т.н. метод Фурье), который он применял к ряду частных случаев (куб, цилиндр и др.). В основе этого метода лежит представление функций тригонометрическими рядами Фурье, которые хотя и рассматривались иногда ранее, но стали действительным и важным орудием математической физики только у Фурье. "Аналитическая теория тепла" явилась отправным пунктом создания теории тригонометрических рядов и разработки некоторых общих проблем математического анализа. Фурье привел первые примеры разложения в тригонометрические ряды Фурье функций, которые заданы на различных участках различными аналитическими выражениями. Тем самым он внес важный вклад в решение знаменитого спора о понятии функции, в котором участвовали крупнейшие математики 18 в. Его попытка доказать возможность разложения в тригонометрический ряд Фурье любой произвольной функции была неудачна, но положила начало большому циклу исследований, посвященных проблеме представимости функций тригонометрическими рядами и интегралами (интеграл Фурье). С этими исследованиями было связано возникновение теории множеств и теории функций действительного переменного.

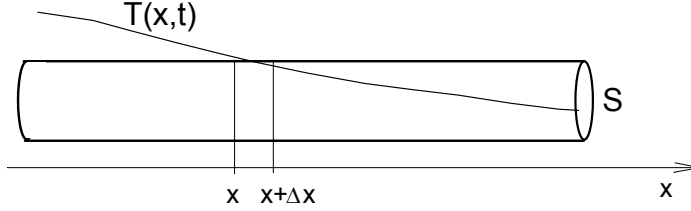


Рис. 2.1. К выводу уравнения теплопроводности

Выберем участок стержня толщиной  $\Delta x$  и запишем изменение его внутренней энергии  $E = c\rho S\Delta x T$ , где  $c$  – удельная теплоемкость,  $\rho$  – плотность,  $S$  – площадь поперечного сечения стержня. Изменение  $E$  происходит за счет прихода тепла через сечение  $x$ , ухода тепла через сечение  $x + \Delta x$ , за счет действия источников и стоков тепла и теплообмена с окружающей средой через боковую поверхность участка  $\Delta x$ . За время  $\Delta t$  изменение внутренней энергии рассматриваемого участка стержня произойдет на величину

$$\Delta E = c\rho S\Delta x\Delta T = q_x S\Delta t - q_{x+\Delta x} S\Delta t - S_b \Delta t \alpha (T - T_0) + Q S\Delta x\Delta t \quad (2.1.2)$$

Подставляя в (2.1.2) выражения  $S_b = 2\pi R\Delta x$ ,  $S = \pi R^2$ , учитывая, что  $Q$  может быть функцией  $x$  и  $t$ , и разделяя на произведение  $S \cdot \Delta x \cdot \Delta t$ , получим:

$$c\rho \frac{\Delta T}{\Delta t} = -\frac{q_{x+\Delta x} - q_x}{\Delta x} - \frac{2\alpha}{R}(T - T_0) + Q(x, t). \quad (2.1.3)$$

Сделаем предельный переход при  $\Delta x \rightarrow 0$ ,  $\Delta t \rightarrow 0$ , получим:

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{2\alpha}{R}(T - T_0) + Q(x, t). \quad (2.1.4)$$

Подставляя выражение (2.1.1) в (2.1.4) получим:

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) - \frac{2\alpha}{R}(T - T_0) + Q(x, t). \quad (2.1.5)$$

Если коэффициент теплопроводности  $\lambda$  является постоянной величиной (это выполняется не всегда), то (2.1.5) можно переписать в виде:

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{2\alpha}{R}(T - T_0) + Q(x, t).$$

Если ввести обозначение  $\lambda/(c\rho) = a$  – коэффициент температуропроводности, то уравнение (2.1.5) можно записать в виде:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - h(T - T_0) + \bar{Q}(x, t), \quad h = \frac{2\alpha}{c\rho R}, \quad \bar{Q}(x, t) = \frac{Q(x, t)}{c\rho}.$$

При отсутствии теплообмена с окружающей средой и источников и стоков тепла уравнение теплопроводности запишется в виде:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}. \quad (2.1.6)$$

Это одномерное уравнение теплопроводности.

В случае, когда температура меняется во всех направлениях пространства и во времени, уравнение теплопроводности запишется в виде:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \Delta T, \quad (2.1.7)$$

где  $\Delta$  – оператор Лапласа<sup>9</sup>. В декартовой системе координат  $x, y, z$  уравнение (2.1.7) запишется в виде:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right). \quad (2.1.8)$$

---

<sup>9</sup> **Лаплас Пьер Симон** (Laplace Pierre Simon), род. 23.3.1749, Бомон-ан-Ож, Нормандия – ум. 5.3.1827, Париж. Французский астроном, математик и физик, иностранный почетный член Петербургской АН (с 13.10.1802), член Парижской АН (1785; адъюнкт с 1773), член Французской академии (1816). В 1766 Лаплас приехал в Париж, где Ж. Д'Аламбер через пять лет помог ему получить место профессора Военной школы. Деятельно участвовал в реорганизации системы высшего образования во Франции, в создании Нормальной и Политехнической школ. В 1790 Лаплас был назначен председателем Палаты мер и весов, руководил введением в жизнь новой метрической системы мер. С 1795 в составе руководства Бюро долгот. Научное наследие Лапласа относится к области небесной механики, математики и математической физики. Фундаментальными являются работы Лапласа по дифференциальным уравнениям, в частности по исследованию т. н. уравнения Лапласа, интегрированию методом «каскадов» уравнений с частными производными. Введенные Лапласом сферические функции имеют разнообразные применения. В алгебре Лапласу принадлежит важная теорема о представлении определителей суммой произведений дополнительных миноров (теорема Лапласа). Для разработки созданной им математической теории вероятностей Лаплас ввел т. н. производящие функции и широко применял преобразование, носящее его имя (преобразование Лапласа). Теория вероятностей явилась основой для изучения всевозможных статистических закономерностей, в особенности в области естествознания. До него первые шаги в этой области были сделаны Б.Паскалем, П.Ферма, Я.Бернулли и другими. Лаплас привел их выводы в систему, усовершенствовал методы доказательств, сделал их менее громоздкими; доказал (1812) теорему, носящую его имя (теорема Лапласа), развил теорию ошибок и способ наименьших квадратов, позволяющие находить наивероятнейшие значения измеренных величин и степень достоверности этих подсчетов. Классический труд Лапласа «Аналитическая теория вероятностей» («*Theorie analytique des probabilités*») издавался трижды при его жизни – в 1812, 1814 и 1820; в качестве введения к последним изданиям была помещена работа «Опыт философии теории вероятностей» (1814), в которой в популярной форме разъясняются основные положения и значение теории вероятностей.

Для определения температурного поля в телах цилиндрической формы переходят к цилиндрическим координатам  $r, \varphi, z$ ,

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = z,$$

и после замены переменных уравнение (2.1.8) запишется в виде:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right). \quad (2.1.9)$$

В сферической системе координат  $r, \varphi, \psi$ ,  $x = r \sin \varphi \cos \psi$ ,  $y = r \sin \varphi \sin \psi$ ,  $z = r \cos \varphi$ , уравнение (2.1.8) примет вид:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \left( \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \sin \varphi \frac{\partial T}{\partial \varphi} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \varphi} \frac{\partial^2 T}{\partial \psi^2} \right). \quad (2.1.10)$$

В случае осевой или центральной симметрии уравнения (2.1.9), (2.1.10) запишутся в виде, соответственно:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right), \quad (2.1.11)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right). \quad (2.1.12)$$

Аналогичное (2.1.6) уравнение получается при описании диффузии веществ. Поток массы вещества за счет диффузии, возникающей при неоднородном распределении концентрации компонентов в смеси, определяется законом Фика:

$$j = -D \frac{\partial \rho_A}{\partial x}, \quad (2.1.13)$$

где  $j$  – поток массы вещества в единицу времени через единицу площади, перпендикулярную градиенту концентрации вещества  $A$ ,  $\text{кг}/(\text{м}^2 \text{с})$ ;  $\rho_A$  – плотность вещества  $A$  в смеси,  $\text{кг}/(\text{м}^3)$ ;  $D$  – коэффициент диффузии,  $\text{м}^2/\text{с}$ .

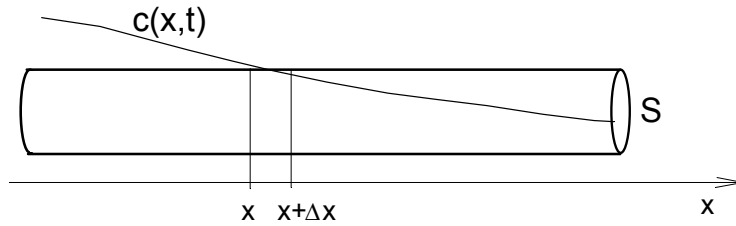


Рис. 2.2. К выводу уравнения диффузии

Рассмотрим трубку поперечного сечения  $S$ , в которой имеется неподвижная газовая смесь с неоднородной концентрацией вещества  $A$  (рис. 2.2). Выделим слой толщины  $\Delta x$ . Изменение массы вещества в этом слое за время  $\Delta t$  определяется равенством:

$$\Delta M = S\Delta x\Delta\rho_A = j_x S\Delta t - j_{x+\Delta x} S\Delta t. \quad (2.1.14)$$

Разделим (2.1.14) на произведение  $S \cdot \Delta x \cdot \Delta t$ , получим:

$$\frac{\Delta\rho_A}{\Delta t} = -\frac{\Delta j}{\Delta x}$$

Устремляем  $\Delta x \rightarrow 0$ ,  $\Delta t \rightarrow 0$ , подставляем (2.1.13), получим:

$$\frac{\partial\rho_A}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( D \frac{\partial\rho_A}{\partial x} \right). \quad (2.1.15)$$

При  $D = const$  уравнение перепишется в виде:

$$\frac{\partial\rho_A}{\partial t} = D \frac{\partial^2\rho_A}{\partial x^2}. \quad (2.1.16)$$

Уравнение (2.1.16) – уравнение диффузии.

Уравнения (2.1.6) и (2.1.16) по классификации уравнений в частных производных второго порядка относятся к параболическому типу [2] и с математической точки зрения одинаковы.

Решение уравнения (2.1.6)  $T(x, t)$  – функция двух переменных. Уравнение (2.1.6) имеет множество решений. Для получения однозначного решения уравнение (2.1.6) должно быть дополнено начальными и граничными условиями.

### 2.1.2. Начальные и граничные условия для уравнения теплопроводности

В общем случае уравнение теплопроводности имеет множество решений. Для того, чтобы уравнение теплопроводности имело единственное решение, моделировало конкретную физическую ситуацию, необходимо задание краевых условий. В качестве краевых условий для нестационарного уравнения теплопроводности задаются условия на границах рассматриваемого тела (граничные условия) и поле температур внутри тела в некоторый момент времени  $t_0$ ,  $T = T(x, y, z, t_0)$ , (начальные условия). Обычно значение  $t_0$  принимается за начало отсчета времени и задается равным нулю,  $t_0 = 0$ . В одномерном случае задается  $T = T(x, t_0)$ .

Граничные условия должны моделировать конкретные теплофизические условия на границах рассматриваемого тела. В зависимости от рассматриваемых теплофизических условий на границе тела ставится граничное условие I, II, III, или IV рода.

*Граничное условие I рода:* задаются значения температуры на поверхности тела, в общем случае в виде функции от времени:  $T(M, t) = f(M, t)$  (здесь  $M$  – точка, принадлежащая поверхности тела). В частном случае функция  $f(M, t)$  может быть постоянной величиной, когда поддерживается постоянная температура на поверхности тела. Граничное условие I рода моделирует, например, теплообмен тела с нагревателем, находящимся в идеальном контакте с телом.

*Граничное условие II рода:* задаются значения теплового потока в каждой точке поверхности тела, в общем случае в виде функции времени:  $\lambda \frac{\partial T(M, t)}{\partial n} \vec{l}_n = q(M, t)$ , где  $\vec{l}_n$  – вектор нормали к поверхности тела,  $q(M, t)$  – величина теплового потока на поверхность тела в точке  $M$ ,  $\lambda$  – коэффициент теплопроводности вещества тела. В частном случае функция  $q(M, t)$  может быть постоянной величиной. Граничное условие II рода моделирует лучистый нагрев от внешнего источника поверхности непрозрачного тела.

*Граничное условие III рода:* задается связь между температурой тела на его границе и теплового потока в тело:  $\lambda \frac{\partial T(M, t)}{\partial n} \vec{l}_n = \alpha (T(M, t) - T_0)$ , где  $\vec{l}_n$  – вектор нормали к поверхности тела,  $T_0$  – температура окружающей среды, находящейся в контакте с телом,  $\alpha$  – коэффициент теплообмена между окружающей средой и поверхностью тела.

Граничные условия III рода описывают конвективный теплообмен между телом и окружающей его средой (газом, жидкостью), имеющей температуру  $T_0$ . Такое описание теплообмена называется закон Ньютона для теплообмена.

С помощью граничных условий III рода можно описать теплообмен излучением между двумя телами. В соответствии с законом Стефана – Больцмана<sup>10</sup> результирующий тепловой поток между двумя телами с температурой их поверхности  $T_1$  и  $T_2$  можно записать в виде:

---

<sup>10</sup> БОЛЬЦМАН, ЛЮДВИГ (Boltzmann, Ludwig) (1844 – 1906), австрийский физик. Родился 20 февраля 1844 в Вене в семье служащего. По окончании гимназии в Линце поступил

$$q_{rez} = \sigma (T_2^4 - T_1^4 (M, t)).$$

где  $\sigma$  – постоянная Стефана – Больцмана.

Тогда поток тепла в первое тело

$$\lambda \frac{\partial T_1 (M, t)}{\partial n} \vec{l}_n = \sigma (T_2^4 - T_1^4 (M, t)). \quad (2.1.17)$$

Проводя дважды разложение разности квадратов вместо (2.1.17) запишем:

$$\lambda \frac{\partial T_1 (M, t)}{\partial n} \vec{l}_n = \alpha (T_1, T_2) (T_2 - T_1 (M, t)),$$

где

$$\alpha (T_1, T_2) = \sigma (T_2^2 + T_1^2) (T_2 + T_1).$$

Здесь коэффициент теплообмена будет функцией температуры поверхности тел.

---

в Венский университет, где учился у Й. Стефана и Й. Лосмидта. В 1866 защитил докторскую диссертацию, работал ассистентом у Стефана, затем стал приват-доцентом Венского университета. В 1869 – 1873 × 1876 – 1889 – профессор теоретической физики в университете Граца. К этому времени относится расцвет творческой деятельности Больцмана. В 1886–1892 он провел важнейшие исследования в области кинетической теории газов, вывел закон распределения молекул газа по скоростям, обобщив распределения Максвелла на случай, когда на газ действуют внешние силы (статистика Больцмана). Формула равновесного больцмановского распределения послужила основой классической статистической физики. В 1872, применив статистические методы к кинетической теории газов, вывел основное кинетическое уравнение газов. Установил фундаментальное соотношение между энтропией физической системы и вероятностью ее состояния, доказал статистический характер. В начале термодинамики, что указало на несостоятельность гипотезы «тепловой смерти» Вселенной. В том же году доказал так называемую  $H$ -теорему, утверждавшую, что  $H$ -функция, характеризующая состояние замкнутой системы, не может возрастать во времени. Эти исследования Больцмана заложили основу термодинамики необратимых процессов. Больцман впервые применил законы термодинамики к процессам излучения и в 1884 теоретически вывел закон теплового излучения, согласно которому энергия, излучаемая абсолютно черным телом, пропорциональна четвертой степени абсолютной температуры. В 1879 этот закон был экспериментально установлен Й. Стефаном и известен теперь как закон Стефана – Больцмана. Больцман был не только теоретиком, но и экспериментатором. Он провел первые опыты по проверке справедливости максвелловской теории электромагнетизма, измерил диэлектрические постоянные различных веществ, исследовал поляризацию диэлектриков. В 1890 ученый переехал из Граца в Мюнхен, где до 1894 занимал кафедру теоретической физики. Затем работал в Венском и Лейпцигском университетах. В последние годы жизни читал лекции по физике. Основные результаты исследований ученого представлены в его фундаментальных лекционных курсах – *Лекции о максвелловской теории электричества и света* (*Vorlesungen über Maxwells Theorie der Elektrizität und des Lichtes*, Bd. 1 – 2, 1891 – 1893); *Лекции по теории газов* (*Vorlesungen über Gastheorie*, Bd. 1 – 2, 1896 – 1898); *Лекции о принципах механики* (*Vorlesungen über die Prinzipien der Mechanik*, Bd. 1 – 3, 1897 – 1920). Жизнь Больцмана оборвалась трагически: он покончил с собой 5 сентября 1906 в Дуино (Италия).



*Граничное условие IV рода:* задаются соотношения для тепловых потоков и температур на границе двух тел (или сред), находящихся в идеальном контакте:

$$\lambda_1 \frac{\partial T_1(M, t)}{\partial n} \vec{l}_n = \lambda_2 \frac{\partial T_2(M, t)}{\partial n} \vec{l}_n$$

$$T_1(M, t) = T_2(M, t),$$

где  $\lambda_1, \lambda_2$  – коэффициенты теплопроводности первого и второго тела,  $T_1(M, t), T_2(M, t)$  – температуры первого и второго тела на границе их контакта.

Граничные условия IV рода моделируют идеальный тепловой контакт между плотно соприкасающимися телами, и имеют простой физический смысл: какое количество тепла подводится из глубины первого тела к его границе, такое же количество тепла отводится в глубь второго тела. Второе равенство следует из того, что двух значений температуры в одной точке пространства быть не может.

Если на границе двух тел происходит фазовый переход, то граничные условия необходимо записывать с учетом поглощения–выделения скрытой теплоты фазового перехода:

$$\lambda_1 \frac{\partial T_1(M, t)}{\partial n} \vec{l}_n - \lambda_2 \frac{\partial T_2(M, t)}{\partial n} \vec{l}_n = \rho r U,$$

(разность потоков тепла, подведенного к поверхности фазового перехода и отведенного от нее, расходуется на фазовый переход), где  $U = \partial x_b / \partial t$  – скорость движения границы фазового перехода,  $r$  – скрытая теплота фазового перехода.

### 2.1.3. Постановка задачи о теплопередаче слоя вещества

Пусть дан слой вещества толщины  $l$  с известными теплофизическими характеристиками, имеющий начальную температуру  $T_0$ . Внутри слоя имеются источники и стоки тепла,  $Q(x, t)$ . На левой границе слоя задана температура  $T_1$ , на правой границе происходит теплообмен по закону Ньютона с окружающей средой температуры  $T_2$ . Математическая постановка задачи имеет вид:

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + Q(x, t), \quad (2.1.18)$$

Начальное условие:

$$T(x, 0) = T_0,$$

Граничные условия:

$$\begin{aligned} T(0, t) &= T_1 \\ \lambda \frac{\partial T(l, t)}{\partial x} &= -\alpha(T(l, t) - T_2) \\ 0 \leq x \leq l, \quad t > 0 \end{aligned} \quad (2.1.19)$$

Решение задачи будет зависеть от  $x, t, c, \rho, \lambda, \alpha, l, T_0, T_1, T_2$  и характеристик источника  $Q(x, t)$ .

Бывает удобно привести задачу (2.1.18) – (2.1.19) к безразмерному виду [3]. Тогда количество параметров, определяющих решение, уменьшается.

Будем измерять ширину слоя не в метрах, а в толщинах этого слоя. Введем независимую переменную  $\xi = x/l$ . Тогда толщина слоя будет равна 1. Будем измерять температуру не в градусах, а в температурных интервалах  $\Delta T$ . В задаче (2.1.18) – (2.1.19) в качестве  $\Delta T$  удобно выбрать  $\Delta T = T_1 - T_0$ . Введем зависимую переменную  $\vartheta$  – безразмерную температуру,  $\vartheta = \frac{T(x, t) - T_0}{T_1 - T_0}$ . Проводя замену переменных  $x$  и  $T$  в уравнении (2.1.18) получим:

$$\frac{c\rho l^2}{\lambda} \frac{\partial \vartheta}{\partial t} = \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \xi^2} + \frac{Q(\xi, t)l^2}{\lambda(T_1 - T_0)}.$$

Величина  $c\rho l^2/\lambda$  имеет размерность *секунды*. Примем величину  $t_* = c\rho l^2/\lambda$  за масштаб времени и введем безразмерную независимую переменную  $\tau = t/t_*$ . Тогда уравнение (2.1.18) запишется в виде:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \xi^2} + \bar{Q}(\xi, \tau),$$

Где

$$\bar{Q}(\xi, t) = \frac{Q(\xi, \tau)l^2}{\lambda(T_1 - T_0)}.$$

В новых переменных начальное условие запишется в виде:  $\vartheta(\xi, 0) = 0$ , граничное условие при  $\xi = 0$ :  $\vartheta(0, \tau) = 1$ .

Проведем замену переменных в граничном условии при  $x = l$  (2.1.19):

$$\frac{\partial \vartheta(1, \tau)}{\partial \xi} = -\frac{\alpha l}{\lambda} (\vartheta(1, \tau) - \vartheta_2), \quad \vartheta_2 = \frac{T_2 - T_0}{T_1 - T_0}.$$

Введя обозначение  $Bi = \frac{\alpha l}{\lambda}$  – число Био<sup>11</sup>, перепишем в виде:

$$\frac{\partial \vartheta(1, \tau)}{\partial \xi} = -Bi (\vartheta(1, \tau) - \vartheta_2)$$

Итак, задача (2.1.18) – (2.1.19) в безразмерных переменных принимает вид:

---

<sup>11</sup> **Жан Батист Био** – французский физик. Родился в Париже Окончил Политехническую школу (1797). С 1800 г. – профессор Коллеж де Франс, в 1808 – 1849 гг. – Парижского университета. Член Парижской АН (1803), Лондонского королевского общества (1815), Петербургской АН (1819). Медаль Б. Румфорда (1840). Научные работы посвящены оптике, электромагнетизму, акустике, истории науки. С 1806 г. работал в составе геодезической комиссии, производившей измерения длины меридиана. В начале своей научной деятельности занимался небесной механикой и исследованием свойств газов. В 1804 г. совместно с Ж. Л. Гей-Люссаком совершил полёт на аэростате для изучения свойств воздуха на различных высотах. Выполнил ряд исследований по определению скорости звука в твердых телах (1809, 1823). В 1811 г. Био открыл поляризацию света при преломлении (независимо от Э. Малюса), в 1815 г. – круговую поляризацию (независимо от Д. Араго и Д. Брюстера). Исследовал поляризационные свойства многих веществ. Обнаружил оптическую активность некоторых жидкостей (в частности, в 1815 г. у скипида), установив, что они обладают способностью вращать плоскость поляризации. Открыл закон вращения плоскости поляризации света (закон Био) и установил существование право- и левовращательных веществ (1815). Его исследования явления вращения плоскости поляризации света в кристаллах и растворах органических веществ положили начало сахариметрии (1836). В 1820 г. вместе с Ф. Саваром открыл закон, определяющий напряженность магнитного поля прямого тока (закон Био – Савара). Совместно с Араго выполнил измерения плотности и показателя преломления различных газов (1806). Переоткрыл (1814) поляризационные свойства турмалина. В области математики работал над теорией кривых второго порядка, предложил первую классификацию дифференциально-разностных уравнений. В области математической физики исследовал некоторые задачи теории дифференциальных уравнений с частными производными, связанные с колебаниями поверхностей. Изучал египетскую и китайскую астрономию. Занимался вопросами истории науки, в особенности изучением трудов И. Ньютона. Написал (1803) «Общую историю наук в годы Революции». Автор широко известного курса экспериментальной и математической физики (1816).

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \xi^2} + \bar{Q}(\xi, \tau), \quad (2.1.20)$$

$$\begin{aligned} \vartheta(\xi, 0) &= 0, \\ \vartheta(0, \tau) &= 1, \end{aligned} \quad (2.1.21)$$

$$\frac{\partial \vartheta(1, \tau)}{\partial \xi} = -Bi(\vartheta(1, \tau) - \vartheta_2).$$

$$0 \leq \xi \leq 1, \tau > 0$$

В задаче (2.1.20) – (2.1.21) решение зависит только от  $\xi$ ,  $\tau$ ,  $Bi$  и характеристик источника  $\bar{Q}(\xi, \tau)$ . Получив решение задачи (2.1.20) – (2.1.21) можно легко перейти к размерным величинам:  $t = \tau \cdot t_*$ ,  $x = \xi \cdot l$ ,  $T(x, t) = \vartheta(x/l, t/t_*)(T_1 - T_0) + T_0$ .

Аналитическое решение неоднородного уравнения теплопроводности с соответствующими начальными и граничными условиями может быть получено лишь в случае простых видов функции  $\bar{Q}(\xi, \tau)$ , либо приближенно, упрощая вид функции  $\bar{Q}(\xi, \tau)$ . Эффективным средством решения задач являются численные методы.

## 2.2. Численные методы решения задач теплопроводности

### 2.2.1. Идея метода численного решения задач теплопроводности

Способ решения дифференциальных уравнений, основанный на замене дифференциальных операторов их приближенными значениями в отдельных точках, называется *методом конечных разностей*, или *методом сеток*. Рассмотрим метод на решении простой задачи теплопроводности с граничными условиями первого рода:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \xi^2} + Q(\xi, \tau), \quad (2.2.1)$$

$$\begin{aligned} \vartheta(\xi, 0) &= \vartheta_0, \quad \vartheta(0, \tau) = \vartheta_1, \quad \vartheta(1, \tau) = \vartheta_2 \\ 0 \leq \xi \leq 1, \tau > 0 \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

$\vartheta(\xi, \tau)$  – безразмерная температура,  $Q(\xi, \tau)$  – функция распределения источников тепла. Заданы начальная температура  $\vartheta_0$ , температура на левой границе  $\vartheta_1$  и на правой границе  $\vartheta_2$ . Область изменения искомой функции  $\vartheta(\xi, \tau): G \in [0 \leq \xi \leq 1, \tau \geq 0]$

Чтобы найти решение задачи (2.2.1) – (2.2.2) методом конечных разностей перейдем от исходной дифференциальной задачи к разностной. Для этого заменим область непрерывного изменения искомой функции  $\vartheta(\xi, \tau)$ ,  $[0 \leq \xi \leq 1, \tau \geq 0]$ , дискретным множеством точек  $G_{h\tau}$ . Пусть дискретное множество точек  $G_{h\tau}$  такое, что равномерно покрывает всю область (рис. 2.3), и их координаты определяются выражениями

$$\xi_k = kh, \quad k = 0, 1, 2, \dots, K, \quad \tau^n = n\Delta\tau, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

где  $h$  – шаг сетки по пространству,  $\Delta\tau$  – шаг сетки по времени. Набор узлов  $(\xi_k, \tau^n)$ , соответствующий фиксированному моменту времени называется *n* *временным слоем*.

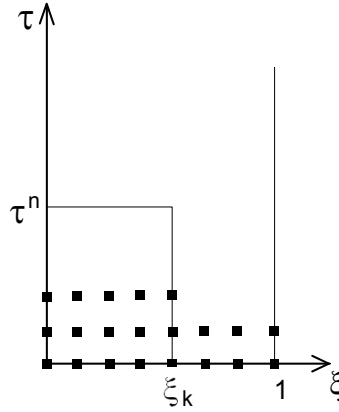


Рис. 2.3. Область изменения искомой функции

Вместо непрерывных функций  $\vartheta(\xi, \tau)$ ,  $Q(\xi, \tau)$  вводятся их числовые последовательности, определенные в точках сетки  $(\xi_k, \tau^n)$ :  $\vartheta_k^n = \vartheta(\xi_k, \tau^n)$ ,  $Q_k^n = Q(\xi_k, \tau^n)$  (пространственные узлы сетки – подстрочные индексы, временные – надстрочные).

Будем предполагать, что значения рассматриваемых сеточных функций совпадают с соответствующими значениями непрерывных в

узлах сетки,  $\vartheta_k^n = \vartheta(\xi_k, \tau^n)$ . Решение дифференциальной задачи (2.2.1) – (2.2.2) сводится к определению таблицы  $\vartheta_k^n$  числовых значений ее точного решения  $\vartheta(\xi, \tau)$  в точках сетки  $G_{h\tau}$ . Эту задачу можно решить приближенно, если перейти от дифференциальной задачи (2.2.1) – (2.2.2) к аппроксимирующему ее разностному уравнению. Для этого заменим производные, содержащиеся в уравнении, разностными соотношениями.

По определению производной как предела

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial \xi} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\vartheta(\xi + h, \tau) - \vartheta(\xi, \tau)}{h}.$$

Зафиксировав  $h$  в этом равенстве, получим приближенную формулу для первой производной через конечные разности:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial \xi} \approx \frac{\vartheta(\xi + h, \tau) - \vartheta(\xi, \tau)}{h}.$$

Производная второго порядка аппроксимируется в виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \xi^2} &\approx \frac{1}{h} \left[ \frac{\vartheta(\xi + h, \tau) - \vartheta(\xi, \tau)}{h} - \frac{\vartheta(\xi, \tau) - \vartheta(\xi - h, \tau)}{h} \right] = \\ &= \frac{1}{h^2} (\vartheta(\xi + h, \tau) - 2\vartheta(\xi, \tau) + \vartheta(\xi - h, \tau)), \\ \frac{\partial \vartheta}{\partial \tau} &\approx \frac{\vartheta(\xi, \tau + \Delta\tau) - \vartheta(\xi, \tau)}{\Delta\tau}. \end{aligned}$$

Переходя к сеточным функциям можно записать:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial \tau} \approx \frac{\vartheta_k^{n+1} - \vartheta_k^n}{\Delta\tau}, \quad \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \xi^2} \approx \frac{\vartheta_{k+1}^n - 2\vartheta_k^n + \vartheta_{k-1}^n}{h^2}.$$

Заменив в уравнении (2.2.1) производные разностными соотношениями, получим разностные уравнения.

Введем обозначение  $\theta_k^n$  – приближенное решение дифференциальной задачи  $\theta_k^n = \theta(\xi_k, \tau^n) \approx \vartheta(\xi_k, \tau^n) = \vartheta_k^n$ , имея ввиду, что решение разностной задачи отличается от решения исходной дифференциальной задачи из-за приближенного определения производных. С учетом введенного обозначения (2.2.1) в разностной форме запишется в виде:

$$\frac{\theta_k^{n+1} - \theta_k^n}{\Delta\tau} = \frac{\theta_{k+1}^n - 2\theta_k^n + \theta_{k-1}^n}{h^2} + Q_k^n, \quad (2.2.3)$$

$$k = 0, 1, 2, \dots, K, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

Начальные условия:  $\theta_k^0 = \vartheta_k^0 = \vartheta_0$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots, K$ .

Граничные условия:  $\theta_0^n = \vartheta_0^n = \vartheta_1$ ,  $\theta_K^n = \vartheta_K^n = \vartheta_2$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ .

Таким образом, исходная дифференциальная задача (2.2.1) – (2.2.2) сведена к разностной задаче (2.2.3). Совокупность разностных уравнений и краевых условий, записанных в разностной форме, называют *конечно-разностной схемой*.

Алгоритм решения задачи (2.2.3) прост. Если для некоторого момента времени  $\tau^n = n\Delta\tau$  решение  $\theta_k^n$  известно, то значения  $\theta_k^{n+1}$  для любого  $k$  может быть вычислено по формуле:

$$\theta_k^{n+1} = \frac{\Delta\tau}{h^2} \theta_{k+1}^n + \left(1 - 2 \frac{\Delta\tau}{h^2}\right) \theta_k^n + \frac{\Delta\tau}{h^2} \theta_{k-1}^n + \Delta\tau Q_k^n. \quad (2.2.4)$$

Так как для начального момента времени  $\tau = 0$   $\theta_k^n$  заданы, то можно последовательно определять  $\theta_k^1$  для  $k = 1, 2, \dots, K-1$ ,  $\theta_k^2$ , ...,  $\theta_k^n$ .

### 2.2.2. Понятие аппроксимации

При использовании метода конечных разностей дифференциальная задача заменяется разностной. Для близости решений этих задач необходимо, чтобы в пределе при стремлении к нулю шагов сетки по времени и пространству решение разностной задачи совпало с решением дифференциальной. Если это выполняется, то говорят, что разностная схема *аппроксимирует* дифференциальную задачу.

При замене дифференциальной задачи разностной допускается ошибка – *погрешность аппроксимации*. Погрешность аппроксимации характеризуется величиной *невязки*, которая получается при подстановке точного решения исходной задачи в разностную.

Предположим, что известно точное решение дифференциальной задачи (2.2.1)  $\vartheta(\xi, \tau)$ . Вычислим его в точках сетки  $\xi_k = kh$ ,  $\tau^n = n\Delta\tau$ ,  $\vartheta(\xi_k, \tau^n)$  и подставим в разностную (2.2.3), получим величину невязки:

$$\delta_h = \frac{\vartheta_k^{n+1} - \vartheta_k^n}{\Delta\tau} - \frac{\vartheta_{k+1}^n - 2\vartheta_k^n + \vartheta_{k-1}^n}{h^2} + Q_k^n.$$

Говорят, что разностная задача аппроксимирует дифференциальную на решении  $\vartheta(\xi, \tau)$  с порядком  $p$  относительно  $\Delta\tau$  и  $q$  относительно  $h$ , если при  $\Delta\tau, h \rightarrow 0$  для погрешности аппроксимации выполняется неравенство:

$$\|\delta\| \leq M_1 (\Delta\tau)^p + M_2 h^q,$$

где  $M_1, M_2, p, q$  – положительные константы и не зависят от  $\Delta\tau$  и  $h$ ,

$\|\delta\| = \max_{k,n} |\delta_k^n|$  – максимум модуля погрешности аппроксимации.

Проверка аппроксимации проводится единообразно для всех разностных схем на основе разложения точного решения дифференциальной задачи в узлах сетки в ряд Тейлора<sup>12</sup>. Проиллюстрируем это на примере задачи (2.2.1) – (2.2.2). Установим порядок аппроксимации схемы (2.2.3), оценив порядок невязки  $\delta_h$ . В задаче (2.2.3) краевые условия аппроксимируются точно, поэтому величина невязки  $\delta_h$  будет определяться только погрешностью, с которой разностное уравнение аппроксимирует исходное, (2.2.1). Разложим функцию

$$\vartheta_{k+1}^n = \vartheta(\xi_k + h, \tau^n), \vartheta_{k-1}^n = \vartheta(\xi_k - h, \tau^n), \vartheta_k^{n+1} = \vartheta(\xi_k, \tau^n + \Delta\tau)$$

в окрестности точки  $(\xi_k, \tau^n)$  в ряд Тейлора, полагая, что функция  $\vartheta(\xi, \tau)$  удовлетворяет условиям гладкости, имеет достаточное число ограниченных производных (большинство задач теплообмена удовлетворяет этим требованиям).

$$\begin{aligned} \vartheta(\xi_k + h, \tau^n) &= \vartheta(\xi_k, \tau^n) + \frac{\partial \vartheta(\xi_k, \tau^n)}{\partial \xi} h + \frac{\partial^2 \vartheta(\xi_k, \tau^n)}{\partial \xi^2} \frac{h^2}{2} + \\ &\quad + \frac{\partial^3 \vartheta(\xi_k, \tau^n)}{\partial \xi^3} \frac{h^3}{3!} + \frac{\partial^4 \vartheta(\xi_k, \tau^n)}{\partial \xi^4} \frac{h^4}{4!} + o(h^5) \\ \vartheta(\xi_k - h, \tau^n) &= \vartheta(\xi_k, \tau^n) - \frac{\partial \vartheta(\xi_k, \tau^n)}{\partial \xi} h + \frac{\partial^2 \vartheta(\xi_k, \tau^n)}{\partial \xi^2} \frac{h^2}{2} - \\ &\quad + \frac{\partial^3 \vartheta(\xi_k, \tau^n)}{\partial \xi^3} \frac{h^3}{3!} - \frac{\partial^4 \vartheta(\xi_k, \tau^n)}{\partial \xi^4} \frac{h^4}{4!} + o(h^5) \end{aligned}$$

<sup>12</sup> **Тейлор Брук** (Taylor Brook), род. 18.8.1685, Эдмонтон, Мидлсекс – ум. 29.12.1731, Лондон. Английский математик, чл. Лондонского королевского общества (1712). Нашел (1712) общую формулу (т.н. формулу Тейлора) для разложения функций в степенные ряды (ряды Тейлора), которую опубликовал в труде «Прямой и обратный метод приращений» («Methodus incrementorum directa et inverse», L., 1715). В этом же труде Тейлор положил начало математическому изучению задачи о колебании струны. Ему принадлежат заслуги в разработке теории конечных разностей. Тейлор также автор работ о перспективе, центре качания, полете снарядов, взаимодействии магнитов, капиллярности и др. К концу жизни занимался вопросами философии.



$$\vartheta(\xi_k, \tau^n + \Delta\tau) = \vartheta(\xi_k, \tau^n) + \frac{\partial\vartheta(\xi_k, \tau^n)}{\partial\tau} \Delta\tau + \frac{\partial^2\vartheta(\xi_k, \tau^n)}{\partial\tau^2} \frac{\Delta\tau^2}{2} + o(\Delta\tau^3)$$

На основе выписанных соотношений получим:

$$\frac{\theta_k^{n+1} - \theta_k^n}{\Delta\tau} = \left( \frac{\partial\vartheta}{\partial\tau} \right)_k^n + \frac{\partial^2\vartheta}{\partial\tau^2} \frac{\Delta\tau}{2} + o(\Delta\tau^2),$$

$$\frac{\theta_{k+1}^n - 2\theta_k^n + \theta_{k-1}^n}{h^2} = \left( \frac{\partial^2\vartheta}{\partial\xi^2} \right)_k^n + \frac{\partial^4\vartheta}{\partial\xi^4} \frac{h^2}{12} + o(h^3).$$

Подставляя эти выражения в (2.2.3) получим:

$$\delta_h = \left( \frac{\partial\vartheta}{\partial\tau} \right)_k^n - \left( \frac{\partial^2\vartheta}{\partial\xi^2} \right)_k^n - Q_k^n + \frac{\partial^2\vartheta}{\partial\tau^2} \frac{\Delta\tau}{2} - \frac{\partial^4\vartheta}{\partial\xi^4} \frac{h^2}{12} + o(h^3 + \Delta\tau^2).$$

Поскольку  $\vartheta(\xi, \tau)$  точно удовлетворяет уравнению (2.2.1), то

$$\left( \frac{\partial\vartheta}{\partial\tau} \right)_k^n - \left( \frac{\partial^2\vartheta}{\partial\xi^2} \right)_k^n - Q_k^n = 0,$$

$$\delta_h = \frac{\partial^2\vartheta}{\partial\tau^2} \frac{\Delta\tau}{2} - \frac{\partial^4\vartheta}{\partial\xi^4} \frac{h^2}{12} + o(h^3 + \Delta\tau^2).$$

Верхняя оценка модуля  $\delta_h$  определяется соотношением

$$|\delta_h| = \Delta\tau \frac{1}{2} \max \left| \frac{\partial^2\vartheta}{\partial\tau^2} \right| - h^2 \frac{1}{12} \max \left| \frac{\partial^4\vartheta}{\partial\xi^4} \right| = \Delta\tau M_1 - h^2 M_2.$$

Таким образом, конечно-разностная схема (2.2.3) аппроксимирует дифференциальное уравнение с первым порядком по  $\Delta\tau$  и вторым порядком по  $h$ . Разностная задача (2.2.3) аппроксимирует задачу (2.2.1) – (2.2.2) на ее решении с точностью  $o(\Delta\tau + h^2)$ .

*Замечание 1.* Если краевые условия задачи или ее правая часть аппроксимируются с погрешностью, то величину этой погрешности необходимо учитывать при оценке  $\delta_h$ . Например, если разностная аппроксимация граничного условия II или III рода проводится по двум точкам, что обеспечивает первый порядок по пространству, то тогда вся задача имеет порядок аппроксимации  $o(\Delta\tau + h)$ , несмотря на то, что уравнение аппроксимируется с порядком  $o(\Delta\tau + h^2)$ .

*Замечание 2.* Шаги разностной сетки всегда имеют конечную величину, поэтому решение разностной задачи всегда будет отличаться от точного решения дифференциальной задачи. И чем грубее сетка (чем больше  $\Delta\tau$  и  $h$ ), тем значительнее это отличие.

### 2.2.3. Понятие устойчивости разностной схемы

Кроме точности аппроксимации источником отклонения численного решения от точного являются ошибки округления. Компьютер выполняет арифметические операции с конечным числом значащих цифр. В зависимости от организации вычислительного алгоритма эти ошибки округления в процессе счета могут затухать или возрастать. В первом случае говорят, что *численный метод устойчив*, во втором – *неустойчив*. Для решения практических задач используются только устойчивые алгоритмы.

Проанализируем устойчивость разностной схемы (2.2.3) для решения задачи (2.2.1) – (2.2.2).

Введем обозначение  $r = \Delta\tau/h^2$  – число Куранта<sup>13</sup> и перепишем (2.2.4) в виде:

$$\theta_k^{n+1} = r\theta_{k+1}^n + (1-2r)\theta_k^n + r\theta_{k-1}^n + \Delta\tau Q_k^n. \quad (2.2.5)$$

Решение разностной задачи отличается от точного решения в точках  $(\xi_k, \tau^n)$  на величину  $\varepsilon_k^n$ :

$$\theta_k^n - \vartheta_k^n = \varepsilon_k^n.$$

Подставим

$$\theta_k^n = \vartheta_k^n + \varepsilon_k^n$$

в уравнение (2.2.5) и учитывая, что разностная схема аппроксимирует задачу (2.2.1) – (2.2.2) с точностью порядка  $o(\Delta\tau + h^2)$ ,

$$\vartheta_k^{n+1} - r\vartheta_{k+1}^n - (1-2r)\vartheta_k^n - r\vartheta_{k-1}^n - \Delta\tau Q_k^n = \Delta\tau o(\Delta\tau + h^2),$$

получим

---

<sup>13</sup> **Курант Рихард** (Courant Richard), род. 08.01.1888, Люблинец, Польша – ум. 27.01.1972, Нью-Йорк. Математик, иностранный член РАН (с 08.02.1966). Учился в университетах в Бреслау (Вроцлав) и Цюрихе. Профессор Гёттингенского (1920–1933) и Нью-Йоркского (с 1934) университетов. Основные труды по теории конформных отображений, краевым задачам для уравнений математической физики.

$$\varepsilon_k^{n+1} = r\varepsilon_{k+1}^n + (1-2r)\varepsilon_k^n + r\varepsilon_{k-1}^n + \Delta\tau o(\Delta\tau + h^2). \quad (2.2.6)$$

Соотношение (2.2.6) описывает процесс эволюции ошибки при переходе от одного временного уровня к другому. Если  $0 < r < 1/2$ , то коэффициенты при  $\varepsilon_{k+1}^n$ ,  $\varepsilon_k^n$ ,  $\varepsilon_{k-1}^n$  положительны и можно записать неравенство:

$$\begin{aligned} |\varepsilon_k^{n+1}| &\leq r|\varepsilon_{k+1}^n| + (1-2r)|\varepsilon_k^n| + r|\varepsilon_{k-1}^n| + \Delta\tau o(\Delta\tau + h^2) \leq \\ &\leq \max(|\varepsilon_{k+1}^n|, |\varepsilon_k^n|, |\varepsilon_{k-1}^n|) + \Delta\tau o(\Delta\tau + h^2) \end{aligned}$$

Так как это неравенство справедливо для всех значений  $k$ , то справедливо также

$$\max|\varepsilon_k^{n+1}| \leq \max(|\varepsilon_k^n|) + \Delta\tau o(\Delta\tau + h^2),$$

которое показывает, что максимальное отклонение  $\varepsilon$  увеличивается за один шаг  $\Delta\tau$  не более чем на величину  $\Delta\tau o(\Delta\tau + h^2)$ . Следовательно, за  $N$  шагов по времени

$$\max|\varepsilon_k^N| \leq \max(|\varepsilon_k^0|) + N\Delta\tau o(\Delta\tau + h^2).$$

Если  $\varepsilon_k^0 = 0$  (начальные условия заданы точно), то в пределе получим

$$\max|\varepsilon_k^N| \leq N\Delta\tau o(\Delta\tau + h^2).$$

Таким образом, если условие  $0 < r < 1/2$  выполнено, то при стремлении  $\Delta\tau$  и  $h$  к нулю ошибки округления не возрастают со временем, разностная схема (2.2.5) устойчива.

Рассмотрим теперь случай  $r > 1/2$ . В этом случае знак погрешности  $\varepsilon_k$  в узлах  $\xi_k$  будет чередоваться, и зависеть от индекса  $k$ . Ее можно представить в виде суммы, одно из слагаемых которого имеет вид  $(-1)^k \varepsilon$ . Пусть погрешность округления при аппроксимации начальных условий имеет вид:

$$\varepsilon_k^0 = (-1)^k \varepsilon.$$

Подставляя это выражение в (2.2.6) получим:

$$\varepsilon_k^1 = r(-1)^{k+1} \varepsilon + (1-2r)(-1)^k \varepsilon + r(-1)^{k-1} \varepsilon = (1-4r)(-1)^k \varepsilon.$$

После  $n$  шагов получим:

$$\varepsilon_k^n = (1-4r)^n (-1)^k \varepsilon.$$

При  $|1 - 4r| \leq 1$  ошибка затухает, в противном случае – возрастает. Это приводит к тому, что решение  $\theta_k^n$  становится хаотичным и теряет физический смысл.

Итак, установлено, что при  $r < 1/2$  ( $\Delta\tau < h^2/2$ ) решение  $\theta_k^n$  разностной задачи (2.2.3) при стремлении  $\Delta\tau$  и  $h$  к нулю будет приближаться к точному решению дифференциальной задачи (2.2.1), при  $\Delta\tau > h^2/2$  ( $r > 1/2$ ) разностная схема (2.2.3) неустойчива.

*Теорема сходимости.* Если разностная краевая задача аппроксимирует дифференциальную на ее точном решении и устойчива, то решение разностной задачи при измельчении сетки сходится к точному решению дифференциальной задачи и порядок точности разностной схемы совпадает с порядком аппроксимации.

Теорема сходимости указывает способ построения сходящейся разностной схемы для численного решения дифференциальной задачи: необходимо строить аппроксимирующую ее разностную схему и из многих возможных способов аппроксимации следует выбирать такой, при котором разностная схема будет устойчивой.

Пример. Рассмотрим решение задачи (2.2.3) с начальным условием вида:  $\vartheta_k^0 = 0$ ,  $k = 0, 1, 2, 3, 5, 6, 7, 8$ ,  $\vartheta_4^0 = 1$ .

При  $r = 1/4$  (2.2.5) запишется в виде:

$$\theta_k^{n+1} = \frac{1}{4}\theta_{k+1}^n + \frac{1}{2}\theta_k^n + \frac{1}{4}\theta_{k-1}^n. \quad (2.2.7)$$

Подставим  $\vartheta_k^0$  в (2.2.7), получим  $\theta_k^1$ , затем подставим  $\theta_k^1$  в (2.2.7), получим  $\theta_k^2$ , и т. д. Результаты расчетов представлены на рис. 2.4 а.

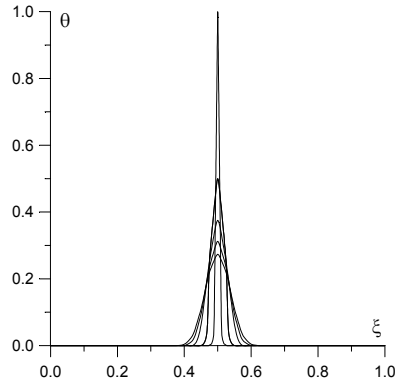
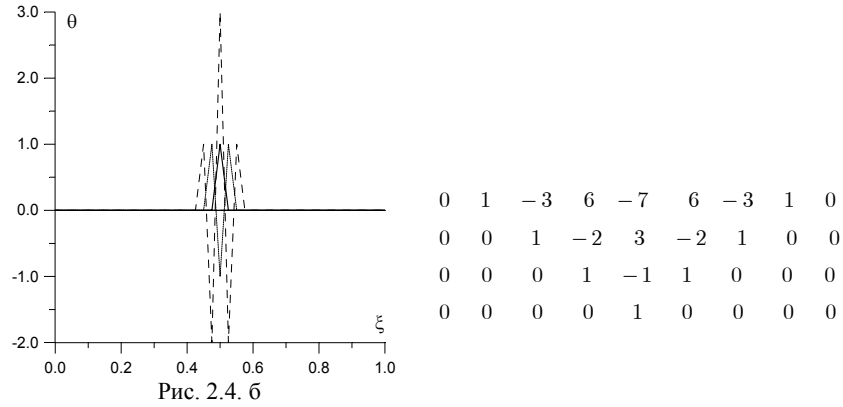


Рис. 2.4. а

0	1/16	1/8	1/4	5/16	1/4	1/8	1/16	0
0	0	1/8	1/4	3/8	1/4	1/8	0	0
0	0	0	1/4	1/2	1/4	0	0	0
0	0	0	0	1	0	0	0	0



При  $r = 1$  (2.2.5) запишется в виде:

$$\theta_k^{n+1} = \theta_{k+1}^n - \theta_k^n + \theta_{k-1}^n.$$

Аналогичные расчеты представлены на рис. 2.4 б.

Видно, что решение становится немонотонным, знакопеременным, хаотическим, и никакого отношения не имеющим к задаче теплопроводности.

#### 2.2.4. Исследование устойчивости разностных схем

Исследование устойчивости линейных разностных схем с постоянными коэффициентами проводится при помощи спектрального метода, метода гармоник, с использованием принципа максимума.

Исследуем устойчивость схемы (2.2.3) методом гармоник. Запишем решение  $\theta_k^n$  в виде:

$$\theta_k^n = \theta_0 \lambda^n e^{i\varphi k h}, \quad (2.2.8)$$

где  $i$  – мнимая единица,  $\varphi$  – произвольное действительное число. Подставим решение (2.2.8) в разностную схему (2.2.3)

$$\frac{\theta_0 e^{i\varphi k h} (\lambda^{n+1} - \lambda^n)}{\Delta \tau} = \frac{\theta_0 e^{i\varphi (k+1)h} - 2\theta_0 e^{i\varphi k h} + \theta_0 e^{i\varphi (k-1)h}}{h^2} \lambda^n,$$

После сокращения:

$$\frac{\lambda - 1}{\Delta \tau} = \frac{e^{i\varphi h} - 2 + e^{-i\varphi h}}{h^2}. \quad (2.2.9)$$

С использованием формулы Эйлера (2.2.9) преобразуется к виду:

$$\lambda = 1 + \frac{\Delta\tau}{h^2} (2 \cos(\varphi h) - 2) = 1 - 4 \frac{\Delta\tau}{h^2} \sin^2\left(\frac{\varphi h}{2}\right).$$

Из (2.2.8) решение на следующем временном слое  $\theta_k^{n+1} = \lambda \theta_k^n$ . Оно будет ограничено, если выполняется условие  $|\lambda| < 1$ .

$$\left| 1 - 4 \frac{\Delta\tau}{h^2} \sin^2\left(\frac{\varphi h}{2}\right) \right| < 1, \Rightarrow 4 \frac{\Delta\tau}{h^2} < 2, \Rightarrow \frac{\Delta\tau}{h^2} < 1/2.$$

Полученное условие соответствует условию устойчивости схемы (2.2.3),  $r < 1/2$ .

Принцип максимума для разностного оператора  $L_h$  вида

$$L_h \theta_h = A_k \theta_{k+1} + B_k \theta_k + C_k \theta_{k-1}, \quad k = 1, 2, 3, \dots, K-1$$

формулируется следующим образом:

Если для всех точек разностной сетки выполнены условия

$$A_k > 0, \quad C_k > 0, \quad -B_k > A_k + C_k, \quad (2.2.10)$$

то функция достигает своего наибольшего положительного (наименьшего отрицательного) значения только на границе сеточной области. Выполнение условий (2.2.10) эквивалентно выполнению неравенства

$$\max |\theta_k^{n+1}| \leq \max |\theta_k^n|,$$

и такая разностная схема устойчива.

Удовлетворение принципу максимума является для линейной разностной схемы достаточным условием ее устойчивости. Принцип максимума позволяет проводить исследование устойчивости разностных задач с переменными коэффициентами.

### 2.2.5. Аппроксимации дифференциальных операторов

Простейший дифференциальный оператор  $\frac{\partial u}{\partial x}$  может быть заменен одним из следующих разностных операторов с соответствующим порядком аппроксимации:

$$\frac{u_{k+1} - u_k}{h} = \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_k + \left[ \frac{h}{2} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_k + \dots \right], \quad o(h), \quad (2.2.11)$$

$$\frac{u_k - u_{k-1}}{h} = \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_k + \left[ -\frac{h}{2} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_k + \dots \right], \quad o(h), \quad (2.2.12)$$

$$\frac{u_{k+1} - u_{k-1}}{2h} = \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_k + \left[ \frac{h^2}{6} \left( \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right)_k + \dots \right], \quad o(h^2). \quad (2.2.13)$$

Выражения (2.2.11), (2.2.12) называются правой и левой разностной производной, (2.2.13) – центральной разностной производной.

При построении разностных алгоритмов иногда применяются трехточечные аппроксимации первой производной:

$$\frac{-3u_k + 4u_{k+1} - u_{k+2}}{2h} = \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_k + \left[ -\frac{h^2}{3} \left( \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right)_k + \dots \right], \quad o(h^2), \quad (2.2.14)$$

$$\frac{3u_k - 4u_{k-1} + u_{k-2}}{2h} = \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_k + \left[ \frac{h^2}{3} \left( \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right)_k + \dots \right], \quad o(h^2). \quad (2.2.15)$$

Производная  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  обычно аппроксимируется на трехточечном шаблоне:  $x_k - h_{k-1}$ ,  $x_k$ ,  $x_k + h_k$ , при  $h_k \neq h_{k-1}$

$$\begin{aligned} \frac{2}{h_{k-1} + h_k} \left( \frac{u_{k+1} - u_k}{h_k} - \frac{u_k - u_{k-1}}{h_{k-1}} \right) &= \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_k + \\ &+ \left[ \frac{h_k - h_{k-1}}{3} \left( \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right)_k + \dots \right], \quad o(h), \end{aligned} \quad (2.2.16)$$

При  $h_k = h_{k-1} = h$

$$\frac{u_{k+1} - 2u_k + u_{k-1}}{h^2} = \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_k + \left[ \frac{h^2}{12} \left( \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \right)_k + \dots \right], \quad o(h^2). \quad (2.2.17)$$

На равномерной сетке  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  аппроксимируется с порядком  $o(h^2)$ , на неравномерной –  $o(h)$ .

Производные  $\frac{\partial u}{\partial x}$  и  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  можно аппроксимировать с большим порядком аппроксимации привлекая соответственно большее количество точек, например:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_{k-2} - 8u_{k-1} + 8u_{k+1} - u_{k+2}}{12h} + o(h^4),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{-u_{k-2} + 16u_{k-1} - 30u_k + 16u_{k+1} - u_{k+2}}{12h^2} + o(h^4).$$

### 2.2.6. Явная разностная схема для уравнения теплопроводности с постоянными коэффициентами

Для численного решения уравнения теплопроводности с постоянными коэффициентами

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \xi^2} + Q(\xi, \tau) \quad (2.2.18)$$

введем равномерную разностную сетку с координатами узлов  $(\xi_k, \tau^n)$ ,  $\xi_k = kh$ ,  $\tau^n = n\Delta\tau$ . Явная разностная схема запишется в виде:

$$\frac{\theta_k^{n+1} - \theta_k^n}{\Delta\tau} = \frac{\theta_{k+1}^n - 2\theta_k^n + \theta_{k-1}^n}{h^2} + Q_k^n. \quad (2.2.19)$$

Она аппроксимирует уравнение (2.2.18) с порядком  $o(\Delta\tau + h^2)$  и является условно устойчивой при  $r = \frac{\Delta\tau}{h^2} < 1/2$ .

### 2.2.7. Неявная разностная схема для уравнения теплопроводности с постоянными коэффициентами

Для решения уравнения теплопроводности с постоянными коэффициентами может быть использована неявная разностная схема, которая строится путем аппроксимации дифференциального оператора  $\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \xi^2}$

разностным на  $n+1$ -ом временном слое:

$$\frac{\theta_k^{n+1} - \theta_k^n}{\Delta\tau} = \frac{\theta_{k+1}^{n+1} - 2\theta_k^{n+1} + \theta_{k-1}^{n+1}}{h^2} + Q_k^n. \quad (2.2.20)$$



Разностная схема (2.2.20) аппроксимирует уравнение (2.2.18) с порядком  $o(\Delta\tau + h^2)$ . Исследуем (2.2.20) на устойчивость. Обозначим  $\Delta\tau/h^2 = r$  и перепишем (2.2.20) в виде:

$$r\theta_{k+1}^{n+1} - (1 + 2r)\theta_k^{n+1} + r\theta_{k-1}^{n+1} = -\theta_k^n - \Delta\tau Q_k^n$$

или

$$A_k\theta_{k+1} + B_k\theta_k + C_k\theta_{k-1} = F_k.$$

Проверим устойчивость схемы по принципу максимума.

$A_k = r > 0$ ,  $C_k = r > 0$ ,  $-B_k = 1 + 2r > A_k + C_k$ . Последнее неравенство выполняется всегда. Значит, неявная схема является абсолютно устойчивой.

### 2.2.8. Схема с «весами» для уравнения теплопроводности с постоянными коэффициентами

Уравнение теплопроводности (2.2.18) аппроксимируем разностным аналогом вида:

$$\begin{aligned} \frac{\theta_k^{n+1} - \theta_k^n}{\Delta\tau} = & \sigma \frac{\theta_{k+1}^{n+1} - 2\theta_k^{n+1} + \theta_{k-1}^{n+1}}{h^2} + \\ & + (1 - \sigma) \frac{\theta_{k+1}^n - 2\theta_k^n + \theta_{k-1}^n}{h^2} + Q_k^n. \end{aligned} \quad (2.2.21)$$

Здесь  $\sigma$  произвольный вещественный параметр,  $0 \leq \sigma \leq 1$ . Семейство разностных схем вида (2.2.21) называется схемой с весами для уравнения теплопроводности. При  $\sigma = 0$  получим явную разностную схему (2.2.19), при  $\sigma = 1$  получим неявную разностную схему (2.2.20).  $\sigma = 0,5$  – симметричная схема, которую называют схемой Кранка – Николсона. Все разностные алгоритмы, полученные при  $\sigma \neq 0$ , неявные.

Исследование аппроксимации разностной схемы (2.2.21) проводится на основе разложения точного решения дифференциальной задачи (2.2.18) в ряд Тейлора и показывает, что она аппроксимирует задачу (2.2.18) с погрешностью

$$\delta_h = \left[ (\sigma - 0,5)\Delta\tau + \frac{h^2}{12} \right] \frac{\partial^3 \vartheta}{\partial \tau \partial \xi^2} - \frac{h^2}{12} \frac{\partial^2 Q}{\partial \xi^2} + o(\Delta\tau^2 + h^4).$$

При  $\sigma = 0,5$  схема аппроксимирует задачу с погрешностью  $o(\Delta\tau^2 + h^2)$ .

При выборе  $\sigma = 0,5 - \frac{h^2}{12\Delta\tau}$  и  $Q_k^n = Q_k^n + \frac{h^2}{12} \frac{\partial^2 Q}{\partial \xi^2}$  имеем схему повышенного порядка точности с погрешностью аппроксимации  $o(\Delta\tau^2 + h^4)$ . При этом правая часть должна вычисляться по формуле

$$Q_k^n = Q_k^n + \frac{1}{24}(Q_{k+1}^n - 2Q_k^n + Q_{k-1}^n)$$

Как показывают исследования устойчивости схемы (2.2.21) [4] (проведенное спектральным методом) она является устойчивой при любых  $\Delta\tau$  и  $h$  при  $\sigma \geq 0,5$ . В случае  $0 \leq \sigma < 0,5$  для обеспечения устойчивости необходимо выполнение условия  $\frac{2\Delta\tau}{h^2} < \frac{1}{1-2\sigma}$ .

### 2.2.9. Явная разностная схема для уравнения теплопроводности с переменным коэффициентом теплопроводности

Для решения уравнения теплопроводности с переменным коэффициентом теплопроводности

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial \xi} \left( a(\xi, \tau) \frac{\partial \vartheta}{\partial \xi} \right) + Q(\xi, \tau) \quad (2.2.22)$$

разностная схема строится следующим образом: Введем обозначение  $a(\xi, \tau) \frac{\partial \vartheta}{\partial \xi} = W$ . Тогда

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left( a(\xi, \tau) \frac{\partial \vartheta}{\partial \xi} \right) = \frac{\partial (W)}{\partial \xi} \approx \frac{W_{k+1/2} - W_{k-1/2}}{h}, \quad (2.2.23)$$

$$W_{k+1/2} = a(\xi_k + h/2, \tau^n) \frac{\theta_{k+1}^n - \theta_k^n}{h}, \quad (2.2.24)$$

$$W_{k-1/2} = a(\xi_k - h/2, \tau^n) \frac{\theta_k^n - \theta_{k-1}^n}{h}, \quad (2.2.25)$$

Подставляя (2.2.24), (2.2.25) в (2.2.23) и обозначая

$$a(\xi_k \pm h/2, \tau^n) = a_{k\pm 1/2}$$

получим разностную схему:

$$\frac{\theta_k^{n+1} - \theta_k^n}{\Delta\tau} = \frac{a_{k+1/2}\theta_{k+1}^n - (a_{k+1/2} + a_{k-1/2})\theta_k^n + a_{k-1/2}\theta_{k-1}^n}{h^2} + Q_k^n$$

Если  $a_{k+1/2}$ ,  $k = 0, 1, \dots, K-1$  ограничены

$$M_1 \leq a_{k+1/2} \leq M_2,$$

то исследование схемы на устойчивость приводит к условию

$$M_2 \frac{\Delta\tau}{h^2} \leq \frac{1}{2}.$$

Отметим, что при  $a_{k+1/2}$  может быть вычислен в средних точках разностной сетки по формулам

$$a_{k+1/2} = a(\xi_k + h/2, \tau^n),$$

либо как среднее

$$a_{k+1/2} = \frac{a_k + a_{k+1}}{2}.$$

### 2.2.10. Неявная разностная схема для уравнения теплопроводности с переменным коэффициентом теплопроводности

Неявная разностная схема для уравнения теплопроводности (2.2.22) запишется с использованием (2.2.23) – (2.2.25) при  $\theta_k$ , выбранных на верхнем временном слое,  $\theta_k^{n+1}$ :

$$\begin{aligned} \frac{\theta_k^{n+1} - \theta_k^n}{\Delta\tau} = \\ = \frac{a_{k+1/2}\theta_{k+1}^{n+1} - (a_{k+1/2} + a_{k-1/2})\theta_k^{n+1} + a_{k-1/2}\theta_{k-1}^{n+1}}{h^2} + Q_k^n, \end{aligned} \quad (2.2.26)$$

где

$$a_{k\pm 1/2} = a(\xi_k \pm h/2, \tau^{n+1}).$$

Исследование (2.2.26) на устойчивость показывает устойчивость схемы при любых  $\Delta\tau$  и  $h$ .

При решении уравнений теплопроводности с коэффициентом теплопроводности, зависящим от температуры  $a(\xi, \tau, \vartheta)$  значения  $a_{k\pm 1/2}$  определяются по значению температуры  $\theta_k$  на  $n$ -ом временном слое.

$$a_{k+1/2} = \frac{1}{2} \left[ a(\xi_{k+1}, \tau^{n+1}, \theta_{k+1}^n) + a(\xi_k, \tau^{n+1}, \theta_k^n) \right].$$

### 2.2.11. Аппроксимация граничных условий

Аппроксимация граничных условий первого рода (когда на границе задано значение искомой функции) не вызывает затруднений. В этом случае граничные условия аппроксимируются точно, берутся значения заданной функции в соответствующих точках границы.

Аппроксимацию граничных условий третьего рода разберем на примере (аппроксимация граничных условий второго рода делается аналогично). Пусть для уравнения теплопроводности (2.2.18) на границах  $\xi = 0$  и  $\xi = l$  заданы условия

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vartheta(0, \tau)}{\partial \xi} &= b_0(\tau) \vartheta(0, \tau) + c_0(\tau), \\ \frac{\partial \vartheta(l, \tau)}{\partial \xi} &= b_K(\tau) \vartheta(l, \tau) + c_K(\tau). \end{aligned} \quad (2.2.27)$$

Запишем равенства (2.2.27) в виде разностей, используя значения  $\theta_k$  на  $n+1$ -ом временном слое:

$$\begin{aligned} \frac{\theta_1^{n+1} - \theta_0^{n+1}}{h} &= b_0(\tau^{n+1}) \theta_0^{n+1} + c_0(\tau^{n+1}), \\ \frac{\theta_K^{n+1} - \theta_{K-1}^{n+1}}{h} &= b_K(\tau^{n+1}) \theta_K^{n+1} + c_K(\tau^{n+1}), \end{aligned} \quad (2.2.28)$$

которые аппроксимируют (2.2.27) с погрешностью  $o(h)$ . Применяя такую аппроксимацию при решении задач теплопроводности любой численной схемой, общая погрешность схемы будет порядка  $o(h)$ .

Рассмотрим разностное соотношение

$$\frac{\theta_1 - \theta_0}{h} = \frac{\partial \theta(0, \tau)}{\partial \xi} + \left[ \frac{h}{2} \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} \right)_0 + o(h^2) \right]. \quad (2.2.29)$$

В силу того, что уравнение (2.2.18) справедливо в точке  $\xi = 0$  выразим из него

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} = \frac{\partial \theta}{\partial \tau} - Q(\xi, \tau),$$

подставим в (2.2.29) и выразим  $\frac{\partial \theta(0, \tau)}{\partial \xi}$ :

$$\frac{\partial \theta(0, \tau)}{\partial \xi} + o(h^2) = \frac{\theta_1 - \theta_0}{h} - \frac{h}{2} \left[ \frac{\partial \theta(0, \tau)}{\partial \tau} - Q(0, \tau) \right]$$

Заменяя производную  $\frac{\partial \theta(0, \tau)}{\partial \tau}$  разностным соотношением  $\frac{\theta_0^{n+1} - \theta_0^n}{\Delta \tau}$ , получим выражение, аппроксимирующее производную  $\frac{\partial \theta(0, \tau)}{\partial \xi}$  с погрешностью  $o(h^2)$ . Подставим это выражение в граничное условие (2.2.27) и получим его аппроксимацию с погрешностью  $o(h^2)$ :

$$\frac{\theta_1^{n+1} - \theta_0^{n+1}}{h} - \frac{h}{2} \frac{\theta_0^{n+1} - \theta_0^n}{\Delta \tau} + \frac{h}{2} Q_0^n = b_0(\tau^{n+1}) \theta_0^{n+1} + c_0(\tau^{n+1}). \quad (2.2.29)$$

Аналогично для граничного условия при  $\xi = l$ :

$$\frac{\theta_K^{n+1} - \theta_{K-1}^{n+1}}{h} + \frac{h}{2} \frac{\theta_K^{n+1} - \theta_K^n}{\Delta \tau} - \frac{h}{2} Q_K^n = b_K(\tau^{n+1}) \theta_K^{n+1} + c_K(\tau^{n+1}). \quad (2.2.30)$$

При  $b_0(\tau) \equiv 0$  выражение (2.2.29) аппроксимирует граничное условие второго рода.

### 2.2.12. Алгоритм решения задачи теплопроводности с использованием явной схемы

Решение уравнения теплопроводности с использованием явной схемы состоит в проведении вычисления значений  $\theta_k^{n+1}$  исходя из значений  $\theta_k^n$  по формуле из (2.2.19):

$$\theta_k^{n+1} = r \theta_{k+1}^n + (1 - 2r) \theta_k^n + r \theta_{k-1}^n + \Delta \tau Q_k^n, \quad r = \Delta \tau / h^2$$

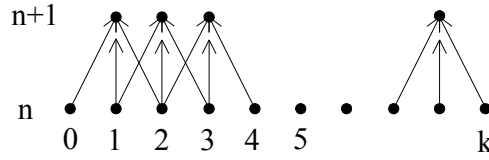


Рис. 2.5. Определение  $\theta_k^{n+1}$  по явной схеме

Затем определяются значения  $\theta_0^{n+1}$  и  $\theta_K^{n+1}$ . В случае граничных условий третьего рода, при втором порядке аппроксимации граничных условий  $\theta_0^{n+1}$  и  $\theta_K^{n+1}$  находятся по формулам из (2.2.29), (2.2.30):

$$\theta_0^{n+1} = \frac{\theta_1^{n+1} + \theta_0^n h^2/2\Delta\tau + Q_0^n h^2/2 - hc_0(\tau^{n+1})}{1 + hb_0(\tau^{n+1}) + h^2/2\Delta\tau},$$

$$\theta_K^{n+1} = \frac{\theta_{K-1}^{n+1} + \theta_K^n h^2/2\Delta\tau + Q_K^n h^2/2 + hc_K(\tau^{n+1})}{1 - hb_K(\tau^{n+1}) + h^2/2\Delta\tau}.$$

Циклическое повторение этих вычислений при  $\Delta\tau < h^2/2$  ( $r < 1/2$ ) приводит к определению значений  $\theta_k$  в любой момент времени  $\tau = n\Delta\tau$ .

### 2.2.13. Алгоритм решения задачи теплопроводности с использованием неявной схемы

В отличие от явной схемы, которая дает явное выражение для определения  $\theta_k^{n+1}$ , при аппроксимации уравнения теплопроводности с использованием неявной схемы  $\theta_k^{n+1}$  должен определяться из системы линейных уравнений вида (см п. 2.2.7):

$$\begin{cases} B_0\theta_0^{n+1} + C_0\theta_1^{n+1} = F_0, \\ A_k\theta_{k-1}^{n+1} + B_k\theta_k^{n+1} + C_k\theta_{k+1}^{n+1} = F_k, \quad k = 1, 2, \dots, K-1, \\ A_K\theta_{K-1}^{n+1} + B_K\theta_K^{n+1} = F_K. \end{cases} \quad (2.2.31)$$

Например, для схемы (2.2.20) с граничными условиями (2.2.28)

$$B_0 = b_0(\tau^{n+1})h + 1, \quad C_0 = -1, \quad F_0 = -c_0(\tau^{n+1})h,$$

$$A_k = r, B_k = -1 - 2r, C_k = r, r = \Delta\tau/h^2, F_k = -\theta_k^n - \Delta\tau Q_k^n,$$

$$A_K = 1, B_K = b_K(\tau^{n+1})h - 1, F_K = -c_K(\tau^{n+1})h.$$

Система уравнений (2.2.31) имеет не нулевые элементы матрицы коэффициентов только на трех диагоналях, так называемая трехдиагональная матрица.

$$\begin{vmatrix} B_0 & C_0 & & & & \\ A_1 & B_1 & C_1 & & & 0 \\ & A_2 & B_2 & C_2 & & \\ & & \dots & \dots & \dots & \\ & & & A_{K-1} & B_{K-1} & C_{K-1} \\ 0 & & & & A_K & B_K \end{vmatrix}$$

Такую систему уравнений удобнее всего решать методом прогонки. Будем искать решение системы уравнений в виде:

$$\theta_k^{n+1} = \alpha_k \theta_{k+1}^{n+1} + \beta_k. \quad (2.2.32)$$

Здесь  $\alpha_k$  и  $\beta_k$  неизвестные коэффициенты, их называют прогоночные коэффициенты. Равенство (2.2.32) имеет место при всех  $k$ , поэтому можно записать

$$\theta_{k-1}^{n+1} = \alpha_{k-1} \theta_k^{n+1} + \beta_{k-1}. \quad (2.2.33)$$

Подставим (2.2.33) в (2.2.31), получим:

$$A_k(\alpha_{k-1} \theta_k^{n+1} + \beta_{k-1}) + B_k \theta_k^{n+1} + C_k \theta_{k+1}^{n+1} = F_k$$

И перепишем его в форме (2.2.32):

$$\theta_k^{n+1} = -\frac{C_k}{A_k \alpha_{k-1} + B_k} \theta_{k+1}^{n+1} + \frac{F_k - A_k \beta_{k-1}}{A_k \alpha_{k-1} + B_k}. \quad (2.2.34)$$

Сравнение (2.2.34) и (2.2.32) дает рекуррентные соотношения для определения прогоночных коэффициентов  $\alpha_k$  и  $\beta_k$ :

$$\alpha_k = -\frac{C_k}{A_k \alpha_{k-1} + B_k}, \beta_k = \frac{F_k - A_k \beta_{k-1}}{A_k \alpha_{k-1} + B_k}. \quad (2.2.35)$$

$\alpha_0$  и  $\beta_0$  определяются из первого граничного условия (2.2.31):

$$\theta_0^{n+1} = -\frac{C_0}{B_0} \theta_1^{n+1} + \frac{F_0}{B_0} = \alpha_0 \theta_1^{n+1} + \beta_0, \Rightarrow$$

$$\alpha_0 = -\frac{C_0}{B_0}, \beta_0 = \frac{F_0}{B_0}. \quad (2.2.36)$$

Для точки  $k = K - 1$

$$\theta_{K-1}^{n+1} = \alpha_{K-1}\theta_K^{n+1} + \beta_{K-1}. \quad (2.2.37)$$

Привлекая второе граничное условие из (2.2.31)

$$A_K\theta_{K-1}^{n+1} + B_K\theta_K^{n+1} = F_K, \quad (2.2.38)$$

решаем систему уравнений (2.2.37) (2.2.38) относительно  $\theta_K^{n+1}$  и находим

$$\theta_K^{n+1} = \frac{F_K - A_K\beta_{K-1}}{A_K\alpha_{K-1} + B_K}. \quad (2.2.39)$$

Таким образом, схема решения системы уравнений (2.2.31) состоит в следующей последовательности действий:

По формулам (2.2.36) вычисляем  $\alpha_0$  и  $\beta_0$

По рекуррентным формулам (2.2.35) вычисляем последовательно  $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \dots, \alpha_{K-1}, \beta_{K-1}$ .

По формуле (2.2.39) определяем  $\theta_K^{n+1}$ .

По формуле (2.2.32) вычисляем  $\theta_{K-1}^{n+1}, \theta_{K-2}^{n+1}, \dots, \theta_0^{n+1}$ .

Таким образом, все значения  $\theta_k^{n+1}$  на  $n+1$  временном слое определены и можно перейти к вычислению значений на  $n+2$  временном слое и так далее.

#### 2.2.14. Аппроксимация правых частей уравнения теплопроводности

В предыдущем параграфе были рассмотрены выражения источников–стоков тепла  $Q(\xi, \tau)$  зависящих от координаты и времени. Если правая часть зависит от  $\vartheta(\xi, \tau)$ , то вопрос аппроксимации и устойчивости разностной схемы нужно обязательно исследовать. Рассмотрим источники–стоки тепла, линейно зависящие от температуры, вида  $H\vartheta(\xi, \tau)$ , где  $H$  – заданная константа. В одномерном приближении такой вид источника описывает теплообмен удлиненных тел через их боковую поверхность (см. п. 2.1.1).



$$\frac{\partial \vartheta}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \xi^2} - H \vartheta(\xi, \tau), \quad (2.2.40)$$

Запишем явную разностную схему для уравнения (2.2.40).

$$\begin{aligned} \frac{\theta_k^{n+1} - \theta_k^n}{\Delta \tau} &= \frac{\theta_{k+1}^n - 2\theta_k^n + \theta_{k-1}^n}{h^2} - H\theta_k^n, \\ \theta_k^{n+1} &= r\theta_{k+1}^n + (1 - 2r - H\Delta\tau)\theta_k^n + r\theta_{k-1}^n. \end{aligned} \quad (2.2.41)$$

Проводя исследование (2.2.41) на устойчивость по методике, изложенной в п. 2.2.3 получим:

$$(1 - 2r - H\Delta\tau) > 0, \Rightarrow \Delta\tau < \frac{1}{2/h^2 - H}, \text{ или } r < \frac{1}{2 - Hh^2}.$$

Очевидно, что при  $H > 0$  область устойчивости расширяется, при  $H < 0$  – сужается.

В неявной схеме правую часть вида  $H\vartheta(\xi, \tau)$  можно взять на верхнем временном слое. В этом случае

$$\frac{\theta_k^{n+1} - \theta_k^n}{\Delta\tau} = \frac{\theta_{k+1}^{n+1} - 2\theta_k^{n+1} + \theta_{k-1}^{n+1}}{h^2} - H\theta_k^{n+1}$$

или

$$r\theta_{k+1}^{n+1} + (-1 - 2r - H\Delta\tau)\theta_k^{n+1} + r\theta_{k-1}^{n+1} = -\theta_k^n.$$

Исследование на устойчивость по принципу максимума показывает, что при  $H > 0$  схема абсолютно устойчива, при  $H < 0$  для некоторых значений  $\Delta\tau$  может проявляться неустойчивость. В соответствии с (2.2.10) имеем:

$$1 + 2r - |H|\Delta\tau > 2r, \Rightarrow |H|\Delta\tau < 1.$$

При выборе  $H\vartheta(\xi, \tau)$  в неявной разностной схеме равной  $H\theta_k^n$  схема остается абсолютно устойчивой.

В случае правой части нелинейно зависящей от температуры  $\vartheta(\xi, \tau)$  в разностной аппроксимации значение  $\theta_k$  берется на  $n$   $F$  временном слое.

## 2.2.15. Особенности решения задач в цилиндрических и сферических координатах

В случае осевой или цилиндрической симметрии одномерное уравнение теплопроводности с переменным коэффициентом теплопроводности записывается в виде:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial \tau} = \frac{1}{\xi^m} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \xi^m a(\xi, \tau) \frac{\partial \vartheta}{\partial \xi} \right) + Q(\xi, \tau), \quad (2.2.42)$$

где  $M_1 \leq a(\xi, \tau) \leq M_2$ ,  $0 \leq \xi \leq R$ ,  $\tau > 0$ ,  $R$  – радиус цилиндра или шара. При  $m = 1$  оно описывает распределение тепла в телах цилиндрической формы, при  $m = 2$  – сферических. При  $\xi = 0$  уравнение (2.2.42) имеет особенность. В силу симметрии при  $\xi = 0$  выполняется

$\frac{\partial \vartheta}{\partial \xi}_{\xi=0} = 0$ . Перепишем уравнение (2.2.42) при  $\xi = 0$  в виде:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial \xi} \left( a(\xi, \tau) \frac{\partial \vartheta}{\partial \xi} \right) + \frac{m}{\xi} a(\xi, \tau) \frac{\partial \vartheta}{\partial \xi} + Q(\xi, \tau)$$

и перейдем к пределу во втором слагаемом правой части равенства при  $\xi \rightarrow 0$ , применяя правило Лопиталья<sup>14</sup> получим:

<sup>14</sup> **ЛОПИТАЛЬ де Гиймон Франсуа** (L'Hospital 1661 – 1704)

Гиймон Франсуа Антуан Лопиталь родился в 1661 г. в Париже в богатой и знатной семье. О последнем свидетельствует то, что он носил звание маркиза (де Сен – Мэм) и графа (Антрмон). В его детских занятиях математика не играла никакой роли. Известно, что он делал слабые успехи в латинском языке, предмете, который относился в то время к числу важнейших. Истинное его призвание обнаружилось почти случайно, когда ему в руки попал учебник геометрии. Он сначала заинтересовался чертежами и, что называется, "заглянул" в книгу, чтобы понять, для чего эти чертежи служат. Это первое знакомство с геометрией быстро переросло в настоящую страсть. Хорошего учителя юному математику почему-то не удалось найти, и он изучил любимый предмет самостоятельно. По обычаю родовитой знати все мужчины в семье Лопиталей были военными. Служил капитаном кавалерии и Гийом Франсуа. Сильная близорукость вынудила его оставить военную службу. Он получил возможность посвятить себя любимой математике. Есть сведения, что с 1688 г. он начал изучать работы Лейбница. Успехи, по-видимому, оставляли желать лучшего, во всяком случае к моменту знакомства с молодым Иоганном Бернулли Лопиталь считал себя не более чем начинающим учеником. Он просил нового знакомого прочитать ему курс лекций. Летом 1692 г. в своем имении близ Вандома Лопиталь в течение четырех месяцев усиленно занимался с Иоганном Бернулли. Занятия были успешными. В 1693 г. Лопиталь уже свободно владел новой отраслью. Он переписывается с Лейбницем и решает задачу, предложенную Бернулли: найти кривую, обладающую тем свойством, что длина касательной должна находиться в постоянном отношении к длине отрезка оси абсцисс, заключенного между точкой пересечения оси с касательной и точкой пересечения оси с кривой. Одновременно с Лопиталем опубликовали решения Якова Бернулли, Лейбниц, Гюйгенс. В 1693 г. Лопиталь избрали членом Парижской академии наук.

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \left( \frac{m}{\xi} a(\xi, \tau) \frac{\partial \vartheta}{\partial \xi} \right) = m \frac{\partial}{\partial \xi} \left( a(0, \tau) \frac{\partial \vartheta}{\partial \xi} \right)_{\xi=0}.$$

Следовательно, в точке  $\xi = 0$  вместо (2.2.42) имеем уравнение

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial \tau} = (1 + m) \frac{\partial}{\partial \xi} \left( a(0, \tau) \frac{\partial \vartheta}{\partial \xi} \right) + Q(0, \tau).$$

Неявная разностная схема для решения уравнения (2.2.42) на равномерной разностной сетке запишется в виде:

$$\begin{aligned} \frac{\theta_k^{n+1} - \theta_k^n}{\Delta \tau} = & \frac{1}{\xi_k^m h} \left( \xi_{k+1/2}^m a_{k+1/2}^n \frac{\theta_{k+1}^{n+1} - \theta_k^{n+1}}{h} - \right. \\ & \left. - \xi_{k-1/2}^m a_{k-1/2}^n \frac{\theta_k^{n+1} - \theta_{k-1}^{n+1}}{h} \right) + Q_k^n. \end{aligned} \quad (2.2.43)$$

При  $\xi = 0$  имеем

$$\frac{\theta_0^{n+1} - \theta_0^n}{\Delta \tau} = \frac{1 + m}{h} \left( a_{1/2}^n \frac{\theta_1^{n+1} - \theta_0^{n+1}}{h} - a_{-1/2}^n \frac{\theta_0^{n+1} - \theta_{-1}^{n+1}}{h} \right) + Q_0^n$$

С учетом равенства  $a_{1/2}^n = a_{-1/2}^n$  и  $\theta_1^{n+1} = \theta_{-1}^{n+1}$  оно переписывается в виде:

$$\frac{\theta_0^{n+1} - \theta_0^n}{\Delta \tau} = \frac{2(1 + m)}{h^2} a_{1/2}^n (\theta_1^{n+1} - \theta_0^{n+1}) + Q_0^n. \quad (2.2.44)$$

Система уравнений (2.2.43) совместно с (2.2.44) и разностной аппроксимацией соответствующего граничного условия при  $\xi = R$  решается методом прогонки.

### 2.2.16. Способы задания неравномерной сетки

При численном решении некоторых задач теплопроводности бывает целесообразно вводить неравномерную сетку по пространству. Например, в области больших градиентов температуры (вблизи горячей стен-

---

В 1696 г. вышло из печати главное творение его жизни – "Анализ бесконечно малых для познания кривых линий". В 1703 г., 43 лет от роду Лопиталь скончался от апоплексического удара.

ки) необходимо построить сетку с мелким шагом, а вдали от стенки, в области гладкого решения можно использовать большие шаги по пространству.

Уравнение теплопроводности (2.2.18) на неравномерной сетке в разностной форме по неявной разностной схеме запишется в виде:

$$\frac{\theta_k^{n+1} - \theta_k^n}{\Delta\tau} = \frac{1}{(h_k + h_{k+1})/2} \left( \frac{\theta_{k+1}^{n+1} - \theta_k^{n+1}}{h_{k+1}} - \frac{\theta_k^{n+1} - \theta_{k-1}^{n+1}}{h_k} \right) + Q_k^n.$$

Как было показано в п 2.2.5 такая разностная схема аппроксимирует уравнение с погрешностью  $o(\Delta\tau + h)$ .

Изменение величины шага по пространству можно организовать различными способами. Единственное требование к изменению шагов сетки, выработанное из опыта проведения расчетов, чтобы два соседних шага отличались по величине не более чем на 20%. Например, для сгущения сетки вблизи стенки можно задать  $h_1$ , а последующие шаги определять по геометрической прогрессии:

$$h_{k+1} = h_k q^k.$$

Другой способ введения неравномерной сетки – преобразование координат (рис. 2.6).

Выберем функцию  $\eta = \eta(\xi)$  и в уравнении (2.2.18) проведем замену переменных.

$$\frac{\partial\vartheta}{\partial\xi} = \frac{\partial\vartheta}{\partial\eta} \frac{\partial\eta}{\partial\xi}, \quad \frac{\partial^2\vartheta}{\partial\xi^2} = \frac{\partial}{\partial\xi} \left( \frac{\partial\vartheta}{\partial\xi} \right) = \frac{\partial}{\partial\eta} \left( \frac{\partial\vartheta}{\partial\eta} \frac{\partial\eta}{\partial\xi} \right) \frac{\partial\eta}{\partial\xi}$$

и в новых переменных уравнение (2.2.18) запишется в виде:

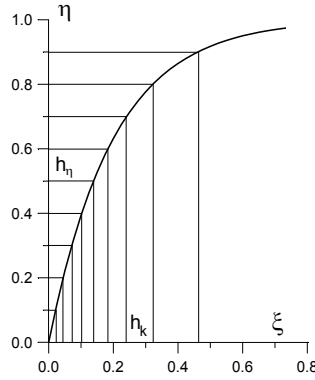


Рис. 2.6. Преобразование координат для введения неравномерной сетки

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{\partial \vartheta}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial \xi} \right) \frac{\partial \eta}{\partial \xi} + Q(\eta, \tau). \quad (2.2.45)$$

При конкретном виде функции  $\eta = \eta(\xi)$  ее производная  $\partial \eta / \partial \xi$  берется и также будет в виде функции. Выбирая по переменной  $\eta$  равномерный шаг, вдоль  $\xi$  будем иметь неравномерный шаг (рис. 2.6). В разностной форме уравнение (2.2.45) принимает вид:

$$\begin{aligned} \frac{\theta_k^{n+1} - \theta_k^n}{\Delta \tau} = \frac{1}{h_\eta} & \left( \frac{\theta_{k+1}^{n+1} - \theta_k^{n+1}}{h_\eta} \left( \frac{\partial \eta}{\partial \xi} \right)_{k+1/2} - \right. \\ & \left. - \frac{\theta_k^{n+1} - \theta_{k-1}^{n+1}}{h_\eta} \left( \frac{\partial \eta}{\partial \xi} \right)_{k-1/2} \right) \left( \frac{\partial \eta}{\partial \xi} \right)_k + Q_k^n. \end{aligned}$$

Вместе с разностной аппроксимацией соответствующих граничных условий математической постановки задачи эта система уравнений решается методом прогонки.

Например, пусть выбрана функция  $\eta(\xi) = 1 - e^{-\gamma \xi}$ , имеющая вид, представленный на рис. 2.6. Такое преобразование переводит область  $0 < \xi < \infty$  в область  $0 < \eta < 1$ .  $\partial \eta / \partial \xi = \gamma e^{-\gamma \xi} = \gamma(1 - \eta(\xi))$  и тогда, введя равномерный шаг по переменной  $\eta$ ,  $h_\eta$ , вычисляем производные

в соответствующих точках сетки  $\left( \frac{\partial \eta}{\partial \xi} \right)_k = \gamma(1 - h_\eta k)$ ,  $\left( \frac{\partial \eta}{\partial \xi} \right)_{k \pm 1/2} = \gamma(1 - h_\eta(k \pm 1/2))$  и получаем неравномерную сетку по  $\xi$ .

### 2.2.17. Метод прямых для решения уравнения теплопроводности

Для решения уравнения теплопроводности применяется метод прямых.

В уравнении теплопроводности (2.2.18)

$$\frac{\partial \vartheta(\xi, \tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \vartheta(\xi, \tau)}{\partial \xi^2} + Q(\xi, \tau)$$

запишем в разностной форме производную по пространству:

$$\frac{d\theta_k(\tau)}{d\tau} = \frac{\theta_{k+1}(\tau) - 2\theta_k(\tau) + \theta_{k-1}(\tau)}{h^2} + Q_k(\tau), \quad (2.2.46)$$

где принято обозначение  $\theta_k(\tau) = \theta_k(\xi_k, \tau)$ ,  $k = 1, 2, \dots, K-1$ , а частная производная заменена на обыкновенную производную.

Уравнения (2.2.46) представляют собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно неизвестных функций  $\theta_k(\tau)$ , которая может быть решена любым из методов для решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений (См. Главу 1, п.1.1).

### 2.2.18. Пример численного решения задачи о теплопроводности в стержне конечной длины

Решим задачу о переносе тепла в стержне заданной длины в следующей постановке:

Пусть дан стержень вещества длины  $l$  с известными теплофизическими характеристиками, имеющий начальную температуру  $T_1$ . Внутри стержня имеются источники и стоки тепла,  $Q(x, t)$ . На левой границе стержня задана температура  $T_1$ , на правой границе происходит теплообмен по закону Ньютона со средой температуры  $T_2$ . На боковой поверхности стержня происходит теплообмен с окружающей средой, имеющей температуру, равную  $T_0$ . Математическая постановка задачи имеет вид (п. 2.1.1):

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{2\alpha_0}{R}(T - T_0) + Q(x, t), \quad (2.2.47)$$

Начальное условие:  $T(x, 0) = T_1$ ,

Граничные условия:

$$\begin{aligned} T(0, t) &= T_1, \\ \lambda \frac{\partial T(l, t)}{\partial x} &= -\alpha_2(T(l, t) - T_2). \end{aligned} \quad (2.2.48)$$

$$0 \leq x \leq l, \quad t > 0$$

Уравнение (2.2.47) с начальными и граничными условиями (2.2.48) запишем в безразмерной форме, выбрав в качестве масштабов рекомендованные в п. 2.1.3, получим:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \xi^2} - H \vartheta + \bar{Q}(\xi, \tau), \quad (2.2.49)$$

$$\begin{aligned} \vartheta(\xi, 0) &= 1, \\ \vartheta(0, \tau) &= 1. \end{aligned} \quad (2.2.50)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vartheta(1, \tau)}{\partial \xi} &= -Bi(\vartheta(1, \tau) - \vartheta_2), \\ 0 \leq \xi \leq 1, \tau &> 0, \end{aligned}$$

где

$$\xi = x/l, \tau = t/t_*, t_* = cp l^2 / \lambda, \vartheta = \frac{T(x, t) - T_0}{T_1 - T_0}, H = \frac{2\alpha_0 l^2}{R\lambda},$$

$$\bar{Q}(\xi, t) = \frac{Q(\xi, \tau) l^2}{\lambda(T_1 - T_0)}, Bi = \frac{\alpha_2 l}{\lambda},$$

Запишем неявную разностную схему для решения задачи (2.2.49) – (2.2.50)

$$\frac{\theta_k^{n+1} - \theta_k^n}{\Delta \tau} = \frac{\theta_{k+1}^{n+1} - 2\theta_k^{n+1} + \theta_{k-1}^{n+1}}{h^2} - H\theta_k^{n+1} + \bar{Q}_k^n. \quad (2.2.51)$$

Записав (2.2.51) в форме

$$A_k \theta_{k-1}^{n+1} + B_k \theta_k^{n+1} + C_k \theta_{k+1}^{n+1} = F_k,$$

получим

$$\begin{aligned} A_k &= r, C_k = r, B_k = -1 - 2r - H\Delta \tau, r = \Delta \tau / h^2, \\ F_k &= -\theta_k^n - \Delta \tau \bar{Q}_k^n. \end{aligned}$$

В соответствии с методом прогонки, будем искать решение системы линейных уравнений в виде (см. п. 2.2.13)

$$\begin{aligned} \theta_k^{n+1} &= \alpha_k \theta_{k+1}^{n+1} + \beta_k, \\ \alpha_k &= -\frac{C_k}{A_k \alpha_{k-1} + B_k}, \beta_k = \frac{F_k - A_k \beta_{k-1}}{A_k \alpha_{k-1} + B_k}. \end{aligned}$$

$\alpha_0$  и  $\beta_0$  определяются из граничного условия при  $\xi = 0$ :

$$\alpha_0 = 0, \beta_0 = 1.$$

Для точки  $k = K - 1$  выполняется:

$$\theta_{K-1}^{n+1} = \alpha_{K-1} \theta_K^{n+1} + \beta_{K-1}.$$

Запишем второе граничное условие в разностной форме:

$$\frac{\theta_K^{n+1} - \theta_{K-1}^{n+1}}{h} = -Bi(\theta_K^{n+1} - \vartheta_2).$$

Из последних двух равенств выразим  $\theta_K^{n+1}$ :

$$\theta_K^{n+1} = \frac{\beta_{K-1} + Bi h \vartheta_2}{1 + Bi h - \alpha_{K-1}}$$

Таким образом, зная все  $\alpha_k$ ,  $\beta_k$ , и определив  $\theta_K^{n+1}$  можно найти все  $\theta_k^{n+1}$ ,  $k = K-1, K-2, \dots, 2, 1, 0$ , по формуле  $\theta_k^{n+1} = \alpha_k \theta_{k+1}^{n+1} + \beta_k$ .

Для численного решения задачи была составлена программа, представленная ниже. Тестирование программы проводилось на решении следующих задач:

1. При  $Bi = 0$ ,  $H = 0$  и  $\bar{Q} = 0$  решением задачи (2.2.49) – (2.2.50) является  $\vartheta(\xi, \tau) = 1$ . При численном решении задачи было получено  $\theta_k^n = 1$  при любых  $k = 1, 2, 3, \dots, K-1, K$  и  $n = 1, 2, 3, \dots, \infty$ .

2. При  $Bi = const$ ,  $H = 0$  и  $\bar{Q} = const$  при  $\tau \rightarrow \infty$  задача (2.2.49) – (2.2.50) становится задачей о нахождении стационарного поля температуры в стержне:

$$\frac{d^2 \vartheta}{d\xi^2} = -\bar{Q}, \quad 0 \leq \xi \leq 1, \quad \bar{Q} = const. \quad (2.2.52)$$

Граничные условия:

$$\vartheta(0) = 1, \quad \frac{d\vartheta(1)}{d\xi} = -Bi(\vartheta(1) - \vartheta_2).$$

Общее решение задачи (2.2.52)

$$\vartheta(\xi) = -\bar{Q} \frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2.$$

Константы  $C_1$  и  $C_2$  находим из граничных условий, получаем:

$$\vartheta(\xi) = -\bar{Q} \frac{x^2}{2} + \frac{Bi \bar{Q} / 2 + \bar{Q} - Bi + Bi \vartheta_2}{1 + Bi} x + 1. \quad (2.2.53)$$

При численном решении задачи (2.2.49) – (2.2.50) при  $Bi = 1$ ,  $H = 0$  и  $\bar{Q} = 0$ ,  $\vartheta_2 = 0$  до времени, большего чем  $\tau = 2$ , получается стационарное распределение температуры, совпадающее с (2.2.53) (рис. 2.7 а), при  $Bi = 1$ ,  $H = 0$ ,  $\bar{Q} = 4$ ,  $\vartheta_2 = 0$  получается решение также совпадающее с (2.2.53) (рис. 2.7 б). Такое решение называется решением стационарной задачи методом установления.



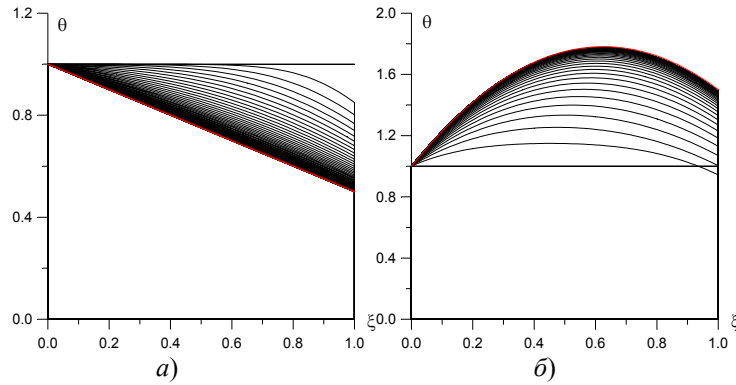


Рис. 2.7. Сравнение численного решения задачи с аналитическим

3. Для получения нестационарного решения задачи (2.2.49) – (2.2.50) с заданной точностью необходимо проводить исследование сходимости решения при уменьшении величины шага по пространству. Это делается следующим образом: Проводится расчет задачи до некоторого фиксированного момента времени  $\tau_{end}$  при заданной величине шага по пространству,  $h = h_1 = 1/(K_1 - 1)$ . В процессе решения через фиксированное время  $\Delta\tau_{write}$  проводится запись полей температуры в файл данных. Затем повторяется расчет с шагом  $h = h_1/2 = 1/(K_2 - 1)$ , и также проводится запись результатов расчетов через фиксированное время  $\Delta\tau_{write}$ . Затем проводится сравнение полей температуры в соответствующие моменты времени. Если они отличаются существенно, то нужно шаг по пространству еще уменьшить, если отличие мало, то шаг по пространству можно фиксировать и решать задачу с этим шагом по пространству. Это было проделано при проведении тестовых расчетов, изложенных в п. 2, и выяснено, что величина шага  $h$ , с которым необходимо проводить расчеты должна быть равна 0,025, или меньше.

После проведения исследования схемы и тестирования программы была решена задача при заданных значениях параметров и источнике тепла, зависящего от координаты. Расчеты были проведены при  $Bi = 2$ ,  $H = 3$ ,  $\bar{Q} = 10(1 - x)$ ,  $\vartheta_2 = 0$ . Результаты представлены на рис. 2.8. Видно, что в области, где источники тепла большие температура высокая, Отвод тепла из этой области идет в стенку на границе  $\xi = 0$ , в сре-

ду, находящуюся в контакте с границей стержня при  $\xi = 1$  и в окружающей среду через боковые стенки стержня.

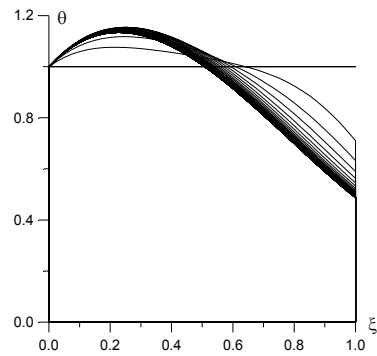


Рис. 2.8. Поля температуры в стержне в фиксированные моменты времени через 0,02.  $Bi = 2$ ,  $H = 3$ ,  $\bar{Q} = 10(1 - x)$ ,  $\vartheta_2 = 0$

Текст программы на языке Pascal:

```
Program schema;
const
  n = 41;           {Количество точек разностной сетки}
Var
  i,kwri : integer;
  teta,a,b,c,f,alfa,beta : array[1..n] of real;
  Bi,Toc,aaa,r,h,tau,stime,teta0,perwri,
  Hvne,Qq : real;
  fout : text;
begin

  {Описываем файл для записи результатов}
  Assign(fout,'rez77.dat');
  Rewrite(fout);

  {Задаем значения переменных в программе}
  aaa:=0.0;
  r := 1.0;          {Число Куранта}
  h := 1.0/(n-1);    {Величина шага по пространству}
  tau := r*h*h;       {Величина шага по времени}
  perwri:=0.02;       {Шаг по времени выдачи результатов в
                       файл данных}
```

```

kwri:=1;           {Счетчик выдач в файл данных}
stime:=0.0;        {Текущее время процесса теплопередачи}
teta0:=1.0;        {Начальная температура}
Bi:=2.0;           {Число Био}
Toc:=0.0;          {Температура среды на правой границе}
Hvne:=3.0;         {Коэффициент теплоотдачи в
                   окружающую среду }
Qq:=10.0;          {Интенсивность источников тепла}

{Задаем начальную температуру в стержне}
for i:= 1 to n do
  begin
    teta[i] := teta0;
    writeln(fout,h*(i-1),' ',teta[i]:6:4,' ');
  end;
writeln(fout,h*(n-1),' 1');
writeln(fout,'0',' 1');
Stime:= 0;

{Проводим вычисления температуры на новом временном слое}
while (Stime <= tau*3000.0) do
  begin
    Stime := Stime+tau;

    {Вычисляем коэффициенты в системе линейных уравнений}
    for i:= 1 to n do
      begin
        a[i]:= r;
        b[i]:= -2*r-1.0-Hvne*tau;
        c[i]:= r;
        f[i]:= -teta[i] - Qq*tau*(1.0-h*(i-1));
      end;

    {Вычисляем начальные прогоночные коэффициенты}
    alfa[1]:= 0.0;
    beta[1]:=1.0;

    {Вычисляем все прогоночные коэффициенты}
    for i:= 2 to n do
      begin

```

```

    alfa[i] := -a[i]/(b[i]+c[i]*alfa[i-1]);
    beta[i] := (f[i] - beta[i-1]*c[i])/(b[i]+c[i]*alfa[i-1]);
end;

{Вычисляем температуру на правой границе}
teta[n]:=(Bi*Toc*h+beta[n-1])/(1.0-alfa[n-1]+Bi*h);

{Вычисляем температуру во всех внутренних точках}
for i := n-1 downto 1 do
    teta[i] := alfa[i]*teta[i+1] + beta[i];

{С периодичностью по времени perwri записываем в
файл результаты (поле температуры)}
    if stime > perwri*kwri then begin
        for i:=1 to n do
            writeln(fout,h*(i-1),' ',teta[i]:6:4,' ');
            writeln(fout,h*(n-1),' ',aaa);
            writeln(fout,h*0,' ',aaa);
            kwri:=kwri+1; writeln(kwri);
        end;
    end;
readln;
close(fout);
end.

```

### 2.3. Численные методы решения многомерных задач теплопроводности

Реальные физические процессы протекают во времени и пространстве, имеющем три измерения. При построении разностных схем переход к многомерным задачам теплопроводности не вызывает принципиальных трудностей. Однако число неизвестных в системе разностных уравнений значительно возрастает, увеличивается число арифметических операций, необходимых для ее решения.

Рассмотрим задачу Коши для простейшего двухмерного уравнения теплопроводности.

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2} + Q(x, y, \tau), \quad \vartheta(x, y, 0) = \Phi(x, y). \quad (2.3.1)$$

Часто бывает удобно уравнение (2.3.1) записать в операторной форме. Введем обозначение:

$$L_x = \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \quad L_y = \frac{\partial^2}{\partial y^2},$$

тогда уравнение (2.3.1) перепишется в виде:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial \tau} = L_x \vartheta + L_y \vartheta + Q(x, y, \tau).$$

Введем разностную сетку с шагами  $h_x$ ,  $h_y$ ,  $\Delta\tau$  по переменным  $x$ ,  $y$ ,  $\tau$  соответственно. Примем обозначения:

$$\begin{aligned} \theta_{k,l}^n &= \theta(kh_x, lh_y, n\Delta\tau), \\ \Lambda_x \theta^n &= \frac{\theta_{k+1,l}^n - 2\theta_{k,l}^n + \theta_{k-1,l}^n}{h_x^2}, \\ \Lambda_y \theta^n &= \frac{\theta_{k,l+1}^n - 2\theta_{k,l}^n + \theta_{k,l-1}^n}{h_y^2}. \end{aligned}$$

Для задачи (2.3.1) запишем две схемы:

$$\frac{\theta_{k,l}^{n+1} - \theta_{k,l}^n}{\Delta\tau} = \Lambda_x \theta^n + \Lambda_y \theta^n + Q_{k,l}^n, \quad (2.3.2)$$

$$\frac{\theta_{k,l}^{n+1} - \theta_{k,l}^n}{\Delta\tau} = \Lambda_x \theta^{n+1} + \Lambda_y \theta^{n+1} + Q_{k,l}^n. \quad (2.3.3)$$

Первая схема (2.3.2) явная, в которой  $\theta_{k,l}^{n+1}$  определяется через пять значений  $\theta$  на нижнем временном слое. Она устойчива при  $r = \Delta\tau/h^2 < 1/4$ . Для вычисления  $\theta_{k,l}^{n+1}$  требуется много процессорного времени, поэтому схема (2.3.2) является малоэффективной.

Вторая схема (2.3.3) неявная. Она устойчива при любых  $h_x$ ,  $h_y$ ,  $\Delta\tau$ , но для вычисления  $\theta_{k,l}^{n+1}$  необходимо решать систему уравнений с использованием матричной прогонки, требующей большого объема вычислений.

Для решения многомерных задач математической физики применяются разностные методы, основанные на методе дробных шагов. Такие схемы обладают свойством абсолютной устойчивости и для перехода с одного временного слоя на другой требуют числа арифметических операций пропорционального числу узлов разностной сетки. Такая эконо-

мичность разностных схем достигается благодаря тому, что решение сложной многомерной задачи сводится к решению ряда одномерных, решаемых методом прогонки.

### 2.3.1. Метод покоординатного расщепления

Рассмотрим вариант метода дробных шагов – метод покоординатного расщепления на примере решения двумерного уравнения теплопроводности (2.3.1). Рассмотрим промежуток времени  $\Delta\tau = \tau^{n+1} - \tau^n$  и условно разделим процесс распространения тепла в плоскости  $(x, y)$  на два этапа. На первом этапе будем считать, что тепло распространяется только в направлении оси  $x$ , на втором – в направлении  $y$ . С учетом этой гипотезы разностная схема запишется в виде:

$$\frac{\tilde{\theta}_{k,l} - \theta_{k,l}^n}{\Delta\tau} = \frac{\tilde{\theta}_{k+1,l} - 2\tilde{\theta}_{k,l} + \tilde{\theta}_{k-1,l}}{h_x^2}, \quad (2.3.4)$$

$$\frac{\theta_{k,l}^{n+1} - \tilde{\theta}_{k,l}}{\Delta\tau} = \frac{\theta_{k,l+1}^{n+1} - 2\theta_{k,l}^{n+1} + \theta_{k,l-1}^{n+1}}{h_y^2} + Q_{k,l}^n. \quad (2.3.5)$$

или в операторной форме:

$$\frac{\tilde{\theta}_{k,l} - \theta_{k,l}^n}{\Delta\tau} = \Lambda_x \tilde{\theta}, \quad (2.3.4')$$

$$\frac{\theta_{k,l}^{n+1} - \tilde{\theta}_{k,l}}{\Delta\tau} = \Lambda_y \theta^{n+1} + Q_{k,l}^n. \quad (2.3.5')$$

Разностная схема (2.3.4) – (2.3.5) позволяет по известным значениям  $\theta_{k,l}^n$  в два этапа определить  $\theta_{k,l}^{n+1}$ . На первом этапе по заданным  $\theta_{k,l}^n$  вычисляются  $\tilde{\theta}_{k,l}$ , на втором – по полученным  $\tilde{\theta}_{k,l}$  вычисляются  $\theta_{k,l}^{n+1}$ . Разностная схема (2.3.4) – (2.3.5) неявная по обоим направлениям, абсолютно устойчивая, решается методом прогонки. Разностная схема (2.3.6) – (2.3.7) аппроксимирует исходную задачу с погрешностью порядка  $o((\Delta\tau) + h_x^2 + h_y^2)$ .

Например, пусть нужно найти изменение поля температуры в прямоугольном сечении тела (рис. 2.9) при заданных граничных условиях первого рода и начальных условиях:

$$\theta(x, y, 0) = \Phi(x, y), \quad \theta|_B = \Psi(B),$$

$B$  – точки, принадлежащие границе тела.

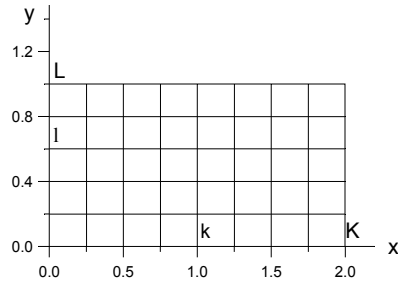


Рис. 2.9. Разностная сетка для решения двухмерного уравнения теплопроводности

Алгоритм решения состоит в последовательности следующих действий:

1. Решаем уравнения (2.3.4) методом прогонки, вдоль  $x$ , для  $l = 1, 2, 3, \dots, L - 1$ . В результате во всех внутренних точках  $k, l$  будут определены  $\tilde{\theta}_{k,l}$ . На границе  $\tilde{\theta}_{k,l}$  определяются граничным условием.

2. Решаем уравнения (2.3.5) методом прогонки, вдоль  $y$ , для  $k = 1, 2, 3, \dots, K - 1$ . В результате во всех внутренних точках  $k, l$  будут определены  $\theta_{k,l}^{n+1}$ . На границе  $\theta_{k,l}^{n+1}$  определяются граничным условием.

Для определения поля температуры на последующем временном слое повторяем вычисления по п. 1, 2.

### 2.3.2. Метод продольно-поперечной прогонки

Для вычисления  $\theta_{k,l}^{n+1}$  из известных  $\theta_{k,l}^n$  строится следующая разностная схема (с учетом принятых в п. 2.3.1 обозначений):

$$\frac{\tilde{\theta}_{k,l} - \theta_{k,l}^n}{0,5\Delta\tau} = \Lambda_x \tilde{\theta} + \Lambda_y \theta^n + Q_{k,l}^n, \quad (2.3.6)$$

$$\frac{\theta_{k,l}^{n+1} - \tilde{\theta}_{k,l}}{0,5\Delta\tau} = \Lambda_x \tilde{\theta} + \Lambda_y \theta^{n+1} + Q_{k,l}^n. \quad (2.3.7)$$

Переход с  $n$ -го временного слоя к  $n+1$ -му осуществляется в два этапа. Сначала вычисляются промежуточные значения  $\tilde{\theta}_{k,l}$  с аппроксимацией вторых производных по координатам неявно по  $x$  и явно по  $y$ . На втором этапе вычисляются  $\theta_{k,l}^{n+1}$  из полученных промежуточных значений  $\tilde{\theta}_{k,l}$  с аппроксимацией вторых производных по координатам явно по  $x$  и неявно по  $y$ .

Разностная схема (2.3.6) – (2.3.7) аппроксимирует исходную задачу с погрешностью порядка  $o((\Delta\tau)^2 + h_x^2 + h_y^2)$  и абсолютно устойчива.

### 2.3.2. Разностные схемы для трехмерных уравнений теплопроводности

Приведем некоторые экономичные разностные алгоритмы для численного решения трехмерных уравнений теплопроводности с заданными граничными и начальными условиями:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial \tau} = L_x \vartheta + L_y \vartheta + L_z \vartheta + Q(x, y, z, \tau). \quad (2.3.8)$$

$$\theta(x, y, z, 0) = \Phi(x, y, z), \quad \theta|_B = \Psi(B), \quad (2.3.9)$$

$B$  – точки, принадлежащие границе тела.

Решение задачи (2.3.8) – (2.3.9) может быть получено с помощью двухциклической схемы расщепления:

$$\begin{aligned} \theta_{k,l,m}^{n-2/3} &= \theta_{k,l,m}^{n-1} + 0,5\Delta\tau\Lambda_x \left( \theta^{n-2/3} + \theta^{n-1} \right), \\ \theta_{k,l,m}^{n-1/3} &= \theta_{k,l,m}^{n-2/3} + 0,5\Delta\tau\Lambda_y \left( \theta^{n-1/3} + \theta^{n-2/3} \right), \\ \theta_{k,l,m}^n &= \theta_{k,l,m}^{n-1/3} + 0,5\Delta\tau\Lambda_z \left( \theta^n + \theta^{n-1/3} \right) + 2\Delta\tau Q_{k,l,m}^n, \\ \theta_{k,l,m}^{n+1/3} &= \theta_{k,l,m}^n + 0,5\Delta\tau\Lambda_x \left( \theta^{n+1/3} + \theta^n \right), \\ \theta_{k,l,m}^{n+2/3} &= \theta_{k,l,m}^{n+1/3} + 0,5\Delta\tau\Lambda_y \left( \theta^{n+2/3} + \theta^{n+1/3} \right), \\ \theta_{k,l,m}^{n+1} &= \theta_{k,l,m}^{n+2/3} + 0,5\Delta\tau\Lambda_x \left( \theta^{n+1} + \theta^{n+2/3} \right). \end{aligned} \quad (2.3.10)$$



Система разностных уравнений (2.3.10) решается в интервале  $\tau^{n-1} < \tau < \tau^{n+1}$ , имеет второй порядок относительно  $h_x, h_y, h_z, \Delta\tau$  и абсолютно устойчива.

Для решения задач теплопроводности в трехмерной постановке можно использовать метод предиктор-корректор:

$$\begin{aligned}\theta_{k,l,m}^{n+1/4} &= \theta_{k,l,m}^n + 0.5\Delta\tau\Lambda_x\theta_{k,l,m}^{n+1/4}, \\ \theta_{k,l,m}^{n+1/2} &= \theta_{k,l,m}^{n+1/4} + 0.5\Delta\tau\Lambda_y\theta_{k,l,m}^{n+1/2}, \\ \theta_{k,l,m}^{n+3/4} &= \theta_{k,l,m}^{n+1/2} + 0.5\Delta\tau\Lambda_z\theta_{k,l,m}^{n+3/4}, \\ \theta_{k,l,m}^{n+1} &= \theta_{k,l,m}^n + \Delta\tau\left(\Lambda_x\theta_{k,l,m}^{n+3/4} + \Lambda_y\theta_{k,l,m}^{n+3/4} + \Lambda_z\theta_{k,l,m}^{n+3/4} + Q_{k,l,m}^{n+1/2}\right).\end{aligned}$$

Первые три неявных уравнения играют роль предиктора, последнее явное служит корректором. Метод имеет второй порядок точности относительно  $h_x, h_y, h_z$  и условно устойчив,  $\Delta\tau \sim \min(h_x, h_y, h_z)$ .

## 2.4. Численные методы решения задач кондуктивно-конвективного теплопереноса

В предыдущих разделах были рассмотрены разностные схемы для уравнения теплопроводности, описывающего перенос тепла в неподвижной среде. Если среда движется, то помимо кондуктивного переноса тепла происходит перенос тепла конвективный, за счет движения среды со скоростью  $v$ . Уравнение кондуктивно-конвективного переноса тепла записывается в виде:

$$cp\left(\frac{\partial T}{\partial t} + v\frac{\partial T}{\partial x}\right) = \lambda\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + Q(x, t), \quad (2.4.1)$$

где  $v$  – скорость движения среды. В общем случае  $v$  является функцией  $x$  и  $t$ ,  $v(x, t)$ .

Вводя аналогичные, введенным в п. 2.1.3 безразмерные переменные и параметры, уравнение (2.4.1) можно записать в виде:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial \tau} + V\frac{\partial \vartheta}{\partial \xi} = \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \xi^2} + Q(\xi, \tau), \quad (2.4.2)$$

$$V(\xi, \tau) = \frac{v}{v_*}, \quad v_* = \frac{x^*}{t_*}.$$

Для уравнения (2.4.2) можно строить явную и неявную разностные схемы. Однако численное решение уравнения (2.4.2) имеет свои особенности.

#### 2.4.1. Явная разностная схема для уравнения кондуктивно-конвективного теплопереноса

Конвективное слагаемое  $V \frac{\partial \vartheta}{\partial \xi}$  мы можем аппроксимировать левой или правой разностью, тогда порядок аппроксимации будет  $o(h)$ , либо центральной разностью, тогда порядок аппроксимации будет  $o(h^2)$ . Для предварительного анализа примем  $V = \text{const} > 0$  и построим разностную схему, аппроксимируя конвективное слагаемое левой разностью, «разностью против потока».

$$\frac{\theta_k^{n+1} - \theta_k^n}{\Delta \tau} + V \frac{\theta_k^n - \theta_{k-1}^n}{h} = \frac{\theta_{k+1}^n - 2\theta_k^n + \theta_{k-1}^n}{h^2} + Q_k^n, \quad (2.4.3)$$

или:

$$\theta_k^{n+1} = \frac{\Delta \tau}{h^2} \theta_{k+1}^n + \left(1 - 2 \frac{\Delta \tau}{h^2} - V \frac{\Delta \tau}{h}\right) \theta_k^n + \left(\frac{\Delta \tau}{h^2} + V \frac{\Delta \tau}{h}\right) \theta_{k-1}^n + \Delta \tau Q_k^n$$

Для устойчивости схемы необходимо, чтобы множители при  $\theta_i^n$  ( $i = k+1, k, k-1$ ) были положительными. Анализируя устойчивость схемы (2.4.3) методом, изложенным в п. 2.2.3 приходим к выводу, что схема устойчива при

$$\Delta \tau < \frac{h^2}{2 + Vh}.$$

Если бы мы аппроксимировали конвективное слагаемое  $V \frac{\partial \vartheta}{\partial \xi}$  правой разностью,  $V \frac{\theta_{k+1}^n - \theta_k^n}{h}$ , то разностная схема имела бы вид:

$$\theta_k^{n+1} = \left(\frac{\Delta \tau}{h^2} - V \frac{\Delta \tau}{h}\right) \theta_{k+1}^n + \left(1 - 2 \frac{\Delta \tau}{h^2} + V \frac{\Delta \tau}{h}\right) \theta_k^n + \frac{\Delta \tau}{h^2} \theta_{k-1}^n + \Delta \tau Q_k^n$$

Множители при  $\theta_i^n$  ( $i = k+1, k, k-1$ ) положительны при

$$h < \frac{1}{V} \text{ и } \Delta\tau < \frac{h^2}{2 - Vh}. \quad (2.4.4)$$

Условия (2.4.4) устанавливают ограничения на величины шагов по пространству и по времени. Поэтому такая аппроксимация уравнения (2.4.1) не используется.

При использовании центральной разности при аппроксимации конвективного слагаемого в уравнении (2.4.1) получаем схему:

$$\theta_k^{n+1} = \left( \frac{\Delta\tau}{h^2} - V \frac{\Delta\tau}{h} \right) \theta_{k+1}^n + \left( 1 - 2 \frac{\Delta\tau}{h^2} \right) \theta_k^n + \left( \frac{\Delta\tau}{h^2} + V \frac{\Delta\tau}{h} \right) \theta_{k-1}^n + \Delta\tau Q_k^n$$

имеющую погрешность порядка  $o(\Delta\tau + h^2)$ , которая является устойчивой при условиях

$$h < \frac{1}{V}, \Delta\tau < \frac{h^2}{2}, \left( r = \frac{\Delta\tau}{h^2} < \frac{1}{2} \right).$$

Запишем разностную схему для уравнения (2.4.1) при  $V = V(\xi, \tau)$ , при этом  $V$  возможно меняет знак. Явная схема с аппроксимацией конвективного слагаемого разностями против потока имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{\theta_k^{n+1} - \theta_k^n}{\Delta\tau} + \frac{V_k + |V_k|}{2} \frac{\theta_k^n - \theta_{k-1}^n}{h} + \frac{V_k - |V_k|}{2} \frac{\theta_{k+1}^n - \theta_k^n}{h} = \\ = \frac{\theta_{k+1}^n - 2\theta_k^n + \theta_{k-1}^n}{h^2} + Q_k^n. \end{aligned} \quad (2.4.5)$$

$$\begin{aligned} \theta_k^{n+1} = & \left( \frac{\Delta\tau}{h^2} - \frac{V_k - |V_k|}{2} \frac{\Delta\tau}{h} \right) \theta_{k+1}^n + \\ & + \left( 1 - 2 \frac{\Delta\tau}{h^2} - \frac{V_k + |V_k|}{2} \frac{\Delta\tau}{h} + \frac{V_k - |V_k|}{2} \frac{\Delta\tau}{h} \right) \theta_k^n + \\ & + \left( \frac{\Delta\tau}{h^2} + \frac{V_k + |V_k|}{2} \frac{\Delta\tau}{h} \right) \theta_{k-1}^n + \Delta\tau Q_k^n \end{aligned}$$

Такая запись обеспечивает аппроксимацию конвективного слагаемого разностями против потока при любом направлении скорости потока. Схема устойчива при

$$\Delta\tau < \frac{h^2}{2 + \max |V_k| h}$$

и имеет погрешность аппроксимации  $o(\Delta\tau + h)$ .

Таким образом, использование разностей против потока при аппроксимации конвективного слагаемого в уравнении теплопереноса при построении явной разностной схемы дает условно устойчивую схему (2.4.5) с порядком погрешности аппроксимации  $o(\Delta\tau + h)$ .

#### 2.4.2. Неявная разностная схема для уравнения кондуктивно-конвективного теплопереноса

Неявная схема для уравнения кондуктивно-конвективного теплопереноса с аппроксимацией конвективного слагаемого разностями против потока имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{\theta_k^{n+1} - \theta_k^n}{\Delta\tau} + \frac{V_k + |V_k|}{2} \frac{\theta_k^{n+1} - \theta_{k-1}^{n+1}}{h} + \frac{V_k - |V_k|}{2} \frac{\theta_{k+1}^{n+1} - \theta_k^{n+1}}{h} = \\ = \frac{\theta_{k+1}^{n+1} - 2\theta_k^{n+1} + \theta_{k-1}^{n+1}}{h^2} + Q_k^n, \end{aligned} \quad (2.4.6)$$

или

$$\begin{aligned} \left( \frac{\Delta\tau}{h^2} - \frac{V_k - |V_k|}{2} \frac{\Delta\tau}{h} \right) \theta_{k+1}^{n+1} + \left( -1 - 2 \frac{\Delta\tau}{h^2} - |V_k| \frac{\Delta\tau}{h} \right) \theta_k^{n+1} + \\ + \left( \frac{\Delta\tau}{h^2} + \frac{V_k + |V_k|}{2} \frac{\Delta\tau}{h} \right) \theta_{k-1}^{n+1} = -\theta_k^n - \Delta\tau Q_k^n. \end{aligned} \quad (2.4.7)$$

Схема (2.4.6) имеет погрешность аппроксимации  $o(\Delta\tau + h)$ . Анализируя устойчивость (2.4.7) по принципу максимума убеждаемся, что схема является абсолютно устойчивой. Система уравнений (2.4.7) решается методом прогонки.

При аппроксимации конвективного слагаемого центральными разностями с целью обеспечить погрешность аппроксимации  $o(\Delta\tau + h^2)$

получаем схему:

$$\begin{aligned} \left( \frac{\Delta\tau}{h^2} - V_k \frac{\Delta\tau}{h} \right) \theta_{k+1}^{n+1} + \left( -1 - 2 \frac{\Delta\tau}{h^2} \right) \theta_k^{n+1} + \left( \frac{\Delta\tau}{h^2} + V_k \frac{\Delta\tau}{h} \right) \theta_{k-1}^{n+1} = \\ = -\theta_k^n - \Delta\tau Q_k^n. \end{aligned} \quad (2.4.8)$$

или

$$A_k \theta_{k+1} + B_k \theta_k + C_k \theta_{k-1} = F_k.$$

Проверим устойчивость схемы по принципу максимума.

$$A_k > 0, C_k > 0, -B_k > A_k + C_k.$$

Первые два неравенства дают ограничение на величину шага по пространству:

$$h < \frac{1}{\max |V_k|},$$

схема (2.4.8) является условно устойчивой.

Таким образом, использование разностей против потока при аппроксимации конвективного слагаемого в уравнении теплопереноса при построении неявной разностной схемы дает абсолютно устойчивую схему (2.4.7) с порядком погрешности аппроксимации  $o(\Delta\tau + h)$ .

### 2.4.3. Построение схемы второго порядка точности для уравнения кондуктивно-конвективного теплопереноса.

#### Преобразование А.А. Самарского

Рассмотрим простейший случай уравнения (2.4.1)  $V = \text{const} > 0$ . При аппроксимации конвективного слагаемого в уравнении против потока запишем:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial \xi} \approx \frac{\vartheta(\xi, \tau) - \vartheta(\xi - h, \tau)}{h} = \frac{\vartheta_k - \vartheta_{k-1}}{h}.$$

Запишем  $\vartheta_{k-1}$  через  $\vartheta_k$  в виде разложения в ряд Тейлора:

$$\begin{aligned} \vartheta_{k-1} &= \vartheta_k - \frac{\partial \vartheta}{\partial \xi} h + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \xi^2} \frac{h^2}{2} - \frac{\partial^3 \vartheta}{\partial \xi^3} \frac{h^3}{3!} + o(h^4), \\ \frac{\partial \vartheta}{\partial \xi} + o(h^2) &= \frac{\vartheta_k - \vartheta_{k-1}}{h} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \xi^2} \frac{h}{2}. \end{aligned} \quad (2.4.9)$$

Подставим (2.4.9) в уравнение (2.4.1), получим

$$\frac{\theta_k^{n+1} - \theta_k^n}{\Delta\tau} + V \frac{\theta_k^{n+1} - \theta_{k-1}^{n+1}}{h} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} - \frac{Vh}{2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} + Q.$$

Запишем также вторые производные в виде конечных разностей на  $n+1$  временном слое, получим:

$$\begin{aligned} & \frac{\theta_k^{n+1} - \theta_k^n}{\Delta\tau} + V \frac{\theta_k^{n+1} - \theta_{k-1}^{n+1}}{h} = \\ & = \left(1 - \frac{Vh}{2}\right) \frac{\theta_{k+1}^{n+1} - 2\theta_k^{n+1} + \theta_{k-1}^{n+1}}{h^2} + Q_k^n. \end{aligned} \quad (2.4.10)$$

Известно разложение в ряд Тейлора в окрестности  $\alpha = 0$  функции

$$\frac{1}{1+\alpha} = 1 - \alpha + \alpha^2 - \alpha^3 + \dots$$

При  $\alpha \ll 1$  можно ограничиться двумя слагаемыми:

$$\frac{1}{1+\alpha} \approx 1 - \alpha.$$

При малых значениях  $Vh/2$  можно с хорошей точностью записать:

$$1 - \frac{Vh}{2} = \frac{1}{1 + Vh/2}. \quad (2.4.11)$$

Тогда схема (2.4.10) перепишется в виде:

$$\frac{\theta_k^{n+1} - \theta_k^n}{\Delta\tau} + V \frac{\theta_k^{n+1} - \theta_{k-1}^{n+1}}{h} = \frac{\theta_{k+1}^{n+1} - 2\theta_k^{n+1} + \theta_{k-1}^{n+1}}{(1 + Vh/2)h^2} + Q_k^n,$$

или

$$\begin{aligned} & \frac{\Delta\tau}{(1 + Vh/2)h^2} \theta_{k+1}^{n+1} + \left( -1 - 2 \frac{\Delta\tau}{(1 + Vh/2)h^2} - V \frac{\Delta\tau}{h} \right) \theta_k^{n+1} + \\ & + \left( \frac{\Delta\tau}{(1 + Vh/2)h^2} + V \frac{\Delta\tau}{h} \right) \theta_{k-1}^{n+1} = -\theta_k^n - \Delta\tau Q_k^n. \end{aligned} \quad (2.4.12)$$

Исследуя схему (2.4.12) на устойчивость по принципу максимума убеждаемся, что она является абсолютно устойчивой, имеет погрешность аппроксимации порядка  $o(\Delta\tau + h^2)$ .

Аппроксимация конвективного слагаемого в форме (2.4.9) с заменой (2.4.11), приводящей к схеме (2.4.12) называется преобразованием А.А. Самарского.

Запишем неявную разностную схему второго порядка аппроксимации для любого  $V = V(\xi, \tau)$ . Аппроксимируем конвективное слагаемое (2.4.1) в виде:

$$\begin{aligned}
V \frac{\partial \vartheta}{\partial \xi} + o(h^2) &= \\
&= \frac{V_k + |V_k|}{2} \frac{\vartheta_k - \vartheta_{k-1}}{h} + \frac{V_k - |V_k|}{2} \frac{\vartheta_{k+1} - \vartheta_k}{h} + |V_k| \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \xi^2} \frac{h}{2}. \quad (2.4.13)
\end{aligned}$$

Подставляем (2.4.13) в (2.4.1), получим:

$$\begin{aligned}
\frac{\theta_k^{n+1} - \theta_k^n}{\Delta \tau} + \frac{V_k + |V_k|}{2} \frac{\theta_k^{n+1} - \theta_{k-1}^{n+1}}{h} + \frac{V_k - |V_k|}{2} \frac{\theta_{k+1}^{n+1} - \theta_k^{n+1}}{h} &= \\
&= \left(1 - \frac{|V_k| h}{2}\right) \frac{\theta_{k+1}^{n+1} - 2\theta_k^{n+1} + \theta_{k-1}^{n+1}}{h^2} + Q_k^n.
\end{aligned}$$

Делая преобразование (2.4.11) получим

$$\begin{aligned}
\frac{\theta_k^{n+1} - \theta_k^n}{\Delta \tau} + \frac{V_k + |V_k|}{2} \frac{\theta_k^{n+1} - \theta_{k-1}^{n+1}}{h} + \frac{V_k - |V_k|}{2} \frac{\theta_{k+1}^{n+1} - \theta_k^{n+1}}{h} &= \\
&= \frac{\theta_{k+1}^{n+1} - 2\theta_k^{n+1} + \theta_{k-1}^{n+1}}{(1 + |V_k| h/2) h^2} + Q_k^n,
\end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}
&\left( \frac{\Delta \tau}{(1 + |V_k| h/2) h^2} - \frac{V_k - |V_k|}{2} \frac{\Delta \tau}{h} \right) \theta_{k+1}^{n+1} + \\
&+ \left( -1 - \frac{2\Delta \tau}{(1 + |V_k| h/2) h^2} - |V_k| \frac{\Delta \tau}{h} \right) \theta_k^{n+1} + \\
&+ \left( \frac{\Delta \tau}{(1 + |V_k| h/2) h^2} + \frac{V_k + |V_k|}{2} \frac{\Delta \tau}{h} \right) \theta_{k-1}^{n+1} = -\theta_k^n - \Delta \tau Q_k^n. \quad (2.4.14)
\end{aligned}$$

Схема (2.4.14) абсолютно устойчива и имеет погрешность аппроксимации порядка  $o(\Delta \tau + h^2)$ . Решается методом прогонки.

Аналогично строится явная схема для уравнения (2.4.1) второго порядка точности. Она имеет вид:

$$\begin{aligned}
\theta_k^{n+1} = & \left( \frac{\Delta\tau}{(1 + |V_k|h/2)h^2} - \frac{V_k - |V_k|}{2} \frac{\Delta\tau}{h} \right) \theta_{k+1}^n + \\
& + \left( 1 - \frac{2\Delta\tau}{(1 + |V_k|h/2)h^2} - |V_k| \frac{\Delta\tau}{h} \right) \theta_k^n + \\
& + \left( \frac{\Delta\tau}{(1 + |V_k|h/2)h^2} + \frac{V_k + |V_k|}{2} \frac{\Delta\tau}{h} \right) \theta_{k-1}^n + \Delta\tau Q_k^n.
\end{aligned} \tag{2.4.15}$$

Схема (2.4.14) условно устойчива и имеет погрешность аппроксимации порядка  $o(\Delta\tau + h^2)$ .

*Замечание.*

Вместо замены  $1 - \frac{Vh}{2} \approx \frac{1}{1 + Vh/2}$  можно провести замену вида

$1 - \frac{Vh}{2} \approx e^{-Vh/2}$ . Тогда вместо (2.4.14) можно получить схему

$$\begin{aligned}
\frac{\theta_k^{n+1} - \theta_k^n}{\Delta\tau} + \frac{V_k + |V_k|}{2} \frac{\theta_k^{n+1} - \theta_{k-1}^{n+1}}{h} + \frac{V_k - |V_k|}{2} \frac{\theta_{k+1}^{n+1} - \theta_k^{n+1}}{h} = \\
= \frac{\theta_{k+1}^{n+1} - 2\theta_k^{n+1} + \theta_{k-1}^{n+1}}{\exp(|V_k|h/2)h^2} + Q_k^n,
\end{aligned}$$

которая также является абсолютно устойчивой, имеет погрешность аппроксимации порядка  $o(\Delta\tau + h^2)$ , решается методом прогонки.

## 2.5. «Прописные истины» начинающего вычислителя

Решение задачи численными методами занятие достаточно сложное, требующее внимательности и усидчивости.

Решение задачи можно разделить на несколько этапов.

*1. Постановка задачи.*

На этом этапе определяется задача исследования, записывается математическая модель моделируемого физического явления, устанавливаются условия однозначности решения задачи: определяются геометрия области, внутри которой происходит исследуемый физический про-



цесс, записываются условия на границах области (граничные условия), определяются начальные условия, определяются значения физических величин, используемых в математической модели. При анализе математической постановки задачи возможно выделить параметры подобия и записать систему уравнений математической модели в безразмерных переменных и параметрах.

#### *2. Выбор численного метода.*

Для различных задач физики и математической физики возникают уравнения и системы уравнений: алгебраические, трансцендентные, обыкновенные дифференциальные уравнения или их системы, уравнения в частных производных первого, второго порядка или их системы. Для решения таких задач естественно применяются соответствующие численные методы. В зависимости от типа уравнений выбирается численный метод для их решения.

#### *3. Построение разностной схемы.*

Для решения уравнения или системы уравнений математической модели строится разностная схема. Можно построить множество вариантов разностных схем для решения одной и той же задачи. Однако не всякой разностной схемой возможно решить поставленную задачу. Разностная схема должна аппроксимировать исходную дифференциальную задачу, должна быть устойчивой (Теорема сходимости).

#### *4. Разработка алгоритма решения задачи.*

Алгоритм это последовательность действий приводящая к конкретному результату. Алгоритм численного решения задачи это последовательность арифметических действий и вычислений, а также необходимых логических действий, приводящих к конкретному и однозначному результату решения задачи. При построении сложных логических цепочек в алгоритме нужно быть внимательным и проверять результативность алгоритма.

#### *5. Написание программы.*

После выбора разностной схемы и разработки алгоритма решения задачи можно приступать к написанию программы. Перед написанием программы необходимо определить имена идентификаторов соответствующих обозначениям, принятым в математической модели. Для читаемости программы имена идентификаторов выбираются созвучными обозначениям, принятым в математической модели и разностной схеме. Если используются массивы, то их длину удобнее определять задаваемой константой. (Тогда изменением только одной величины можно сделать увеличение количества точек сетки и уменьшить шаг по пространству). При написании программы полезно комментировать все перемен-

ные, их значения, и некоторые логические действия, заложенные в алгоритм. Это помогает при отладке программы. А также это важно, когда вы через неделю (или через год) возвращаетесь к расчетам по этой программе, и естественно забыли какая буква что обозначает, а комментарии помогут вспомнить!

Программа должна быть хорошо читаемой иначе очень трудно бывает понять что в ней написано (убедительно?).

Для читаемости программы:

- каждый оператор пишут с новой строки;
- **begin** и соответствующий ему **end** пишут с одинаковым отступом от начала строки (это облегчает поиск в тексте программы этих соответствий);
- вложенные блоки (между **begin** и **end**) пишут с отступом от соответствующих **begin** и **end** на два пробела;
- комментарии располагают справа от переменных или в начале соответствующего логического блока.

В п. 2.2.18 представлен текст программы, написанный в соответствии с вышеизложенными рекомендациями.

#### *6. Тестирование программы.*

После написания программы в электронном виде и исправления неизбежных синтаксических ошибок необходимо убедиться в правильности результатов решения задачи, получаемых в процессе вычислений по созданной программе.

*Любой вычислитель должен руководствоваться принципом «В разрабатываемой программе ошибки есть» и «В разработанной программе ошибки, скорее всего есть, но они до сих пор не проявились».*

Для любой программы, составленной для решения уравнения или системы уравнений математической постановки задачи, существует стандартный набор тестов, которые необходимо проводить.

а) У любого уравнения или системы уравнений существует тривиальное решение. Получите его численно! (Например, в задачах теплопроводности при однородном распределении температуры и отсутствии тепловых возмущений от границы и внутренних источников эта температура не будет меняться).

б) При записи уравнения математической модели (или системы) в него закладывается закон природы (сохранения массы, импульса или энергии). Для замкнутой системы он должен (они должны) выполняться при численном решении. Убедитесь в том, что при численном решении законы сохранения выполняются! (Например, в задачах теплопроводности для замкнутой системы, когда нет потерь тепла в окружающую среду за счет теплообмена, количество тепла в теле остается постоянным,

выполняется закон сохранения энергии.) в) Получение аналитических решений линейных задач.

Для некоторых уравнений, или систем уравнений математической модели при небольших упрощениях можно получить аналитические решения. Если такие аналитические решения получены, то решив упрощенную задачу численно, сравнивайте решения! Если есть отличия, то ищите ошибку в программе.

г) получение стационарных решений

Для некоторых уравнений, или систем уравнений математической модели можно получить стационарные решения. Если такие решения получены, то решив задачу численно до установления стационарного решения, сравнивайте решения! Если есть отличия, то ищите ошибку в программе.

*7. Исследование сеточной сходимости.*

Для получения численного решения поставленной задачи с заданной точностью необходимо проводить исследование сходимости решения при уменьшении величины шага по пространству. Для этого проводится решение задачи на разных разностных сетках (с разными шагами по пространству  $h, h/2, h/4, \dots$ ). По мере уменьшения величины шага по пространству решения задачи (значения зависимых переменных задачи в один и тот же момент времени в различных точках пространства) должны отличаться на все меньшую и меньшую величину. Когда отличие этих значений составит малую величину, то для расчетов выбирается соответствующий этому шаг по пространству.

*8. Проведение расчетов (параметрические исследования).*

В большинстве математических постановок задач существуют параметры, от которых зависит решение. При проведении исследований физических процессов проводится численное решение задачи при различных значениях определяющих решение параметров задачи. Результаты расчетов фиксируются и накапливаются в виде файлов для дальнейшей обработки и анализа.

*9. Обработка результатов расчетов.*

Числовая информация, полученная после проведения параметрических расчетов, обрабатывается с использованием графических средств dos или Windows в графическом виде, а также в виде таблиц и других данных.

*10. Описание результатов решения задачи.*

Полученные результаты анализируются, и выявленные закономерности моделируемого физического явления описываются.

И еще несколько советов начинающим вычислителям:

Решение одной и той же задачи разными методами должно давать один результат.

Компьютер он послушный – что ему скажешь, то он и сделает. Говорите правильно!

При решении задач достаточно часто используются «Лекарские приемы», чтобы обеспечить успешность алгоритма решения задачи. Не бойтесь их применять, но применяйте их с умом!

В процессе работы файлы данных и файлы вариаций одной и той же программы множатся. Систематизируйте результаты, и файлы с программами. Подписывайте вариации программы соответствующими комментариями в начале текста программы.

При поиске вычислительных ошибок используйте Debug или печать значений переменных участвовавших в арифметических действиях, приведших к авосту. Контролируйте задание исходных значений переменных, используемых в программе. Не допускайте выхода за границы массивов при проведении вычислений.

### **Контрольные вопросы к Главе 1**

- 1.1. Разностная схема метода Эйлера, определение погрешности этого метода. Каков порядок точности метода Эйлера.
- 1.2. Алгоритм метода Рунге–Кутты.
- 1.3. Перечислите частные случаи граничных условий.
- 1.4. Итерационная формула метода Ньютона
- 1.5. В чем состоит сущность метода суперпозиции. Реализация этого метода (пошагово).
- 1.6. Суть метода прогонки
- 1.7. Особенность решения ДУ третьего порядка в случае, когда граничные условия заданы в трех точках.
- 1.8. Суть метода конечных разностей. Порядок точности этого метода.
- 1.9. Разностная схема метода квазилинеаризации.
- 1.10. Чем объясняется лучшая сходимость метода Ньютона для решения нелинейных краевых задач по сравнению с методом квазилинеаризации. Итерационная формула метода Ньютона.

### **Контрольные вопросы к Главе 2**

- 2.1. Понятие аппроксимации. Определение порядка аппроксимации уравнения теплопроводности на трехточечном шаблоне.

- 2.2. Явная схема для уравнения теплопроводности с постоянным коэффициентом теплопроводности. Анализ устойчивости.
- 2.3. Неявная схема для уравнения теплопроводности с постоянным коэффициентом теплопроводности. Анализ устойчивости.
- 2.4. Схема с весами для уравнения теплопроводности с постоянным коэффициентом теплопроводности. Анализ устойчивости.
- 2.5. Явная схема для уравнения теплопроводности с переменным коэффициентом теплопроводности. Анализ устойчивости.
- 2.6. Неявная схема для уравнения теплопроводности с переменным коэффициентом теплопроводности. Анализ устойчивости.
- 2.7. Метод прогонки для численного решения уравнения теплопроводности с переменным коэффициентом теплопроводности.
- 2.8. Аппроксимация неоднородных граничных условий II и III рода для задачи теплопроводности с порядком аппроксимации  $o(h)$  и  $o(h^2)$ .
- 2.9. Явная схема для уравнения конвекции–теплопроводности с постоянным коэффициентом теплопроводности. Анализ устойчивости.
- 2.10. Неявная схема для уравнения конвекции–теплопроводности с постоянным коэффициентом теплопроводности. Анализ устойчивости.
- 2.11. Неявная схема для уравнения конвекции–теплопроводности с постоянным коэффициентом теплопроводности с порядком аппроксимации  $o(h^2)$  (Преобразование Самарского).
- 2.12. Методы решения двумерных уравнений теплопроводности. Продольно-поперечная прогонка.
- 2.13. Методы решения двумерных уравнений теплопроводности. Схема переменных направлений.
- 2.14. Аппроксимация линейных правых частей (источников и стоков) в уравнении теплопроводности при использовании явных и неявных схем.

### Индивидуальные задания к Главе 1

- 1.1. Разработайте решение краевой задачи

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - xy = e^x, \quad 0 < x < 1, \quad \frac{dy(0)}{dx} = 1, \quad y(1) = 2$$

методом хорд (линейной интерполяцией).

- 1.2. Разработайте решение краевой задачи

$$\frac{d^3 y}{dx^3} + x \frac{dy}{dx} - y = x^2, \quad 0 < x < 1, \quad y(0) = 0, \quad \frac{dy(0)}{dx} - \frac{d^2 y(0)}{dx^2} = 1,$$

$y(1) = 5$  методом Ньютона.

1.3. Разработайте решение краевой задачи

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dy}{dx} - x^2 y = x + 1, \quad 0 < x < 1, \quad \frac{dy(0)}{dx} = 0,$$

$$\frac{dy(1)}{dx} + 2y(1) = 3 \text{ методом суперпозиции.}$$

1.4. Разработайте решение краевой задачи

$$\frac{d^3 y}{dx^3} - x \frac{d^2 y}{dx^2} + y = 0, \quad 0 < x < 1, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 2, \quad \frac{d^2 y(1)}{dx^2} = 3,$$

$y(1) = 5$  методом Ньютона.

1.5. Запишите разностную схему (с порядком аппроксимации  $\sim h^2$ ) решения краевой задачи

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{2}{x} \frac{dy}{dx} - e^x y = 0, \quad 0 < x < 1, \quad \frac{dy(0)}{dx} = 0, \quad y(1) = 4.$$

1.6. Запишите разностную схему (с порядком аппроксимации  $\sim h^2$ ) решения краевой задачи

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} - x^2 y = 0, \quad 0 < x < 1, \quad y(0) = 1, \quad \frac{dy(1)}{dx} = 0.$$

1.7. Опишите решение задачи о брахистохроне

$$2u \frac{d^2 u}{dx^2} + 1 + \left( \frac{du}{dx} \right)^2 = 0, \quad 0 < x < l, \quad \frac{du(0)}{dx} = 0, \quad u(l) = A$$

методом Ньютона. (Как можно обойтись без итераций?)

1.8. Опишите решение задачи о тепловом взрыве

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{du}{dx} + \delta e^u = 0, \quad 0 < x < 1, \quad \frac{du(0)}{dx} = 0, \quad u(1) = 0$$

методом Ньютона. (Как можно обойтись без итераций?)

1.9. Опишите решение задачи Блазиуса

$$\frac{d^3 f}{dz^3} + \frac{1}{2} f \frac{d^2 f}{dz^2} = 0, \quad 0 < z < \infty, \quad f(0) = 0, \quad \frac{df(0)}{dz} = 0, \quad \frac{df(\infty)}{dz} = 1$$

методом Ньютона. (Как можно обойтись без итераций?)

1.10. Опишите решение задачи о продольном ударе по вязкопластичному стержню

$$\frac{d^2 f}{dz^2} - az \left( \frac{df}{dz} \right)^b = 0, \quad 0 < z < \infty, \quad f(0) = 0, \quad f(\infty) = 1$$

методом Ньютона. (Как можно обойтись без итераций?)

1.11. Опишите решение задачи о химическом реакторе

$$\frac{1}{p} \frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{du}{dx} - Ru^n = 0, \quad 0 < x < 1, \quad \frac{du(0)}{dx} = 0, \quad \frac{1}{p} \frac{du(1)}{dx} + u(1) = 1,$$

$$(p = 1, n = 2, R = 5).$$

1.12. Опишите решение задачи для нелинейного уравнения диффузии

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{2}{x} \frac{du}{dx} - \frac{au}{1+bu} = 0, \quad 0 < x < 1, \quad \frac{du(0)}{dx} = 0,$$

$$\frac{du(1)}{dx} + c(u(1) - 1) = 0, \quad (a > 0, b > 0, c > 0).$$

1.13. Запишите алгоритм решения краевой задачи о прогибе круговой мембраны

$$\frac{d^2 f}{dz^2} + \frac{z^2}{f^2} = A, \quad 0 < z < 1, \quad f(0) = 0, \quad \frac{df(1)}{dz} - \alpha f(1) = 0,$$

$$(A = 0,5, \alpha = 2).$$

1.14. Запишите алгоритм решения краевой задачи об изгибе консольной балки

$$\frac{d^2 f}{dz^2} + a \cos(f) = 0, \quad 0 < z < 1, \quad f(0) = 0, \quad \frac{df(1)}{dz} = 0, \quad (a = 3).$$

## Индивидуальные задания к Главе 2

В задачах 2.1 – 2.10 численно решить задачу о распространении тепла в слое толщины  $l$ , которое описывается уравнением

$$c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{2\alpha}{R_0} (T - T_0) + Q(x, t)$$

при заданных начальных и граничных условиях и зависимости  $Q(x, t)$ .

Составить программу решения задачи по явной и неявной схеме. Провести ее тестирование. Задачу решать в безразмерных переменных, результаты расчета представить в размерных переменных для заданного материала слоя.

- 2.1.  $T(x, 0) = T_0, T(0, t) = T_1, T(l, t) = T_2,$   
 $Q(x, t) = \text{const}.$   
 Материал стенки – сталь.  $\alpha = \text{const}.$
- 2.2.  $T(x, 0) = T_0, \frac{\partial T(0, t)}{\partial x} = 0, T(l, t) = T_2, Q(x, t) = \text{const}.$   
 Материал стенки – сталь.  $\alpha = \text{const}.$
- 2.3.  $T(x, 0) = T_0, T(0, t) = T_1, \frac{\partial T(l, t)}{\partial x} = 0, Q(x, t) = \text{const}.$   
 Материал стенки – стекло.  $\alpha = \text{const}.$
- 2.4.  $T(x, 0) = T_0, T(0, t) = T_1, -\lambda \frac{\partial T(l, t)}{\partial x} = \alpha(T(l, t) - T_0),$   
 $Q(x, t) = \text{const}.$   
 Материал стенки – медь.  $\alpha = \text{const}.$
- 2.5.  $T(x, 0) = T_0, \lambda \frac{\partial T(0, t)}{\partial x} = \alpha(T(0, t) - T_0), T(l, t) = T_2,$   
 $Q(x, t) = \text{const}.$   
 Материал стенки – алюминий.  $\alpha = \text{const}.$
- 2.6.  $T(x, 0) = T_0, \lambda \frac{\partial T(0, t)}{\partial x} = \alpha(T - T_0), \frac{\partial T(l, t)}{\partial x} = 0,$   
 $Q(x, t) = \text{const}.$   
 Материал стенки – стекло.  $\alpha = \text{const}.$
- 2.7.  $T(x, 0) = T_0, \lambda \frac{\partial T(0, t)}{\partial x} = \alpha(T(0, t) - T_0), \frac{\partial T(l, t)}{\partial x} = 0,$   
 $Q(x, t) = \text{const}.$   
 Материал стенки – алюминий.  $\alpha = \text{const}.$
- 2.8.  $T(x, 0) = T_0, T(0, t) = T_1, T(l, t) = T_2, Q(x, t) = Ax + B.$   
 Материал стенки – сталь.  $\alpha, A, B = \text{const}.$
- 2.9.  $T(x, 0) = T_0, T(0, t) = T_1, -\lambda \frac{\partial T(l, t)}{\partial x} = \alpha(T - T_0),$   
 $Q(x, t) = \sin(Ax/l) + B.$   
 Материал стенки – медь.  $\alpha, A, B = \text{const}.$
- 2.10.  $T(x, 0) = T_0, T(0, t) = T_1, -\lambda \frac{\partial T(l, t)}{\partial x} = \alpha(T(l, t) - T_0),$   
 $Q(x, t) = \exp(Ax/l) + B.$   
 Материал стенки – алюминий.  $\alpha, A, B = \text{const}.$



## Литература

### Основная

1. *Понтрягин Л.С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1974. 331 с.
2. *На Ц.* Вычислительные методы решения прикладных задач. М.: Мир, 1982. 296 с.
3. *Миньков С.Л., Миньков Л.Л.* Основы численных методов: Учебное пособие. Томск: Издательство НТЛ, 2006. 260 с.
4. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972. 736 с.
5. *Кутателадзе С.С.* Анализ подобия в теплофизике. Новосибирск: Наука, 1982. 280 с.
6. *Исаченко В.П., Осипова В.А., Сукомел А.С.* Теплопередача. М.: Энергия, 1975. 488 с.
7. *Берковский Б.М., Ноготов Е.Ф.* Разностные методы исследования задач теплообмена. Минск: Наука и техника, 1976. 144 с.
8. *Пасконов В.М., Полежаев В.И., Чудов Л.А.* Численное моделирование процессов тепло- массообмена. М.: Наука, 1984. 288 с.
9. *Андерсен Д., Таннехилл Дж., Плетчер Р.* Вычислительная гидромеханика и теплообмен. В 2-х т. М.: Мир, 1990. 728 с.
10. *Патанкар С.* Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости. М.: Энергоатомиздат, 1984. 152 с.
11. *Самарский А.А.* Теория разностных схем. М.: Наука, 1977. 388 с.
12. *Самарский А.А.* Введение в теорию разностных схем. М.: Наука, 1971. 552 с.

## Дополнительная

1. *Марчук Г.И.* Методы вычислительной математики. М.: Наука, 1989. 536 с.
2. *Ортега Дж., Пул У.* Введение в численные методы решения дифференциальных уравнений. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. 288 с.
3. *Боглаев Ю.П.* Вычислительная математика и программирование. М.: Высшая школа, 1990. 534 с.
4. *Форсайт Дж., Малькольм М., Моулер К.* Машинные методы математических вычислений. М.: Мир, 1980. 280 с.
5. *Арушанян О.Б., Залеткин С.Ф.* Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений на Фортране. М.: Издательство МГУ, 1990. 336 с.
6. *Бахвалов Н.С., Жидков Н.С., Кобельков Г.М.* Численные методы. М.: Наука, 1987.
7. *Хайрер Э., Нерсетт С., Виннер Г.* Решение ОДУ. Нежесткие задачи. М.: Мир. 1990.
8. *Ши Д.* Численные методы в задачах теплообмена. М.: Мир, 1988. 544 с.
9. *Самарский А.А., Николаев Е.С.* Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука, 1978. 592 с.
10. *Самарский А.А., Вабищевич П.Н.* Вычислительная теплопередача. М.: Едиториал УРСС, 2003. 784 с.
11. *Самарский А.А., Вабищевич П.Н.* Аддитивные схемы для задач математической физики. М.: Наука, 2001. 319 с.
12. *Яненко Н.Н.* Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. Новосибирск: Наука, 1967.