А. Б. ВЕЛИКИН и Г. С. ФРАНТОВ

ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ПОЛЯ, ПРИМЕНЯЕМЫЕ В ИНДУКЦИОННЫХ МЕТОДАХ ЭЛЕКТРОРАЗВЕДКИ

ГОСТОПТЕХИЗДАТ • 1962

А. Б. ВЕЛИКИН и Г. С. ФРАНТОВ

ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ПОЛЯ, ПРИМЕНЯЕМЫЕ В ИНДУКЦИОННЫХ МЕТОДАХ ЭЛЕКТРОРАЗВЕДКИ

ОБЗОР ЗАРУБЕЖНОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

ГОСТОПТЕХ-ИЗДАТ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
НЕФТЯНОЙ И ГОРНО-ТОПЛИВНОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
ЛЕНИНГРАДСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
Ленинград · 1962

11—5—4

В обзоре рассматриваются вопросы теории электромагнитных индукционных полей в горизонтально-слоистых средах и проводящих телах, имеющих форму сферы, цилиндра и пластины. Разобран ряд конкретных задач применительно к низкочастотной индуктивной электроразведке наземными и воздушными методами.

Обзор знакомит читателя с работами, опубликованными в английских, американских, голландских, итальянских, канадских, японских, чешских, польских и др. журналах.

Книга рассчитана на инженеров-геофизиков и научных сотрудников, работающих в области электроразведки. Она может быть также полезна студентам старших курсов геофизических специальностей.

ВВЕДЕНИЕ

За последнее время методы индукционной электроразведки получают все большее развитие как в рудной, так и в структурной геофизике. В связи с этим в отечественной и иностранной периодической печати появилось много статей по различным вопросам теории индукционных методов. Настоящий обзор посвящен знакомству с работами зарубежных авторов, не всегда доступными широким кругам геофизиков.

Обзор предназначен для читателей, знакомых с основами теории электроразведки, которые изложены в учебных пособиях Бурсиана (1933, 1936), Заборовского (1943, 1960), Якубовского и Ляхова (1956).

Обзор охватывает период с 1950 по 1960 гг. Работы, обобщающие теоретические исследования зарубежных авторов за этот период, составителям неизвестны. Бухгейм (Buchheim, 1952) дает краткую сводку основных исследований по теории индукционных методов электроразведки, но заканчивает ее работами 1940—1946 гг. В книгах Джекоски (Jakosky, 1950), Роте (E. Rothé, J. Rothé, 1952), Ива и Кейса (Eve, Keys, 1954), Гладика (Hladik, 1956), так же как и в более ранних монографиях Фрича (Fritsch, 1949) и Хэйланда (Heiland, 1946), отсутствует обстоятельное изложение теории индукционных методов. Поэтому материалом для обзора смогли послужить только статьи из иностранных журналов.

Пользуясь основными положениями теории электромагнитных полей, иностранные авторы чаще всего ссылаются на книги Смайта (1954), Стрэттона (1948), Морса и Фешбаха (1960) и Щелкунова (Schelkunoff, 1943). Эти книги, за исключением последней, переведены на русский язык. Ряд ссылок на устаревшую литературу заменен ссылками на более новую. Ссылки на статьи, послужившие материалом при составлении обзора, заменены ссылками на соответствующие главы и параграфы обзора.

Зарубежные авторы, за исключением авторов из стран народной демократии, обычно не делают ссылок на работы, выполненные в СССР, хотя отечественные геофизики занимаются всеми методами индукционной электроразведки, начиная с 20-х годов,

т. е. со времени возникновения электроразведки. Чтобы несколько восполнить этот пробел, приводится библиография отечественных работ, а в ряде случаев сделаны примечания к тексту.

Большое внимание уделено методам решения задач. Математические выкладки, как правило, даются без особых сокращений. В обзоре приводятся таблицы, графики и отдельные примеры числовых вычислений.

Формулы приводятся в тех системах единиц, которые выбраны авторами статей: системе MKS и системе Гаусса. Символика и терминология, употребляемые иностранными авторами, в ряде случаев заменены на распространенную в отечественной литературе. Замеченные в журнальных статьях неточности при составлении обзора устранены.

Обзор состоит из двух частей. В первой части рассматриваются поля, создаваемые магнитным диполем и бесконечно длинным кабелем в присутствии однородного полупространства и горизонтально-слоистых сред. Вторая часть касается вопросов, связанных с вычислением вторичных полей над проводящими объектами, имеющими форму пластины, сферы и цилиндра. Разбираются вопросы становления поля, взаимоиндукции рамок, определения электрических свойств по результатам наблюдений и т. д.

Теория, рассматриваемая в обзоре, применима в наземной и воздушной электроразведке методами индукции, вращающегося магнитного поля, бесконечно длинного кабеля, сопротивления излучения антенны, в скважинной электроразведке и т. д.

В обзоре не рассматривается теория метода теллурических токов, так как основные вопросы, связанные с этим методом геофизической разведки, излагаются в недавно вышедшей монографии Бердичевского (1960).

Переводы выполнены составителями обзора. Все замечания о допущенных при составлении обзора неточностях и опечатках просим направлять по адресу: г. Ленинград, ул. Ломоносова, 22, Ленинградское отделение Гостоптехиздата и г. Ленинград, ул. Весельная, 6, ВИТР.

Составители глубоко признательны научному редактору обзора С. М. Шейнманну за помощь, оказанную во время работы над рукописью.

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

ОДНОРОДНОЕ ПОЛУПРОСТРАНСТВО И ГОРИЗОНТАЛЬНО-СЛОИСТЫЕ СРЕДЫ

Глава I

ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ ИНДУКЦИЯ В ПОЛУБЕСКОНЕЧНОМ ПРОВОДНИКЕ С ПЛОСКОЙ ГРАНИЦЕЙ

(ПРАЙС, 1950)

В главе I рассматриваются основы теории индукции и становления токов в полубесконечном проводнике с плоской границей. Ряд известных фундаментальных исследований этой задачи сделан Зоммерфельдом (Sommerfeld, 1926), Бурсианом и Фоком (1926, 1933, 1936), Шерманом (1932), Стефанеску (Stefanescu, 1934, 1936, 1947, 1950) и др. В работе Прайса (Price, 1950), которая положена в основу главы, сделана попытка построить обобщенную теорию расчета вторичных полей независимо от типа источника. В отличие от указанных авторов Прайс не пользуется обычными преобразованиями уравнений Максвелла с помощью вектора Герца или вектор-потенциала. В главах II, III и IV положения Прайса иллюстрируются вычислениями для дипольного и кабельного источников.

§ 1. Основные уравнения поля, граничные условия, принцип построения решения

В непрерывной среде вектора поля удовлетворяют уравнениям Максвелла, которые в гауссовой системе единиц имеют следующий вид *:

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{H} = \frac{1}{c}(4\pi \boldsymbol{i} + \dot{\boldsymbol{D}}), \tag{1.1}$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}\dot{\boldsymbol{B}}, \tag{1.2}$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{B} = 0, \ \operatorname{div} \boldsymbol{i} = -\dot{\varrho}, \ \operatorname{div} \boldsymbol{D} = 4\pi\varrho. \tag{1.3}$$

Если среда однородна и изотропна, то

$$\boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H}, \ \boldsymbol{i} = \sigma \boldsymbol{E}, \ \boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E}, \tag{1.4}$$

---

* Точкой над символом обозначается производная рассматриваемой величины по времени.

где σ, ε и μ — постоянные величины, $\boldsymbol{H}$ — напряженность магнитного поля, $\boldsymbol{B}$ — магнитная индукция, $\boldsymbol{E}$ — напряженность электрического поля, $\boldsymbol{D}$ — электрическая индукция, $\boldsymbol{i}$ — плотность тока проводимости, σ — электропроводность, μ — магнитная проницаемость, ε — диэлектрическая постоянная, ϱ — объемная плотность заряда. Из (1. 1) и (1. 4) следует, что

$$\operatorname{div}\frac{4\pi\sigma}{\varepsilon}\boldsymbol{D}+\operatorname{div}\dot{\boldsymbol{D}}=0, \tag{1.5}$$

откуда

$$\varrho=\varrho_0 e^{-\frac{4\pi\sigma}{\varepsilon}t},$$

то есть первоначальное значение объемной плотности заряда уменьшается при увеличении t ($\sigma \neq 0$). Так как время спадания ϱ очень мало, то даже в самом общем случае можно положить ϱ равным нулю * и

$$\operatorname{div}\boldsymbol{E}=0. \tag{1.6}$$

Взяв rot от (1. 1) и (1. 2), найдем, что все компоненты поля удовлетворяют волновому уравнению

$$\nabla^2\boldsymbol{W}=\frac{\mu}{c^2}\left(4\pi\sigma\frac{\partial}{\partial t}+\varepsilon\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\boldsymbol{W}, \tag{1.7}$$

где под $\boldsymbol{W}$ подразумевается любая компонента $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{B}$ или $\boldsymbol{H}$. Рассмотрим частные случаи уравнения (1. 7). В проводнике, когда поле меняется в зависимости от времени достаточно медленно, можно пренебречь членом $\varepsilon\frac{\partial W}{\partial t}$ по сравнению с $4\pi\sigma W$. Тогда уравнение (1. 7) сводится к уравнению индукции

$$\nabla^2\boldsymbol{W}=\frac{4\pi\sigma\mu}{c^2}\frac{\partial\boldsymbol{W}}{\partial t}. \tag{1.8}$$

В диэлектрике σ пренебрежимо мало или равно нулю и (1. 7) сводится к другой форме волнового уравнения

$$\nabla^2\boldsymbol{W}=\frac{\mu\varepsilon}{c^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{W}}{\partial t^2}, \tag{1.9}$$

откуда следует, что электромагнитные поля распространяются в диэлектрической среде со скоростью $\frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$. Когда рассматриваются относительно медленно меняющиеся поля, можно пренебречь правой частью уравнения (1. 9), так что в диэлектрике

$$\nabla^2\boldsymbol{W}=0. \tag{1.10}$$

* Более подробное объяснение можно найти в курсах Бурсиана (1936, стр. 6) или Заборовского (1960, стр. 25). *А. В., Г. Ф.*

Сделанные выше допущения в (1.8) и (1.10) эквивалентны пренебрежению полем токов смещения как в проводнике, так и в диэлектрике. Из (1. 1) следует, что в диэлектрике при тех же условиях $\operatorname{rot}\boldsymbol{H}=0$. Следовательно, $\boldsymbol{H}$ можно вычислить приближенно с помощью скалярного потенциала Ω. Таким образом

$$\boldsymbol{H}=-\operatorname{grad}\Omega, \tag{1.11}$$

где Ω удовлетворяет уравнению Лапласа, так как $\operatorname{div}\boldsymbol{H}=0$.

Если $\boldsymbol{H}$ и $\boldsymbol{E}$ выразить при помощи векторного и скалярного потенциалов $\boldsymbol{A}$ и U,

$$\mu\boldsymbol{H}=\operatorname{rot}\boldsymbol{A},\quad \boldsymbol{E}=-\frac{1}{c}\dot{\boldsymbol{A}}-\operatorname{grad}U, \tag{1.12}$$

то $\boldsymbol{A}$ и U удовлетворяют основному уравнению (1. 7) или приближенным уравнениям (1. 8), (1. 9) при условии, что

$$\operatorname{div}\boldsymbol{A}+\frac{\mu}{c}\left(4\pi\sigma+\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\right)U=0. \tag{1.13}$$

Решение выражается через $\boldsymbol{A}$ и U. Однако проще пользоваться выражениями для $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$, так как последние всегда конечны, в то время как $\boldsymbol{A}$ в общем виде не всегда будет конечной величиной.

На границе между двумя средами тангенциальные составляющие $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ и нормальная составляющая $\boldsymbol{B}$ непрерывны. Соответствующие граничные условия для $\boldsymbol{A}$ и U заключаются в непрерывности тангенциальных составляющих $\boldsymbol{A}$ и grad U. Нормальные компоненты $\boldsymbol{D}$ и $\boldsymbol{i}$ в общем не непрерывны. Суммы их в направлении нормали к поверхности раздела равны соответственно $4\pi\hat{\sigma}$ и $-\hat{\sigma}$, где $\hat{\sigma}$ — поверхностная плотность заряда.

Для того чтобы рассчитать токи, возбуждаемые внешним полем в проводнике любой формы, или свободное затухание системы токов * в проводнике, найдем решения уравнений (1. 8) и (1. 10), которые будут удовлетворять граничным условиям.

Допустим, что в системе прямоугольных координат проводник занимает полупространство $z<0$, причем его граница совпадает с плоскостью $z=0$. Пусть в области $z>h>0$ расположен источник магнитного поля. Промежуточная зона $0<z<h$ занята непроводящей и немагнитной средой. Элементарные решения дифференциальных уравнений, удовлетворяющие граничным условиям, как будет показано, должны быть двух типов.

Для первого типа соответствующая система токов в проводнике возбуждает магнитное поле вне его, для второго типа внешнее

* Свободное затухание системы токов есть переходный процесс, протекающий без влияния полей внешних источников. *А. В., Г. Ф.*

магнитное поле отсутствует. Когда рассматривается действие внешнего магнитного источника, используются решения только первого типа. Можно показать, что решение, удовлетворяющее дифференциальным уравнениям и граничным условиям, а также содержащее часть, представляющую первичное * поле, относится к первому типу. Если найдено другое решение, в котором также имеется элемент, соответствующий первичному полю, то в силу линейности уравнений разность между этими решениями есть также их решение, относящееся к нулевому первичному полю. Следовательно, эта разность характеризует свободное затухание токов в проводнике. В общем случае свободное затухание определяется решением двух типов. Оно отсутствует, если начальная плотность тока повсюду равна нулю. Общее решение удобно искать в виде

$$\boldsymbol{E} = Z(z,\ t)\,\boldsymbol{T}(x,\ y), \tag{1.14}$$

где от переменной t зависит только Z. Подставив (1. 14) в (1. 6), (1. 8) и (1. 10), получим:

$$Z\left(\frac{\partial T_x}{\partial x} + \frac{\partial T_y}{\partial y}\right) + T_z \frac{\partial Z}{\partial z} = 0, \tag{1.15}$$

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{T}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \boldsymbol{T}}{\partial y^2} = \frac{1}{Z}\left(\frac{4\pi\sigma\mu}{c^2}\frac{\partial Z}{\partial t} - \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2}\right)\boldsymbol{T},\ (z < 0) \tag{1.16a}$$

и

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{T}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \boldsymbol{T}}{\partial y^2} = -\frac{1}{Z}\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2}\boldsymbol{T}.\quad (z > 0). \tag{1.16b}$$

Коэффициент перед $\boldsymbol{T}$ в правой части (1. 16a) или (1. 16b) не зависит от x и y, поэтому его можно приравнять постоянной, которую обозначим через $-\lambda^2$, после чего будем иметь

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{T}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \boldsymbol{T}}{\partial y^2} + \lambda^2 \boldsymbol{T} = 0. \tag{1.17}$$

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} - \lambda^2 Z - \frac{4\pi\sigma\mu}{c^2}\frac{\partial Z}{\partial t} = 0,\ (z < 0) \tag{1.18}$$

и

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} - \lambda^2 Z = 0,\ (z > 0). \tag{1.19}$$

Как видно из (1.19), постоянная λ^2 существенно положительна.

Из (1. 15) следует, что или

$$T_z = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial T_x}{\partial x} + \frac{\partial T_y}{\partial y} = 0, \tag{1.20}$$

* Иностранными авторами обычно используются термины «индуцирующее поле» («inducing field») и «индуцированное поле»(«induced field»), которыми довольно редко пользуются отечественные авторы. Соответствующие наиболее употребительные русские термины «первичное поле» и «вторичное поле». *Ред.*

или

$$\frac{1}{T_z}\left(\frac{\partial T_x}{\partial x} + \frac{\partial T_y}{\partial y}\right) = -\frac{1}{Z}\frac{\partial Z}{\partial z} = -\alpha, \tag{1.21}$$

где α — произвольная постоянная (вещественная или комплексная). Два случая, соответствующие уравнениям (1.20) и (1.21), ниже разбираются отдельно.

§ 2. Решения первого типа

Для составляющих вектора $\boldsymbol{T}$ в первом случае, как видно из (1. 20), можно записать

$$\boldsymbol{T} = \left(\frac{\partial P}{\partial y},\ -\frac{\partial P}{\partial x},\ 0\right), \tag{2.1}$$

где P — функция x и y, которая согласно (1.17) должна удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + \lambda^2 P = 0. \tag{2.2}$$

В диэлектрике из (1.19) найдем

$$Z = A^*(t)\,e^{\lambda z} + B^*(t)\,e^{-\lambda z},$$

откуда

$$\boldsymbol{E} = [A^*(t)\,e^{\lambda z} + B^*(t)\,e^{-\lambda z}]\left(\frac{\partial P}{\partial y},\ -\frac{\partial P}{\partial x},\ 0\right).\ (z > 0). \tag{2.3}$$

Из-за непрерывности тангенциальной составляющей $\dot{\boldsymbol{E}}$ в плоскости $z = 0$ внутри проводника будем иметь

$$\boldsymbol{E} = Z(z,\ t)\left(\frac{\partial P}{\partial y},\ -\frac{\partial P}{\partial x},\ 0\right),\ (z < 0), \tag{2.4}$$

где

$$Z(-0,\ t) = A^*(t) + B^*(t). \tag{2.5}$$

Соответствующее магнитное поле получается из (1. 2):

$$\mu\,\dot{\boldsymbol{H}} = -c\left(\frac{\partial Z}{\partial z}\frac{\partial P}{\partial x},\ \frac{\partial Z}{\partial z}\frac{\partial P}{\partial y},\ \lambda^2 ZP\right),\ (z < 0) \tag{2.6}$$

и

$$\dot{\boldsymbol{H}} = -c\lambda\,\mathrm{grad}\,\{[A^*(t)\,e^{\lambda z} - B^*(t)\,e^{-\lambda z}]\,P\},\ (z > 0). \tag{2.7}$$

Эти выражения удовлетворяют граничным условиям. Вследствие непрерывности нормальной составляющей $\boldsymbol{B}$ (или $\dot{\boldsymbol{B}}$) на поверхности $z = 0$ приходим снова к условию (2.5). Непрерывность тангенциальной составляющей $\boldsymbol{H}$ приводит к соотношению:

$$Z'(-0, t) = \lambda\mu\,[A^*(t) - B^*(t)], \tag{2.8}$$

где Z' означает $\frac{dZ}{dz}$.

Выведенные выше выражения для векторов поля назовем решениями первого типа. Если рассматривается действие внешнего первичного магнитного поля, необходимо пользоваться решениями первого типа. Действительно, в этом случае напряженность поля в проводнике должна стремиться к нулю, когда z достигает больших отрицательных значений, то есть

$$Z(z, t) \to 0, \text{ когда } z \to -\infty. \tag{2.9}$$

Далее, скалярный потенциал полного * магнитного поля будет удовлетворять уравнению Лапласа в области $0 < z < h$ и поэтому может быть выражен через сумму функций следующего вида:

$$\Omega = -[A(t)\, e^{\lambda z} + B(t)\, e^{-\lambda z}]\, P(x, y), \tag{2.10}$$

где λ — вещественная положительная величина или нуль **, а P удовлетворяет уравнению (2.2). Функцию $P(x, y)$ можно записать в системе полярных координат как произведение бесселевых и тригонометрических функций вида $J_n(\lambda r) \cos(n\phi + \phi_0)$. Произвольную функцию Ω, заданную в области $z > 0$, можно выразить с помощью таких функций, применив теорему Фурье и интеграл Фурье — Бесселя. Например, потенциал в точке (x, y, z), когда магнитный полюс помещен в точке (x_0, y_0, z_0), можно представить в области $0 < z < z_0$ через интеграл Липшица

$$m \int_0^\infty e^{(z-z_0)\lambda} J_0(r\lambda)\, d\lambda,$$

где $r = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$. Далее, член, содержащий $e^{\lambda z}$ в (2. 10), соответствует источникам поля в области $z \geqslant h$, то есть заданному первичному полю. Член, содержащий $e^{-\lambda z}$, соответствует полю, источник которого находится в области $z < 0$, то есть полю вторичных токов (и магнитной индукции, если $\mu \neq 1$) в проводнике. Следовательно, можно рассматривать $A(t)$ в (2. 10) как известную функцию, сравнивая которую с (2. 7), получим

$$c\lambda A^*(t) = -\dot{A}(t),\ c\lambda B^*(t) = \dot{B}(t), \tag{2.11}$$

так что и $A^*(t)$ известно.

Уравнения (2. 5), (2. 8) и (2. 9) вместе с (1. 18) служат для однозначного определения $B^*(t)$ и $Z(z, t)$ с помощью заданной функции $A(t)$. Вторичное поле будет при этом полностью определено, если известны начальные условия — начальная величина $B(t)$. Таким образом, вторичные поля и распределение токов характеризуются решениями первого типа. В этих решениях компонента E_z вектора $\boldsymbol{E}$, а отсюда и i_z повсюду равны нулю. Поэтому все вторичные токи текут параллельно поверхности проводника.

* Реально существующее магнитное поле представляет собой сумму первичного и вторичного полей. В отечественной литературе его чаще называют суммарным. Прайс и другие иностранные авторы употребляют для этого поля термин «полный» («total»). *Ред.*

** Случай $\lambda = 0$ рассматривается в параграфе 4.

§ 3. Решения второго типа

Рассмотрим второй вариант решения, когда удовлетворяются уравнения (1. 21). Из последних видно, что Z должно иметь следующий вид:

$$Z = C(t)\, e^{\alpha z}. \tag{3.1}$$

Отсюда внутри проводника из уравнения (1. 18) имеем

$$(\alpha^2 - \lambda^2)\, C(t) = \frac{4\pi\sigma\mu}{c^2}\, \dot{C}(t),$$

то есть

$$C(t) = C_0\, e^{-\beta t}, \tag{3.2}$$

где

$$\beta = \frac{c^2(\lambda^2 - \alpha^2)}{4\pi\sigma\mu}. \tag{3.3}$$

Пользуясь (1. 21) и (1. 17), можно показать, что

$$T_x = \frac{\alpha}{\lambda^2}\frac{\partial T_z}{\partial x} + \frac{\partial P_1}{\partial y},\quad T_y = \frac{\alpha}{\lambda^2}\frac{\partial T_z}{\partial y} - \frac{\partial P_1}{\partial x},$$

где P_1 — функция x и y, удовлетворяющая уравнению (2. 2). Выражения, включающие P_1, приводят к решениям первого типа, поэтому их можно опустить. Отсюда, записав, что $T_z = \lambda P$, получим второй тип решения для $\boldsymbol{E}$ внутри проводника

$$\boldsymbol{E} = C_0 e^{-\beta t + \alpha z}\left(\frac{\alpha}{\lambda}\frac{\partial P}{\partial x},\ \frac{\alpha}{\lambda}\frac{\partial P}{\partial y},\ \lambda P\right).\ (z<0) \tag{3.4}$$

Вне проводника Z удовлетворяет уравнению (1. 19). Сравнив решение этого уравнения с (3. 1), видим, что $\alpha = \pm\lambda$, когда $z > 0$. Тогда для $\boldsymbol{E}$ будем иметь следующее выражение:

$$\boldsymbol{E} = \operatorname{grad}[A_1(t)\, e^{\lambda z} + B_1(t)\, e^{-\lambda z}]\, P(x, y).\ (z > 0) \tag{3.5}$$

Для магнитного поля внутри проводника найдем

$$\mu \dot{\boldsymbol{H}} = -\operatorname{crot} \boldsymbol{E} = -cC_0 e^{-\beta t + \alpha z}\left(\lambda - \frac{\alpha^2}{\lambda}\right)\left(\frac{\partial P}{\partial y},\ -\frac{\partial P}{\partial x},\ 0\right).$$
$$(z < 0) \tag{3.6}$$

Вне проводника $(z > 0)$, поскольку $\boldsymbol{E}$ есть градиент-вектор

$$\dot{\boldsymbol{H}} = 0. \tag{3.7}$$

Следовательно, распределение переменного тока, связанное с решением второго типа, обусловливает отсутствие магнитного поля вне проводника. Из-за этого решения второго типа не применяются для расчета токов, индуцированных переменным внешним магнитным полем.

Что касается граничных условий, то нормальная составляющая $\dot{\boldsymbol{B}}$ непрерывна, так как она равна нулю и в области $z < 0$. Для непрерывности тангенциальных компонент $\dot{\boldsymbol{H}}$ необходимо, чтобы они были равны нулю при $z = 0$. С этой целью нужно приравнять нулю C_0, когда α вещественно. В общем случае следует считать α и C_0 комплексными величинами, поэтому приходится приравнивать нулю вещественную часть выражения $C_0 e^{-\beta t + \alpha z}\left(\lambda - \frac{\alpha^2}{\lambda}\right)$ при $z = 0$. Положив $C_0 = A_0 + iB_0$ и $\alpha = \gamma + i\nu$, найдем, что A_0 и γ равны нулю. При этом величина β будет вещественна и положительна. Далее, взяв вещественные части выражения (3. 4) и (3.6), получим:

$$\boldsymbol{E} = -B_0 e^{-\beta t}\left(\frac{\nu}{\lambda}\cos\nu z\frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\nu}{\lambda}\cos\nu z\frac{\partial P}{\partial y}, \lambda P\sin\nu z\right). \quad (z < 0) \quad (3.8)$$

и

$$\mu\dot{\boldsymbol{H}} = cB_0\left(\lambda + \frac{\nu^2}{\lambda}\right)e^{-\beta t}\sin\nu z\left(\frac{\partial P}{\partial y}, -\frac{\partial P}{\partial x}, 0\right). \quad (z < 0) \quad (3.9)$$

Последние выражения удовлетворяют равенствам $\operatorname{div}\boldsymbol{E} = 0$ и $\operatorname{div}\boldsymbol{H} = 0$, которые эквивалентны (1. 21). Остается удовлетворить еще условию непрерывности тангенциальной составляющей $\boldsymbol{E}$. Из (3. 5) и (3.8) найдем соотношение

$$A_1(t) + B_1(t) = -B_0 e^{-\beta t}\frac{\nu}{\lambda}. \quad (3.10)$$

Здесь $A_1(t)$ соответствует электрическому полю внешнего происхождения, а $B_1(t)$ — полю зарядов, распределенных на поверхности проводника, так как объемный заряд равен нулю в силу уравнений (1. 5) и (1. 6). Если предположить, что заданы начальные условия в момент $t = 0$, то все параметры, встречающиеся в (3.8) и (3. 9), будут определены независимо от $A_1(t)$. В частности, временной множитель $e^{-\beta t}$ не будет зависеть от $A_1(t)$, причем уравнение (3. 10) служит только для определения поверхностного заряда, соответствующего $B_1(t)$.

Отсюда следует, что поле и токи внутри проводника затухают по экспоненциальному закону, сохраняя свою форму, и не зависят от внешнего электрического поля. Это обусловлено тем, что можно пренебречь магнитным эффектом токов смещения $\dot{\boldsymbol{D}}$, который заметен лишь в случае быстрых изменений поля, когда $\varepsilon\boldsymbol{E}$ сравнимо с $4\pi\sigma\boldsymbol{E}$.

Полученные решения называются решениями второго типа и соответствуют затуханию токов, определенным образом распределенных в проводнике.

§ 4. Свободное затухание токов в проводящей среде *

Из предыдущего раздела следует, что решения второго типа всегда соответствуют свободному затуханию определенным образом распределенных в проводнике токов. В этом случае интенсивность токов экспоненциально уменьшается, но характер их распределения не изменяется. Кроме того, существуют виды свободного затухания, соответствующие первому типу решений, в которых также происходит уменьшение интенсивности токов без изменения формы распределения. Затухание первого типа можно получить, приравняв нулю в (2.10) член $A(t)$, соответствующий внешним источникам магнитного поля. Это означает, что $A^*(t)$ в (2. 11) также равно нулю. Тогда из граничных условий (2. 5) и (2. 8) получим

$$Z'(0, t) = -\lambda\mu Z(0, t). \quad (4.1)$$

Решения уравнения (1. 18) имеют следующий вид:

$$Z = (a_1 e^{\alpha z} + b_1 e^{-\alpha z})e^{-\beta t} = f(z)\psi(t), \quad (4.2)$$

где β по-прежнему определяется равенством (3. 3). Для того чтобы временной множитель $\psi(t)$ был вещественным, постоянная величина α должна быть чисто вещественной или чисто мнимой. Если α — вещественная величина, можно взять ее положительной без ограничения общности. Из (4. 2) следует, что $b_1 = 0$, так как Z должно оставаться конечным при $z \to -\infty$. Но если $b_1 = 0$, то из (4. 1) вытекает, что $\alpha = -\lambda\mu$. Последнее невозможно, так как $\lambda\mu$ существенно положительная величина. Поэтому α не может быть вещественной величиной. Приходится принять, что $\alpha = i\nu$, где ν вещественно. Тогда (4. 2) можно переписать:

$$Z = (C_1\cos\nu z + D_1\sin\nu z)e^{-\beta t}, \quad (4.3)$$

где C_1 и D_1 — вещественные величины. Граничное условие (4. 1) требует, чтобы

$$D_1\nu = -\lambda\mu C_1. \quad (4.4)$$

Отсюда в любой точке внутри проводника плотность тока

$$\boldsymbol{i} = \sigma\boldsymbol{E} = \sigma C_1 e^{-\beta t}\left(\cos\nu z - \frac{\lambda\mu}{\nu}\sin\nu z\right)\left(\frac{\partial P}{\partial y}, -\frac{\partial P}{\partial x}, 0\right), \quad (4.5)$$

где

$$\beta = \frac{c^2(\lambda^2 + \nu^2)}{4\pi\sigma\mu}. \quad (4.6)$$

---

* Гордон (1951а) дополняет исследования Прайса: отмечая формальную аналогию между волновым уравнением и уравнением теплопроводности, он рассматривает свободное затухание системы токов, индуцированных внешними электрическими и магнитными полями. *А. В., Г. Ф.*

Вне проводника ($z > 0$) в соответствии с (2. 3) и (2. 5)

$$\boldsymbol{E} = C_1 e^{-\beta t - \lambda z}\left(\frac{\partial P}{\partial y}, -\frac{\partial P}{\partial x}, 0\right). \qquad (4.7)$$

Соответствующее магнитное поле находится из (2. 6) и (2. 7), интегрируя которые по t, получим:

$$\mu \boldsymbol{H} = -\frac{cC_1}{\beta} e^{-\beta t}\left[(\nu \sin \nu z + \lambda\mu \cos \nu z)\left(\frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial P}{\partial y}\right), \qquad (4.8)\right.$$

$$\left.\frac{\lambda^2}{\omega}(\lambda\mu \sin \nu z - \nu \cos \nu z) P\right]. \quad (z < 0)$$

и

$$\boldsymbol{H} = -\frac{cC_1\lambda}{\beta} e^{-\beta t} \operatorname{grad}(e^{-\lambda z} P). \quad (z > 0). \qquad (4.9)$$

Уравнения (4. 5) — (4. 9) характеризуют способы свободного затухания первого типа. В этом случае все токи текут параллельно поверхности проводника. Существует ряд видов затухания, которые соответствуют всем вещественным величинам λ и ν в интервале от 0 до ∞ и всем функциям $P(x, y)$, которые удовлетворяют (2. 2). Функция распределения плотности тока в каждом случае является периодической функцией z.

Виды свободного затухания, связанные с решениями второго типа, получаются из уравнений § 3. Для простоты сравнения выражений $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$ с аналогичными величинами первого типа, запишем, что в (3. 8) $C_2 = -\frac{\nu}{\lambda} B_0$. Тогда плотность тока в любой точке внутри проводника

$$\boldsymbol{i} = \sigma \boldsymbol{E} = \sigma C_2 e^{-\beta t}\left(\cos \nu z \frac{\partial P}{\partial x}, \cos \nu z \frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\lambda^2 P}{\nu} \sin \nu z\right). \qquad (4.10)$$

Электрическое поле вне проводника

$$\boldsymbol{E} = C_2 e^{-\beta t} \operatorname{grad}(e^{-\lambda z} P). \qquad (4.11)$$

Магнитное поле внутри проводника

$$\boldsymbol{H} = \frac{4\pi\sigma}{\nu} C_2 e^{-\beta t} \sin \nu z\left(\frac{\partial P}{\partial y}, -\frac{\partial P}{\partial x}, 0\right), \qquad (4.12)$$

в то время как вне проводника магнитное поле отсутствует.

Второму типу свободного затухания соответствует главным образом нормальная к плоской границе проводника составляющая плотности тока, хотя на самой поверхности она всегда равна нулю. Здесь, как и в первом решении, есть такие типы затухания, которые соответствуют любым значениям λ и ν в диапазоне от 0 до ∞ и всем функциям $P(x, y)$, удовлетворяющим (2.2). Кроме того, плотность тока является периодической функцией z.

Электрическое поле вне проводника, определяемое уравнением (4. 11), связано с распределением зарядов на поверхности $z = 0$, так как согласно (1. 6) плотность объемных зарядов в проводнике равна нулю. Плотность поверхностных зарядов определяется следующим выражением:

$$\hat{\sigma} = \frac{E_z}{4\pi} = -\frac{\lambda}{4\pi} C_2 e^{-\beta t} P(x, y). \qquad (4.13)$$

Изменение плотности поверхностных зарядов со временем обусловливает существование компоненты тока, нормальной к поверхности проводника:

$$i_z = \dot{\hat{\sigma}} = \frac{\dot{E}z}{4\pi} = \frac{\lambda\beta}{4\pi} C_2 e^{-\beta t} P(x, y), \qquad (4.14)$$

что противоречит (4. 10), согласно которому $i_z = 0$, когда $z = 0$. Однако величина i_z, определяемая уравнением (4. 14), того же порядка, что и токи смещения $\frac{\dot{D}}{4\pi}$, которые по условию пренебрежимо малы в сравнении с токами проводимости $\boldsymbol{i}$ (1. 1). Следовательно, противоречий в полученных результатах нет.

Физический смысл этого явления можно объяснить так: слабый ток, текущий по направлению к поверхности, для любого вида затухания несет заряды, формирующиеся на границе в поверхностные. Электрическое поле этих зарядов достаточно велико для того, чтобы отклонить оставшийся более сильный ток от плоскости раздела. В результате отклонения ток вблизи границы протекает практически параллельно ей. Электрическое поле $\boldsymbol{E}$, обусловленное поверхностным зарядом $\hat{\sigma}$, будет равно $\frac{4\pi\hat{\sigma}}{\varepsilon}$, в то время как магнитное поле, соответствующее току $\dot{\hat{\sigma}}$, определяется равенством

$$|\operatorname{rot} \boldsymbol{H}| = \frac{4\pi\dot{\hat{\sigma}}}{c}.$$

Поэтому, хотя электрическое поле поверхностных зарядов оказывает существенное влияние на распределение токов в проводнике, магнитное поле, связанное с изменением во времени тех же зарядов, пренебрежимо мало.

Интересно отметить, что виды свободного затухания для двух различных типов становятся идентичными, когда $\lambda = 0$. Так, взяв решение первого типа и положив $\lambda = 0$ в (4. 5), получим

$$\boldsymbol{i} = \sigma C_1 e^{-\beta t} \cos \nu z\left(\frac{\partial P_1}{\partial y}, -\frac{\partial P_1}{\partial y}, 0\right), \qquad (4.15)$$

где

$$\frac{\partial^2 P_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P_1}{\partial y^2} = 0, \qquad (4.16)$$

а P_1 — вещественная часть какой-то функции, скажем, $P_1 + iP_2$ от $x + iy$.

Отсюда $\frac{\partial P_1}{\partial y} = -\frac{\partial P_2}{\partial x}$ и $\frac{\partial P_1}{\partial x} = \frac{\partial P_2}{\partial y}$, так что для (4. 15) имеем:

$$i = -\sigma C_1 e^{-\beta t} \cos \nu z \left(\frac{\partial P_2}{\partial x}, \frac{\partial P_2}{\partial y}, 0\right), \tag{4. 17}$$

что, очевидно, соответствует решению второго типа (4. 10) при $\lambda = 0$. В этих частных решениях магнитное поле вне проводника отсутствует, а электрическое поле вне проводника повсюду параллельно поверхности и не зависит от z.

Можно добавить, что решения (4. 5) описывают процессы свободного затухания в однородной пластине мощности h при условии, что ν ограничено рядом дискретных значений $\frac{n\pi}{h}$, где n — любое целое число.

§ 5. Разные типы первичных полей

1. Периодическое первичное поле. Когда внешнее магнитное поле меняется периодически в зависимости от времени, его можно разложить на гармонические составляющие, действие которых будет складываться в силу линейности основных уравнений. Поэтому для каждой гармоники можно вычислить ту часть вторичного поля, которая обладает таким же гармоническим временным множителем. Сумма таких частных решений составит периодическое вторичное поле. Оставшаяся часть вторичного поля является переходной и зависит от времени и формы первоначальных изменений внешнего поля. Эта часть поля зависит от свободного затухания тока в проводнике. Она пренебрежимо мала, если периодическое внешнее поле существует достаточно долго.

Если период колебаний первичного поля равен $\frac{2\pi}{\omega}$, то уравнение (2. 10) для потенциала полного магнитного поля вне проводника можно записать так:

$$\Omega = -(Ae^{\lambda z} + Be^{-\lambda z}) e^{i\omega t} P(x, y), \tag{5. 1}$$

где A и B комплексные постоянные, причем справа от знака равенства физический смысл имеет лишь вещественная часть. Модуль отношения B/A дает в этом случае отношение амплитуд вторичного магнитного поля к первичному, а аргумент B/A — разность фаз между ними. Выражение для $\boldsymbol{E}$ должно содержать временной множитель $e^{i\omega t}$, поэтому уравнение (1. 18) сводится к следующему:

$$\frac{d^2 Z}{\partial z^2} - \left(\frac{i 4\pi\sigma\mu\omega}{c^2} + \lambda^2\right) Z = 0, \tag{5. 2}$$

решение которого

$$Z = (ae^{uz} + be^{-uz}) e^{i\omega t}, \tag{5. 3}$$

где

$$u^2 = \frac{i 4\pi\sigma\mu\omega}{c^2} + \lambda^2, \tag{5. 4}$$

так что

$$u = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{\left[(\varkappa^4 + \lambda^4)^{\frac{1}{2}} + \lambda^2\right]^{\frac{1}{2}} + i\left[(\varkappa^4 + \lambda^4)^{\frac{1}{2}} - \lambda^2\right]\right\}, \tag{5. 5}$$

где

$$\varkappa^2 = \frac{4\pi\sigma\mu\omega}{c^2}. \tag{5. 6}$$

В (5.3) вещественную часть u можно взять положительной, не теряя общности рассуждений. Из граничного условия (2. 9) следует, что b должно быть равно нулю, а удовлетворяя (2. 5) и (2. 8) совместно с (2. 11), получим:

$$c\lambda a = -i\omega(A - B), \quad cua = -\mu i \omega (A + B),$$

так что

$$a = -\frac{i 2\mu\omega}{c(u + \lambda\mu)} A, \tag{5. 7}$$

$$B = \frac{u - \lambda\mu}{u + \lambda\mu} A. \tag{5. 8}$$

Таким образом, скалярный потенциал вторичного поля * вне проводника

$$\Omega_1 = -\frac{u - \lambda\mu}{u + \lambda\mu} Ae^{-\lambda z} e^{i\omega t} P(x, y), \tag{5. 9}$$

а электрическое поле внутри проводника

$$\boldsymbol{E} = -\frac{i 2\mu\omega}{c(u + \lambda\mu)} Ae^{i\omega t + uz} \left(\frac{\partial P}{\partial y}, -\frac{\partial P}{\partial x}, 0\right). \tag{5. 10}$$

Плотность тока в любой точке внутри проводника

$$\boldsymbol{i} = \sigma \boldsymbol{E} = -\frac{i 2\sigma\mu\omega}{c(u + \lambda\mu)} Ae^{i\omega t + uz} \left(\frac{\partial P}{\partial y}, -\frac{\partial P}{\partial x}, 0\right). \tag{5. 11}$$

2. Случай, когда постоянная λ равняется нулю. В конце параграфа 4 уже разбирались типы свободного затухания токов для этого случая. Ниже рассматривается природа решения при условии, что периодическое магнитное поле создается внешними источниками. Для потенциала такого поля можно записать

$$\Omega_0 = -(A_0 z + B_0) e^{i\omega t} P(x, y), \tag{5. 12}$$

* В своей теории Прайс рассматривает элементарные возбуждения, сумма которых дает искомые поля. Построение интегральных решений разбирается в § 1, гл. II, III и IV. Применение теории Прайса на практике имеет смысл по отношению к электромагнитным полям магнитных источников и магнитному полю электрических источников. *Ред.*

2 Заказ 860.

где

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = 0. \qquad (5.13)$$

В частном случае однородного поля нормального к поверхности $z = 0$ его потенциал равен $A_0 z e^{i\omega t}$. Если поле вызвано током, равномерно распределенным в пластине, параллельной поверхности $z = 0$ и текущим в направлении оси $0x$, его потенциал будет равен $B_0 y e^{i\omega t}$. Положив $\lambda = 0$ в (1. 18) и считая, что Z содержит периодический временной множитель $e^{i\omega t}$, получим

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = \frac{i4\pi\sigma\mu\omega}{c^2} Z,$$

откуда

$$Z = Ce^{i\omega t + (1+i)\varkappa z}, \qquad (5.14)$$

где

$$\varkappa = \frac{\sqrt{2\pi\sigma\mu\omega}}{c} \qquad (5.15)$$

есть величина положительная, так как Z должно оставаться конечным, когда $z \to -\infty$. Поэтому, учитывая (2. 4), для величины $\boldsymbol{E}$ внутри проводника найдем

$$\boldsymbol{E} = Ce^{i\omega t + (1+i)\varkappa z}\left(\frac{\partial P}{\partial y}, -\frac{\partial P}{\partial x}, 0\right). \qquad (5.16)$$

Вне проводника $\boldsymbol{E}$ должно иметь вид:

$$\boldsymbol{E} = (az + b)\, e^{i\omega t}\left(\frac{\partial P}{\partial y}, -\frac{\partial P}{\partial x}, 0\right). \qquad (5.17)$$

Из непрерывности тангенциальной компоненты $\boldsymbol{E}$ на поверхности раздела следует, что

$$C = b. \qquad (5.18)$$

Пользуясь (2. 6), вычислим магнитное поле внутри проводника

$$\boldsymbol{H} = -\frac{cC(1-i)\varkappa}{\omega\mu} e^{i\omega t + (1+i)\varkappa z}\left(\frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial P}{\partial y}, 0\right). \qquad (5.19)$$

Вне проводника полное магнитное поле должно иметь потенциал

$$\Omega = -(Az + B)\, e^{i\omega t} P(x, y), \qquad (5.20)$$

в связи с чем

$$\boldsymbol{H} = e^{i\omega t}\left[(Az + B)\frac{\partial P}{\partial x}, (Az + B)\frac{\partial P}{\partial y}, AP\right]. \qquad (5.21)$$

Непрерывность нормальной компоненты $\boldsymbol{B}$ приводит к тому, что

$$A = 0, \qquad (5.22)$$

а из непрерывности тангенциальной компоненты следует

$$B = -\frac{c\varkappa(1-i)}{\omega\mu} C. \qquad (5.23)$$

Записав потенциал вторичного поля

$$\Omega_1 = -(A_1 z + B_1)\, e^{i\omega t} P(x, y), \qquad (5.24)$$

получим, что $A = A_0 + A_1$, $B = B_0 + B_1$, откуда

$$A_1 = -A_0 \qquad (5.25)$$

и

$$B_1 = -\frac{c\varkappa(1-i)}{\omega\mu} C - B_0. \qquad (5.25а)$$

Из равенства (5. 25) вытекает, что если внешнее первичное поле, определяемое равенством (5.12), содержит компоненту нормальную к поверхности проводника, то последняя полностью компенсируется равным и противоположно направленным вторичным полем. Но уравнения (5. 25а) недостаточно для определения компоненты вторичного поля, параллельной поверхности раздела, так как в (5. 25а) содержится два неизвестных коэффициента B_1 и C. Других соотношений между этими коэффициентами не существует. Поэтому задача о расчете вторичного поля и токов, соответствующих первичному полю вида (5.12), в известной степени неопределенна.

Этот результат, очевидно, связан с тем, что в условиях неограниченного проводника поле в произвольной точке P определяется не только токами в окрестности P, но также и токами в прилегающих областях проводника.

3. Апериодическое первичное поле. Когда временной множитель первичного поля $A(t)$ является простой апериодической функцией, вторичное поле и токи можно определить только при заданных начальных условиях. Во всех случаях $A(t)$ можно представить суммой функций времени t, причем суммарное поле в силу линейности исходных уравнений равно сумме полей, обусловленных этими функциями. Поэтому рассматривая поле, соответствующее каждой из них, достаточно предположить, что все токи в проводнике в начальный момент времени равны нулю. Вторичное поле и распределение токов, соответствующие заданной функции $A(t)$, можно представить в виде суммы полей свободного затухания первого типа и частного интеграла уравнений для $A(t)$. Эта сумма, очевидно, должна быть подчинена начальным условиям, что можно сделать с помощью интеграла Фурье — Бесселя, но проще воспользоваться операционным исчислением.

Чтобы получить общее решение дифференциальных уравнений с учетом граничных условий, воспользуемся оператором $D = \frac{\partial}{\partial t}$, рассматривая его как алгебраическую величину. Решая с его помощью уравнение (1. 18), получим

$$Z(z, t) = e^{uz} a(t) + e^{-uz} b(t), \qquad (5.26)$$

где

$$u^2 = \frac{4\pi\sigma\mu D}{c^2} + \lambda^2. \tag{5.27}$$

Удовлетворяя граничным условиям при $z = 0$ и предельному условию при $z = -\infty$, так же как и в пункте 1, найдем, что $b(t)$ должно быть равно нулю и

$$a(t) = -\frac{2\mu D}{c(u+\lambda\mu)} A(t), \tag{5.28}$$

$$B(t) = \frac{u-\lambda\mu}{u+\lambda\mu} A(t). \tag{5.29}$$

Коэффициенты при $A(t)$ в равенствах (5.28) и (5.29) можно рассматривать как операторы, в результате действия которых на $A(t)$ получаются искомые функции $a(t)$ и $B(t)$. Результат любой подобной операции, скажем, вида

$$a(t) = F^*(D) A(t), \tag{5.30}$$

можно выразить следующим образом

$$a(t) = \frac{d}{dt} \int_0^t A(t-\tau) f(\tau)\, d\tau, \tag{5.31}$$

где $f(t)$ есть решение интегрального уравнения

$$F^*(D) = D \int_0^\infty f(t) e^{-Dt}\, dt. \tag{5.32}$$

Таким образом $a(t)$ и $B(t)$ можно определить из (5.28) и (5.29). Величина $Z(z, t)$ находится из (5.26) как результат действия оператора e^{uz} на $a(t)$. Вторичное поле и распределение тока получаются в итоге как функции времени.

Функция $f(t)$ из (5.32) равна $a(t)$ в случае, когда временной множитель $A(t)$ первичного поля равен единичной функции $u(t)$, то есть если потенциал первичного поля увеличивается мгновенно на одну единицу в момент времени $t = 0$. Уравнение (5.31) основано на принципе суперпозиции полей.

Из уравнения (5.29) следует, что оператор $F(D)$, необходимый для определения временного множителя $B(t)$ вторичного поля, равен $\frac{u-\lambda\mu}{u+\lambda\mu}$. Рассматривая случай $\mu = 1$ и пользуясь разложением бинома по степеням D^{-1}, в области не слишком больших значений t получим

$$F^*(D) = 1 + \frac{2\lambda^2}{4\pi\sigma D} - \frac{2\lambda D}{\sqrt{4\pi\sigma D}} \left[1 + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}(2n-3)!}{2^n n!\,(n-2)!} \times \right.$$
$$\left. \times \left(\frac{\lambda^2}{4\pi\sigma D}\right)^n + \ldots\right]. \tag{5.33}$$

Воспользовавшись равенством

$$D^{-m} u(t) = \frac{t^m}{\Gamma(m+1)}, \tag{5.34}$$

найдем, что

$$f(t) = 1 + \frac{2\lambda^2 t}{4\pi\sigma} - \frac{2\lambda}{\pi}\sqrt{\frac{t}{\sigma}} \left[1 + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n!\,(2n-1)(2n+1)} \times \right.$$
$$\left. \times \left(\frac{\lambda^2 t}{4\pi\sigma}\right)^n + \ldots\right]. \tag{5.35}$$

Ряд сходится для всех значений t. Можно также выразить этот результат в другой форме:

$$f(t) = \sqrt{\frac{8}{\pi}}\, e^{-\frac{1}{4}v^2} D_{-3}(v), \tag{5.36}$$

где $D_n(v)$ — параболическая цилиндрическая функция Вебера и

$$v = \sqrt{\frac{\lambda^2 t}{2\pi\sigma}}. \tag{5.37}$$

Пользуясь асимптотическим разложением для $D_n(v)$, запишем в области больших значений t

$$f(t) \approx \sqrt{\frac{8}{\pi}}\, v^{-3} e^{-\frac{1}{2}v^2} \left[1 - \frac{4!}{2^2 v^2} + \ldots + \right.$$
$$\left. (-1)^n \frac{(2n+2)!}{2^{n+1} n!\, v^{2n}} + \ldots\right]. \tag{5.38}$$

Выражения (5.35) и (5.38) позволяют рассчитать $f(t)$ для всех значений t.

§ 6. Плоская проводящая среда как граничный случай проводящей сферы

Рассмотрим неограниченную проводящую среду как предельный случай конечного проводника, когда его размеры увеличиваются, стремясь к бесконечности. С этой целью разберем задачу о сферическом проводнике радиуса a, величина которого стремится к бесконечности. Тогда потенциал внешнего первичного поля выражается при помощи сферических гармонических функций

$$\Omega = -Ae^{i\omega t} r^n a^{-n-1} S_n, \tag{6.1}$$

где S_n — гармоническая функция порядка n. Потенциал, соответствующий части вторичного поля, приводится, например, у Чэпмэна и Бартелса (Chapman, Bartels, 1940):

$$\Omega_1 = -Be^{i\omega t} r^{-n-1} a^{n+2} S_n, \tag{6.2}$$

причем

$$\frac{B}{A} = \frac{n}{n+1}\left[1 - \frac{(2n+1)\mu}{n(\mu-1) + \dfrac{pJ_{n-\frac{1}{2}}(p)}{J_{n+\frac{1}{2}}(p)}}\right] \tag{6.3}$$

и

$$p^2 = -i\,4\pi\sigma\mu\omega\,a^2. \tag{6.4}$$

Из (6.3) следует, что

$$\frac{B}{A} \to \frac{n}{n+1}, \tag{6.5}$$

когда $a \to \infty$.

Далее нормальная компонента первичного поля на поверхности равна $nAe^{i\omega t}S_n$, нормальная компонента вторичного поля равняется $(n+1)\,Be^{i\omega t}S_n$. Отсюда в пределе при $a \to \infty$ эти компоненты взаимно уничтожаются, что находится в соответствии с выводами пункта 2, § 5.

С другой стороны, тангенциальные компоненты вторичного и первичного полей в пределе относятся как $\frac{n}{n+1}$. Теперь любая гармоника конечного порядка n приведет к приблизительно однородному полю над ограниченным участком достаточно большой сферической поверхности. Если ограничиться этим конечным участком, то может появиться искушение считать проводник полубесконечным, а поле однородным. Но из результатов пункта 2, § 5 следует, что если это так, то тангенциальные компоненты вторичного поля становятся неопределимыми. Это не противоречит тому, что предельное отношение тангенциальных компонент вторичного и первичного полей равно $\frac{n}{n+1}$. Отношение может принимать любое значение между $^1/_2$ и 1, так как n может быть любым положительным целым числом. Более того, для проводников другой формы, например, цилиндрической, рассматриваемое отношение может принимать также значения, не входящие в этот диапазон.

Снимем ограничение относительно конечности n и устремим n и a к бесконечности. В результате получим поле, заметно изменяющееся в пределах участка сферической поверхности настолько малого, что его можно считать плоским. Итак, положим, что $\frac{n}{a} \to \lambda$, когда $a \to \infty$. (6.6)

Если тесеральная гармоника $S_n = P_n^s(\cos\theta)\ \cos(s\phi + \phi_0)$, то, рассмотрев предельный случай выражений (6.1) и (6.2), найдем

$$\frac{\Omega}{a} \to -Ae^{i\omega t}\,e^{\lambda z}\,J_s(\lambda R)\cos(s\phi + \phi_0) \tag{6.7}$$

и

$$\frac{\Omega_1}{a} \to -Be^{i\omega t}\,e^{-\lambda z}\,J_s(\lambda R)\cos(s\phi + \phi_0), \tag{6.8}$$

где ось $0z$ направлена вдоль линии $\theta = 0$, R — расстояние до этой оси. Чтобы получить предельное значение отношения B/A, определяемого по (6.3), используем рекуррентную формулу для бесселевых функций

$$J_{n-\frac{1}{2}}(p) + J_{n+\frac{3}{2}}(p) = \frac{2n+1}{p}\,J_{n+\frac{1}{2}}(p). \tag{6.9}$$

Подставив $p = n\beta$ и обозначив отношение $\dfrac{J_{n+\frac{1}{2}}(p)}{J_{n-\frac{1}{2}}(p)}$ через l_n, получим

$$\frac{1}{l_n} + l_{n+1} = \frac{2n+1}{n\beta}. \tag{6.10}$$

Отсюда, если $l_n \to l$, когда $n \to \infty$, то

$$\frac{1}{l} + l = \frac{2}{\beta},$$

так что

$$l = \beta^{-1}\left[1 \pm \sqrt{1-\beta^2}\right], \tag{6.11}$$

где берется знак минус, так как l конечно, при $\beta \to 0$. Следовательно, из (6.3) следует

$$\frac{B}{A} \to 1 - \frac{2\mu}{\mu - 1 + \beta^2\left[1-\sqrt{1-\beta^2}\right]^{-1}} = \frac{\sqrt{1-\beta^2}-\mu}{\sqrt{1-\beta^2}+\mu} = \frac{u-\lambda\mu}{u+\lambda\mu},$$

где u определяется по (5.4). Этот результат идентичен (5.8) и контролирует выводы, полученные ранее.

Глава II

МАГНИТНЫЙ ДИПОЛЬ И ОДНОРОДНОЕ ПОЛУПРОСТРАНСТВО

В главе рассмотрены электромагнитные поля в присутствии однородного полупространства, когда источники магнитного поля имеют вид магнитных диполей или замкнутых петель.

Наиболее детально изучен часто встречающийся на практике случай вертикального магнитного диполя. Вычисления вторичного поля с помощью теории, развитой Прайсом (гл. I), приводятся по материалам работы Гордона (Gordon, 1951). Остальные расчеты основаны на преобразовании уравнений Максвелла с помощью вектор-потенциала. Так, работой Уэйта (Wait, 1952a) иллюстрируются вычисления, аналогичные вычислениям Гордона, но выполненные с помощью вектор-потенциала. Уэйт (1952a)

и Гордон (1951) исследуют электромагнитное поле в плоскости раздела сред. Йост (Yost, 1952) рассчитывает магнитное поле в нижнем полупространстве. В перечисленных выше задачах диполь размещается на границе сред. Сопротивление излучения горизонтальной рамки, приподнятой над землей, рассмотрено Уэйтом (1953d).

Поле горизонтального диполя рассмотрено в работах Уэйта (1953) и Беллуиджи (Belluigi, 1949). Решение Беллуиджи не приведено в настоящем обзоре, так как оно не вносит ничего существенно нового. Уэйт и Кэмпбелл (1953) вычислили поле горизонтального диполя, помещенного в проводящую среду около границы раздела. Поле вблизи горизонтальной рамки изучено Уэйтом (1954). На измерениях магнитного поля в центре петли основан метод, предложенный Кёнигсбергером (Königsberger, 1939) и Нуньером (Nunier, 1933). Этот метод рассмотрен в статье Йосидзуми, Танигучи и Киено (Yoshizumi, Taniguchi, Kiyono, 1959), которые частично воспроизводят малоизвестные сейчас выводы Нуньера, Кёнигсбергера и Стефанеску.

В конце главы дается обзор формул магнитных полей. Выражения для вторичных полей трансформируются при этом в выражения взаимного импеданса между генераторной и приемной рамками. Рассмотрены случаи, имеющие значение как для наземной, так и для воздушной электроразведки (Уэйт, 1952а, 1954, 1955, 1956).

За последнее время в геофизике повысился интерес к неустановившимся электромагнитным полям. В связи с этим приводятся работы Уэйта (1951) и Бхаттачария (Bchattacharyya, 1959).

Из отечественных геофизиков поле диполя над однородным полупространством исследовали Шерман (1932), Михайлов (1934), Гасаненко (1958), Тихонов совместно с Дмитриевым (1959), Семенов (1961) и др.

Полю становления посвящены работы Тихонова (1946) и Шейнманна (1947). Сопротивление излучения антенны изучали Тихонов и Четаев (1956), первые шаги в этом направлении сделал Петровский (1926). С упомянутыми работами Кёнигсбергера и Нуньера соприкасаются работы Краева (1941, 1951).

§ 1. Вертикальный диполь

1. Вертикальное магнитное поле и тангенциальное электрическое поле на границе двух сред (Уэйт, 1952а). Рассмотрим компоненты электромагнитного поля вертикального магнитного диполя, помещенного в горизонтальной плоскости раздела между двумя средами с конечными сопротивлениями. Верхняя ($z>0$) и нижняя ($z<0$) среды имеют электрические свойства — электропроводность, диэлектрическую постоянную и магнитную проницаемость — σ_1, ε_1, μ_0 и σ_2, ε_2, μ_0. Зависимость момента диполя M от времени характеризуется множителем $e^{i\omega t}$, который обычно опускается. Физическим аналогом магнитного диполя является маленькая круглая рамка с площадью dS и током I ампер. Тогда магнитный момент диполя M равен $\frac{IdS}{4\pi}$ *. Все величины даются в рационализированной системе единиц MKS.

Рамка помещена в начале системы цилиндрических координат (ϱ, φ, z). Ось рамки направлена вдоль оси Oz. Уравнение плоскости раздела сред $z=0$.

Воспользуемся общим решением Зоммерфельда (1926). Полученные им результаты можно выразить через вектор-потенциалы F_1 и F_2, которые имеют компоненту только в направлении оси Oz:

$$F_1=\frac{i\mu_0\omega IdS}{2\pi}\int\limits_0^\infty\frac{\lambda J_0(\varrho\lambda)e^{-zu_1}}{u_1+u_2}d\lambda,\quad (z>0),\tag{1.1}$$

$$F_2=\frac{i\mu_0\omega IdS}{2\pi}\int\limits_0^\infty\frac{\lambda J_0(\varrho\lambda)e^{zu_2}}{u_1+u_2}d\lambda,\quad (z<0),\tag{1.2}$$

где

$$u_1=(\lambda^2+k_1^2)^{\frac{1}{2}},\quad u_2=(\lambda^2+k_2^2)^{\frac{1}{2}},$$

$$k_1^2=i\sigma_1\mu_0\omega-\varepsilon_1\mu_0\omega^2,\quad k_2^2=i\sigma_2\mu_0\omega-\varepsilon_2\mu_0\omega^2{**}.$$

Компоненты поля выражаются через вектор-потенциалы F_j следующим образом***:

$$E_\varphi=\frac{\partial F_j}{\partial\varrho},\quad i\mu_0\omega H_z=\left(-k_j^2+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)F_j,$$

$$i\mu_0\omega H_\varrho=\frac{\partial^2F_j}{\partial\varrho\,\partial z},\ H_\varphi=E_\varrho=E_z=0,\ (j=1,2).\tag{1.3}$$

Рассмотрим случай, когда $z=0$. Выражение для вектор-потенциала будет иметь вид

$$F=\frac{i\mu_0\omega IdS}{2\pi}\int\limits_0^\infty\frac{\lambda J_0(\varrho\lambda)}{u_1+u_2}d\lambda.\tag{1.4}$$

---

* Иногда буквой M обозначается также величина $\frac{i\mu\omega IdS}{4\pi}$. *А. В.* и *Г. Ф.*

** Вывод формул (1.1) и (1.2) приводится, например, в книге Франка и Мизеса (1937, стр. 957). *А. В.* и *Г. Ф.*

*** Векторный потенциал для магнитных источников обозначается буквой $\boldsymbol{F}$ и связан с напряженностью электрического поля равенством $\boldsymbol{E}=-\mathrm{rot}\,\boldsymbol{F}$. Векторный потенциал для электрических источников обозначается буквой $\boldsymbol{A}$ и определяется из равенства $\boldsymbol{H}=\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}$. Ниже вектор $\boldsymbol{F}$ называется магнитным вектор-потенциалом, а вектор $\boldsymbol{A}$ — электрическим вектор-потенциалом. Магнитный вектор-потенциал $\boldsymbol{F}$ связан с вектором Герца $\boldsymbol{\Pi}^*$ соотношением $\boldsymbol{F}=i\mu\omega\boldsymbol{\Pi}^*$. *А. В.* и *Г. Ф.*

Умножая числитель и знаменатель подынтегрального выражения на $u_1 - u_2$, получим

$$F = \frac{i\mu_0\omega IdS}{2\pi}\left[\int_0^\infty \frac{\lambda u_1 J_0(\varrho\lambda)\,d\lambda}{k_1^2-k_2^2} - \int_0^\infty \frac{\lambda u_2 J_0(\varrho\lambda)\,d\lambda}{k_1^2-k_2^2}\right]. \quad (1.5)$$

Далее числитель и знаменатель первого выражения умножаются на $\lambda + u_1$, второго — на $\lambda + u_2$

$$F = \frac{i\mu_0\omega IdS}{2\pi(k_1^2-k_2^2)}\left[k_1^2\int_0^\infty \frac{\lambda J_0(\varrho\lambda)\,d\lambda}{\lambda+u_1} - k_2^2\int_0^\infty \frac{\lambda J_0(\varrho\lambda)\,d\lambda}{\lambda+u_2}\right]. \quad (1.6)$$

Этот интеграл вычислен на стр. 54.

$$\int_0^\infty \frac{J_0(\lambda\varrho)\lambda\,d\lambda}{\lambda+u_j} = \frac{1}{k_j^2\varrho^3}[1-(1+k_j\varrho)e^{-k_j\varrho}], \quad (1.7)$$

В результате можно записать

$$F = \frac{i\mu_0\omega IdS}{2\pi(k_1^2-k_2^2)\varrho^3}[(1+k_2\varrho)e^{-k_2\varrho} - (1+k_1\varrho)e^{-k_1\varrho}]. \quad (1.8)$$

Компонента электрического поля в плоскости раздела

$$E_\varphi = \frac{\partial F}{\partial\varrho} = \frac{i\mu_0\omega IdS}{2\pi(k_1^2-k_2^2)\varrho^4}[(3+3k_1\varrho+k_1^2\varrho^2)e^{-k_1\varrho} - (3+3k_2\varrho+k_2^2\varrho^2)e^{-k_2\varrho}]. \quad (1.9)$$

Вертикальная компонента магнитного поля в плоскости раздела

$$i\mu_0\omega H_z = -k_j^2F_j + \frac{\partial^2F_j}{\partial z^2}. \quad (1.10)$$

Так как F_j удовлетворяет однородному волновому уравнению, то учитывая аксиальную симметрию

$$\frac{1}{\varrho}\frac{\partial}{\partial\varrho}\left(\varrho\frac{\partial F_j}{\partial\varrho}\right) - k_j^2F_j + \frac{\partial^2F_j}{\partial z^2} = 0. \quad (1.11)$$

Подставляя (1.11) в (1.3), найдем

$$i\mu_0\omega H_z = -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial}{\partial\varrho}\left(\varrho\frac{\partial F_j}{\partial\varrho}\right). \quad (1.12)$$

После дифференцирования получим

$$H_z = \frac{IdS}{2\pi(k_1^2-k_2^2)\varrho^5}[(9+9k_1\varrho+4k_1^2\varrho^2+k_1^3\varrho^3)e^{-k_1\varrho} - (9+9k_2\varrho+4k_2^3\varrho^2+k_2^3\varrho^3)e^{-k_2\varrho}]. \quad (1.13)$$

*2. Радиальное и вертикальное магнитное поле на границе воздух — земля (Гордон, 1951)**. Пусть в точке с координатами $(0, 0, h)$ над однородным проводящим полупространством помещен магнитный диполь с моментом M. Электропроводность среды σ, магнитная проницаемость $\mu = 1$. Момент диполя изменяется синусоидально в зависимости от времени с периодом $\frac{2\pi}{\omega}$. Величины даются в гауссовой системе единиц. Потенциал первичного поля такого диполя в точке с полярными координатами (ϱ, φ, z) имеет вид

$$\Omega_0 = M\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{R}\right),$$

где

$$R^2 = \varrho^2 + (h-z)^2.$$

Пользуясь известным соотношением

$$\frac{1}{R} = \int_0^\infty e^{-(h-z)\lambda}J_0(\varrho\lambda)\,d\lambda, \quad (z<h),$$

для первичного поля получим:

$$\Omega_0 = M\int_0^\infty e^{-(h-z)\lambda}J_0(\varrho\lambda)\lambda\,d\lambda.$$

Учитывая, что $J_0(\varrho\lambda)$ удовлетворяет уравнению (I, 2. 2), на основании (I, 5. 8)** найдем для вторичного поля

$$\Omega_1 = M\int_0^\infty \frac{u-\lambda}{u+\lambda}e^{-(h+z)\lambda}J_0(\varrho\lambda)\lambda\,d\lambda, \ (z>0),$$

где

$$u^2 = \lambda^2 + \frac{4\pi i\sigma\omega}{c^2}.$$

Подставив в последний интеграл $M_0 = \varkappa^2 M$, $\zeta = \varkappa(h+z)$, $\xi = \varkappa\varrho$, $\lambda = \varkappa m$, где $\varkappa^2 = \frac{4\pi\sigma\omega}{c^2}$, запишем

$$\Omega_1 = M_0\int_0^\infty \frac{\sqrt{m^2+i}-m}{\sqrt{m^2+i}+m}J_0(\xi m)e^{-\zeta m}m\,dm. \quad (1.14)$$

---

* Решения и подробные таблицы как для вертикального, так и для горизонтального магнитных диполей, расположенных на однородном проводящем полупространстве, имеются также в работах Гасаненко и Молочнова (1958). *А. В., Г. Ф.*

** Римская цифра обозначает номер главы.

Когда диполь находится на поверхности среды, компоненты магнитного поля на этой же поверхности определяются выражениями:

$$H_z = \varkappa M_0 \int_0^\infty \frac{\sqrt{m^2+i}-m}{\sqrt{m^2+i}+m} J_0(\xi m) m^2 dm, \qquad (1.15)$$

$$H_\varrho = \varkappa M_0 \int_0^\infty \frac{\sqrt{m^2+i}-m}{\sqrt{m^2+i}+m} J_1(\xi m) m^2 dm. \qquad (1.16)$$

При этом компоненты поля на поверхности $z = 0$ в однородной среде

$$H_z = \frac{\varkappa M_0}{\xi^3}, \quad H_\varrho = 0.$$

Рассмотрим сначала интеграл

$$J = \int_0^\infty \frac{\sqrt{m^2+b^2}-m}{\sqrt{m^2+b^2}+m} J_0(\xi m)\, dm,$$

где b — вещественная положительная величина. Освобождаясь от иррациональности в знаменателе, получим

$$J = \frac{1}{b^2}\int_0^\infty [2m^2+b^2-2m\sqrt{m^2+b^2}]\, J_0(\xi m)\, dm =$$

$$= \frac{1}{\xi} - \frac{2}{b^2}\int_0^\infty [\sqrt{m^2+b^2}-m]\, m J_0(\xi m)\, dm,$$

так как здесь

$$\int_0^\infty J_0(\xi m)\, dm = \frac{1}{\xi}.$$

Используя соотношение

$$(m^2+b^2)^{\frac{1}{2}} - m = b\int_0^\infty e^{-mx} J_1(bx)\frac{dx}{x}$$

(Ватсон, 1949, стр. 422) и интегрируя по m, найдем

$$J = \frac{1}{\xi} + \frac{2}{b}\int_0^\infty J_1(bx)\frac{\partial}{\partial x}[(x^2+\xi^2)^{-\frac{1}{2}}]\frac{\partial x}{x} =$$

$$= \frac{1}{\xi} + \frac{2}{b}\frac{1}{\xi}\frac{d}{d\xi}\int_0^\infty \frac{J_1(bx)}{(x^2+\xi^2)^{\frac{1}{2}}}dx =$$

$$= \frac{1}{\xi} + \frac{2}{b}\frac{1}{\xi}\frac{d}{d\xi}\left[I_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}b\xi\right)K_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}b\xi\right)\right].$$

Интеграл вычислен по формуле, приводимой у Ватсона (1949, стр. 477). Последнее выражение можно переписать

$$J = \frac{1}{\xi} + \frac{2}{b}\frac{1}{\xi}\frac{d}{d\xi}\left(\frac{1-e^{-b\xi}}{b\xi}\right). \qquad (1.17)$$

Выведенная выше формула справедлива и для комплексных b с положительной вещественной частью. Наконец, из уравнения Бесселя

$$m^2 J_0(m\xi) = -\frac{1}{\xi}\frac{d}{d\xi}\left[\xi\frac{d}{d\xi}J_0(m\xi)\right].$$

Воспользовавшись последним соотношением, найдем для H_z

$$H_z = -\varkappa M_0 \frac{1}{\xi}\frac{d}{d\xi}\left\{\xi\frac{d}{d\xi}\left[\frac{1}{\xi} + \frac{2}{b^2\xi}\frac{d}{d\xi}\left(\frac{1-e^{-b\xi}}{\xi}\right)\right]\right\}, \qquad (1.18)$$

где $b = i^{\frac{1}{2}}$, причем следует взять тот корень, у которого вещественная часть положительна.

Дифференцируя, получим

$$H_z = -\varkappa M_0\left[\frac{1}{\xi^3} - \frac{18}{b^2\xi^5} + \right.$$

$$\left. + \frac{2be^{-b\xi}}{\xi^2}\left(1 + \frac{4}{b\xi} + \frac{9}{(b\xi)^2} + \frac{9}{(b\xi)^3}\right)\right]. \qquad (1.19)$$

Когда ξ меньше единицы, удобно пользоваться рядом

$$H_z = 2\varkappa M_0 b^3 \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(n+1)^2(n+3)}{(n+4)!}(b\xi)^{n-1}. \qquad (1.20)$$

Из равенства (1.19) следует, что при достаточно больших ξ вертикальная компонента вторичного поля над однородным полупространством равна и противоположна соответствующей компоненте поля в однородной неограниченной среде. Этот вывод справедлив безотносительно к форме питающей цепи, которая может рассматриваться и как комбинация диполей. Он, по-видимому, должен быть верен также в случае неоднородных сред.

Вычисление H_ϱ производится аналогичным методом. По (1.16) имеем

$$H_\varrho = -\varkappa M_0 \frac{\partial\hat{\Phi}}{d\xi},$$

где

$$\hat{\Phi} = 2\int_0^\infty \frac{(m^2+b^2)^{\frac{1}{2}}-m}{(m^2+b^2)^{\frac{1}{2}}+m} m J_0(\xi m)\, dm.$$

Пользуясь формулой, приводимой у Ватсона (1949, стр. 422), получим

$$\hat{\Phi} = 2 \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-mx} J_2(bx) J_0(\xi m) x^{-1} m dx dm.$$

Опять применяя формулы по Ватсону (стр. 477), найдем:

$$\hat{\Phi} = -2 \int_0^\infty J_2(bx) \frac{d}{dx} [(x^2+\xi^2)^{\frac{1}{2}}] \frac{dx}{x} =$$

$$= -\frac{2}{\xi} \frac{d}{d\xi} \int_0^\infty \frac{J_2(bx)}{(x^2+\xi^2)^{\frac{1}{2}}} dx = -\frac{2}{\xi} \frac{d}{d\xi} \left[I_1\left(\frac{1}{2} b\xi\right) K_1\left(\frac{1}{2} b\xi\right)\right].$$

Следовательно,

$$H_\varrho = 2\varkappa M_0 \frac{d}{d\xi} \left\{ \frac{1}{\xi} \frac{d}{d\xi} \left[I_1\left(\frac{1}{2} b\xi\right) K_1\left(\frac{1}{2} b\xi\right)\right]\right\}, \quad (1.21)$$

где $b = i^{\frac{1}{2}}$.

Дифференцируя и применяя рекуррентные соотношения (Ватсон, 1949, стр. 95), можно записать

$$H_\varrho = \varkappa M_0 \left\{ \frac{16}{\xi^3} I_1\left(\frac{1}{2} b\xi\right) K_1\left(\frac{1}{2} b\xi\right) - \frac{4b}{\xi^2} \left[I_0\left(\frac{1}{2} b\xi\right) K_1\left(\frac{1}{2} b\xi\right) - \right.\right.$$
$$\left. - I_1\left(\frac{1}{2} b\xi\right) K_0\left(\frac{1}{2} b\xi\right)\right] - \frac{b^2}{\xi} \left[I_0\left(\frac{1}{2} b\xi\right) K_0\left(\frac{1}{2} b\xi\right) - \right.$$
$$\left.\left. - I_1\left(\frac{1}{2} b\xi\right) K_1\left(\frac{1}{2} b\xi\right)\right]\right\}. \quad (1.22)$$

Для очень малых ξ удобнее пользоваться разложением в ряд по возрастающим степеням ξ. Ряд можно вычислить при помощи соотношения, приводимого у Ватсона (1949, стр. 485):

$$I_1(\xi) K_1(\xi) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} K_0(2\xi \sin\theta) \cos 2\theta \, d\theta. \quad (1.23)$$

Пользуясь разложением в ряд для $K_0(2\xi \sin\theta)$ и последовательно интегрируя каждый член этого разложения, можно вычислить (1. 23). В табл. 1 приводятся вычисленные значения H_z и H_ϱ (множитель $\varkappa M_0$ опущен) *.

* В этой же статье Гордон вычисляет также интеграл (1. 14) и поле H_z кольцевого тока в ближней зоне. Решение Уэйта для аналогичного случая ближней зоны рассмотрено в пункте 1, § 3, *А. В.* и *Г. Ф.*

*Таблица 1**

$\xi = \varkappa\varrho$	Поле H_z в однородном пространстве	Вторичное поле	
		$-H_z$	$-H_\varrho$
0,2	125,0	$0{,}1646 + 1{,}0625i$	$0{,}0313 + 1{,}2403i$
0,4	15,625	$0{,}1429 + 0{,}4402i$	$0{,}0455 + 0{,}6061i$
0,6	4,630	$0{,}1231 + 0{,}2361i$	$0{,}0534 + 0{,}3894i$
0,8	1,953	$0{,}1054 + 0{,}1372i$	$0{,}0576 + 0{,}2777i$
1,0	1,000	$0{,}0896 + 0{,}0808i$	$0{,}0593 + 0{,}2087i$
1,5	0,296	$0{,}0576 + 0{,}0149i$	$0{,}0569 + 0{,}1130i$
2,0	0,125	$0{,}0347 - 0{,}0083i$	$0{,}0497 - 0{,}0641i$

3. Вертикальное магнитное поле на поверхности среды и в среде (Йост, 1952). Пусть горизонтальная генераторная рамка расположена на поверхности раздела воздух — земля (центр рамки совмещен с началом координат). Решение приводится в системе MKS. Когда токами смещения можно пренебречь $\left(\frac{\omega\varepsilon}{\sigma} \ll 1\right)$ на небольшом расстоянии от источника по сравнению с длиной волны, компонента H_z поля вертикального магнитного диполя имеет вид

$$H_z = \frac{IdSNe^{i\omega t}}{2\pi R^3} [G_1 e^{ikR} + G_2 I_0 K_0 + G_3 I_1 K_1 +$$
$$+ G_4 (I_0 K_1 + I_1 K_0) + G_5 (I_1 K_0 - I_0 K_1)], \quad (1.24)$$

где dS — площадь генераторной рамки, N — число ее витков,

$$\varrho^2 = x^2 + y^2, \quad R^2 = \varrho^2 + z^2,$$

$$kR = (1+i) R \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}} = (1+i)\xi,$$

$$k^2R^2G_1 = (ikR - 1)(105g^4 - 90g^2 + 9) + k^2R^2(45g^4 - 39g^2 + 4) -$$
$$- ik^3R^3(10g^4 - 9g^2 + 1) - k^4R^4(g^4 - g^2),$$
$$2G_2 = 3g(35g^4 - 30g^2 + 3) - k^2R^2g(5g^4 - 7g^2 + 2),$$
$$2G_3 = -5g(21g^4 - 32g^2 + 11) + k^2R^2g(5g^4 - 8g^2 + 3),$$
$$2ikRG_4 = 3(35g^4 - 30g^2 + 3) - k^2R^2(10g^4 - 7g^2),$$
$$2ikRG_5 = 3g(35g^4 - 30g^2 + 3) - k^2R^2(45g^4 - 58g^2 + 16) +$$
$$+ k^3R^3g(g^4 - 2g^2 + 1),$$

$$g = \sin\theta = \frac{z}{R}.$$

В проводящем полупространстве z и g отрицательны. Угол θ образован лучом, проведенным из источника в точку наблюдения, и горизонтальной плоскостью. Аргумент бесселевых функций

* Табл, 1 контролируется вычислениями Слихтера и Конопова (§ 5, гл, III). *А. В.* и *Г. Ф.*

I_0 и I_1 равен $-\frac{ikR(1+g)}{2}$, аргумент функций K_0 и K_1 равен $-\frac{ikR(1-g)}{2}$. Функции I_n и K_n подробно табулированы. На практике часто вычисляют э. д. с. v, наводимую в приемной рамке.

$$v = dS'N'\frac{\partial B_z}{\partial t} = i\omega\mu\, dS'N'H_z,$$

$$v = \frac{dS'N'H_0\xi^2}{\sigma} e^{i\omega t}[Q_z(\xi) - iL_z(\xi)],$$

$$v = \frac{dS'N'H_0}{\sigma}\xi^2 A_z(\xi)\cos\left(\omega t - \varphi_z + \frac{\pi}{2}\right), \qquad (1.25)$$

где dS' и N' — площадь и число витков приемной рамки, H_0 — напряженность магнитного поля в случае постоянного тока, φ_z — фазовый сдвиг относительно тока в рамке. Графики функций A_z и φ_z изображены на рис. 1, 2.

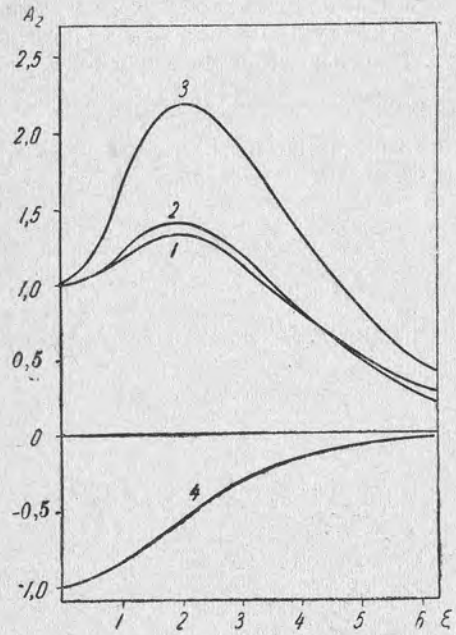


Рис. 1. Графики функции A_z в зависимости от $\xi = R\left(\frac{\omega\mu\sigma}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$; $|\theta| = 0°$, 10°, 25°44′, 90° для кривых *1*, *2*, *3* и *4* соответственно.

4. Сопротивление излучения небольшой круглой рамки (*Уэйт*, 1953*d*). Как и раньше будем считать, что диполь эквивалентен маленькой круглой рамке, по которой протекает ток I, меняющийся по закону $e^{i\omega t}$. Рамка имеет площадь dS и ее ось перпендикулярна поверхности земли.

Координатная система (ϱ, ϕ, z) выбирается так, что проводящей среде соответствуют отрицательные значения z. Проводимость и диэлектрическая постоянная среды обозначаются через σ и ε_2, диэлектрическая постоянная воздуха — через ε_1. Среды немагнитны: магнитная проницаемость μ всего пространства равна магнитной проницаемости воздуха. Диполь расположен в точке $z = h$ и ориентирован в направлении оси Oz. Определим выражение для полного потока энергии.

Общее решение такой задачи исследовано Уэйтом в другой работе (§ 2, гл. III). Компоненты электромагнитного поля можно записать с помощью скалярной функции F. В области $z \geqslant 0$

$$i\mu\omega H_\varrho = \frac{\partial^2 F}{\partial\varrho\,\partial z}, \quad H_\phi = 0$$

$$i\mu\omega H_z = \left(\beta^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)F, \qquad (1.26)$$

где

$$\beta^2 = \varepsilon_1\mu\omega^2$$

и

$$E_\varrho = E_z = 0,$$

$$E_\phi = \frac{\partial F}{\partial\varrho}. \qquad (1.27)$$

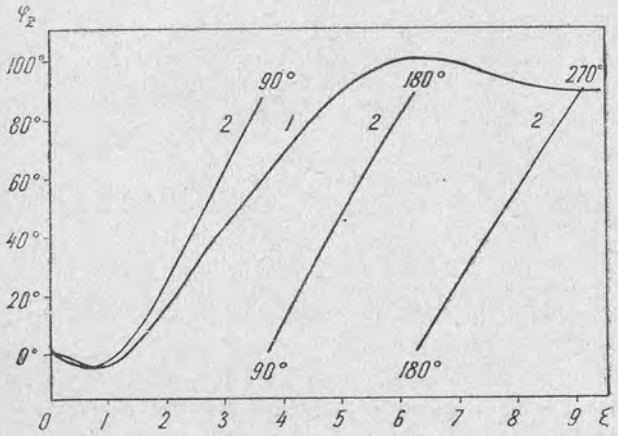


Рис. 2. Графики функции φ_z в зависимости от $\xi = R\left(\frac{\omega\mu\sigma}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$; $|\theta| = 0°$, 10° для кривых *1* и *2* соответственно.

В области $z \geqslant 0$

$$F = iM\int_0^\infty J_0(\varrho\lambda)e^{\pm(h-z)u_1}\lambda u_1^{-1}d\lambda -$$

$$- iM\int_0^\infty J_0(\varrho\lambda)e^{-(z+h)u_1}G\lambda u_1^{-1}d\lambda, \qquad (1.28)$$

где $G = \frac{u_2 - u_1}{u_2 + u_1}$, $M = \frac{\mu\omega I dS}{4\pi} = \frac{\mu\omega I a^2}{4}$, а радиус рамки $u_1 = (\lambda^2 - \beta^2)^{\frac{1}{2}}$, $u_2 = (\lambda^2 + k^2)^{\frac{1}{2}}$, где $k^2 = i\sigma\mu\omega - \varepsilon_2\mu\omega^2$. Положительный знак экспоненты в первом интеграле предыдущего выражения выбирается в области $z > h$, а отрицательный — для $0 \leqslant z < h$ [Ниссен (Nissen, 1938)].

Средний по времени поток энергии в направлении оси Oz можно вычислить, воспользовавшись компонентой вектора Умова—Пойнтинга $\hat{S}_z$:

$$\hat{S}_z = \frac{1}{2} Re\, E_\varphi H_\varrho, \tag{1.29}$$

где символ Re обозначает, что берется вещественная часть произведения $E_\varphi H_\varrho$. Пусть W_+ будет обозначением полного потока энергии через горизонтальную плоскость $z = h + \delta$, W_- — через горизонтальную плоскость $z = h - \delta$, так что

$$W_\pm = 2\pi \int_0^\infty \hat{S}_z \varrho\, d\varrho, \tag{1.30}$$

где $z = h \pm \delta$.

Для компонент H_ϱ и E_φ запишем:

$$H_\varrho = \frac{M}{\mu\omega} \int_0^\infty [\pm e^{\pm(h-z)u_1} - Ge^{-(h+z)u_1}]\, \lambda^2 J_1(\varrho\lambda)\, d\lambda \tag{1.31}$$

и

$$E_\varphi = -iM \int_0^\infty [e^{\pm(h-z)u_1} - Ge^{-(h+z)u_1}]\, \lambda^2 J_1(\varrho\lambda)\, u_1^{-1} d\lambda, \tag{1.32}$$

где опять знак «+» берется для $z > h$ и знак «—» для $z < h$. Для удобства расстояние δ берется малым по сравнению с h. Полный поток энергии можно найти, вычислив следующий тройной интеграл:

$$W_\pm = Re \frac{iM^2\pi}{\mu\omega} \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty f_1^*(\lambda^*) f_2(\lambda) \lambda^2 \lambda^{*2} J_1(\varrho\lambda) \times$$
$$\times J_1(\varrho\lambda^*)\, \varrho\, d\varrho\, d\lambda^*\, d\lambda, \tag{1.33}$$

где

$$f_1^*(\lambda^*) = \pm(e^{-\delta u_1^*} - G^* e^{-2hu_1^*},$$
$$f_2(\lambda) = \left(e^{-\delta u_1} - Ge^{-2hu_1}\right) u_1^{-1},$$
$$u_1^* = (\lambda^{*2} - \beta^2)^{\frac{1}{2}}, \quad u_2^* = (\lambda^{*2} + k^2)^{\frac{1}{2}},$$
$$u_1 = (\lambda^2 - \beta^2)^{\frac{1}{2}}, \quad u_2 = (\lambda^2 + k^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Как показал Ниссен (1938), тройной интеграл такого типа можно свести к одинарному, воспользовавшись свойством ортогональности бесселевых функций, а именно:

$$\int_0^\infty J_1(\varrho\lambda) J_1(\varrho\lambda^*)\, \varrho\, d\varrho = \begin{cases} 0, & (\lambda^* \neq \lambda), \\ \infty, & (\lambda^* = \lambda), \end{cases} \tag{1.34}$$

причем для бесконечно малого η

$$\int_{\lambda-\eta}^{\lambda+\eta} \int_{\varrho=0}^{\infty} J_1(\varrho\lambda) J_1(\varrho\lambda^*)\, \varrho\, d\varrho\lambda^*\, d\lambda^* = 1. \tag{1.35}$$

Применяя этот результат, преобразуем интеграл (1. 33)

$$W_\pm = Re \frac{iM^2\pi}{\mu\omega} \int_0^\infty \lambda^3 f_1^*(\lambda) f_2(\lambda)\, d\lambda. \tag{1.36}$$

Полная энергия, излучаемая диполем в окружающее пространство,

$$W = W_+ - W_-.$$

Величину W можно представить в виде трех интегралов:

$$W = \frac{2\pi M^2}{\mu\omega} [J_0 - J_0' + J_1], \tag{1.37}$$

где

$$J_0 = Re\, i \int_0^\infty \lambda^3 u_1^{-1} e^{\delta(u_1 + u_1^*)}\, d\lambda, \tag{1.38}$$

$$J_0' = Re\, i \int_0^\infty \lambda^3 u_1^{-1} e^{-2hu_1}\, d\lambda \tag{1.39}$$

и

$$J_1 = Re\, 2i \int_0^\infty \lambda^3 (u_1 + u_2)^{-1} e^{-2hu_1}\, d\lambda, \tag{1.40}$$

где считается, что $\delta \ll h$. Первый интеграл J_0 соответствует с точностью до постоянного коэффициента потоку энергии, излучаемому в пространство, заполненное диэлектриком. Второй интеграл J_0' обусловлен зеркальным отражением диполя в плоскости раздела. Третий интеграл можно интерпретировать как поправку, обусловленную конечной проводимостью земли. Поправочный член стремится к нулю, когда волновое число k приближается к бесконечности. Второй и третий интегралы становятся малыми, когда h достигает больших значений.

Вычислим эти интегралы. В интеграле J_0 подынтегральная функция вещественна при $\lambda > \beta$ и кроме того, $\delta(u_1 + u_1^*) \to 0$, так что

$$J_0 = Re\, i \int_0^\beta \lambda^3 (\lambda^2 - \beta^2)^{-\frac{1}{2}} d\lambda = \frac{2\beta^3}{3}. \tag{1.41}$$

Для второго интеграла найдем:

$$J_0' = Re\, i \int_0^\infty (u_1^2 + \beta^2) e^{-xu_1} \lambda u_1^{-1}\, d\lambda, \tag{1.42}$$

где $x = 2h$. Этот результат можно представить иначе:

$$J_0' = Re\, i\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \beta^2\right)\int_0^\infty e^{-xu_1}\lambda u_1^{-1}\, d\lambda. \qquad (1.43)$$

Вычисляя (1. 43), получим:

$$J_0' = Re\, i\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \beta^2\right)\frac{e^{-i\beta x}}{x} = \frac{2}{x^3}(\sin\beta x - \beta x\cos\beta x). \qquad (1.44)$$

Более трудно вычислить третий интеграл. Представим его в следующем виде:

$$J_1 = Re\, i2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \beta^2\right)\hat{J}, \qquad (1.45)$$

где

$$\hat{J} = \int_0^\infty e^{-u_1 x}(u_1 + u_2)^{-1}\lambda\, d\lambda. \qquad (1.46)$$

Последний интеграл можно представить как сумму трех интегралов:

$$(k^2 + \beta^2)\hat{J} = \int_0^\infty ke^{-u_1 x}\lambda\, d\lambda - \int_0^\infty u_1 e^{-u_1 x}\lambda\, d\lambda +$$

$$+ \int_0^\infty (u_2 - k)e^{-u_1 x}\lambda\, d\lambda. \qquad (1.47)$$

Первые два интеграла можно вычислить тем же способом, что и J_0'. Третий интеграл можно оценить приближенно при условии, что $|kx| >> 1$. Тогда в подынтегральном выражении можно сделать замену $u_2 - k$ на $\frac{\lambda^2}{2k}$. В результате получим, что

$$x^3(k^2 + \beta^2)e^{i\beta x}\hat{J} =$$

$$= (kx)^{-1}(1 + i\beta x) - (kx)^{-2}(2 + 2i\beta x - \beta^2 x^2) +$$

$$+ (kx)^{-3}(3 + 3i\beta x - \beta^2 x^2). \qquad (1.48)$$

Три члена в формуле (1. 48) соответствуют значениям трех интегралов (1. 47). В последнем интеграле пренебрегли членами порядка $(kx)^{-4}$ и выше. Выражение для J_1 получим, выполняя операции, указанные в формуле (1. 45) над $\hat{J}$. Оставляя в окончательном результате только члены порядка $(kx)^{-1}$, найдем:

$$J_1 \approx Re\, 4ikx^{-4}(k^2 + \beta^2)^{-1}(3 + 3i\beta x - \beta^2 x^2)e^{i\beta x}. \qquad (1.49)$$

Будем считать, что токи смещения в среде на низких частотах малы по сравнению с токами проводимости, то есть $\sigma \gg \varepsilon_2\omega$.

При этом $k \approx \frac{\varkappa}{1-i}$, где $\varkappa = (2\sigma\mu\omega)^{\frac{1}{2}}$. Если такое приближение справедливо, то $\beta^2 \ll |k^2|$. Приняв $\alpha = \beta x = 2\beta h$, получим:

$$J_1 \approx 4\varkappa^{-1}x^{-4}[(3 - 3\alpha - \alpha^2)\cos\alpha +$$

$$+ (3 + 3\alpha - \alpha^2)\sin\alpha]. \qquad (1.50)$$

Полное эффективное сопротивление излучения магнитного диполя R определим соотношением:

$$R = \frac{2W}{I^2}. \qquad (1.51)$$

Из предыдущих результатов

$$R = \frac{\mu\omega\pi a^4}{4}(r_0 - r_0' + r_1), \qquad (1.52)$$

где

$$r_0 = \frac{2\alpha^3}{3x^3}, \quad r_0' = 2x^{-3}(\sin\alpha - \alpha\cos\alpha),$$

$$r_1 = 4\varkappa^{-1}x^{-4}[(3 - 3\alpha - \alpha^2)\cos\alpha + (3 + 3\alpha - \alpha^2)\sin\alpha].$$

Для более удобного анализа формулы (1. 52) введем величину γ, которая равна отношению сопротивления излучения при наличии проводящего полупространства к сопротивлению излучения в диэлектрике:

$$\gamma = \frac{1}{r_0}(r_0 - r_0' + r_1). \qquad (1.53)$$

Отношение γ изображено на рис. 3 в зависимости от $\frac{h}{\Lambda}$, где Λ — длина волны в воздухе, определяемая из соотношения $\Lambda = \frac{2\pi}{\beta}$.

Графики построены для трех значений $\delta = \frac{\beta}{\varkappa} = \left(\frac{\varepsilon_1\omega}{2\sigma}\right)^{\frac{1}{2}}$.

Из этих графиков следует, что действие земли заметно изменяет сопротивление излучения на высотах, меньших 0,6 длины волны в воздухе. Можно ожидать, что сопротивление излучения ет равно нулю, если высота диполя равна нулю, а среда представляет собой идеальный проводник. Однако для среды конечной проводимости сопротивление излучения становится очень большим уже при малых высотах. Когда h стремится к нулю, отношение γ стремится к бесконечности как $18\frac{\delta}{\alpha^4}$. То есть на

очень малых высотах энергия, поглощаемая средой, во много раз больше, чем энергия, излучаемая тем же самым диполем, когда он приподнят на высоту, большую, чем длина волны.

Можно получить более точное решение для малых высот, положив с самого начала, что токи смещения в воздухе равны нулю. Последнее справедливо, когда характерные для данной задачи размеры намного меньше, чем длина волны в воздухе. Этот эффект учитывается тем, что волновое число в воздухе β

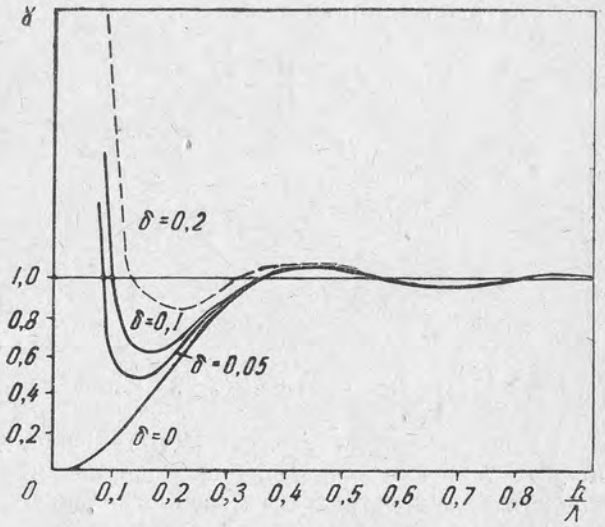


Рис. 3. Графики функции γ.

приравнивается нулю. В таком приближении для сопротивления излучения R по предыдущему определению можно записать:

$$R = \frac{1}{4} Re\, i\, \mu\omega\pi\, a^4 L, \tag{1.54}$$

где

$$L = \int_0^\infty \lambda^2 \left[\frac{\lambda - (\lambda^2 + k^2)^{\frac{1}{2}}}{\lambda + (\lambda^2 + k^2)^{\frac{1}{2}}} \right] e^{-x\lambda} d\lambda \tag{1.55}$$

и $x = 2h$. Выражение (1.55) можно переписать следующим образом:

$$L = \frac{1}{k^2} \left[\int_0^\infty 2\lambda^3 (\lambda^2 + k^2)^{\frac{1}{2}} e^{-x\lambda} d\lambda - \right.$$

$$\left. - \int_0^\infty \lambda^2 (2\lambda^2 + k^2) e^{-x\lambda} d\lambda \right]. \tag{1.56}$$

Интегралы (1.56) можно записать как производные по x от двух менее сложных интегралов:

$$L = -\frac{2}{k^2} \left[\frac{\partial^3}{\partial x^3} \int_0^\infty (\lambda^2 + k^2)^{\frac{1}{2}} e^{-x\lambda} d\lambda + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{k^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^4}{\partial x^4} \right) \int_0^\infty e^{-x\lambda} d\lambda \right]. \tag{1.57}$$

Воспользуемся интегралом, который дается у Ватсона (1949, § 10. 41):

$$\int_0^\infty (1 + g^2)^{\frac{1}{2}} e^{-\alpha g} dg = \frac{\pi}{2\alpha} [\mathbf{H}_1(\alpha) - Y_1(\alpha)], \tag{1.58}$$

где $\mathbf{H}_1(\alpha)$ — функция Струве, $Y_1(\alpha)$ — функция Бесселя второго рода.

Применяя (1.58), найдем:

$$L = -\frac{2}{x^3} \left[1 + \frac{24}{\alpha^2} + \alpha^3 \frac{\partial^3 T(\alpha)}{\partial \alpha^3} \right], \tag{1.59}$$

где

$$T(\alpha) = \frac{\pi}{2\alpha} [\mathbf{H}_1(\alpha) - Y_1(\alpha)]$$

и $\alpha = kx$. Подставляя в (1.59) асимптотическое выражение для $T(\alpha)$, получим:

$$L = -\frac{2}{x^3} \left[1 + \right.$$

$$\left. + \frac{24}{\alpha^2} \sum_{n=0}^{\nu-1} \frac{(2n+1)(2n+2)(2n+3)\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) 2^{2n-1}}{\Gamma\left(\frac{3}{2} - n\right) \alpha^{2n+1}} + R_\nu \right], \tag{1.60}$$

где остаточный член R_ν имеет порядок $\alpha^{-2\nu}$. Тогда формула для сопротивления излучения будет выглядеть следующим образом:

$$R = \frac{3\mu\omega\pi a^4}{16h^3} \left[\frac{1}{\varkappa h} - \frac{4}{(\varkappa h)^2} + \frac{5}{(\varkappa h)^3} - R_4 \right]. \tag{1.61}$$

где остаточный член R_4 имеет порядок $(\varkappa h)^{-4}$, а $\varkappa = (2\sigma\mu\omega)^{\frac{1}{2}}$. То, что R имеет порядок $(\varkappa h)^{-1}$ находится в соответствии с формулой (1.52) для случая, когда $\beta h \ll 1$.

§ 2. Горизонтальный диполь

1. Вертикальное магнитное поле (*Уэйт, 1953*). Рассмотрим горизонтальный магнитный диполь над проводящим полупространством $z < 0$ и вычислим составляющую H_z на поверхности полупространства. В пункте 1, § 1 отмечалось, что физическим аналогом магнитного диполя является небольшая рамка. Пусть поверхность проводящей среды совпадает с плоскостью $z = 0$. Ось рамки ориентируем в направлении оси $0y$. Общая постановка задачи соответствует изложенной в пункте 1, § 1. В ходе решения пренебрегаем токами смещения.

Рассмотрим магнитный вектор-потенциал $\boldsymbol{F}$, который связан с электрическим и магнитным полем соотношениями:

$$\boldsymbol{E} = -\operatorname{rot} \boldsymbol{F}$$

$$i\mu\omega \boldsymbol{H} = -k_j^2 \boldsymbol{F} + \operatorname{grad}\operatorname{div} \boldsymbol{F}, \tag{2. 1}$$

где $k_j^2 = i\sigma\mu\omega - \varepsilon\mu\omega^2$, $j = 0$ для воздуха, $j = 1$ для проводящей среды. По Зоммерфельду (1926) составляющие вектора $\boldsymbol{F}$ в воздухе имеют следующий вид:

$$\left.\begin{aligned} F_{0x} &= 0, \\ F_{0y} &= 2M \int_0^\infty \frac{k_1^2}{u_0 k_1^2 + u_1 k_0^2} e^{-u_0 z} J_0(\varrho\lambda)\, \lambda\, d\lambda, \\ F_{0z} &= 2M \frac{\partial}{\partial y} \int_0^\infty \frac{k_1^2 - k_0^2}{(u_1 + u_0)(u_0 k_1^2 + u_1 k_0^2)} e^{-u_0 z} J_0(\varrho\lambda)\, \lambda\, d\lambda, \end{aligned}\right\} \tag{2. 2}$$

где $M = \dfrac{i\mu_0\omega I dS}{4\pi}$

и

$$u_1 = (\lambda^2 + k_1^2)^{\frac{1}{2}}, \quad u_0 = (\lambda^2 + k_0^2)^{\frac{1}{2}} \text{ и } \varrho^2 = x^2 + y^2. \ *$$

Для дивергенции $\boldsymbol{F}_0$ получим:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{F}_0 = 2M \frac{\partial}{\partial y} \int_0^\infty \frac{k_1^2 u_1 + k_0^2 u_0}{(u_1 + u_0)(u_0 k_1^2 + u_1 k_0^2)} e^{-u_0 z}\, \lambda J_0(\varrho\lambda)\, p\lambda. \tag{2. 3}$$

Дивергенция $\boldsymbol{F}_0$ определяет магнитный потенциал Φ в воздухе, причем k_0 принимается равным нулю, а индекс *1* опускается:

$$\Phi = -\operatorname{div} \boldsymbol{F}_0 = -2M \frac{\partial}{\partial y} \int_0^\infty u(\lambda + u)^{-1} e^{-z\lambda} J_0(\varrho\lambda)\, d\lambda. \tag{2. 4}$$

---

* Вывод формул (2. 2) можно найти у Франка и Мизеса (1937, стр. 965). *А. В., Г. Ф.*

Выражение для вертикальной составляющей H_z магнитного поля на поверхности проводящей среды будет равно:

$$i\mu\omega H_z = 2M \frac{\partial^2}{\partial y\, \partial z} \int_0^\infty e^{-z\lambda} u(\lambda + u)^{-1} J_0(\varrho\lambda)\, d\lambda. \tag{2. 5}$$

Когда $z = 0$, (2. 5) можно переписать следующим образом:

$$i\mu\omega H_z = -M \frac{\partial}{\partial y} \int_0^\infty (u - \lambda)(u + \lambda)^{-1} J_0(\varrho\lambda)\, \lambda\, d\lambda. \tag{2. 6}$$

Здесь используется тождество $\int_0^\infty \lambda J_0(\varrho\lambda)\, d\lambda = 0$, которое является частным случаем формулы (6), приводимой у Ватсона (1949, стр. 422). Применяя формулу (7) с этой же страницы, представим произведение $(u - \lambda)(u + \lambda)^{-1}$ в виде интеграла, тогда для уравнения (2. 6) получим:

$$i\mu\omega H_z = -2M \frac{\partial}{\partial y} \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\lambda t} J_2(kt)\, t^{-1} \lambda J_0(\varrho\lambda)\, dt d\lambda. \tag{2. 7}$$

Интегрирование по λ можно выполнить с помощью интеграла Липшица (Ватсон, 1949, стр. 420):

$$\int_0^\infty e^{-a\lambda} J_0(b\lambda)\, d\lambda = (a^2 + b^2)^{-\frac{1}{2}}. \tag{2. 8}$$

Дифференцируя (2. 8) под знаком интеграла по a, найдем:

$$\int_0^\infty \lambda e^{-a\lambda} J_0(b\lambda)\, d\lambda = a(a^2 + b^2)^{-\frac{3}{2}}. \tag{2. 9}$$

Применяя (2. 9), перепишем выражение (2. 7) для H_z:

$$i\mu\omega H_z = 2M \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{\varrho} \frac{\partial}{\partial \varrho} \int_0^\infty \frac{J_2(kt)\, dt}{(t^2 + \varrho^2)^{\frac{1}{2}}}. \tag{2. 10}$$

Интеграл из (2. 10) приведен на стр. 30. Используя полученный там результат, найдем:

$$i\mu\omega H_z = \frac{2My}{\varrho} \frac{\partial}{\partial \varrho} \frac{1}{\varrho} \frac{\partial}{\partial \varrho} \left[I_1\left(\frac{k\varrho}{2}\right) K_1\left(\frac{k\varrho}{2}\right) \right]. \tag{2. 11}$$

Дифференцируя (2. 11) с помощью рекуррентных соотношений между функциями Бесселя (Ватсон, 1949, стр. 95), получим:

$$\begin{aligned} i\mu\omega H_z = \frac{My}{\varrho^4} [&k^2 \varrho^2 (I_1 K_1 - I_0 K_0) + \\ &+ 4k\varrho (I_1 K_0 - I_0 K_1) + 16 I_1 K_1], \end{aligned} \tag{2. 12}$$

где аргумент бесселевых функций везде равен $\dfrac{k\varrho}{2}$.

Формула для вертикальной составляющей (2. 12) сходна с выражением (1. 22) для радиальной (горизонтальной) составляющей поля вертикального магнитного диполя. Применяя теорему взаимности, формулу (2. 12) можно получить непосредственно из результатов Гордона.

2. Горизонтальное магнитное поле (*Уэйт, 1953*). Составляющие тангенциального магнитного поля у поверхности земли могут быть записаны в виде:

$$i\mu\omega H_x = -\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \tag{2. 13}$$

$$i\mu\omega H_y = -\frac{\partial \Phi}{\partial y}, \tag{2. 14}$$

где Φ определяется формулой (2. 4). В нашем случае функция Φ вычисляется на поверхности земли ($z = 0$) и обозначается через Φ_0:

$$\Phi_0 = \frac{2My}{\varrho}\int_0^\infty \lambda u (\lambda + u)^{-1} J_1(\varrho\lambda)\, d\lambda \tag{2. 15}$$

или, так как $u^2 - \lambda^2 = k^2$,

$$\Phi_0 = \frac{2My}{k^2\varrho}\int_0^\infty \lambda u (u - \lambda) J_1(\varrho\lambda)\, d\lambda. \tag{2. 16}$$

Это выражение можно представить в виде трех интегралов:

$$\Phi_0 = \frac{2My}{k^2\varrho}\left[\int_0^\infty \lambda^3 J_1(\varrho\lambda)\, d\lambda + \right.$$

$$\left. + k^2\int_0^\infty \lambda J_1(\varrho\lambda)\, d\lambda - \int_0^\infty \lambda^2 u J_1(\varrho\lambda)\, d\lambda\right]. \tag{2. 17}$$

Первый и второй интегралы вычислим, применяя интеграл Липшица (2. 8):

$$\int_0^\infty e^{-z\lambda} J_0(\varrho\lambda)\, d\lambda = (\varrho^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}}, \tag{2. 18}$$

Дифференцируя (2. 18) сначала по ϱ, затем дважды по z, после подстановки $z = 0$ получим первый интеграл из (2.17). Второй интеграл находится после одного дифференцирования по ϱ и подстановки $z = 0$. Третий интеграл в уравнении (2. 17) получается из формулы Зоммерфельда *:

$$\int_0^\infty \lambda e^{-uz} u^{-1} J_0(\varrho\lambda)\, d\lambda = \frac{e^{-kr}}{r}, (z \geqslant 0), \tag{2. 19}$$

* Вывод формулы (2. 19) можно найти у Франка и Мизеса (1937, стр. 940). *А. В., Г. Ф.*

где $r = (\varrho^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}$. Дифференцируя (2. 19) сначала по ϱ, затем дважды по z и делая подстановку $z = 0$, вычислим третий интеграл. Тогда выражение для Φ_0 будет следующим:

$$\Phi_0 = \frac{2My}{k^2\varrho}\left[\frac{\partial^3}{\partial\varrho\,\partial z^2}\,\frac{e^{-k\varrho}-1}{r} - k^2\frac{\partial}{\partial r}\,\frac{1}{r}\right]_{z=0}. \tag{2. 20}$$

После дифференцирования получим:

$$\Phi_0 = \frac{2My}{k^2\varrho^5}\left[(3 + 3k\varrho + k^2\varrho^2)\, e^{-k\varrho} - 3 + k^2\varrho^2\right]. \tag{2. 21}$$

При малых значениях $|k\varrho|$ магнитный потенциал стремится к $\frac{My}{\varrho^3}$, тогда как при больших значениях $|k\varrho|$ он достигает значения $\frac{2My}{\varrho^3}$. Это находится в соответствии с существующей теорией отражений на границе между проводящей средой и изолятором. Составляющие магнитного поля H_x и H_y на поверхности земли находятся дифференцированием Φ_0 по x и y:

$$i\mu\omega H_x = -M\hat{N}xy\varrho^{-3} + M\frac{\partial\hat{N}}{\partial\varrho}\,xy\varrho^{-2},$$

$$i\mu\omega H_y = M\hat{N}x^2\varrho^{-3} + M\frac{\partial\hat{N}}{\partial\varrho}\,y^2\varrho^{-2}, \tag{2. 22}$$

где

$$\hat{N} = -2k^{-2}\varrho^{-4}\left[(k^2\varrho^2 + 3k\varrho + 3)\, e^{-k\varrho} + k^2\varrho^2 - 3\right]$$

и

$$\frac{\partial\hat{N}}{\partial\varrho} = 2k^{-2}\varrho^{-5}\left[(k^3\varrho^3 + 5k^2\varrho^2 + 12k\varrho + 12)\, e^{-k\varrho} - \right.$$

$$\left. - 12 + 2k^2\varrho^2\right].$$

3. Поле диполя, погруженного в проводящее полупространство (*Уэйт, Кэмпбелл, 1952*).

Ось диполя ориентирована в направлении, параллельном поверхности раздела. Координатная система изображена на рис. 4. Поглощающая среда с проводимостью σ и диэлектрической постоянной ε занимает полупространство $z > 0$. Верхнее полупространство занято изолятором с диэлектрической постоянной ε_0. Магнитный диполь расположен на оси Oz в точке $z = h$ и ориентирован в направлении оси Oy. Магнитная проницаемость всего пространства равна μ. Решение проводится в системе MKS.

Уэйт (1952b) рассмотрел поле магнитного диполя, помещенного в проводящую среду и отделенного от нее изолятором. Известно, что поле такого диполя не зависит от свойств изолятора, если диаметр рамки намного меньше длины волны в проводящей среде. Считается, что это ограничение выполняется и при настоящем решении.

Векторы электрического и магнитного полей $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$, меняющиеся в зависимости от времени как $e^{i\omega t}$, можно выразить через магнитный вектор-потенциал $\boldsymbol{F}$:

$$\boldsymbol{E} = -\operatorname{rot}\boldsymbol{F}, \tag{2. 23}$$

$$i\mu\omega\boldsymbol{H} = -k^2\boldsymbol{F} + \operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{F}, \tag{2. 24}$$

где $k^2 = i\sigma\mu\omega - \varepsilon\mu\omega^2$ — для проводящей среды, и $k_0^2 = -\varepsilon_0\mu\omega^2$ для диэлектрика. В силу симметрии относительно плоскости

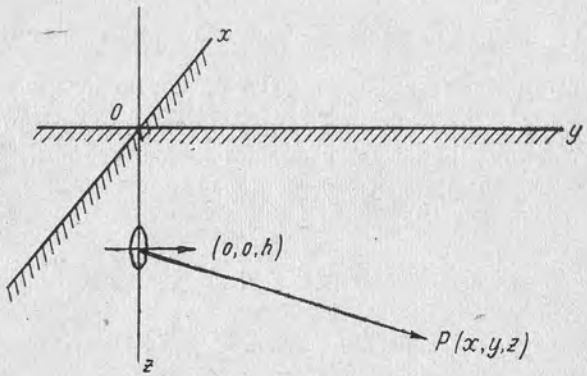


Рис. 4.

$x = 0$, компонента вектор-потенциала F_x равна нулю. Остальные компоненты вектор-потенциала связаны с составляющими напряженности поля следующими соотношениями:

$$E_x = \frac{\partial F_y}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial y}, \tag{2. 25}$$

$$E_y = \frac{\partial F_z}{\partial x}, \tag{2. 26}$$

$$E_z = -\frac{\partial F_y}{\partial x}, \tag{2. 27}$$

$$i\mu\omega H_x = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}\right), \tag{2. 28}$$

$$i\mu\omega H_y = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}\right) - k^2F_y, \tag{2. 29}$$

$$i\mu\omega H_z = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}\right) - k^2F_z \tag{2. 30}$$

На поверхности раздела тангенциальные компоненты поля E_x, E_y, H_x и H_y должны быть непрерывны. Из уравнений (2. 25),

(2. 26), (2. 28) и (2. 29) получаются четыре условия, которые должны выполняться, когда $z = 0$:

$$F_{0z} = F_z, \tag{2. 31}$$

$$\frac{\partial F_{0y}}{\partial y} + \frac{\partial F_{0z}}{\partial z} = \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}, \tag{2. 32}$$

$$k_0^2F_{0y} = k^2F_y, \tag{2. 33}$$

$$\frac{\partial F_{0y}}{\partial z} = \frac{\partial F_y}{\partial z}. \tag{2. 34}$$

Вектор-потенциал является таким решением волнового уравнения, которое конечно на бесконечности и имеет симметрию относительно плоскости $x = 0$. Частное решение для вектор-потенциала записывается в виде цилиндрической волновой функции $e^{\pm uz} J_n(\varrho\lambda)\cos n\phi$, где $u = (\lambda^2 + k^2)^{\frac{1}{2}}$, $\varrho = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}$ и $\phi = \operatorname{arctg}\frac{x}{y}$. Общее решение находится путем суперпозиции всех частных решений. При этом должны выполняться все граничные условия и сохраняться особенности поля вблизи источника. Первичное поле магнитного диполя связано с вектор-потенциалом $F_п$, который имеет составляющую только в направлении оси Oy:

$$F_{пy} = M\frac{e^{-hR_1}}{R_1}, \tag{2. 35}$$

где $R_1 = [\varrho^2 + (z-h)^2]^{\frac{1}{2}}$. Можно представить $F_{пy}$ в форме волновой цилиндрической функции:

$$F_{пy} = M\int_0^\infty \lambda u^{-1} e^{\pm(z-h)u} J_0(\varrho\lambda)\,d\lambda, \tag{2. 36}$$

где знак «плюс» в экспоненте берется при $z < h$, знак «минус» выбирается, когда $z > h$, $u = (\lambda^2 + k^2)^{\frac{1}{2}}$, $M = i\mu\omega I\frac{dS}{4\pi}$. Тогда общие решения для функций F_y и F_z будут иметь следующий вид:

$$F_{0y} = \int_0^\infty f_0(\lambda)e^{zu_0}\lambda J_0(\varrho\lambda)\,d\lambda, \quad (z < 0), \tag{2. 37}$$

$$F_y = \int_0^\infty [Me^{(z-h)u}u^{-1} + f(\lambda)e^{-zu}]\lambda J_0(\varrho\lambda)\,d\lambda, \quad (z > 0), \tag{2. 38}$$

$$F_{0z} = -\int_0^\infty \psi_0(\lambda)e^{zu_0}\lambda^2 J_1(\varrho\lambda)\,d\lambda\cos\phi, \quad (z < 0), \tag{2. 39}$$

$$F_z = -\int_0^\infty \psi(\lambda)e^{-zu}\lambda^2 J_1(\varrho\lambda)\,d\lambda\cos\phi, \quad (z > 0), \tag{2. 40}$$

где $u_0 = (\lambda^2 + k_0^2)^{\frac{1}{2}}$. Из граничных условий (2. 31) — (2. 34) и значений F_y и F_z (2. 37) — (2. 40) определяются функции $f_0(\lambda)$, $f(\lambda)$, $\psi_0(\lambda)$ и $\psi(\lambda)$:

$$f(\lambda) = M \frac{(k_0^2 u - k^2 u_0)\, e^{-hu}}{(k_0^2 u + k^2 u_0) u}, \tag{2. 41}$$

$$f_0(\lambda) = M \frac{2k_0^2 e^{-hu}}{k_0^2 u + u_0 k^2} \tag{2. 42}$$

и

$$\psi_0(\lambda) = \psi(\lambda) = M \frac{2(k_0^2 - k^2)\, e^{-hu}}{(k_0^2 u + k^2 u_0)(u_0 + u)}. \tag{2. 43}$$

Подставляя функции (2. 41), (2, 42) и (2. 43) в (2. 37), (2. 38), (2. 39) и (2. 40), получим окончательные выражения для общих решений.

Вычисляя интегралы, входящие в выражения F_y и F_z, будем считать, что токи смещения в диэлектрике незначительны по сравнению с суммарным током проводимости и смещения в проводящей среде. Это эквивалентно допущению $k_0 = 0$, что справедливо, когда характерные размеры, заданные условиями задачи, меньше длины волны в диэлектрике. Тогда

$$F_y = M \int_0^\infty (e^{-|z-h|u} - e^{-|z+h|u})\, u^{-1} \lambda J_0(\varrho\lambda)\, d\lambda \tag{2. 44}$$

и

$$F_z = -M \frac{\partial}{\partial y} \int_0^\infty 2(u+\lambda)^{-1} e^{-(z+h)u} J_0(\varrho\lambda)\, d\lambda. \tag{2. 45}$$

Для дивергенции Φ вектор-потенциала $\boldsymbol{F}$ в проводящей среде найдем:

$$\Phi = \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} = 2M \frac{\partial}{\partial y} \int_0^\infty \frac{u}{\lambda + u} e^{-(z+h)u} J_0(\varrho\lambda)\, d\lambda +$$

$$+ M \frac{\partial}{\partial y} \int_0^\infty [e^{-|z-h|u} - e^{-(z+h)u}]\, u^{-1} J_0(\varrho\lambda)\, \lambda\, d\lambda. \tag{2. 46}$$

Интегралы в этих выражениях можно выразить через интегралы Зоммерфельда и Фостера:

$$P(g, \varrho) = \int_0^\infty e^{-gu} J_0(\varrho\lambda)\, u^{-1} \lambda\, d\lambda =$$

$$= e^{-k(g^2+\varrho^2)^{\frac{1}{2}}} (g^2 + \varrho^2)^{-\frac{1}{2}} \tag{2. 47}$$

и

$$N(g, \varrho) = \int_0^\infty e^{-gu} J_0(\varrho\lambda)\, u^{-1}\, d\lambda =$$

$$= I_0\left[\frac{k(g^2+\varrho^2)^{\frac{1}{2}} - kg}{2}\right] K_0\left[\frac{k(g^2+\varrho^2)^{\frac{1}{2}} + kg}{2}\right], \tag{2. 48}$$

где $g > 0$, I_0 и K_0 — функции Бесселя мнимого аргумента.

Тогда

$$F_y = M[P(|z-h|, \varrho) - P(z+h, \varrho)], \tag{2. 49}$$

$$F_z = -\frac{2M}{k^2}\left[\frac{\partial^3 N(z+h, \varrho)}{\partial y \partial z^2} + \frac{\partial^2 P(z+h, \varrho)}{\partial y \partial z}\right] \tag{2.50}$$

и

$$\Phi = M\left[\frac{\partial P(|z-h|, \varrho)}{\partial y} - \frac{\partial P(z+h, \varrho)}{\partial y \partial z} -\right.$$

$$\left. - \frac{2}{k^2} \frac{\partial^4 N(z+h, \varrho)}{\partial y \partial z^3} - \frac{2}{k^2} \frac{\partial^3 P(z+h, \varrho)}{\partial y \partial z^2}\right]. \tag{2. 51}$$

Компоненты магнитного поля в проводящей среде

$$i\mu\omega H_x = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \tag{2. 52}$$

$$i\mu\omega H_y = \frac{\partial \Phi}{\partial y} - k^2 F_y, \tag{2. 53}$$

$$i\mu\omega H_z = \frac{\partial \Phi}{\partial z} - k^2 F_z. \tag{2. 54}$$

С помощью уравнений (2. 52), (2. 53), (2. 54) компоненты магнитного поля выражаются через табулированные функции, входящие в дифференциальные соотношения (2. 49), (2. 50), (2. 51). Вычисление производных от бесселевых функций можно провести, воспользовавшись известными рекуррентными соотношениями:

$$\left(\frac{1}{\alpha} \frac{d}{d\alpha}\right)^m \left[\frac{I_n(\alpha)}{\alpha}\right] = \frac{I_{n+m}(\alpha)}{\alpha^{n+m}}, \tag{2. 55}$$

$$\left(\frac{1}{\alpha} \frac{d}{d\alpha}\right)^m \left[\frac{K_n(\alpha)}{\alpha}\right] = \frac{(-1)^m K_{n+m}(\alpha)}{\alpha^{n+m}}. \tag{2. 56}$$

После дифференцирования получим следующие выражения для компонент поля:

$$\frac{i\mu\omega H_x}{M} = xyR_1^{-5}e^{-R_1^*}(3+3R_1^*+R_1^{*2}) +$$
$$+ xyR_2^{-5}R_2^{*-2}e^{-R_2^*}[(30+30R_2^*+9R_2^{*2}-R_2^{*3}-R_2^{*4}) -$$
$$-2g^2(105+105R^*{}_2+45R_2^{*2}+10R_2^{*3}+R_2^{*4})] -$$
$$- xy\varrho^{-2}R_2^{-3}\{g[R_2^*(3-13g^2+10g^4)+15-120g^2+105g^4]\times$$
$$\times I_0K_0+R_2^*[p+s+R_2^{*-2}(1+g)v-R_2^{*2}g^3(1-g^2)]I_0K_1+$$
$$+R_2^*[p-s+R_2^{*-2}(1-g)v+R_2^{*2}g^3(1-g^2)]I_1K_0+$$
$$+g[R_2^{*2}(-3+15g^2-10g^4)-81+190g^2-105g^4]I_1K_1\}, \quad (2.57)$$

$$\frac{i\mu\omega H_y}{M} = e^{-R_1^*}R_1^{-3}[y^2R_1^{-2}(3+3R_1^*+R_1^{*2})-(1+R_1^*+R_1^{*2})] +$$
$$+e^{-R_2^*}R_2^{*-2}R_2^{-3}[(R_2^{*4}+R_2^{*3}-R_2^{*2}-6R_2^*-6)+$$
$$+y^2R_2^{-2}(30+30R_2^*+9R_2^{*2}-R_2^{*3}-R_2^{*4})+2g^2(15+15R_2^*+$$
$$+6R_2^{*2}+R_2^{*3})-2y^2R_2^{-2}g^2(105+105R_2^*+45R_2^{*2}+10R_2^{*3}+$$
$$+R_2^{*4})]+R_2^{-3}\{g[y^2\varrho^{-2}c+lx^2\varrho^{-2}-R_2^{*2}y^2\varrho^{-2}(3-12g^2+$$
$$+10g^4)-R_2^{*2}g^2x^2\varrho^{-2}]I_0K_0+R_2^*[(a+b)y^2\varrho^{-2}+(d+f)x^2\varrho^{-2}+$$
$$+(1+g)cy^2R_2^{*-2}\varrho^{-2}+(1+g)lx^2R_2^{*-2}\varrho^{-2}+k^2y^2g^3]I_0K_1+$$
$$+R_2^*[(a-b)y^2\varrho^{-2}+(d-f)x^2\varrho^{-2}+(1-g)cy^2R_2^{*-2}\varrho^{-2}+$$
$$+(1-g)lx^2R_2^{*-2}\varrho^{-2}-k^2y^2g^3]I_1K_0+$$
$$+g[y^2\varrho^{-2}(56-70g^2-c)-x^2\varrho^{-2}(10+l)+$$
$$+R_2^{*2}y^2\varrho^{-2}(3-14g^2+10g^4)+R_2^{*2}g^2x^2\varrho^{-2}]I_1K_1\}, \quad (2.58)$$

где

$$\varrho^2=x^2+y^2,\quad R_1=[\varrho^2+(z-h)^2]^{\frac{1}{2}},\quad R_2=[\varrho^2+(z+h)^2]^{\frac{1}{2}},$$
$$R_1^*=kR_1,\quad R_2^*=kR_2,\quad g=(z+h)R_2^{-1},\quad a=2+5g^2-10g^4,$$
$$b=-18g+61g^3-45g^5,\quad c=-12+105g^2-105g^4,$$
$$d=-1-g^2,\ f=3g-6g^3,\ l=3-15g^2,\ p=-3-6g^2+10g^4,$$
$$s=21g-67g^3+45g^5,\quad v=15-120g^2+105g^4,$$
$$I_0=I_0\left[\frac{R_2^*}{2}(1-g)\right],\quad I_1=I_1\left[\frac{R_2^*}{2}(1-g)\right],$$
$$K_0=K_0\left[\frac{R_2^*}{2}(1+g)\right],\quad K_1=K_1\left[\frac{R_2^*}{2}(1+g)\right]. \quad (2.59)$$

Рассмотрим случай, когда генераторная и приемная рамки находятся на одном уровне ниже поверхности раздела, причем

глубина погружения рамок мала по сравнению с расстоянием между ними. Когда $|k\varrho| \gg 1$, а z и $h \ll \varrho$,

$$i\mu\omega H_x \approx 2M\varrho^{-3}(3\cos\phi\sin\phi)e^{-(h+z)k}, \quad (2.60)$$

$$i\mu\omega H_y \approx 2M\varrho^{-3}(2\cos^2\phi-\sin^2\phi)e^{-(h+z)k}, \quad (2.61)$$

где сохранен только первый член асимптотического разложения для каждой функции Бесселя. Из (2.60) и (2.61) следует, что затухание напряженности поля определяется только приведенным расстоянием $k(h+z)$ между наблюдателем и отражением источника относительно граничной поверхности*.

Найдем формулы напряженности поля для небольших значений $|k\varrho|$. Когда $|kh|$ мало и $h=z$, можно приближенно вычислить H_y, воспользовавшись первыми двумя членами ряда Маклорена:

$$H_y(kh) \approx H_y(0) + kh\left[\frac{\partial H_y(kh)}{\partial(kh)}\right]_{kh=0}, \quad (2.62)$$

где второй член представляет собой поправку первого порядка за удаление источника и наблюдателя на расстояние h от границы раздела. Тогда при наблюдениях на оси диполя ($x=0$, $z=h$):

$$H_y = \frac{2M}{i\mu\omega\varrho^3}A(kh) \quad (2.63)$$

и, если наблюдения проводятся по линии, перпендикулярной оси диполя ($y=0$, $z=h$),

$$H_y = -\frac{2M}{i\mu\omega\varrho^3}B(kh), \quad (2.64)$$

где

$$A(kh) = A(0) - khA', \quad (2.65)$$
$$B(kh) = B(0) - khB', \quad (2.66)$$
$$A(0) = \frac{e^{-k\varrho}}{k^2\varrho^2}(12+12k\varrho+5k^2\varrho^2+k^3\varrho^3)+2-\frac{12}{k^2\varrho^2}, \quad (2.67)$$
$$B(0) = \frac{e^{-k\varrho}}{k^2\varrho^2}(3+3k\varrho+k^2\varrho^2)+1-\frac{3}{k^2\varrho^2}, \quad (2.68)$$
$$A' = \frac{1}{k\varrho}[5k^2\varrho^2I_0K_0+20k\varrho I_0K_1-20k\varrho I_1K_0-$$
$$-(80+k^2\varrho^2)I_1K_1], \quad (2.69)$$
$$B' = \frac{1}{k\varrho}[k^2\varrho^2I_0K_0+4k\varrho I_0K_1-4k\varrho I_1K_0-$$
$$-(16-k^2\varrho^2)I_1K_1]. \quad (2.70)$$

---

* Полученный Уэйтом и Кэмпбеллом результат характерен для волновой зоны электромагнитного поля. Возбуждение, пройдя от источника до поверхности раздела, затухает на приведенном расстоянии kh. Далее оно распространяется в воздухе без затухания и, дойдя до точки с координатами ϱ, $z=0$, уходит в глубь проводящей среды в виде почти плоской волны, которая затухает на приведенном расстоянии kz. Затухание имеет место только на двух вертикальных участках пути: от $z=h$ до $z=0$ и от $z=0$ до $z=z$. *Ред.*

Аргумент функций Бесселя I_n и K_n в этих выражениях равен $\frac{k\varrho}{2}$. При больших значениях $|k\varrho|$ находим, что $A' \approx 4$ и $B' \approx 2$. Это приближение для значений $|kh|$ до 0,2 с точностью до 2,5% находится в соответствии с выражением H_y, определяемым по формуле (2. 61).

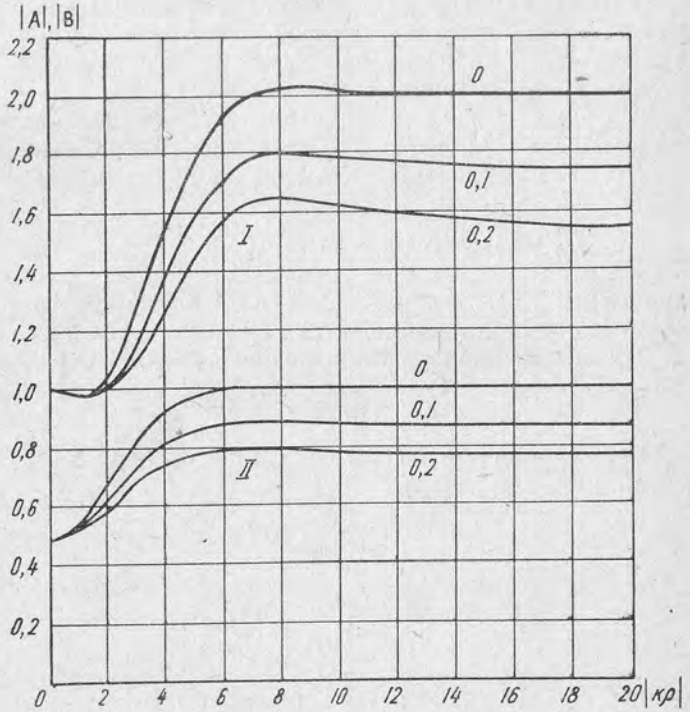


Рис. 5. Графики функций $|A|$ и $|B|$ в зависимости от $|k\varrho|$.
I — графики $|A|$ для случая, когда H_y наблюдается на оси диполя ($z = h$, $x = 0$); II — графики $|B|$ для случая, когда H_y наблюдается по линии, перпендикулярной оси диполя ($z = h$, $y = 0$); шифр кривых $|kh|$.

На рис. 5 представлены графики функций $|A(kh)|$ и $|B(kh)|$, которые характеризуют амплитуду магнитного поля, параллельного оси диполя. При вычислении функций $|A(kh)|$ и $|B(kh)|$ принято, что токами смещения в проводящей среде можно пренебречь и поэтому $k^2 = i\mu\omega(\sigma + i\omega\varepsilon) \approx i\sigma\mu\omega$. В этом случае аргумент бесселевых функций будет пропорционален $i^{\frac{1}{2}}$. Такие функции подробно табулированы.

В случае $h = 0$, формулы для тангенциальных полей H_x и

H_y на поверхности раздела принимают простой вид ($z = h = 0$):

$$i\mu\omega H_x = \frac{\partial \Phi_0}{\partial x} \tag{2.71}$$

и

$$i\mu\omega H_y = \frac{\partial \Phi_0}{\partial y}, \tag{2.72}$$

где

$$\Phi_0 = -\frac{2My}{k^2\varrho^5}\left[(3 + 3k\varrho + k^2\varrho^2)e^{-k\varrho} + k^2\varrho^2 - 3\right], \tag{2.73}$$

что соответствует результатам, полученным в пункте 2, § 2.

Когда наблюдения поля проводятся на оси Oz, магнитное поле вычисляется из общей формулы для H_y при $\varrho = 0$. Если

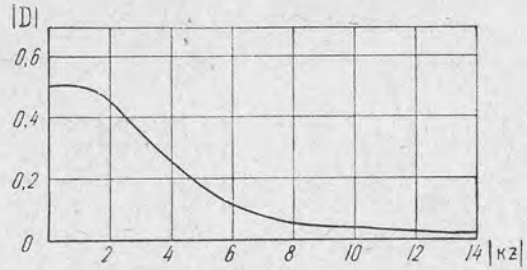


Рис. 6. Графики функции $|D|$ в зависимости от $|kz|$ при $h = 0$, $x = y = 0$.

при этом диполь расположен на поверхности раздела ($h = 0$), а точка наблюдения находится в проводящем полупространстве, то

$$H_y = \frac{2M}{i\mu\omega z^3} D, \tag{2.74}$$

где

$$D = \frac{e^{-kz}}{k^2z^2}(12 + 12kz + 5k^2z^2 + k^3z^3) - \\ -\frac{1}{2}\left[(12 + k^2z^2)K_0(kz) + \frac{1}{kz}(24 + 5k^2z^2)K_1(kz)\right]. \tag{2.75}$$

Значения функции D, при вычислении которой токи смещения не учитывались, представлены на рис. 6.

Когда расстояние между рамками совпадает с длиной волны в диэлектрике или превышает ее, условие $|k_0\varrho| \ll 1$ не выполняется. Поэтому приходится снова анализировать общие интегральные выражения. Эта задача очень сложна в случае конечных z и h. Однако если $z = h = 0$ (источник и приемник находятся на поверхности раздела) и если $k \gg k_0$, то из уравнений (2. 37) — (2. 40) можно получить следующие простые формулы:

$$H_{0y} = H_y \approx 2H_{\text{п}\,y}, \tag{2.76}$$

$$H_{0x} = H_x \approx 2H_{\text{п}\,y}. \tag{2.77}$$

Из (2. 76) и (2. 77) следует, что магнитное поле диполя на поверхности раздела диэлектрик — проводник равно удвоенному магнитному полю диполя в отсутствии проводящей среды. Иными словами, к полю диполя — источника добавляется поле диполя, отраженного в поверхности раздела. Последнее обусловлено тем, что при выполнении условия $k \gg k_0$ среда ведет себя как идеальный проводник по отношению к наблюдателю, находящемуся в диэлектрике или на поверхности раздела. Для компонент поля при $z = 0$ можно записать:

$$H_x = H_\varrho \sin\phi + H_\phi \cos\phi, \tag{2. 78}$$

$$H_y = H_\varrho \cos\phi - H_\phi \sin\phi, \tag{2. 79}$$

где

$$H_\varrho = \frac{4M}{i\mu\omega\varrho^3}(1 + k_0\varrho)\, e^{-k_0\varrho}\cos\phi, \tag{2. 80}$$

$$H_\phi = \frac{2M}{i\mu\omega\varrho^3}(1 + k_0\varrho + k_0^2\varrho^2)\, e^{-k_0\varrho}\sin\phi, \tag{2. 81}$$

причем $|H_z| \ll |H_\phi|$ и $|H_\varrho|$. Интересно рассмотреть случай, когда источник и приемник погружены в среду на глубины h и z. Чтобы ввести поправку за погружение, будем считать, что поля убывают в зависимости от глубины так же, как в формулах (2. 60) и (2. 61), где $|k_0\varrho| \ll 1$. Тогда для $\varrho \gg h$ или z получим:

$$H_\varrho = \frac{4M}{i\mu\omega\varrho^3}(1 + k_0\varrho)\, e^{-k_0\varrho}\cos\phi\, e^{-k(z+h)}, \tag{2. 82}$$

$$H_\phi = \frac{2M}{i\mu\omega\varrho^3}(1 + k_0\varrho + k_0^2\varrho^2)\, e^{-k_0\varrho}\sin\phi\, e^{-k(z+h)}, \tag{2. 83}$$

причем $|H_z| \ll |H_\varrho|$ и $|H_\phi|$.

При больших удалениях, когда $|k_0\varrho| \gg 1$, только одна составляющая H_ϕ имеет заметную величину. Для нее будет справедливо выражение:

$$H_\phi \approx \frac{2Mi\varepsilon_0\omega}{\varrho}\, e^{-k_0\varrho}\sin\phi\, e^{-k(z+h)}. \tag{2. 84}$$

Так как k_0 мнимая величина, затухание в основном обусловлено последним экспоненциальным членом, в который входит волновое число проводящей среды k. Оно может иметь большую действительную часть. Например, для обычной частоты радиосвязи $\omega = 10^6$ *рад/сек* и проводимости 4 *мо/м*, $|e^{-k(z+h)}| \approx e^{-2(z+h)}$. Если источник и приемник находятся в воде на глубине нескольких метров, затухание очень велико. Уменьшить его можно, понизив частоту. В случае более высоких сопротивлений затухание будет меньше.

§ 3. Круглая горизонтальная рамка (петля)

1. Вертикальное магнитное поле в ближней зоне около рамки (*Уэйт, 1954*). Пусть петля из провода (рамка) с радиусом a расположена в начале системы цилиндрических координат (ϱ, ϕ, z)

так, что провод проложен вдоль окружности $\varrho = a$ в плоскости $z = 0$. По рамке протекает ток I. Однородная среда с электрическими константами σ, ε, μ занимает полупространство $z < -h$. Величина h в дальнейшем будет принята равной нулю. Воздух имеет константы ε_0, μ_0, равные соответствующим постоянным в вакууме. Применяется система MKS. В силу аксиальной симметрии компоненты поля можно выразить при помощи скалярной функции F:

$$i\mu\omega H_\varrho = \frac{\partial^2 F}{\partial\varrho\,\partial z}, \quad E_\phi = \frac{\partial F}{\partial\varrho}, \quad i\mu\omega H_z = -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial}{\partial\varrho}\left(\varrho\frac{\partial F}{\partial\varrho}\right) \tag{3. 1}$$

и

$$E_\varrho = E_z = H_\phi = 0.$$

На низких частотах скалярный потенциал первичного поля рамки

$$F_{\text{п}} = \frac{i\mu_0\omega aI}{2}\int_0^\infty J_1(a\lambda)\, J_0(\varrho\lambda)\, e^{-|z|\lambda}\lambda^{-1}\, d\lambda, \tag{3. 2}$$

где J_0 и J_1 функции Бесселя первого рода нулевого и первого порядков. Этот результат получен Слихтером (Slichter, 1933). Его можно проверить при малых a:

$$(F_{\text{п}})_{a\to 0} = \frac{i\mu_0\omega a^2 I}{4}\int_0^\infty J_0(\varrho\lambda)\, e^{-|z|\lambda}\, d\lambda = \frac{i\mu_0\omega a^2 I}{4}(\varrho^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

Компоненты поля рамки при малом a равны компонентам поля магнитного диполя с моментом $\pi a^2 I$. Так для осевого магнитного поля рамки получим известное выражение:

$$(H_z)_{\varrho\to 0} = \frac{aI}{2}\int_0^\infty J_1(a\lambda)\lambda\, e^{-|z|\lambda}\, d\lambda = \frac{a^2 I}{2}(a^3 + z^2)^{-\frac{3}{2}}.$$

Общее решение задачи имеет следующий вид:

$$F_0 = M\int_0^\infty [f_0(\lambda)\, e^{z\lambda} + \psi_0(\lambda)\, e^{-z\lambda}]\, J_0(\varrho\lambda)\, d\lambda, \quad (-h \leqslant z \leqslant 0) \tag{3. 3}$$

и

$$F_1 = M\int_0^\infty f_1(\lambda)\, e^{zu}\, J_0(\varrho\lambda)\, d\lambda, \quad (z < -h), \tag{3. 4}$$

где

$$M = \frac{i\mu_0\omega a^2 I}{4}, \quad f_0(\lambda) = \frac{2J_1(a\lambda)}{\lambda a}, \quad u = (\lambda^2 + k^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Функции $\psi_0(\lambda)$ и $f_1(\lambda)$ определяются из граничных условий, заключающихся в непрерывности тангенциальных компонент поля на поверхности $z = -h$, откуда

$$\psi_0(\lambda) = -f_0(\lambda)\, e^{z\lambda}\left[\frac{\mu_0 u - \mu\lambda}{\mu_0 u + \mu\lambda}\right]$$

и

$$f_1(\lambda) = [f_0(\lambda)\, e^{-h\lambda} + \psi_0(\lambda)\, e^{h\lambda}]\, e^{uh}.$$

Разберем случай, когда рамка лежит на земле, магнитная проницаемость которой равна магнитной проницаемости воздуха. При $z = 0$ имеем:

$$F_0 = M \int_0^\infty \frac{2\lambda}{u+\lambda} f_0(\lambda) J_0(\varrho\lambda)\, d\lambda.$$

Функцию Бесселя $J_1(x)$ можно представить в виде ряда:

$$J_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{n!\,(n+1)!\,2^{2n+1}},$$

тогда

$$F_0 = 2M \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n a^{2n}}{n!\,(n+1)!\,2^{2n}} \int_0^\infty \frac{\lambda^{2n+1}}{u+\lambda} J_0(\varrho\lambda)\, d\lambda.$$

Применяя интеграл Зоммерфельда

$$\int_0^\infty \lambda u^{-1} J_0(\varrho\lambda)\, e^{-zu}\, d\lambda = \frac{e^{-k(\varrho^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}}{(\varrho^2+z^2)^{\frac{1}{2}}} = P,$$

находим, что

$$\int_0^\infty u\lambda J_0(\varrho\lambda)\, d\lambda = \left(\frac{\partial^2 P}{\partial z^2}\right)_{z=0} = -\frac{1}{\varrho^3}(1+k\varrho)\, e^{-k\varrho}. \qquad (3.5)$$

Из интеграла Липшица

$$\int_0^\infty J_0(\varrho\lambda)\, e^{-z\lambda}\, d\lambda = (\varrho^2+z^2)^{-\frac{1}{2}} = Q$$

следует, что

$$\int_0^\infty \lambda^2 J_0(\varrho\lambda)\, d\lambda = \left(\frac{\partial^2 Q}{\partial z^2}\right)_{z=0} = \frac{1}{\varrho^3}. \qquad (3.6)$$

Объединяя равенства (3. 5) и (3. 6), получим

$$\int_0^\infty \frac{\lambda J_0(\varrho\lambda)\, d\lambda}{u+\lambda} = k^{-2}\varrho^{-3}[1-(1+k\varrho)\, e^{-k\varrho}] = R(k\varrho). \qquad (3.7)$$

Используя то обстоятельство, что $J_0(\varrho\lambda)$ удовлетворяет уравнению

$$\left[\frac{1}{\varrho}\frac{\partial}{\partial\varrho}\left(\varrho\frac{\partial}{\partial\varrho}\right) + \lambda^2\right] J_0(\varrho\lambda) = 0,$$

придем к соотношению:

$$\int_0^\infty \frac{\lambda^{2n+1} J_0(\varrho\lambda)\, d\lambda}{u+\lambda} = \left[-\frac{1}{\varrho}\frac{\partial}{\partial\varrho}\left(\varrho\frac{\partial}{\partial\varrho}\right)\right]^n R(k\varrho). \qquad (3.8)$$

Таким образом, вертикальная компонента магнитного поля H_z на поверхности земли

$$i\mu\omega H_z = -2M \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{a}{2}\right)^{2n}}{n!\,(n+1)!} \left[\frac{1}{\varrho}\frac{\partial}{\partial\varrho}\left(\varrho\frac{\partial}{\partial\varrho}\right)\right]^{n+1} R(k\varrho). \qquad (3.9)$$

Когда отношение $\frac{a}{\varrho}$ становится малым, можно пренебречь всеми членами суммы, кроме первого и

$$H_z = IdS\,(2\pi k^2\varrho^5)^{-1}[(9+9k\varrho+4k^2\varrho^2+k^3\varrho^3)\, e^{-k\varrho} - 9], \qquad (3.10)$$

где $dS = \pi a^2$. Ошибка при этом не превышает 1%, если разнос ϱ больше пяти диаметров рамки. Формулу (3. 10) для H_z можно обобщить на случай слоистой среды в области $|k\varrho| \gg 1$:

$$H_z \approx 9IdS\,(2\pi k^2\varrho^5)^{-1} V^2, \qquad (3.11)$$

где V — поправочный множитель, рассчитанный в гл. IV, § 4. Выражение (3. 10) можно получить из формулы (1. 13), положив $k_1 = 0$.

2. *Вертикальное магнитное поле в центре круговой рамки (петли). Определение электропроводности полупространства (Йосидзуми, Танигучи, Киено, 1959).* Пусть переменный ток $I\cos\omega t$ протекает в круглой петле и создает магнитное поле $H_п\cos\omega t$. Петля расположена в воздухе (рис. 7). Компоненты первичного магнитного поля $H_{п\varrho}$, $H_{п\phi}$ и $H_{пz}$ в произвольной точке (ϱ, ϕ, z) записываются следующим образом:

$$H_{п\varrho} = \frac{aI}{2}\int_0^\infty e^{-z\lambda} J_1(\varrho\lambda) J_1(a\lambda)\lambda\, d\lambda, \quad (z>0), \qquad (3.12)$$

$$H_{п\phi} = 0,$$

$$H_{пz} = \frac{aI}{2}\int_0^\infty e^{-z\lambda} J_0(\varrho\lambda) J_1(a\lambda)\lambda\, d\lambda. \quad (z>0).$$

Магнитное поле $H_п$ совпадает по фазе с током I и является вещественной величиной. Для петли, поднятой на высоту h над землей (рис. 8), обозначим магнитное и электрическое поле в воздухе ($z<h$) через $H_п\cos\omega t + H_0'\cos\omega t$ и $E_0\cos\omega t$, а в земле ($z>h$) — через $H_1\cos\omega t$ и $E_1\sin\omega t$. Магнитную проницаемость среды

обозначим через $\mu_0 q_1$, магнитную проницаемость воздуха — через $\mu_0 q_0 (\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \frac{гн}{м})$. Пренебрегая токами смещения, получим в цилиндрических координатах:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial H_\varrho}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial \varrho} &= \sigma E_\varphi, \\ \frac{\partial E_\varphi}{\partial z} &= \mu_0 q \frac{\partial H_\varrho}{\partial t}, \\ \frac{1}{\varrho}\left[\frac{\partial}{\partial \varrho}(\varrho E_\varphi)\right] &= -\mu_0 q \frac{\partial H_z}{\partial t}. \end{aligned}\right\} \quad (3.13)$$

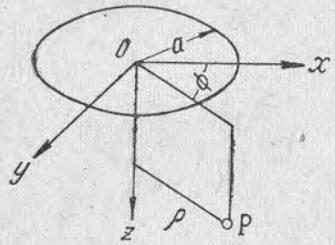


Рис. 7. Петля в воздухе.

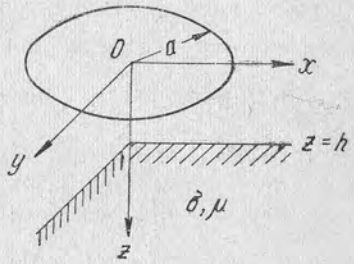


Рис. 8. Петля в присутствии среды.

Из уравнений (3.13) найдем:

$$\frac{\partial}{\partial \varrho}\left[\frac{1}{\varrho}\frac{\partial}{\partial \varrho}(\varrho E_\varphi)\right] + \frac{\partial^2 E_\varphi}{\partial z^2} - \mu_0 q \sigma \frac{\partial E_\varphi}{\partial t} = 0. \quad (3.14)$$

Считая, что в воздухе $E_\varphi = E_{0\varphi} \cos\omega t$, $\sigma = 0$, $q_0 = 1$, а в среде $E_\varphi = E_{1\varphi} \cos\omega t$ (электропроводность среды $\sigma \neq 0$), уравнение (3.14) можно переписать следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \varrho}\left[\frac{1}{\varrho}\frac{\partial}{\partial \varrho}(\varrho E_{0\varphi})\right] + \frac{\partial^2 E_{0\varphi}}{\partial z^2} &= 0, \quad (z < h). \\ \frac{\partial}{\partial \varrho}\left[\frac{1}{\varrho}\frac{\partial}{\partial \varrho}(\varrho E_{1\varphi})\right] + \frac{\partial^2 E_{1\varphi}}{\partial z^2} + k^2 E_{1\varphi} &= 0, \quad (z > h), \end{aligned}\right\} \quad (3.15)$$

где

$$k^2 = i\omega\mu_0 q_1 \sigma. \quad (3.16)$$

Из (3.15) следует, что

$$\left.\begin{aligned} E_{0\varphi} &= \int_0^\infty \psi_0(\lambda) e^{z\lambda} J_1(\varrho\lambda)\, d\lambda, \quad (z < h), \\ E_{1\varphi} &= \int_0^\infty \psi_1(\lambda) e^{-z\sqrt{\lambda^2 - k^2}} J_1(\varrho\lambda)\, d\lambda. \ (z > h). \end{aligned}\right\} \quad (3.17)$$

С другой стороны из уравнений (3.13)

$$\left.\begin{aligned} H'_{0z} &= \frac{1}{i\omega\mu_0}\frac{1}{\varrho}\frac{\partial}{\partial \varrho}(\varrho E_{0\varphi}), \\ H'_{0\varrho} &= -\frac{1}{i\omega\mu_0}\frac{\partial E_{0\varphi}}{\partial z} \end{aligned}\right\} \quad (3.18)$$

и

$$\left.\begin{aligned} H_{1z} &= \frac{1}{i\omega\mu_0 q_1}\frac{1}{\varrho}\frac{\partial}{\partial \varrho}(\varrho E_{1\varphi}), \\ H_{1\varrho} &= -\frac{1}{i\omega\mu_0 q_1}\frac{\partial E_{1\varphi}}{\partial z}. \end{aligned}\right\} \quad (3.19)$$

Подставляя значения $E_{0\varphi}$ и $E_{1\varphi}$ из (3.17) в (3.18) и (3.19), получим

$$\left.\begin{aligned} H'_{0z} &= \frac{1}{i\omega\mu_0}\int_0^\infty \psi_0(\lambda) e^{z\lambda} J_0(\varrho\lambda)\lambda\, d\lambda, \\ H'_{0\varrho} &= -\frac{1}{i\omega\mu_0}\int_0^\infty \psi_0(\lambda) e^{z\lambda} J_1(\varrho\lambda)\lambda\, d\lambda, \end{aligned}\right\} \quad (3.20)$$

$$\left.\begin{aligned} H_{1z} &= \frac{1}{i\omega\mu_0 q_1}\int_0^\infty \psi_1(\lambda) e^{-z\sqrt{\lambda^2-k^2}} J_0(\varrho\lambda)\lambda\, d\lambda, \\ H_{1\varrho} &= \frac{1}{i\omega\mu_0 q_1}\int_0^\infty \psi_1(\lambda) e^{-z\sqrt{\lambda^2-k^2}} J_0(\varrho\lambda)\sqrt{\lambda^2-k^2}\, d\lambda. \end{aligned}\right\} \quad (3.21)$$

Следующие условия должны выполняться на границе земля — воздух $(z = h)$:

$$\begin{aligned} H_{п\varrho} + H'_{0\varrho} &= H_{1\varrho}, \\ H_{пz} + H'_{0z} &= qH_{1z}. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Из (3.22) можно определить функции $\psi_0(\lambda)$ и $\psi_1(\lambda)$ с помощью формул (3.12), (3.20) и (3.21). Тогда для вертикальной компоненты магнитного поля в воздухе получим:

$$\begin{aligned} H_{0z} &= H_{пz} + H'_{0z} = \\ &= \frac{aI}{2}\int_0^\infty \left[e^{-z\lambda} + \frac{q_1\lambda - \sqrt{\lambda^2-k^2}}{q_1\lambda + \sqrt{\lambda^2-k^2}} e^{-(2h-z)\lambda}\right] \times \\ &\times J_0(\varrho\lambda) J_1(a\lambda)\lambda\, d\lambda, \ (0 < z < h). \end{aligned} \quad (3.23)$$

Когда круговая петля помещена на поверхности земли, найдем, что

$$H_{0z} = \frac{aI}{2}\int_0^\infty \frac{2q_1\lambda^2}{q_1\lambda + \sqrt{\lambda^2-k^2}} J_0(\varrho\lambda) J_1(a\lambda)\, d\lambda, \quad (3.24)$$

положив $z = h = 0$ в формуле (3. 23). Поэтому для вертикальной компоненты поля в центре петли ($\varrho = 0$, $z = 0$) можно записать:

$$H_{0z} = \frac{aI}{2} \int_0^\infty \frac{2\lambda^2}{\lambda + \sqrt{\lambda^2 - k^2}} J_1(a\lambda)\, d\lambda, \tag{3. 25}$$

где $k^2 = i\omega\mu_0\sigma$, считая, что $q_1 = 1$. Используя равенство

$$-\frac{\partial}{\partial a} J_0(a\lambda) = \lambda J_1(a\lambda), \tag{3. 26}$$

перепишем формулу (3. 25):

$$H_{0z} = -\frac{aI}{2} \frac{\partial}{\partial a} \int_0^\infty \frac{2\lambda}{\lambda + \sqrt{\lambda^2 - k^2}} J_0(a\lambda)\, d\lambda. \tag{3. 27}$$

Применяя равенства

$$\int_0^\infty \frac{2\lambda}{\lambda + \sqrt{\lambda^2 - k^2}} J_0(a\lambda)\, d\lambda = \frac{2}{k^2} \int_0^k \eta\, d\eta \int_0^\infty \frac{J_0(a\lambda)}{\sqrt{\lambda^2 - \eta^2}} \lambda\, d\lambda$$

и

$$\int_0^\infty \frac{J_0(a\lambda)}{\sqrt{\lambda^2 - \eta^2}} \lambda\, d\lambda = \frac{e^{ia\eta}}{a},$$

получим:

$$\frac{2aH_{0z}}{I} = -\frac{2}{k^2a^2} [3 + e^{ika}(k^2a^2 + 3ika - 3)]. \tag{3. 28}$$

Положив

$$ika = -(1 - i)\,\xi, \tag{3. 29}$$

где

$$\xi^2 = \frac{\omega\mu_0\sigma}{2} a^2, \tag{3. 30}$$

выделим действительную и мнимую части в (3. 28):

$$\left.\begin{aligned} Re\left(\frac{2aH_{0z}}{I}\right) &= -\frac{e^{-\xi}}{\xi^2} [(2\xi^2 + 3\xi)\cos\xi - (3\xi + 3)\sin\xi], \\ Jm\left(\frac{2aH_{0z}}{I}\right) &= \frac{1}{\xi^2} [3 - e^{-\xi} \{(3\xi + 3)\cos\xi + (2\xi^2 + 3\xi)\sin\xi\}]. \end{aligned}\right\} \tag{3. 31}$$

При малых и больших ξ справедливы следующие приближенные выражения:

$$Re\left(\frac{2aH_{0z}}{I}\right) = \begin{cases} 1 - \frac{4}{15}\xi^2, & (\xi \ll 1), \\ -2\xi^2 e^{-\xi}\cos\xi, & (\xi \gg 1), \end{cases} \tag{3. 32}$$

$$Jm\left(\frac{2aH_{0z}}{I}\right) = \begin{cases} \frac{\xi^2}{2}, & (\xi \ll 1), \\ \frac{3}{\xi^2}. & (\xi \gg 1). \end{cases} \tag{3. 33}$$

На рис. 9 представлен график функции $Jm\left(\frac{2aH_{0z}}{I}\right)$, вычисленный по (3. 31). Измеряя мнимую компоненту вторичного магнитного поля JmH_{0z}, можно с помощью этого графика определить электропроводность среды σ. В частном случае, когда $\xi \ll 1$, из первого равенства (3. 33) следует, что

$$\frac{1}{\sigma} = \frac{\pi\mu_0}{4} \frac{faI}{JmH_{0z}}, \tag{3. 34}$$

где f — частота в герцах. На рис. 10 нанесены значения фазового угла φ и тангенса этого угла для соответствующих значений ξ, вычисленные из соотношения:

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{JmH_{0z}}{Re\, H_{0z}}. \tag{3. 35}$$

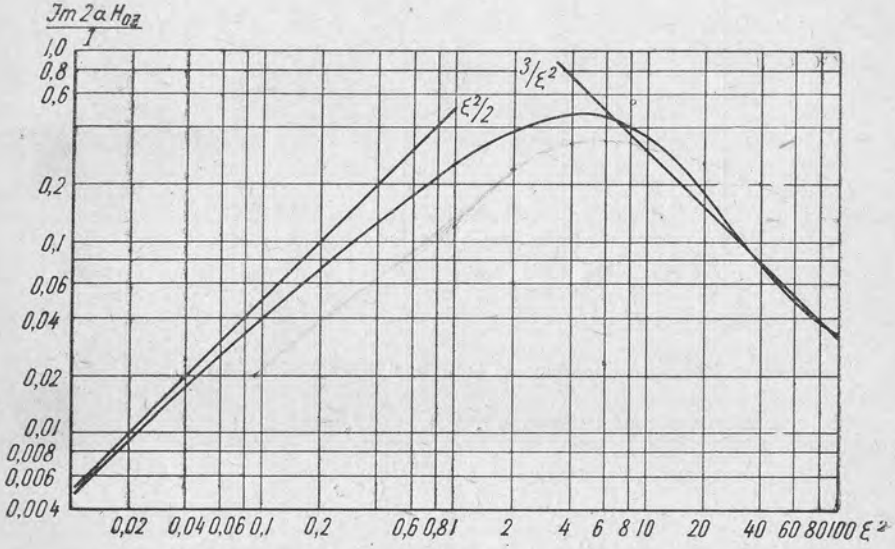


Рис. 9. Графики функции $Jm\left(\frac{2aH_{0z}}{I}\right)$ в зависимости от ξ^2.

В случае вертикального зондирования удобнее пользоваться функцией $\hat{M}$ Стефанеску (1936), определяемой следующим образом:

$$\hat{M} = -i \lim_{f \to 0} \frac{\partial H}{\partial f}. \tag{3. 36}$$

Хотя магнитное поле H в общем случае комплексно, можно показать, что

$$\lim_{f \to 0} \frac{\partial}{\partial f} Re\, H_{0z} = 0, \tag{3. 37}$$

если среда однородна. Поэтому для вертикальной магнитной компоненты в центре петли можно записать:

$$\hat{M}_{0z} = \lim_{f \to 0} \frac{\partial}{\partial f} JmH_{0z}. \tag{3. 38}$$

В случае однородной среды из формулы (3. 23) получим:

$$H_{0z} = \frac{aI}{2} \int_0^\infty [e^{-z\lambda} + G(\lambda, k)\, e^{-(2h-z)\lambda}]\, J_0(\varrho\lambda)\, J_1(a\lambda)\, \lambda\, d\lambda, \quad (3.39)$$

где

$$G(\lambda, k) = \frac{\lambda - \sqrt{\lambda^2 - k^2}}{\lambda + \sqrt{\lambda^2 + k^2}}. \quad (3.40)$$

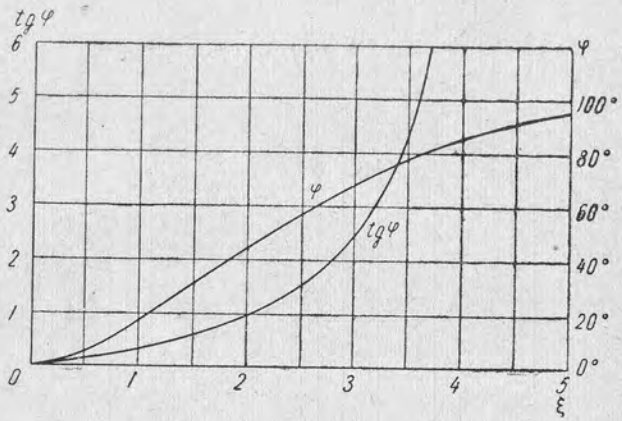


Рис. 10. Графики tg φ и φ в зависимости от ξ.

Дифференцируя уравнение (3. 40) по f, найдем:

$$\lim_{f \to 0} \frac{\partial G}{\partial f} = \frac{i\pi\mu_0\sigma}{2\lambda^2}.$$

Поэтому окончательно

$$\hat{M}_{0z} = -i \lim_{f \to 0} \frac{\partial H_{0z}}{\partial f} =$$

$$= \frac{\pi\mu_0 I}{4} \sigma a \int_0^\infty J_0(\varrho\lambda) J_1(a\lambda) \frac{e^{-(2h-z)\lambda}}{\lambda} d\lambda. \quad (3.41)$$

В любой точке оси Oz

$$\hat{M}_{0z} = \frac{\pi\mu_0 I}{4} \sigma a \int_0^\infty J_1(a\lambda) \frac{e^{-(2h-z)\lambda}}{\lambda} d\lambda. \quad (3.42)$$

Применяя формулу, приведенную у Ватсона (1949, стр. 422):

$$\int_0^\infty J_n(a\lambda) \frac{e^{-b\lambda}}{\lambda} d\lambda = \frac{(\sqrt{a^2 + b^2} - b)^n}{na^n}, \quad (3.43)$$

запишем для (3. 42):

$$\hat{M}_{0z} = \frac{\pi\mu_0 I}{4} \sigma \left[\sqrt{a^2 + (2h - z)^2} - (2h - z)\right]. \quad (3.44)$$

В центре петли

$$\hat{M}_{0z} = \frac{\pi\mu_0 I}{4} \sigma (\sqrt{a^2 + 4h^2} - 2h). \quad (3.45)$$

Когда рамка помещена на поверхности земли

$$\hat{M}_{0z} = \frac{\pi\mu_0 I}{4} \sigma a, \quad (3.46)$$

откуда легко вычислить сопротивление земли:

$$\frac{1}{\sigma} = \frac{\pi\mu_0}{4} \frac{aI}{\hat{M}_{0z}}. \quad (3.47)$$

Эта формула аналогична (3. 34), когда $f \to 0$. Величина $\lim_{f \to 0} \frac{JmH_{0z}}{f}$ требует измерений на низкой частоте. Диапазон частот можно оценить на примере с круговой рамкой. Из уравнений (3. 30) и (3. 33) следует, что

$$JmH_{0z} \approx \frac{\pi\mu_0 f \sigma a I}{4}, \quad 3.48)$$

когда

$$\xi^2 = \pi\mu_0 f \sigma a^2 \ll 1, \quad (3.49)$$

откуда

$$f \ll \frac{2{,}5 \cdot 10^5}{\sigma a^2}. \quad (3.50)$$

Из (3. 50) следует, что можно применять довольно высокие частоты, когда σ и a малы *.

§ 4. Взаимный импеданс рамок **

(Уэйт, 1952а, 1954, 1955, 1956)

Измеряемое магнитное поле зависит от силы тока в источнике. Чтобы устранить эту зависимость, удобно оперировать с отношением э. д. с., наводимой в приемной рамке к силе тока в источнике. Это отношение называется взаимным импедансом рамок.

Э. д. с., наводимая в рамке, имеющей N_2 витков, площадь которой равна dS_2,

$$v = -i\mu\omega\, dS_2 N_2 H.$$

---

* При этом, однако, нужно помнить, что чем меньше a, тем меньше будет глубинность определения σ. Пределы изменения a ограничены условиями задачи, поставленной перед геофизиками (см. § 3, гл. III). *Ред.*

** При расчете полей рамки заменяются магнитными диполями.

Взаимный импеданс между рамками

$$Z_0 = \frac{v}{I},$$

где I — сила тока в рамке-источнике, имеющей N_1 витков и площадь dS_1. Здесь и ниже все величины выражаются в системе MKS. Рамки располагаются так, что разнос между ними ϱ мал по сравнению с длиной волны, но велик по сравнению с диаметром рамок. Величина Z_0 является взаимным импедансом между рамками в однородной непроводящей среде. Когда рамки имеют общую ось $Z_0 = 2m$; если рамки расположены в одной плоскости, то $Z_0 = m$, где $m = \frac{i\omega\mu N_1 N_2 dS_1 dS_2}{4\pi\varrho^3}$. Так как в системе MKS для немагнитных сред $\mu = 4\pi 10^{-7} \frac{гн}{м}$, $m = \frac{i\omega N_1 N_2 dS_1 dS_2}{\varrho^3} 10^{-7}$.

1. Рамки на земле. Взаимный импеданс двух рамок в присутствии проводящего однородного полупространства обозначим через Z. Опять полагаем, что разнос ϱ мал по сравнению с длиной волны в воздухе. Обозначим диэлектрическую постоянную воздуха через ε_0. Магнитная проницаемость воздуха $\mu_0 = 4\pi 10^{-7} \frac{гн}{м}$ $\sigma_0 = 0$. Однородная проводящая среда с плоской поверхностью раздела обладает диэлектрической постоянной ε, магнитной проницаемостью μ_0 и конечной электропроводностью σ. Временной множитель принимается равным $e^{i\omega t}$. Тогда для взаимного импеданса в случае компланарных (расположенных в одной плоскости) рамок на поверхности земли по (1. 13) получим:

$$\frac{Z}{Z_0} = 2(k_0^2 - k^2)^{-1} \varrho^{-2} [(9 + 9k_0\varrho + 4k_0^2\varrho^2 + k_0^3\varrho^3) e^{-k_0\varrho} - (9 + 9k\varrho + 4k^2\varrho^2 + k^3\varrho^3) e^{-k\varrho}], \qquad (4.1)$$

где

$$k = (i\sigma\mu_0\omega - \varepsilon\mu_0\omega^2)^{\frac{1}{2}}, \quad k_0 = i(\varepsilon_0\mu_0)^{\frac{1}{2}}\omega, \quad Z_0 = m.$$

Величина Z здесь, как и в дальнейшем, выражается в единицах Z_0. Формула (4. 1) упрощается, если $|k_0\varrho| = (\varepsilon\mu_0)^{\frac{1}{2}}\omega\varrho \ll 1$:

$$\frac{Z}{Z_0} = 2k^{-2}\varrho^{-2} [(9 + 9k\varrho + 4k^2\varrho^2 + k^3\varrho^3) e^{-k\varrho} - 9]. \qquad (4.2)$$

Множитель $k\varrho$ можно записать в виде произведения $k\varrho = (1+i)\beta'(1+ib)^{\frac{1}{2}}$, где $\beta' = \left(\frac{\sigma\mu\omega}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\varrho$, $b = \frac{\varepsilon\omega}{\sigma}$. Для комплексного числа $\frac{Z}{Z_0} = \left|\frac{Z}{Z_0}\right| e^{i\varphi}$ графики модуля $\left|\frac{Z}{Z_0}\right|$ и фазы φ в зависимости от параметра β' для нескольких значений b показаны на рис. 11, 12.

В случаях, разбираемых ниже, пренебрегают токами смещения в среде. На рис. 13 схематически показаны шесть различ-

ных взаимных положений рамок, для которых построены графики отношения $\left|\frac{Z}{Z_0}\right|$ в зависимости от $\beta = (\sigma\mu_0\omega)^{\frac{1}{2}}\varrho$.

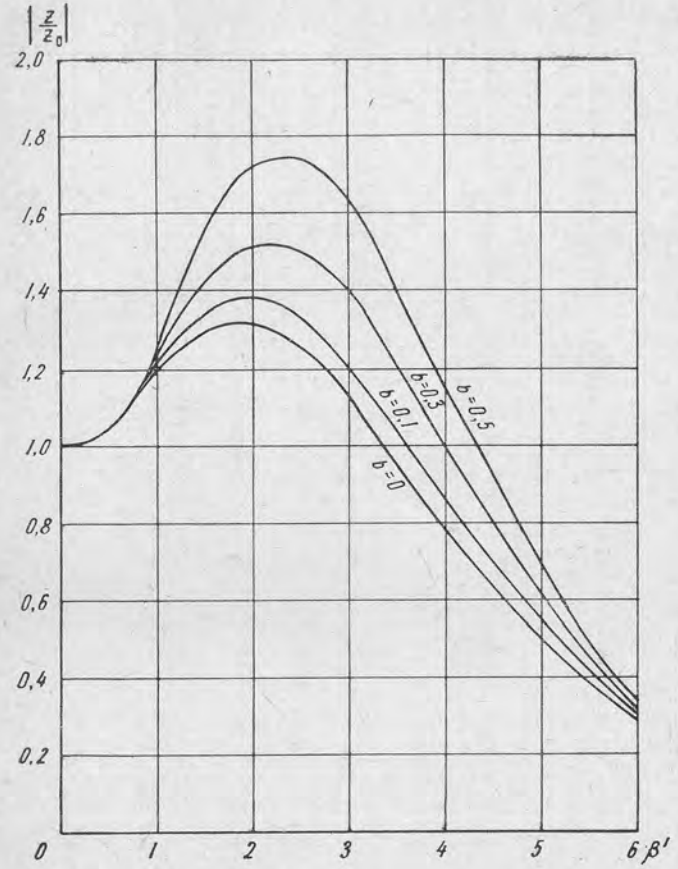


Рис. 11. Графики $\left|\frac{Z}{Z_0}\right|$ в зависимости от параметра β' при различных b.

I. Рамки компланарны и лежат на поверхности земли. Оси рамок перпендикулярны поверхности земли. Выражение для $\frac{Z}{Z_0}$ определяется формулой (4. 2), с той разницей, что $k = (i\sigma\mu_0\omega)^{\frac{1}{2}}$.

II. Коаксиальные (на одной оси) рамки на поверхности земли.

$$\frac{Z}{Z_0} = \frac{e^{-k\varrho}}{k^2\varrho^2}(12 + 12k\varrho + 5k^2\varrho^2 + k^3\varrho^3) + 2 - \frac{12}{k^2\varrho^2}, \qquad (4.3)$$

$$Z_0 = 2m.$$

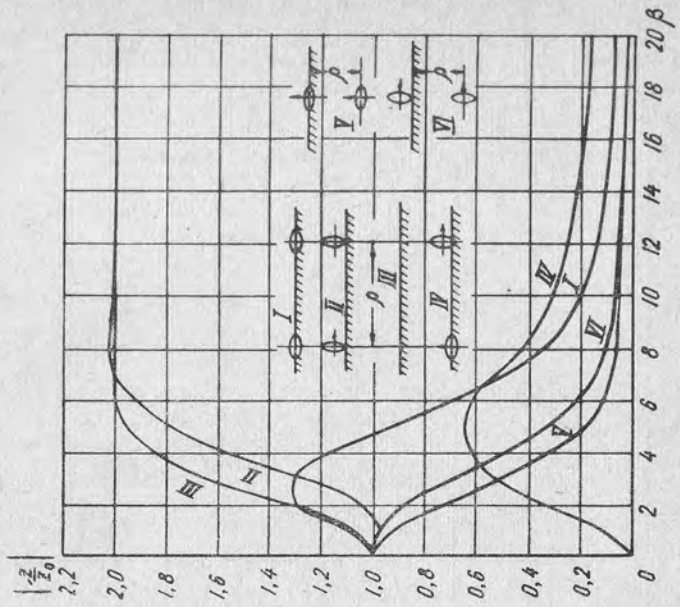


Рис. 13. Графики $\left|\frac{Z}{Z_0}\right|$ в зависимости от параметра β для шести положений рамок.

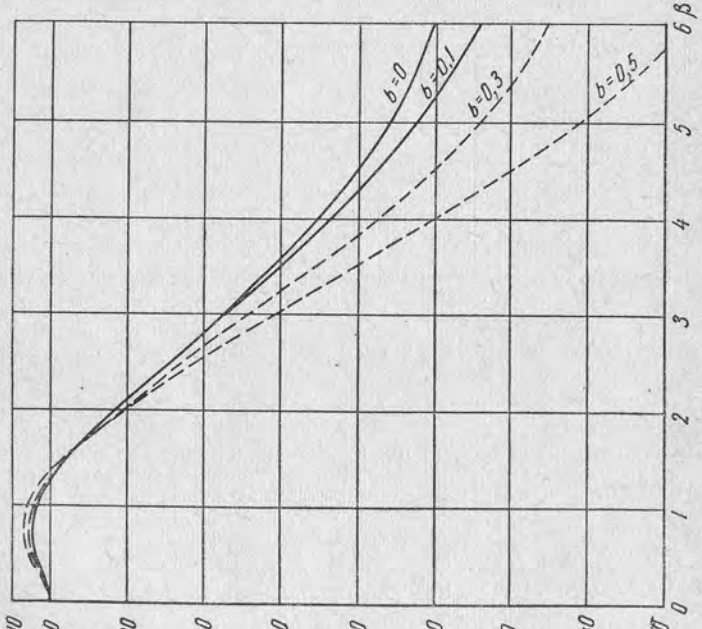


Рис. 12. Фазовые характеристики импеданса $\frac{Z}{Z_0}$ в зависимости от параметра β′ при различных b.

III. Компланарные рамки на поверхности земли, оси рамок параллельны поверхности земли.

$$\frac{Z}{Z_0} = 2\left[\frac{e^{-k\varrho}}{k^2\varrho^2}(3 + 3k\varrho + k^2\varrho^2) + 1 - \frac{3}{k^2\varrho^2}\right], \quad Z_0 = m. \qquad (4.4)$$

IV. Первая рамка лежит на поверхности земли. Плоскость второй рамки перпендикулярна к поверхности земли и к лучу, проведенному из центра первой рамки.

$$\frac{Z}{Z_0} = -\frac{1}{2}\Big[k^2\varrho^2(I_1K_1 - I_0K_0) + $$
$$+4k\varrho\,(I_1K_0 - I_0K_1) + 16I_1K_1\Big], \quad Z_0 = 2\,m, \qquad (4.5)$$

где I_0, I_1, K_0, K_1 — функции Бесселя от мнимого аргумента с независимой переменной $\frac{k\varrho}{2}$.

V. Первая рамка лежит на поверхности земли, вторая находится в земле на одной оси с первой.

$$\frac{Z}{Z_0} = \frac{2e^{-k\varrho}}{k^2\varrho^2}(12 + 12k\varrho + 5k^2\varrho^2 + k^3\varrho^3) -$$
$$-3\left[\left(k\varrho + \frac{8}{k\varrho}\right)K_1(k\varrho) + 4K_0(k\varrho)\right], \quad Z_0 = 2m. \qquad (4.6)$$

VI. Первая рамка находится на поверхности земли и имеет ось, параллельную земной поверхности, а вторая рамка, расположенная в земле на одной вертикали с первой, имеет ось, параллельную оси первой рамки.

$$\frac{Z}{Z_0} = \frac{2e^{-k\varrho}}{k^2\varrho^2}(12 + 12k\varrho + 5k^2\varrho^2 + k^3\varrho^3) -$$
$$-\left[(12 + k^2\varrho^2)K_0(k\varrho) + \frac{1}{k\varrho}(24 + 5k^2\varrho^2)K_1(k\varrho)\right], \quad Z_0 = m. \qquad (4.7)$$

2. Рамки в воздухе. Выше были рассмотрены рамки, расположенные либо на поверхности, либо внутри проводящего полупространства. Исследуем случай, когда обе рамки расположены на некоторой высоте над поверхностью земли. В системе цилиндрических координат (ϱ, φ, z) магнитный диполь направлен по оси Oz и расположен в точке с координатами (0, 0, h). Проводящему полупространству соответствует координата $z < 0$. Составляющие магнитного поля вертикального магнитного диполя:

$$\left.\begin{aligned} H_z &= H_{\text{п}\,z} + H_{\text{в}\,z}, \\ H_\varrho &= H_{\text{п}\,\varrho} + H_{\text{в}\,\varrho}, \\ H_\varphi &= 0, \end{aligned}\right\} \qquad (4.8)$$

где первичное поле отмечается индексом «п», а вторичное поле,

вызванное вторичными токами в проводящем полупространстве, — индексом «в». Известно, что

$$H_{\text{п}\,z} = \frac{-M}{[(z-h)^2+\varrho^2]^{\frac{3}{2}}} + \frac{3M(z-h)^2}{[(z-h)^2+\varrho^2]^{\frac{5}{2}}}, \qquad (4.9)$$

$$H_{\text{п}\,\varrho} = \frac{3M\varrho(z-h)}{[(z-h)^2+\varrho^2]^{\frac{5}{2}}}, \qquad (4.10)$$

где

$$M = \frac{i\mu_0\omega I dS}{4\pi}.$$

Из результатов гл. III, § 2 можно получить:

$$H_{\text{в}\,z} = M\int_0^\infty \frac{\lambda-(\lambda^2+k^2)^{\frac{1}{2}}}{\lambda+(\lambda^2+k^2)^{\frac{1}{2}}} e^{-(h+z)\lambda} J_0(\varrho\lambda)\lambda^2 d\lambda, \quad (z \geqslant 0), \qquad (4.11)$$

$$H_{\text{в}\,\varrho} = M\int_0^\infty \frac{\lambda-(\lambda^2+k^2)^{\frac{1}{2}}}{\lambda+(\lambda^2+k^2)^{\frac{1}{2}}} e^{-(h+z)\lambda} J_1(\varrho\lambda)\lambda^2 d\lambda, \quad (z \geqslant 0). \qquad (4.12)$$

Для удобства вычислений перепишем два последних выражения после замены переменных в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} H_{\text{в}\,z} &= -\frac{M}{\delta^3} T_0(A, B), \\ H_{\text{в}\,\varrho} &= -\frac{M}{\delta^3} T_1(A, B), \end{aligned}\right\} \qquad (4.13)$$

где

$$T_0(A, B) = \int_0^\infty \frac{(g^2+2i)^{\frac{1}{2}}-g}{(g^2+2i)^{\frac{1}{2}}+g} g^2 e^{-Ag} J_0(Bg)\, dg \qquad (4.14)$$

и

$$T_1(A, B) = \int_0^\infty \frac{(g^2+2i)^{\frac{1}{2}}-g}{(g^2+2i)^{\frac{1}{2}}+g} g^2 e^{-Ag} J_1(Bg)\, dg, \qquad (4.15)$$

причем

$$A = \frac{z+h}{\delta}, \quad B = \frac{\varrho}{\delta}, \quad \delta = \sqrt{\frac{2}{\sigma\mu_0\omega}}.$$

Значения интегралов T_0 и T_1, которые были вычислены на электронной вычислительной машине, приведены в табл. 2.

Пользуясь табл. 2, можно получить взаимный импеданс между рамками для следующих случаев:

Таблица 2

Функции T_0, T_1

A	B	Вещественная часть $T_0(A, B)$	Мнимая часть $T_0(A, B)$	Вещественная часть $T_1(A, B)$	Мнимая часть $T_1(A, B)$
0,5	0,1	0,202910	0,593397	0,013812	0,,86205
0,5	0,2	0,198812	0,542901	0,027007	0,057145
0,5	0,5	0,174481	0,332304	0,058812	0,140680
0,5	1,0	0,119304	0,105494	0,082089	0,283441
0,5	1,5	0,070718	0,017130	0,080153	0,109631
0,5	2,0	0,036311	−0,012953	0,067175	0,159476
0,5	3,0	0,002766	−0,017954	0,037394	0,012488
1,0	0,1	0,112284	0,197405	0,005937	0,017846
1,0	0,2	0,111005	0,191023	0,011749	0,034661
1,0	0,5	0,102660	0,153718	0,027368	0,071682
1,0	1,0	0,079333	0,078759	0,043779	0,083958
1,0	1,5	0,053875	0,028507	0,048103	0,065507
1,0	2,0	0,032612	0,003314	0,044502	0,043202
1,0	3,0	0,007381	−0,009467	0,029248	0,013820
1,5	0,1	0,069284	0,090232	0,003090	0,006289
1,5	0,2	0,068737	0,088545	0,006137	0,012384
1,5	0,5	0,065065	0,077796	0,014644	0,027869
1,5	1,0	0,053888	0,050340	0,025047	0,039849
1,5	1,5	0,040106	0,025267	0,029718	0,037416
1,5	2,0	0,027138	0,008758	0,029627	0,028848
1,5	3,0	0,009132	−0,003929	0,022317	0,012371
2,0	0,1	0,045733	0,047977	0,001781	0,002786
2,0	0,2	0,045460	0,047365	0,003545	0,005516
2,0	0,5	0,043607	0,043327	0,008564	0,012863
2,0	1,0	0,037714	0,031788	0,015223	0,020374
2,0	1,5	0,029891	0,019227	0,019008	0,021565
2,0	2,0	0,021888	0,009272	0,020031	0,018689
2,0	3,0	0,009314	−0,000755	0,016847	0,010026
3,0	0,1	0,022792	0,017469	0,000715	0,000779
3,0	0,2	0,022705	0,017340	0,001425	0,001550
3,0	0,5	0,022102	0,016461	0,003487	0,003726
3,0	1,0	0,020101	0,013689	0,006464	0,006505
3,0	1,5	0,017220	0,010089	0,008582	0,007868
3,0	2,0	0,013950	0,006553	0,009730	0,007914
3,0	3,0	0,007842	0,001538	0,009603	0,005798
5,0	0,1	0,007891	0,003983	0,000179	0,000124
5,0	0,2	0,007875	0,003968	0,000357	0,000247
5,0	0,5	0,007765	0,003870	0,000882	0,000607
5,0	1,0	0,007387	0,003537	0,001694	0,001136
5,0	1,5	0,006803	0,003046	0,002380	0,001530
5,0	2,0	0,006074	0,002470	0,002901	0,001763
5,0	3,0	0,004440	0,001339	0,003416	0,001784

VII. Компланарные рамки с вертикальными осями, обе на высоте h над землей (рис. 14):

$$\frac{Z}{Z_0} = 1 + B^3 T_0(A', B), \quad Z_0 = m, \qquad (4.16)$$

$$A' = \frac{2h}{\delta} = \sqrt{2\sigma\mu_0\omega}\, h.$$

VIII. Первая рамка, расположенная на высоте h, имеет вертикальную ось, вторая — имеет ось, параллельную поверхности

земли и направленную вдоль радиуса первой рамки (рис. 15):

$$\frac{Z}{Z_0} = B^3 T_1(A', B), \quad Z_0 = m, \tag{4.17}$$

где

$$A' = \frac{2h}{\delta}.$$

Предельное значение для случаев VII и VIII, когда $A' = 0$, соответствует случаям I и IV при наземном расположении рамок.

Рассмотрим случай, когда рамки располагаются над землей и оси обеих рамок парал-

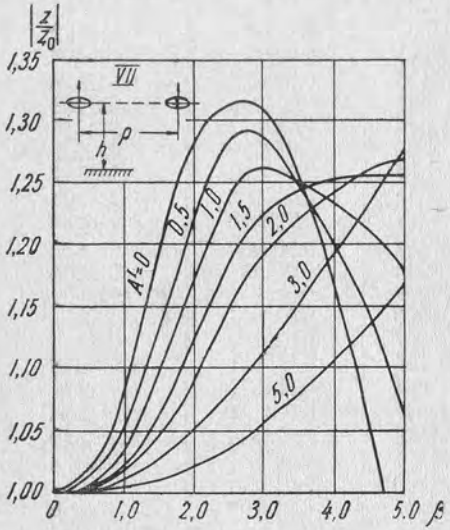


Рис. 14. Графики $\left|\frac{Z}{Z_0}\right|$ для компланарных рамок в зависимости от параметра β при различных A'.

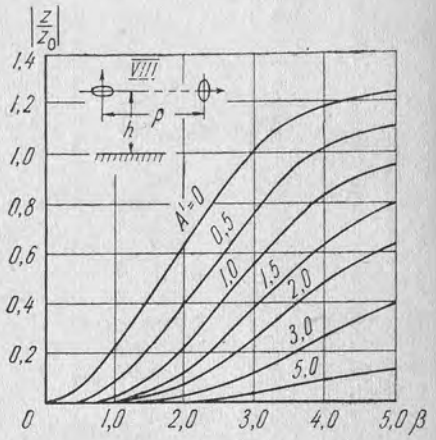


Рис. 15. Графики $\left|\frac{Z}{Z_0}\right|$ для рамок, плоскости которых взаимно перпендикулярны, в зависимости от параметра β при различных A'.

лельны поверхности земли. Пусть в системе прямоугольных координат (x, y, z) магнитный диполь направлен по оси Oy и помещен в точку с координатами $(0, 0, h)$ над проводящим полупространством $z < 0$.

Общее решение этой задачи приведено в § 2 этой главы. На основании полученных там результатов запишем для магнитного потенциала Φ в области $z > 0$:

$$\Phi = -M\frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{1}{[x^2+y^2+(z-h)^2]^{\frac{1}{2}}} + \right.$$

$$\left. + \int_0^\infty \frac{(\lambda^2+i\sigma\mu\omega)^{\frac{1}{2}}-\lambda}{(\lambda^2+i\sigma\mu_0\omega)^{\frac{1}{2}}+\lambda} e^{-(z+h)\lambda} J_0[(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}\lambda]\, d\lambda\right\}, \tag{4.18}$$

где $\frac{i\mu_0\omega I dS}{4\pi}$.

Формула (4.18) справедлива для значительных расстояний между рамками, которые все же малы по сравнению с длиной волны в воздухе. Магнитные поля можно вычислить из равенства:

$$H_п + H_в = -\operatorname{grad}\Phi,$$

где индексы «п» и «в» имеют прежний смысл. Компоненты первичного поля при этом записываются следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} H_{пx} &= \frac{3Mxy}{R^5}, \\ H_{пy} &= \frac{3My^2}{R^5} - \frac{M}{R^3}, \\ H_{пz} &= \frac{3My(z-h)}{R^5}, \end{aligned}\right\} \tag{4.19}$$

где

$$R = [x^2+y^2+(z-h)^2]^{\frac{1}{2}},$$

а для компонент вторичного поля справедливы выражения:

$$H_{вx} = \frac{M}{\delta^3}\frac{xy}{\varrho^2}\left[\frac{2}{B}T_2(A, B) - T_0(A, B)\right],$$

$$H_{вy} = \frac{M}{\delta^3}\frac{y^2}{\varrho^2}\left[\frac{1-\frac{x^2}{y^2}}{B}T_2(A, B) - T_0(A, B)\right], \tag{4.20}$$

$$H_{вz} = \frac{M}{\delta^3}\frac{y}{\varrho}T_1(A, B),$$

где

$$T_2(A, B) = \int_0^\infty \frac{(g^2+2i)^{\frac{1}{2}}-g}{(g^2+2i)^{\frac{1}{2}}+g} g e^{-Ag} J_1(Bg)\, dg, \tag{4.21}$$

а T_0, T_1, A, B и δ — такие же, как в (4.18), $\varrho = (x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}$.

Интегралы T_0 и T_1 рассмотрены в примерах VII и VIII. Интеграл T_2 можно получить путем численного интегрирования, заметив, что

$$T_2(A, B) = \int_0^\infty T_1(A, B)\, dA. \tag{4.22}$$

Вещественные и мнимые части $T_2(A, B)$ приводятся в табл. 3 и 4*.

Используя полученные выше результаты, можно вычислить взаимный импеданс между рамками с осями, параллельными поверхности земли:

* Воспользовавшись разобранными выше расчетами импеданса для горизонтальной и вертикальной рамок, приподнятых на высоту h над полупространством, (Шауб, 1960) оценил сигналы, измеряемые в аэроэлектроразведке методом вращающегося поля. *А. В., Г. Ф.*

Таблица 3

Вещественная часть интеграла T_2 (A, B)

A \ B	0,1	0,2	0,5	1,0	1,5	2,0	3,0
0,5	0,0097	0,0190	0,0439	0,0767	0,0887	0,0879	0,0705
1,0	0,0053	0,0104	0,0248	0,0460	0,0570	0,0601	0,0542
1,5	0,0032	0,0063	0,0152	0,0290	0,0378	0,0423	0,0417
2,0	0,0019	0,0041	0,0096	0,0192	0,0259	0,0304	0,0319
3,0	0,0007	0,0017	0,0039	0,0093	0,0129	0,0167	0,0189
5,0	0,0001	0,0002	0,0022	0,0022	0,0031	0,0057	0,0068

Таблица 4

Мнимая часть интеграла T_2 (A, B)

A \ B	0,1	0,2	0,5	1,0	1,5	2,0	3,0
0,5	0,0302	0,0595	0,1051	0,1234	0,1035	0,0769	0,0370
1,0	0,0090	0,0192	0,0440	0,0617	0,0617	0,0525	0,0304
1,5	0,0037	0,0087	0,0214	0,0332	0,0372	0,0353	0,0237
2,0	0,0017	0,0043	0,0121	0,0189	0,0229	0,0240	0,0183
3,0	0,0002	0,0012	0,0050	0,0068	0,0098	0,0116	0,0104
5,0	0,0000	0,0000	0,0002	0,0009	0,0022	0,0029	0,0033

IX. Коаксиальные рамки с горизонтальными осями, обе на высоте h над землей

$$\frac{Z}{Z_0} = 1 + \left(\frac{B^2}{2}\right)[T_2(A', B) - BT_0(A', B)], \qquad (4.23)$$

$$Z_0 = 2m, \quad A' = \frac{2h}{\delta}.$$

X. Компланарные рамки с горизонтальными осями, обе на высоте h над землей

$$\frac{Z}{Z_0} = 1 + B^2 T_2(A', B), \quad Z_0 = m, \quad A' = \frac{2h}{\delta}. \qquad (4.24)$$

Отношения $\left|\frac{Z}{Z_0}\right|$ для обоих случаев представлены на рис. 16 и 17 (для значений A' от 0,5 до 5,0). Граничные значения формул IX и X, когда $A = 0$, соответствуют случаям II и III, которые представлены на рис. 13. Как видно из рис. 16 и 17, импеданс постепенно уменьшается по мере удаления рамок от поверхности земли.

Особенностью графиков $\left|\frac{Z}{Z_0}\right|$ для коаксиальных рамок (рис. 16) является первоначальное уменьшение $\left|\frac{Z}{Z_0}\right|$, когда расстояние между рамками еще невелико. При больших значениях ρ отношение $\left|\frac{Z}{Z_0}\right|$ в конце концов становится больше единицы. Поэтому, если встает вопрос об уменьшении влияния рыхлых отложений,

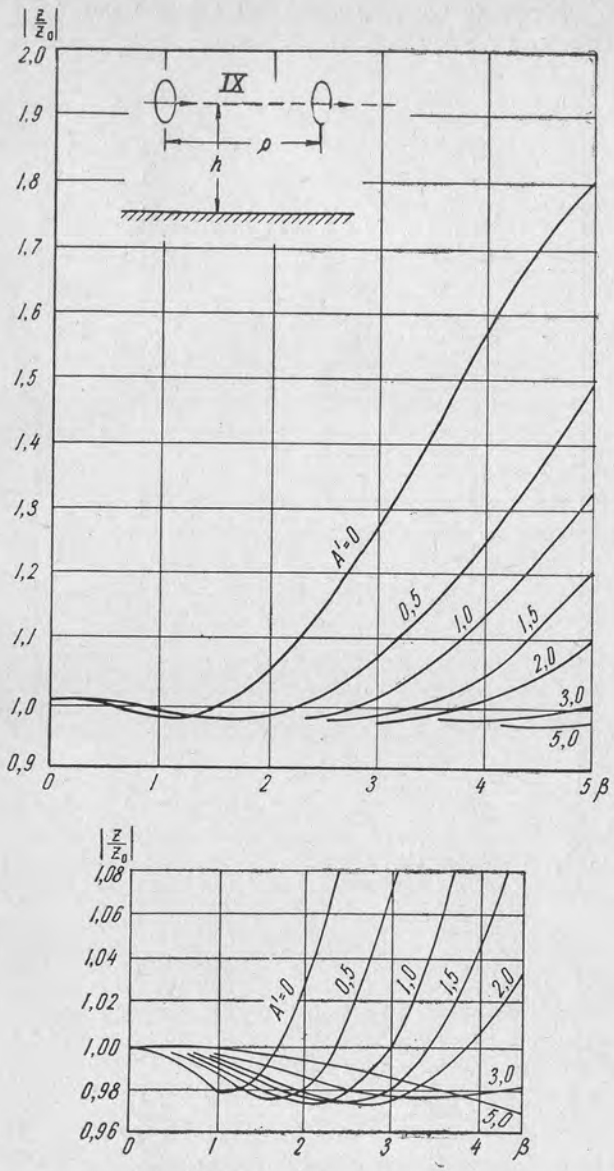


Рис. 16. Графики $\left|\frac{Z}{Z_0}\right|$ для коаксиальных рамок, оси которых параллельны поверхности земли, в зависимости от параметра β при различных A'.

то следует отдать предпочтение коаксиальным рамкам. Это замечание справедливо для рамок, находящихся в воздухе и на поверхности земли.

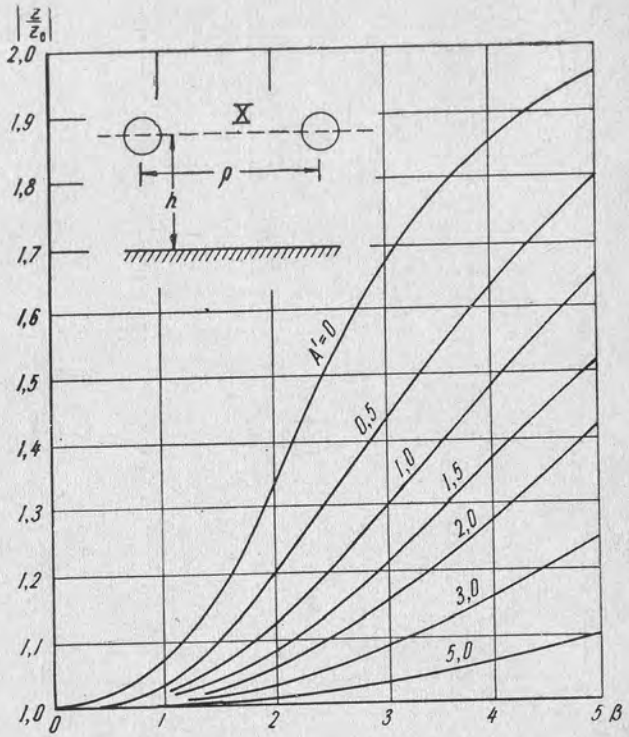


Рис. 17. Графики $\left|\frac{Z}{Z_0}\right|$ для компланарных рамок с осями, параллельными земной поверхности, в зависимости от параметра β при различных A'.

Отклонение от кривых взаимного импеданса для однородного полупространства может рассматриваться как влияние слоистости среды или неоднородностей другого рода. Формулы импеданса для слоистых сред приведены в параграфе 7, гл. III.

§ 5. Неустановившееся поле вертикального магнитного диполя

Пусть небольшая рамочная антенна (рис. 18) расположена в начале системы цилиндрических координат (ϱ, φ, z) так, что ее ось совпадает с осью Oz. Пусть также поверхность раздела между двумя средами имеет координату $z = 0$. Верхняя среда

(воздух) характеризуется постоянными (ε_0, μ_0), а нижняя — постоянными (σ_1, ε_1, μ_0), где σ, ε и μ — электропроводность, диэлектрическая постоянная и магнитная проницаемость. Электропроводностью воздуха пренебрегаем. Волновое число в воздухе обозначим через k_0, в земле — через k_1.

Выведем формулы взаимного импеданса между генераторной рамкой и проводом малой длины, а также для импеданса между генераторной и приемной рамками. Сначала рассматривается решение, в котором не учитываются токи смещения и время распро-

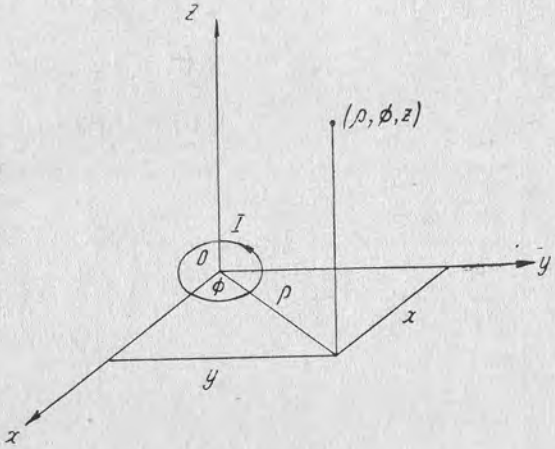


Рис. 18.

странения поля в воздухе. Во втором варианте решения эти ограничения снимаются.

1. Случай, когда пренебрегают токами смещения и временем распространения поля в воздухе (*Уэйт, 1951, 1960*) *. Электрическое поле E_φ на поверхности раздела земля — воздух можно найти из формулы (1. 9), подставляя в которую обозначения волновых чисел, принятые в § 5, и учитывая, что $k_0 = 0$, получим:

$$E_\varphi = \frac{IdS\,\mu_0\, i\,\omega}{2\pi\varrho^4 k_1^2}\left[(3 + 3k_1\varrho + k_1^2\varrho^2)\,e^{-k_1\varrho} - 3\right]. \qquad (5.1)$$

Тогда для гармонического поля взаимный импеданс между элементом провода длины dl и рамкой площади dS на поверхности однородной среды:

$$Z(i\omega) = \frac{dSdl}{2\pi\sigma_1\varrho^4}\left[(3 + 3k_1\varrho + k_1^2\varrho^2)\,e^{-k_1\varrho} - 3\right]\sin\psi, \qquad (5.2)$$

* Аналогичный случай рассмотрен Бхаттачария (1956). *А. В., Г. Ф.*

где ψ есть угол между направлением элемента провода и линией, соединяющей элемент провода и центр рамки. Для ступенчатой формы тока источника

$$Z(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{Z(i\omega)}{i\omega} e^{i\omega}\, di\omega, \qquad (5.3)$$

где c — малая произвольная положительная постоянная. Вычислив интеграл (5. 3), получим *:

$$Z(t) = \frac{dSdl}{2\pi\sigma\varrho^4} M(t) \sin\psi\, u(t), \qquad (5.4)$$

где

$$u(t) = 1 \text{ для } t > 0$$

и

$$u(t) = 0 \text{ для } t < 0.$$

Функция $M(t)$ определяется следующим выражением **:

$$M(t) = 3erf\left(\frac{\alpha}{2t^{\frac{1}{2}}}\right) - \left[\frac{3\alpha}{2t^{\frac{1}{2}}} + 2\left(\frac{\alpha}{2t^{\frac{1}{2}}}\right)^3\right] erf'\left(\frac{\alpha}{2t^{\frac{1}{2}}}\right), \qquad (5.5)$$

где $\alpha = (\sigma\mu)^{\frac{1}{2}}\varrho$.

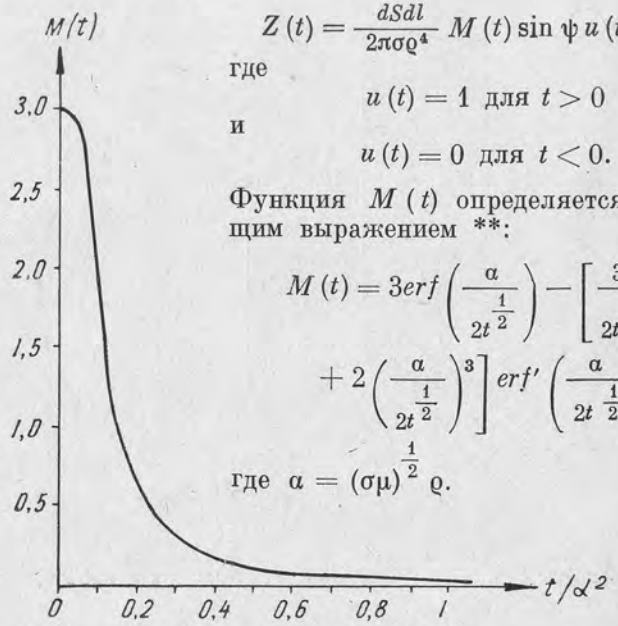


Рис. 19. График функции $M(t)$.

График функции $M(t)$ показан на рис. 19. Магнитное поле H_z на границе земля — воздух ($k_0 = 0$) получим из выражения (1. 13):

$$H_z = \frac{IdS}{2\pi\varrho^5 k_1^2}[9 + 9k_1\varrho + 4k_1^2\varrho^2 + k_1^3\varrho^3)e^{-k_1\varrho} - 9]. \qquad (5.6)$$

---

* Вычисление интеграла (5. 3) приводится в приложении В к рассматриваемой здесь работе Уэйта (1951). *А. В., Г. Ф.*

** Функция $erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^x e^{-z^2} dz$ есть интеграл вероятности, а $erf'(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$ — его производная по x (см., например, справочник Бронштейна и Семендяева, 1957, стр. 563). *А. В., Г. Ф.*

В случае гармонического поля взаимный импеданс двух рамок с площадями dS и dS_1 на поверхности однородной среды равен:

$$Z(i\omega) = \frac{dSdS_1}{2\pi\sigma_1\varrho^5}[(9 + 9k_1\varrho + 4k_1^2\varrho^2 + k_1^3\varrho^3)e^{-k_1\varrho} - 9]. \qquad (5.7)$$

Вычисляя контурный интеграл типа (5. 3), получим выражение импеданса для ступенчатого поля:

$$Z(t) = -\frac{dSdS_1}{2\pi\sigma_1\varrho^5} P(t)\, u(t), \qquad (5.8)$$

где

$$P(t) = 9erf\frac{\alpha}{2t^{\frac{1}{2}}} + 2\left(\frac{\alpha}{2t^{\frac{1}{2}}}\right)^4 erf''\left(\frac{\alpha}{2t^{\frac{1}{2}}}\right) - \left[9\left(\frac{\alpha}{2t^{\frac{1}{2}}}\right) - 6 \times \left(\frac{\alpha}{2t^{\frac{1}{2}}}\right)^3\right] erf'\left(\frac{\alpha}{2t^{\frac{1}{2}}}\right)$$

и $\alpha = (\sigma\mu)^{\frac{1}{2}}\varrho$.

График функции $P(t)$ построен на рис. 20.

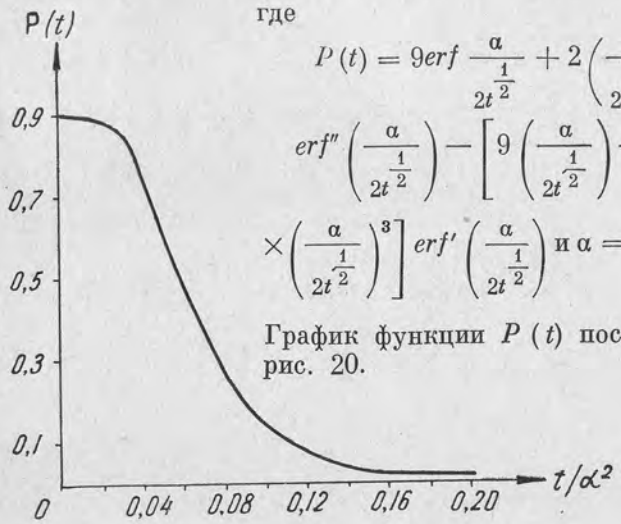


Рис. 20. График функции $P(t)$.

2. Случай, когда учитываются токи смещения и время распространения поля в воздухе (*Бхаттачария, 1959*). Как и в пункте 1, воспользуемся формулой (1. 9) для определения взаимного импеданса между проводом малой длины и генераторной рамкой. Пусть ток, текущий в рамке, имеет вид ступенчатой функции амплитуды I_1. Тогда

$$I(s) = \frac{I_1}{s}, \quad \text{где } s = i\omega. \qquad (5.9)$$

Подстановка выражений для $I(s)$ и для волновых чисел k_0 и k_1 в (1. 9) приводит к соотношению:

$$E_\varphi = \frac{I_1 dS}{2\pi\varrho^4[\sigma_1 s + (\varepsilon_1 - \varepsilon_0)s^2]}[(3 + 3k_1\varrho + k_1^2\varrho^2)e^{-k_1\varrho} - (3 + 3k_0\varrho + k_0^2\varrho^2)e^{-k_0\varrho}]. \qquad (5.10)$$

С помощью уравнения (5. 10) можно записать выражение для переходного взаимного импеданса $Z(s)$ между рамкой площади ds и проводом длины dl следующим образом:

$$Z(s) = -\frac{dSdl}{2\pi\varrho^4\sigma_1}[Z_1(s) - Z_2(s)], \qquad (5.11)$$

где

$$Z_1(s) = \sigma_1 \frac{3+3k_0\varrho+k_0^2\varrho^2}{\sigma_1 s+(\varepsilon_1-\varepsilon_0)s^2} e^{-k_0\varrho} \tag{5.12}$$

и

$$Z_2(s) = \sigma_1 \frac{3+3k_1\varrho+k_1^2\varrho^2}{\sigma_1 s+(\varepsilon_1-\varepsilon_0)s^2} e^{-k_1\varrho}. \tag{5.13}$$

Если ввести обозначения $\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0} = n^2$, $\frac{\sigma_1}{\varepsilon_1} = b$, $\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}\,\varrho = x$ и $\sqrt{\mu_0\varepsilon_1}\,\varrho = nx = z$, то $k_0\varrho = xs$ и $k_1\varrho = z[s(s+b)]^{\frac{1}{2}}$.

В новых обозначениях равенства (5. 12) и (5. 13) примут вид:

$$Z_1(s) = \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+m}\right)(3+3xs+x^2s^2)\,e^{-xs} \tag{5.14}$$

и

$$Z_2(s) = \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+m}\right)\{3+3z[s(s+b)]^{\frac{1}{2}} + z^2s(s+b)\}\,e^{-z[s(s+b)]^{\frac{1}{2}}}, \tag{5.15}$$

где

$$m = \frac{n^2}{n^2-1}\,b.$$

Перепишем формулу (5. 11), пользуясь подстановками

$$Z_m(s) = -\frac{\varrho^3}{60\,dSdl}\,Z(s)$$

и

$$\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 120\,\pi.$$

Тогда получим, что

$$Z_m(s) = \frac{1}{n^2bx}[Z_1(s) - Z_2(s)]. \tag{5.16}$$

Из формул (5. 14) — (5. 16) видно, что напряжение, наводимое в достаточно удаленном малом проводе, расположенном на поверхности земли, можно рассматривать как результат воздействия двух волн, одна из которых распространяется в воздухе, другая — в земле. Первая волна описывается формулой (5. 14), вторая — формулой (5. 15). Воздушная волна достигает рассматриваемой удаленной точки в момент времени $t_1 = x$, в то время как волна, распространяющаяся в земле, приходит в ту же точку в более позднее время $t_2 = z$.

Если n велико, то начальная величина и скорость становления напряжения в проводе определяются воздушной волной.

Временные функции $Z_1(t)$ и $Z_2(t)$ получаются при помощи обратных преобразований Лапласа из уравнений (5. 14) и (5. 15). Они определяются с помощью следующих формул (Бхаттачария, 1957):

$$\frac{e^{-z(s^2+bs)^{\frac{1}{2}}}}{s} = e^{-\left(\frac{b}{2}\right)z} + \frac{bz}{2}\int_z^t e^{-\frac{bt}{2}} g(t, z)\,dt, \quad (t > z) \tag{5.17}$$

$$\frac{(s^2+bs)^{\frac{1}{2}}}{s} e^{-z(s^2+bs)^{\frac{1}{2}}} = \frac{b}{2}\left(1+\frac{bz}{4}\right)e^{-\frac{bz}{2}} - \frac{b}{2}\int_z^t e^{-\frac{bt}{2}} g(t, z)\,dt - \frac{bz}{2}\int_z^t e^{-\frac{bt}{2}}\left[\frac{\partial}{\partial z} g(t, z)\right]dt, \quad (t > z) \tag{5.18}$$

$$\frac{(s^2+bs)}{s} e^{-z(s^2+bs)^{\frac{1}{2}}} = \frac{b^3z}{16}\left(1+\frac{bz}{8}\right)e^{-\frac{bz}{2}} + b\int_z^t e^{-\frac{bt}{2}}\left[\frac{\partial}{\partial z} g(t, z)\right]dt + \frac{bz}{2}\int_z^t e^{-\frac{bt}{2}} \times \left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} g(t, z)\right]dt, \quad (t > z) \tag{5.19}$$

$$\frac{e^{-z(s^2+bs)^{\frac{1}{2}}}}{s+m} = e^{-mt}e^{-\left(\frac{b}{2}-m\right)z} + \frac{bz}{2}e^{-mt}\int_z^t e^{\left(m-\frac{b}{2}\right)t} g(t, z)\,dt, \quad (t > z) \tag{5.20}$$

$$\frac{(s^2+bs)^{\frac{1}{2}}}{(s+m)} e^{-z(s^2+bs)^{\frac{1}{2}}} = e^{-mt-\left(\frac{b}{2}-m\right)z}\left(\frac{b}{2}-m+\frac{b^2z}{8}\right) - \frac{b}{2}e^{-mt}\int_z^t e^{\left(m-\frac{b}{2}\right)t} g(t, z)\,dt - \frac{bz}{2}e^{-mt}\int_z^t e^{\left(m-\frac{b}{2}\right)t}\left[\frac{\partial}{\partial z} g(t, z)\right]dt, \quad (t > z) \tag{5.21}$$

$$\frac{(s^2+bs)}{(s+m)} e^{-z(s^2+bs)^{\frac{1}{2}}} = \left(m^2+\frac{b^3z}{16}+\frac{b^4z^2}{128}-\frac{mb^2z}{8}-mb\right) \times e^{-mt-\left(\frac{b}{2}-m\right)z} + be^{-mt}\int_z^t e^{\left(m-\frac{b}{2}\right)t}\left[\frac{\partial}{\partial z} g(t, z)\right]dt + \frac{bz}{2}e^{-mt}\int_z^t e^{\left(m-\frac{b}{2}\right)t}\left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} g(t, z)\right]dt, \quad (t > z) \tag{5.22}$$

где

$$g(t, z) = \frac{I_1\left[\frac{b}{2}(t^2-z^2)^{\frac{1}{2}}\right]}{(t^2-z^2)^{\frac{1}{2}}},$$

а $I_1\left[\frac{b}{2}(t^2-z^2)^{\frac{1}{2}}\right]$ — функция Бесселя первого порядка от мнимого аргумента. С помощью равенств (5. 17)—(5. 22) можно записать:

$$Z_1(t) = 3 - [3(1-mx) + m^2x^2]\, e^{-m(t-x)}, \quad (t > x) \qquad (5.23)$$

и

$$Z_2(t) = \left[3 + \frac{3bz}{2}\left(1+\frac{bz}{4}\right) + \frac{b^3z^3}{16}\left(1+\frac{bz}{8}\right)\right]\times$$
$$\times e^{-\frac{bz}{2}}[1-e^{-m(t-z)}] - mz\left[mz - 3 - \frac{b^2z^2}{8} - bz\right]\times$$
$$\times e^{-mt-\left(\frac{b}{2}-m\right)z} + \frac{bz^2}{2}e^{-mt}\int_z^t e^{\left(m-\frac{b}{2}\right)t}\times$$
$$\times\left[\frac{\partial}{\partial z}g(t, z) - z\frac{\partial^2}{\partial z^2}g(t, z)\right]dt -$$
$$-\frac{bz^2}{2}\int_z^t e^{-\frac{b}{2}t}\left[\frac{\partial}{\partial z}g(t, z) - z\frac{\partial^2}{\partial z^2}g(t, z)\right]dt, \quad (t > z). \qquad (5.24)$$

Далее подставим

$$b_1 = bz = \sigma_1\varrho\sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}} \quad \text{и} \quad t_1 = \frac{t}{z}$$

в выражение (5. 24). Можно показать, что b_1 — безразмерный параметр и, следовательно, величина

$$mz = \frac{n^2}{n^2-1}b_1$$

также будет безразмерной. Формула (5. 24) перепишется тогда следующим образом:

$$Z_2(t_1) = \left[3 + \frac{3b_1}{2}\left(1+\frac{b_1}{4}\right) + \frac{b_1^3}{16}\left(1+\frac{b_1}{8}\right)\right]e^{-\frac{b_1}{2}}\times$$
$$\times[1-e^{-mz(t_1-1)}] - mz\left(mz - 3 - \frac{b_1^2}{8} - b_1\right)e^{-\frac{b_1}{2}}\cdot e^{-mz(t_1-1)} +$$
$$+\frac{b_1^3}{8}e^{-mzt_1}\int_1^{t_1} e^{\left(mz-\frac{b_1}{2}\right)t_1} f(t_1)\,dt_1 -$$
$$-\frac{b_1^3}{8}\int_1^{t_1} e^{-\frac{b_1t_1}{2}} f(t_1)\,dt_1, \quad (t_1 > 1), \qquad (5.25)$$

где

$$f(t_1) = \frac{8}{b_1(t_1^2-1)^2}I_0\left(\frac{b_1}{2}\sqrt{t_1^2-1}\right) -$$
$$-\frac{1}{b_1^2}\left[\frac{32+b_1^2(t_1^2-1)}{(t_1^2-1)^{\frac{5}{2}}}\right]I_1\left(\frac{b_1}{2}\sqrt{t_1^2-1}\right).$$

Точно также можно показать, что подстановка $t_2 = \frac{t}{x}$ в выражение (5. 23) приводит к равенству:

$$Z_1(t_2) = 3 - [3(1-mx) + m^2x^2]\, e^{-mx(t_2-1)}. \quad (t_2 > 1). \qquad (5.26)$$

Очевидно, что $t_2 = n\,t_1$. Так как интегралы в (5. 25) не выражаются в конечном виде, их приходится вычислять методами численного интегрирования.

Величина интеграла

$$\int_1^{t_1} e^{-\frac{b_1t_1}{2}} f(t_1)\,dt, \quad (t_1 > 1),$$

всегда очень мала и при увеличении t_1 быстро приближается к значению интеграла при $t_1 = \infty$. Последний можно вычислить при помощи следующей формулы:

$$\int_z^\infty e^{-pt}g(t, z)\,dt = \frac{e^{-z\left(p^2-\frac{b^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}}} - e^{-zp}}{\frac{bz}{2}}. \qquad (5.27)$$

Дифференцируя выражение (5. 27) два раза по z, получим:

$$\int_z^\infty e^{-pt}\frac{\partial}{\partial z}g(t, z)\,dt = \frac{b}{4}e^{-pz} + \frac{2}{bz}e^{-pz}\left(p+\frac{1}{z}\right) -$$
$$-\frac{2}{bz}e^{-z\left(p^2-\frac{b^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}}}\left[\left(p^2-\frac{b^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{z}\right] \qquad (5.28)$$

и

$$\int_z^\infty e^{-pt}\frac{\partial^2}{\partial z^2}g(t, z)\,dt = -\left[\frac{bp}{4} + \frac{b^3z}{64} + \frac{2}{b}\left(\frac{p^2}{z} + \frac{2p}{z^2} + \frac{2}{z^3}\right)\right]e^{-pz} +$$
$$+\frac{2}{b}\left[\frac{p^2-\frac{b^2}{4}}{z} + \frac{2\left(p^2-\frac{b^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}}}{z^2} + \frac{2}{z^3}\right]e^{-z\left(p^2-\frac{b^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}}}. \qquad (5.29)$$

Воспользовавшись формулами (5. 28) и (5. 29), найдем, что интеграл

$$J = \int_1^\infty e^{-\frac{b_1 t_1}{2}} f(t_1)\, dt_1 =$$

$$= \left[\frac{3}{b_1} + \frac{12}{b_1^2} + \frac{24}{b_1^3} + \frac{1}{2} + \frac{b_1}{16}\right] e^{-\frac{b_1}{2}} - \frac{24}{b_1^3}. \qquad (5.30)$$

На рис. 21 приводятся значения интеграла J в зависимости от b_1, из которой видно, что J остается малым для всех b_1. Если $t_1 \gg 1$, то можно с достаточной точностью принять, что $t_1 = \infty$ и использовать соотношение (5. 30) для определения $Z_2(t_1)$.

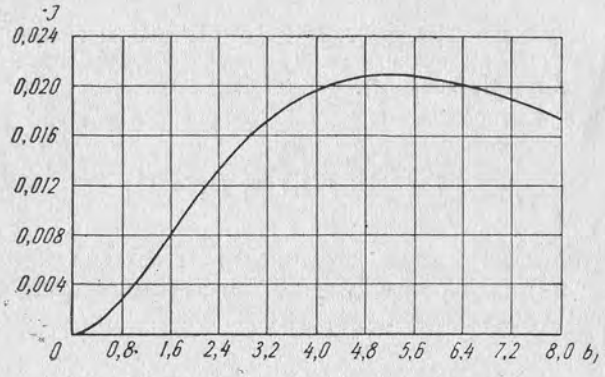


Рис. 21. График $-J$ в зависимости от b_1.

Другой интеграл в выражении (5. 25)

$$\frac{b_1^3}{8} e^{-mzt_1} \int_1^{t_1} e^{\left(mz - \frac{b_1}{2}\right) t_1} f(t_1)\, dt_1$$

неограниченно возрастает с увеличением времени. Однако величина произведения экспоненты и интеграла остается всегда малой из-за множителя e^{-mzt_1} перед интегралом и быстро приближается к нулю с увеличением времени.

На рис. 22 и 23 приводятся графики $Z_1\left(\frac{t}{x}\right) - Z_2\left(\frac{t}{x}\right)$ в зависимости от $\frac{t}{x}$ для разных значений $\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0}$. Графики построены по формулам (5. 25) и (5. 26) и полностью определяют искомый взаимный импеданс для ступенчатой формы тока. Напомним, что $Z_1\left(\frac{t}{x}\right)$ начинает устанавливаться с момента $t = x$, то есть когда $\frac{t}{x} = 1$, а $Z_2\left(\frac{t}{x}\right)$ начиная с момента $t = z = nx$, то есть когда $\frac{t}{x} =$

$= n = \left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0}\right)^{\frac{1}{2}}$. Внутри временного интервала $1 \leqslant \frac{t}{x} < n$ функция взаимного импеданса равна $\frac{1}{nb_1} Z_1(t)$. Из графиков видно,

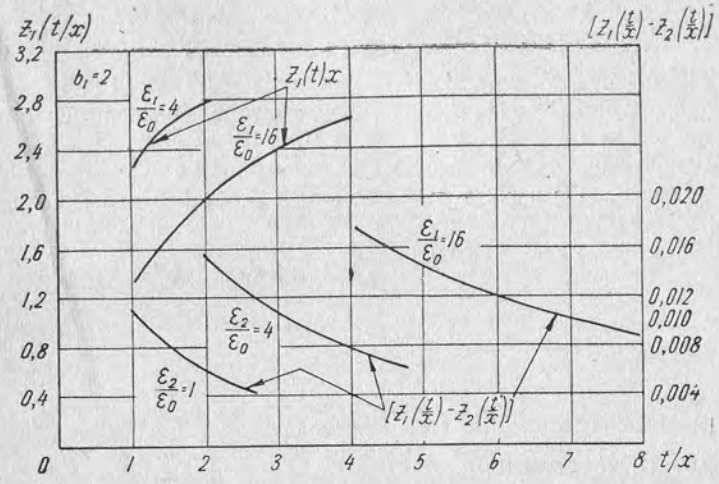


Рис. 22. Графики взаимного импеданса для $b_1 = 2$ и $n^2 = 1$, 4 и 16.

что начальная величина этой функции конечна. Функция непрерывно возрастает до прибытия волны, распространяющейся в земле. С момента $\frac{t}{x} \geqslant n$ функция взаимного импеданса равна

$$\frac{1}{nb_1} \left[Z_1\left(\frac{t}{x}\right) - Z_2\left(\frac{t}{x}\right)\right].$$

Это выражение резко уменьшается до очень малых значений при $t = nx$ и со временем постепенно стремится к нулю. Из-за малой величины импеданса $Z_1\left(\frac{t}{x}\right) - Z_2\left(\frac{t}{x}\right)$ с момента $t = nx$ он нанесен на рис. 22 в увеличенном масштабе, когда $b_1 = 2$. Для $b_1 \leqslant 0{,}4$ разность $Z_1\left(\frac{t}{x}\right) - Z_2\left(\frac{t}{x}\right)$ принимает пренебрежимо малые значения и поэтому на рис. 23 она не показана.

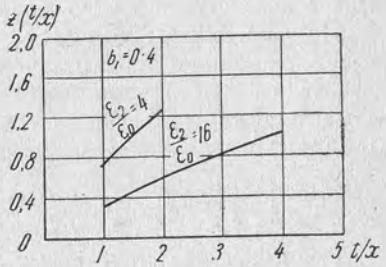


Рис. 23. Графики взаимного импеданса для $b_1 = 0{,}4$ и $n^2 = 4$ и 16.

Разберем случай, когда диэлектрические проницаемости земли и воздуха равны. С помощью (5. 12) и (5. 13) можно показать, что

$$Z_1(t_1) = 3, \quad (t_1 > 1) \qquad (5.32)$$

и

$$Z_2(t_1) = \left[3 + \frac{3b_1}{2}\left(1 + \frac{b_1}{4}\right) + \frac{b_1^3}{16}\left(1 + \frac{b_1}{8}\right)\right] e^{-\frac{b_1}{2}} -$$

$$- \frac{b_1^3}{8} \int_1^{t_1} e^{-\frac{b_1 t_1}{2}} f(t_1)\, dt_1, \quad (t_1 > 1); \tag{5.33}$$

где $b_1 = bz = bx$. Как $Z_1(t_1)$, так и $Z_2(t_1)$ начинают устанавливаться при $t_1 = 1$ и вследствие этого функция взаимного импеданса все время мала (рис. 22).

Рассмотрим случай, когда электропроводность земли $\sigma_1 = 0$. Подставив $\sigma_1 = 0$ в (5. 10), найдем для функции взаимного импеданса:

$$Z(s) = -\frac{dSdl}{2\pi\varrho^4(\varepsilon_1 - \varepsilon_0)s^2}\left[(3 + 3xs + x^2s^2)e^{-xs} -\right.$$

$$\left. - (3 + 3zs + z^2s^2)e^{-zs}\right]. \tag{5.34}$$

Подстановка

$$Z_m(s) = -\frac{\varrho^3}{60dSdl} Z(s)$$

приводит к выражению

$$Z_m(t) = \frac{3t}{(n^2-1)x}\left[u(t-x) - u(t-nx)\right], \tag{5.35}$$

где $u(t-x)$ есть функция, скачкообразно возрастающая от 0 до 1 при $t = x$. Величина $Z_m(t)$ имеет поэтому начальное значение при $t = x$ равное $\frac{3}{n^2-1}$, затем линейно возрастает до $\frac{3n}{n^2-1}$ при $t = nx$, после чего резко падает до нуля.

Из рис. 22 и 23 видно, что функция взаимного импеданса имеет конечное начальное значение и непрерывно возрастает вплоть до прихода волны, распространяющейся в земле. В этот момент функция резко падает до очень малой величины и затем начинает со временем приближаться к нулю. Начальная величина импеданса равна $\frac{1}{nb_1} Z_1(1)$, если $n \neq 1$, и $\frac{1}{b_1}[Z_1(1) - Z_2(1)]$, если $n = 1$.

Воспользовавшись формулами (5. 26), (5. 32) и (5. 33), получим:

$$Z_m(x) = \frac{1}{nb_1}[3mx - m^2x^2], \quad (n \neq 1) \tag{5.36}$$

и

$$Z_m(x) = \frac{1}{b_1}\left\{3 - \left[3 + \frac{3b_1}{2}\left(1 + \frac{b_1}{4}\right) +\right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{b_1^3}{16}\left(1 + \frac{b_1}{2}\right)\right] e^{-\frac{b_1}{2}}\right\}. \quad (n = 1). \tag{5.37}$$

Выражение (5. 36) можно переписать следующим образом:

$$Z_m(x) = \frac{3}{(n^2-1)} - \frac{nb_1}{(n^2-1)^2}. \tag{5.38}$$

Начальная величина $Z_m(x)$, связанная с той частью волны, которая распространяется в воздухе, существенно зависит от значений электропроводности земли и соотношения диэлектрических постоянных земли и воздуха. На рис. 24 изображена зависимость $Z_m(x)$ от b_1 для различных n. Для данного n увеличение b_1 может быть вызвано увеличением электропроводности. Возрастание электропроводности ведет к уменьшению тангенциальной компоненты электрического поля и, следовательно, к уменьшению взаимного импеданса. При этом принято, что точка наблюдения находится на поверхности земли.

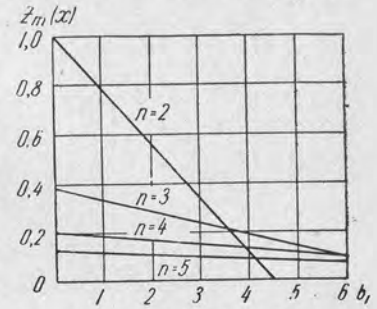


Рис. 24. Графики $Z_m(x)$ в зависимости от b_1.

Применив соотношение (1. 13), получим следующее выражение для э. д. с., индуцированной в приемной рамке с площадью dS_1, на расстоянии ϱ от начала координат:

$$v_0(s) = -\mu_0 s H_z dS_1 = -\frac{IdSdS_1}{2\pi\varrho^5}\frac{1}{[\sigma_1 + (\varepsilon_1 - \varepsilon_0)s]} \times$$

$$\times[(9 + 9k_1\varrho + 4k_1^2\varrho^2 + k_1^3\varrho^3)e^{-k_1\varrho} - (9 + 9k_0\varrho + 4k_0^2\varrho^2 +$$

$$+ k_0^3\varrho^3)e^{-k_0\varrho}]. \tag{5.39}$$

Если в генераторной рамке протекает ступенчатый ток, имеющий амплитуду I_1, то

$$v_0(s) = \frac{60 I_1 dSdS_1}{\varrho^4}\frac{1}{nb_1}[v_1(s) - v_2(s)], \tag{5.40}$$

где

$$v_1(s) = \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+m}\right)(9 + 9xs + 4x^2s^2 + x^3s^3)e^{-xs} \tag{5.41}$$

и

$$v_2(s) = \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+m}\right)\left\{9 + 9z[s(s+b)]^{\frac{1}{2}} + 4z^2 s(s+b) +\right.$$

$$\left. + z^3[s(s+b)]^{\frac{3}{2}}\right\} e^{-z(s^2+bs)^{\frac{1}{2}}}. \tag{5.42}$$

Подстановка

$$v(s) = \frac{\varrho^4}{60 I_1 dSdS_1} v_0(s) \tag{5.43}$$

приводит к выражению

$$v(s) = \frac{1}{nb_1}[v_1(s) - v_2(s)]. \qquad (5.44)$$

Так же как и для переходного взаимного импеданса, э. д. с. $v_1(t)$ возникает в момент $t = x$, а э. д. с. $v_2(t)$ — когда $t = z$. Из (5. 41) получим:

$$v_1(t_2) = 9 - (9 - 9mx + 4m^2x^2 - m^3x^3)\, e^{-mx(t_2-1)}, \quad (t_2 > 1), \qquad (5.45)$$

где $t_2 = \frac{t}{x}$. Для определения $v_2(t)$ в дополнение к формулам (5. 17) — (5. 22) воспользуемся следующим равенством:

$$\frac{(s^2+bs)^{\frac{3}{2}}}{s} e^{-z(s^2+bs)^{\frac{1}{2}}} = \frac{b^3}{16}\left(\frac{b^2z^2}{16} + \frac{b^3z^3}{192} - \frac{bz}{8} - 1\right)e^{-\frac{bz}{2}} -$$

$$- \frac{3b}{2}\int_z^t e^{-\frac{bt}{2}} \frac{\partial^2}{\partial z^2} g(t, z)\, dt - \frac{bz}{2}\int_z^t e^{-\frac{bt}{2}} \frac{\partial^3}{\partial z^3} g(t, z)\, dt. \qquad (5.46)$$

Теперь можно показать, что

$$v_2(t) = \left(e^{-\frac{bz}{2}} f_1(bz) - \frac{bz^2}{2}\int_z^t e^{-\frac{bt}{2}} f_2(t)\, dt - e^{-mt-\left(\frac{b}{2}-m\right)z} \times\right.$$

$$\times [f_1(bz) + f_3(mz)] + \frac{bz^2}{2} e^{-mt}\int_z^t e^{\left(m-\frac{b}{2}\right)t} f_2(t)\, dt, \quad (t > z), \qquad (5.47)$$

где

$$f_1(bz) = 9 + \frac{9}{2}bz + \frac{9}{8}b^2z^2 + \frac{3}{16}b^3z^3 + \frac{3}{128}b^4z^4 +$$

$$+ \frac{1}{256}b^5z^5 + \frac{1}{16\cdot 192}b^6z^6,$$

$$f_3(mz) = mz\left(4mz + \frac{3mbz^2}{2} + \frac{mb^2z^3}{8} - 9 - \frac{7}{8}b^2z^2 - 4bz -\right.$$

$$\left. - m^2z^2 - \frac{b^3z^3}{8} - \frac{b^4z^4}{128}\right)$$

и

$$f_2(t) = \left(\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial^2}{\partial z^2} + z^2\frac{\partial^3}{\partial z^3}\right) g(t, z).$$

Сделав подстановку $t_1 = \frac{t}{z}$ и $b_1 = bz$, получим:

$$v_2(t) = f_1(b_1)\, e^{-\frac{b_1}{2}} - [f_1(b_1) + f_3(mz)]\, e^{-mz(t_1-1)-\frac{b_1}{2}} -$$

$$- \frac{b_1}{2}\int_1^{t_1} e^{-\frac{b_1t_1}{2}} \varphi(t_1)\, dt_1 + \frac{b_1}{2} e^{-mzt_1}\int_1^{t_1} e^{\left(mz-\frac{b_1}{2}\right)t_1} \times$$

$$\times \varphi(t_1)\, dt_1, \quad (t_1 > 1), \qquad (5.48)$$

где

$$\varphi(t_1) = \left[\frac{b_1^2(t_1^2+3)-16}{2(t_1^2-1)^{\frac{5}{2}}} + \frac{24(t_1^2+1)}{(t_1^2-1)^{\frac{7}{2}}}\right] I_1\left(\frac{b_1}{2}\sqrt{t_1^2-1}\right) -$$

$$- \left[\frac{4b_1(t_1^2+2)}{(t_1^2-1)^3} + \frac{b_1^3}{8(t_1^2-1)^2}\right] I_0\left(\frac{b_1}{2}\sqrt{t_1^2-1}\right). \qquad (5.49)$$

Интегралы в (5. 48) столь же сложны, как и в (5. 25), из-за чего они вычисляются методами численного интегрирования. С возрастанием времени величины второго и последнего членов в (5. 48) монотонно приближаются к нулю, что обусловлено множителем e^{-mzt_1}. Третий член, наоборот, быстро стремится к своему значению при $t_1 = \infty$. Его можно вычислить при помощи формул (5. 28) — (5. 29) и соотношения:

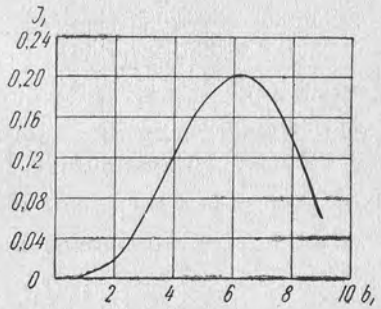


Рис. 25. Графики J_1 в зависимости от b_1.

$$\int_z^\infty e^{-pt} \frac{\partial^3}{\partial z^3} g(t, z)\, dt = \left[\frac{b^5z^2}{96\cdot 16} + \frac{pb^3z}{64} + \frac{p^2b}{4} - \frac{b^3}{32} +\right.$$

$$\left. + \frac{2}{b}\left(\frac{p^3}{z} + \frac{3p^2}{z^2} + \frac{6p}{z^3} + \frac{6}{z^4}\right)\right] e^{-pz} -$$

$$- \frac{2}{b}\left[\frac{\left(p^2-\frac{b^2}{4}\right)^{\frac{3}{2}}}{z} + \frac{3\left(p^2-\frac{b^2}{4}\right)}{z^2} + \frac{6\left(p^2-\frac{b^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}}}{z^3} + \frac{6}{z^4}\right] \times$$

$$\times e^{-z\left(p^2-\frac{b^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}}}. \qquad (5.50)$$

В итоге получим, что

$$J_1 = \int_1^\infty e^{-\frac{b_1t_1}{2}} \varphi(t_1)\, dt_1 =$$

$$= e^{-\frac{b_1}{2}}\left[\frac{18}{b_1} + 9 + \frac{9b_1}{4} + \frac{3b_1^2}{8} + \frac{3b_1^3}{64} + \frac{b_1^4}{128} + \frac{b_1^5}{96.16}\right] - \frac{18}{b_1}. \qquad (5.51)$$

Из графика для J_1 в зависимости от b_1 (рис. 25) видно, что конечная величина интеграла ощутима лишь для небольшого диапазона b_1. При $b_1 > 10$, J_1 становится отрицательным, оставаясь малым по абсолютной величине. По формулам (5. 45) и (5. 48)

построены графики $[v_1(t) - v_2(t)]$ в зависимости от $\frac{t}{x}$, характеризующие изменение индуцированной э. д. с. в зависимости от времени для фиксированных значений $\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0}$ и b_1 (рис. 26, 27). В интервале времени $1 \leqslant \frac{t}{x} \leqslant n$ индуцированная э. д. с. равна $\frac{1}{nb_1} v_1(t)$ и обладает конечной начальной величиной, зависящей от электропроводности, диэлектрической постоянной земли и расстояния между генераторной и приемной рамками. Когда $\frac{t}{x} \geqslant n$, индуцированная э. д. с. уменьшается до очень малой величины из-за действия $v_2(t)$. Когда $b_1 = 0{,}4$ или меньше постоянной, $v_1(t)$ становится практически равной нулю для $\frac{t}{x} \geqslant n$ и средних значениях $\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0}$.

Когда $\varepsilon_1 = \varepsilon_0$, можно показать, что

$$v_1(t_1) = 9, \quad (t_1 > 1), \tag{5.52}$$

$$v_2(t) = e^{-\frac{b_1}{2}} f_1(b_1) - \frac{b_1}{2} \int_1^{t_1} e^{-\frac{b_1 t_1}{2}} \varphi(t_1)\, dt_1, \quad (t_1 > 1) \tag{5.53}$$

и

$$v(t) = \frac{1}{b_1} [v_1(t_1) - v_2(t_1)], \tag{5.54}$$

где $t_1 = \frac{t}{x}$. Величина $v(t)$ мала для средних значений b_1.

В случае, когда землю можно рассматривать как хороший диэлектрик ($\sigma_1 = 0$), для индуцированной э. д. с. найдем:

$$v(t) = \frac{1}{(n^2-1)} [9t_2 u(t_2 - 1) - 9t_2 u(t_2 - n)]. \tag{5.55}$$

Следовательно, индуцированная э. д. с. линейно возрастает от своей начальной величины $\frac{9}{n^2-1}$ до $\frac{9n}{n^2-1}$ при $t_2 = n$, после чего резко спадает к нулю.

Начальные значения величины $v(t)$ определяются с помощью формул (5.45) и (5.54):

$$v(x) = \frac{1}{nb_1} (9mx - 4m^2x^2 + m^3x^3), \quad (n \neq 1) \tag{5.56}$$

и

$$v(x) = \frac{1}{b_1} \left[9 - \left(9 + \frac{9b_1}{2} + \frac{9b_1^2}{8} + \frac{3b_1^3}{16} + \frac{3b_1^4}{128} + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{b_1^5}{256} + \frac{b_1^6}{16 \cdot 192} \right) e^{-\frac{b_1}{2}} \right], \quad (n = 1) \tag{5.57}$$

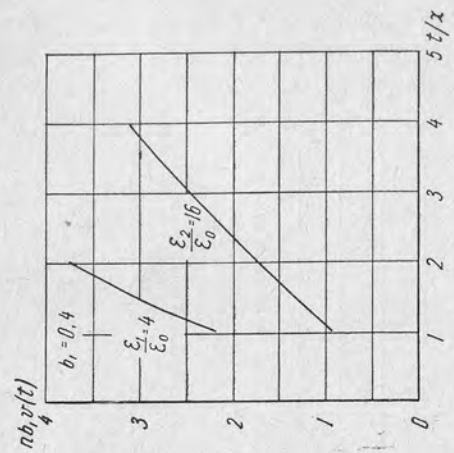


Рис. 27. Графики $nb_1v(t)$ в зависимости от $\frac{t}{x}$ для $b_1 = 0{,}4$ и $n^2 = 4$ и 16.

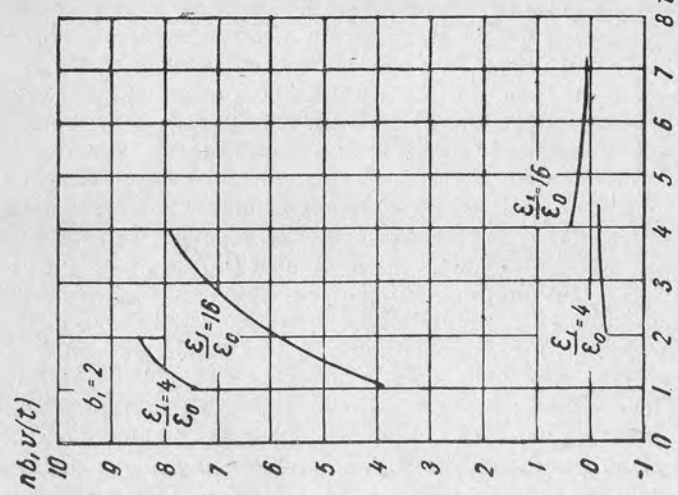


Рис. 26. Графики $nb_1v(t)$ в зависимости от $\frac{t}{x}$ для $b_1 = 2$ и $n^2 = 4$ и 16.

Выражение (5. 56) можно представить в следующей форме:

$$v(x) = \frac{1}{(n^2-1)}\left[9 - \frac{4nb_1}{n^2-1} + \frac{n^2 b_1^2}{(n^2-1)^2}\right]. \qquad (5.58)$$

На рис. 28 изображены кривые $v(x)$ в зависимости от b_1 для различных n. Кривая $v(x)$ в зависимости от b_1 для $n = 1$ не приведена из-за очень малой ее величины для этого случая. Таким образом, переходные характеристики взаимного импеданса и в приемной рамке заключают в себе информацию об электропроводности и диэлектрической постоянной земли. Интервал времени, в течение которого величина этих двух функций поддается измерению, зависит от n — показателя преломления на границе раздела земля — воздух.

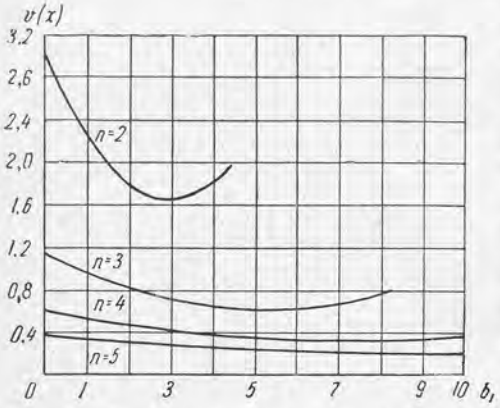


Рис. 28. График $v(x)$ в зависимости от b_1 для $n=2$, 3, 4 и 5.

Величину n можно определить по экспериментальным кривым, аналогичным тем, которые приводятся здесь. Кроме того, начальные амплитуды обеих рассматриваемых функций определяются величинами n и b_1. Следовательно, если n известно, то можно оценить b_1. Из выражения для b_1 следует, что b_1 прямо пропорционально электропроводности земли при постоянном расстоянии между источником и точкой наблюдения и постоянном показателе преломления двух сред. Последние две величины известны заранее, и σ_1 можно легко вычислить по измеренному значению b_1.

Начальная амплитуда функции взаимного импеданса уменьшается с увеличением электропроводности σ_1 для фиксированной диэлектрической постоянной ε_1. С увеличением электропроводности тангенциальная составляющая электрического поля постепенно уменьшается, и соответственно будет уменьшаться напряжение на концах провода малой длины.

С другой стороны, начальная амплитуда индуцированной э. д. с., определяемая по крутизне кривой магнитного поля в момент $t = x$, уменьшается с увеличением σ_1, достигает минимального значения и затем начинает возрастать с увеличением σ_1.

Глава III

МАГНИТНЫЙ ДИПОЛЬ И ГОРИЗОНТАЛЬНО-СЛОИСТЫЕ СРЕДЫ

В главе III собраны решения для магнитных диполей в присутствии горизонтальнослоистых сред. Наибольшее внимание уделяется случаю двухслойной среды (в числе слоев воздух не учитывается). Рассмотрено несколько общих решений для вертикального магнитного диполя над двухслойной средой, которые получены различными приемами. Общие решения изучаются для ряда частных случаев.

На основе идей Прайса (гл. I) рассчитывается вторичное поле для двухслойной среды (Бхаттачария, 1955). Здесь же используются тезисы Гапта (Gupta, 1958), касающиеся решения для трехслойной среды. Уэйт (1951, 1952d) проводит вычисления вторичного поля над двухслойным разрезом обычным приемом с помощью вектор-потенциала. Им рассматривается также случай тонкого пласта (1953a).

В работе Йосидзуми и др. (1959) анализируется поле в центре горизонтальной петли на поверхности двухслойной и трехслойной среды. Они же разбирают приемы интерпретации. О первой части этой работы уже говорилось в главе II.

Модель геоэлектрического разреза в виде двух слоев с постоянными электрическими свойствами не всегда оправдывает себя. Слихтер (1951) дает решение для вертикального магнитного диполя, расположенного над двухслойной средой, когда электрические свойства верхнего слоя изменяются по произвольному закону.

Слихтер и Кнопов (Slichter, Knopoff, 1959) приводят подробный числовой и графический материал, относящийся к полю вертикального магнитного диполя над двухслойной средой.

Решение для горизонтального магнитного диполя и формулы для взаимного импеданса рамок над двухслойной средой приводятся Уэйтом (1953a, 1958).

Неустановившиеся процессы в электромагнитных полях разбираются по работам Уэйта (1951) и Петра (Petr, 1959).

Электромагнитным полям в области слоистых сред посвящена обширная отечественная литература. Это работы Тихонова, Шахсуварова, Мухиной и Скугаревской (1950, 1956, 1958, 1959), Гасаненко, Шолпо и Молочнова (1958, 1959, 1960), Павинского и Козулина (1956), Шейнманна и Франтова (1947, 1958), Ваньяна (1957, 1959), Гельфанда (1955) и др.

§ 1. Вертикальный диполь. Решение Бхаттачарии

(Бхаттачария, 1955; Гапта, 1958)

1. Общее решение для двухслойной среды. Над полупространством, электропроводность которого является функцией глу-

бины*, расположен источник магнитного поля. Возьмем систему цилиндрических координат (ϱ, φ, z), ось Oz которой вертикальна (положительное направление — вниз). Пусть поверхность земли совпадает с плоскостью $z = 0$ и пусть источник расположен в точке $z = -h_0$. Уравнения Максвелла в системе единиц MKS записываются следующим образом:

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}, \tag{1.1}$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{H} = \sigma \boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}, \tag{1.2}$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{B} = 0, \tag{1.3}$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{E} = 0. \tag{1.4}$$

Токами смещения пренебрегаем. Среды будем считать немагнитными. Вследствие аксиальной симметрии электромагнитного поля компоненты B_φ, E_ϱ и E_z равны нулю. Если зависимость E и B от времени синусоидальна, можно записать, что

$$E = Re\,[E^* e^{i\omega t}] \tag{1.5}$$

$$B = Re\,[B^* e^{i\omega t}], \tag{1.6}$$

где E^* и B^* есть функции координат точки наблюдения, а ω — угловая частота.

С помощью (1. 1) и (1. 2) найдем уравнения, связывающие не равные нулю компоненты электрических и магнитных векторов:

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{B_\varrho}{\mu}\right) - \frac{\partial}{\partial \varrho}\left(\frac{B_z}{\mu}\right) = \sigma E_\varphi, \tag{1.7}$$

$$\frac{\partial E_\varphi}{\partial z} = i\omega B_\varrho \tag{1.8}$$

и

$$\frac{\partial E_\varphi}{\partial \varrho} + \frac{E_\varphi}{\varrho} = -i\omega B_z. \tag{1.9}$$

Из уравнений (1. 7), (1. 8) и (1. 9) получим:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial E}{\partial \varrho} - \left[\frac{1}{\varrho^2} + i\omega\mu\sigma\right] E = 0, \tag{1.10}$$

где под E подразумевается E_φ. Полагая $E = R(\varrho)\,Z(z)$ и подставляя значение E в (1. 10), получим два уравнения:

$$\frac{\partial^2 R}{d\varrho^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{dR}{\partial \varrho} + \left(\lambda^2 - \frac{1}{\varrho^2}\right) R = 0 \tag{1.11}$$

---

* В статье Бхаттачарии (1955) рассматривается случай μ и σ постоянных в пределах каждой среды. *Ред.*

и

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} - (\lambda^2 + i\omega\mu\sigma)\,Z = 0, \quad (z > 0). \tag{1.12}$$

Над поверхностью земли уравнение (1. 12) имеет вид:

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} - \lambda^2 Z = 0, \quad (z < 0). \tag{1.13}$$

Уравнение (1. 11) является уравнением Бесселя, решение которого $R(\varrho) = J_1(\varrho\lambda)$. Пусть $Z(z, \lambda)$ будет таким решением уравнения (1. 12), которое равно нулю на бесконечности. Из (1. 13) получим

$$Z = A^* e^{z\lambda} + B^* e^{-z\lambda}, \quad (z < 0). \tag{1.14}$$

Поэтому

$$\left.\begin{aligned} E_+ &= Z(z, \lambda)\,J_1(\varrho\lambda), \quad (z > 0), \\ E_- &= [A^* e^{z\lambda} + B^* e^{-z\lambda}]\,J_1(\varrho\lambda). \quad (z < 0). \end{aligned}\right\} \tag{1.15}$$

Граничные условия на поверхности земли ($z = 0$) требуют, чтобы были непрерывны компоненты E_φ, B_ϱ и B_z. Из уравнений (1. 15) вследствие непрерывности E_+ и E_- при $z = 0$ имеем

$$Z(0, \lambda) = A^* + B^*. \tag{1.16}$$

На основании уравнения (1. 9) и условия (1. 16) следует, что нормальная компонента B_z магнитного поля непрерывна при $z = 0$. Непрерывность B_ϱ приводит в соответствии с (1. 8) к равенству:

$$\left(\frac{\partial E_+}{\partial z}\right)_{z=0} - \left(\frac{\partial E_-}{\partial z}\right)_{z=0} = 0,$$

откуда

$$Z'(0, \lambda) = \lambda(A^* - B^*). \tag{1.17}$$

Итак, над поверхностью земли ($z < 0$):

$$H_\varrho = -\frac{1}{i\omega\mu}[A^* e^{z\lambda} - B^* e^{-z\lambda}]\frac{d}{d\varrho} J_0(\varrho\lambda), \tag{1.18}$$

$$H_z = -\frac{1}{i\omega\mu} J_0(\varrho\lambda)\frac{d}{dz}[A^* e^{z\lambda} - B^* e^{-z\lambda}]. \tag{1.19}$$

Следовательно, напряженность магнитного поля можно выразить через градиент скалярного потенциала Ω:

$$\Omega = -[A^* e^{z\lambda} + B^* e^{-z\lambda}]\,J_0(\varrho\lambda), \tag{1.20}$$

где λ вещественно и положительно,

$$A = -\frac{A^*}{i\omega\mu} \text{ и } B = \frac{B^*}{i\omega\mu}, \tag{1.21}$$

а Ω является решением уравнения Лапласа $\nabla^2 \Omega = 0$ в области $h_0 < z < 0$; $Be^{-z\lambda}$ и $Ae^{z\lambda}$ соответствуют заданному первичному полю и индуцированным токам в однородном полупространстве. Задача состоит в том, чтобы выразить A и $Z(z, \lambda)$ через B, которое полагается известным.

Рассмотрим случай двухслойной среды, в которой два слоя имеют постоянные электропроводности σ_1 и σ_2. Уравнение (1. 12) для этих сред выглядит так:

$$\frac{\partial^2 Z_1}{\partial z^2} - u_1^2 Z_1 = 0, \quad (0 < z \leqslant h), \tag{1. 22}$$

$$\frac{\partial^2 Z_2}{\partial z^2} - u_2^2 Z_2 = 0, \quad (z \geqslant h), \tag{1. 23}$$

где

$$\left.\begin{aligned} u_1^2 &= \lambda^2 + i\omega\sigma_1\mu, \\ u_2^2 &= \lambda^2 + i\omega\sigma_2\mu, \end{aligned}\right\} \tag{1. 24}$$

причем Z_1 и Z_2 соответствуют верхней и нижней среде. Решения уравнений (1. 22) и (1. 23) имеют следующий вид:

$$Z_1 = \hat{a}e^{u_1 z} + \hat{b}e^{-u_1 z}, \quad (0 < z \leqslant h), \tag{1. 25}$$

$$Z_2 = \hat{c}e^{-u_2 z}, \quad (z \geqslant h), \tag{1. 26}$$

где член, содержащий $e^{u_2 z}$, опущен в силу условия, что $Z_2(z, \lambda)$ стремится к нулю, когда z стремится к бесконечности. На границе между двумя слоями ($z = h$):

$$Z_1(h, \lambda) = Z_2(h, \lambda) \tag{1. 27}$$

и

$$\left(\frac{\partial Z_1}{\partial z}\right)_{z=h} = \left(\frac{\partial Z_2}{\partial z}\right)_{z=h}. \tag{1. 28}$$

Применяя эти условия к уравнениям (1. 25) и (1. 26), получим:

$$\hat{a}e^{u_1 h} + \hat{b}e^{-u_1 h} = \hat{c}e^{-u_2 h} \tag{1. 29}$$

и

$$u_1(\hat{a}e^{u_1 h} - \hat{b}e^{-u_1 h}) = -u_2\hat{c}e^{-u_2 h}. \tag{1. 30}$$

С помощью (1. 29) и (1. 30) можно выразить $\hat{a}$ и $\hat{b}$ через $\hat{c}$:

$$\hat{a} = \frac{\hat{c}}{2}e^{-(u_1+u_2)h}\left(1 - \frac{u_2}{u_1}\right), \tag{1. 31}$$

$$\hat{b} = \frac{\hat{c}}{2}e^{-(u_2-u_1)h}\left(1 + \frac{u_2}{u_1}\right). \tag{1. 32}$$

Тогда для $Z_1(z, \lambda)$ можно записать:

$$Z_1(z, \lambda) = \frac{\hat{c}}{2}\left(1 - \frac{u_2}{u_1}\right)e^{-(u_1+u_2)h+u_1 z} + \\ + \frac{\hat{c}}{2}\left(1 + \frac{u_2}{u_1}\right)e^{-(u_2-u_1)h-u_1 z}. \tag{1. 33}$$

Подставляя величину $Z_1(0, \lambda)$ в уравнения (1. 16) и (1. 17), которые удовлетворяют граничным условиям, будем иметь:

$$Z_1(0, \lambda) = \frac{\hat{c}}{2}\left(1 - \frac{u_2}{u_1}\right)e^{-(u_1+u_2)h} + \\ + \frac{\hat{c}}{2}\left(1 + \frac{u_2}{u_1}\right)e^{-(u_2-u_1)h} = A^* + B^* \tag{1. 34}$$

и

$$Z_1'(0, \lambda) = \frac{\hat{c}u_1}{2}\left[\left(1 - \frac{u_2}{u_1}\right)e^{-(u_1+u_2)h} - \\ - \left(1 + \frac{u_2}{u_1}\right)e^{-(u_2-u_1)h}\right] = \lambda(A^* - B^*). \tag{1. 35}$$

Выражая A^* и B^* через A и B, найдем:

$$\left.\begin{aligned} -i\omega\mu(A - B) &= \frac{\hat{c}}{2}D_1, \\ -i\omega\mu\lambda(A + B) &= \frac{\hat{c}u_1}{2}D_2, \end{aligned}\right\} \tag{1. 36}$$

где

$$D_1 = \left(1 - \frac{u_2}{u_1}\right)e^{-(u_1+u_2)h} + \left(1 + \frac{u_2}{u_1}\right)e^{-(u_2-u_1)h}$$

и

$$D_2 = \left(1 - \frac{u_2}{u_1}\right)e^{-(u_1+u_2)h} - \left(1 + \frac{u_2}{u_1}\right)e^{-(u_2-u_1)h}.$$

Из (1. 36) выведем, что

$$\left.\begin{aligned} A &= \frac{D_2 u_1 + D_1\lambda}{D_2 u_1 - D_1\lambda}B, \\ \hat{c} &= i\omega\mu\frac{4\lambda}{D_1\lambda - D_2 u_1}B. \end{aligned}\right\} \tag{1. 37}$$

Воспользовавшись (1. 20), можно записать скалярный потенциал вторичного магнитного поля над двухслойной средой ($h_0 < z < 0$):

$$\Omega_1 = -\frac{D_2 u_1 + D_1\lambda}{D_2 u_1 - D_1\lambda}Be^{z\lambda}J_0(\varrho\lambda). \tag{1. 38}$$

В случае однородного полупространства с электропроводностью σ_1, полагая $u_1 = u_2$, убеждаемся в том, что

$$\Omega_1 = -\frac{u_1 - \lambda}{u_1 + \lambda}Be^{z\lambda}J_0(\varrho\lambda). \tag{1. 39}$$

Эта формула тождественна выражению (5. 9, I). С помощью соотношений (1. 15), (1. 25), (1. 26), (1. 31), (1. 32) и (1. 37) запишем электрическое поле внутри проводящих слоев:

$$\left.\begin{aligned} E_+ &= i\,\omega\mu\,B\,\frac{2\lambda}{(D_1\lambda - D_2u_1)}\left[\left(1-\frac{u_2}{u_1}\right)e^{-(u_1+u_2)\,h+u_1z}+\right.\\ &\left.+\left(1+\frac{u_2}{u_1}\right)e^{-(u_2-u_1)\,h-u_1z}\right]J_1(\varrho\lambda), \quad (0\leqslant z\leqslant h),\\ E_+ &= i\,\omega\,\mu\,B\,\frac{4\lambda}{D_1\lambda-D_2u_1}\,e^{-u_2z}\,J_1(\varrho\lambda). \quad (z\geqslant h). \end{aligned}\right\} \quad (1.\,40)$$

Так как плотность индуцированных токов $i_{\varphi} = \sigma E$, ее можно определить в любой точке внутри проводника.

Используем полученные результаты для вычисления вторичного поля магнитного диполя. Пусть диполь имеет момент M_1, меняющийся синусоидально с периодом $\frac{2\pi}{\omega}$, и расположен в начале координат над двухслойной средой с электропроводностями σ_1 и σ_2. Потенциал первичного поля в точке с цилиндрическими координатами $(\varrho,\ z)$ определяется выражением:

$$\Omega = -\frac{1}{4\pi}\,M_1\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right), \qquad (1.\,41)$$

где

$$r^2 = \varrho^2 + z^2.$$

Так как

$$\frac{1}{r} = \int\limits_0^\infty e^{-z\lambda}\,J_0(\varrho\lambda)\,d\lambda,$$

можно записать, что

$$\Omega = M\int\limits_0^\infty e^{-z\lambda}\,J_0(\varrho\lambda)\,\lambda\,d\lambda, \qquad (1.\,42)$$

где $M = \frac{M_1}{4\pi}$. С помощью (1. 38) получим выражение потенциала вторичного поля:

$$\Omega_1 = M\int\limits_0^\infty \frac{D_2u_1+D_1\lambda}{D_2u_1-D_1\lambda}\,e^{z\lambda}\,J_0(\varrho\lambda)\,\lambda\,d\lambda. \qquad (1.\,43)$$

После алгебраических преобразований в (1. 43) будем иметь:

$$\Omega_1 = M\int\limits_0^\infty \frac{(u_2-u_1)(u_1+\lambda)+(u_1+u_2)(u_1-\lambda)\,e^{2hu_1}}{(u_2-u_1)(u_1-\lambda)+(u_1+u_2)(u_1+\lambda)\,e^{2hu_1}}\times$$
$$\times e^{z\lambda}\,J_0(\varrho\lambda)\,\lambda\,d\lambda. \qquad (1.\,44)$$

Это выражение упрощается, во-первых, когда разница между электропроводностями двух слоев очень мала по сравнению со средней их электропроводностью и, во-вторых, когда нижний слой представлен средой-изолятором.

В случае однородного полупространства $u_1 = u_2 = u$ и из уравнения (1. 44) найдем:

$$\Omega_1' = M\int\limits_0^\infty \frac{u_1-\lambda}{u_1+\lambda}\,e^{z\lambda}\,J_0(\varrho\lambda)\,\lambda\,d\lambda. \qquad (1.\,45)$$

Эта формула аналогична формуле Гордона для вторичного поля, приводимой в пункте 2, § 1 гл. II.

2. Два слоя с небольшой разницей в сопротивлении. Допустим, что разница в электропроводностях σ_1 и σ_2 мала по сравнению со средней электропроводностью, то есть, что выполняется неравенство

$$\Delta\sigma = \sigma_2 - \sigma_1 \ll \frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}. \qquad (1.\,46$$

В этом случае подынтегральная функция в (1. 44) с достаточной точностью сводится к более простому выражению:

$$\Omega_1 = M\int\limits_0^\infty \left[\frac{(u_2-u_1)}{(u_2+u_1)}\,e^{-2u_1h}+\frac{(u_1-\lambda)}{(u_1+\lambda)}\right]e^{z\lambda}\,J_0(\varrho\lambda)\,\lambda\,d\lambda. \quad (1.\,47)$$

Поэтому потенциал вторичного поля можно записать в виде суммы:

$$\Omega_1 = \Omega_1' + \Omega_1'', \qquad (1.\,48)$$

где выражение для Ω_1' идентично с полученным в случае однородного полупространства, а Ω_1'' обусловлено влиянием слоистости. Так как случай однородного полупространства рассмотрен в § 1 гл. II, вычислим лишь вторичное поле, связанное с потенциалом

$$\Omega_1'' = M\int\limits_0^\infty \frac{u_2-u_1}{u_2+u_1}\,e^{-2hu_1+z\lambda}\,J_0(\varrho\lambda)\,\lambda\,d\lambda, \qquad (1.\,49)$$

приближенное значение которого на поверхности $z = 0$

$$\Omega_1'' = \frac{j\,\omega\mu\Delta\sigma\,M}{4}\int\limits_0^\infty e^{-2hu}\,J_0(\varrho\lambda)\,\frac{\lambda}{u^2}\,d\lambda, \qquad (1.\,50)$$

где $u = \frac{u_1+u_2}{2}$. Отсюда получим выражения для компонент магнитного поля на поверхности $z = 0$

$$H_\varrho'' = \frac{i\,\omega\mu\Delta\sigma\,M}{4}\int\limits_0^\infty \frac{e^{-2hu}}{u^2}\,J_1(\varrho\lambda)\,\lambda^2\,d\lambda, \qquad (1.\,51)$$

$$H_z'' = -\frac{i\,\omega\mu\Delta\sigma\,M}{4}\int\limits_0^\infty \frac{e^{-2hu}}{u^2}\,J_0(\varrho\lambda)\,\lambda^2\,d\lambda. \qquad (1.\,52)$$

Интегралы в (1. 50), (1. 51), (1. 52) можно выразить через интегралы, вычисленные Зоммерфельдом (стр. 42) и Фостером (Foster, 1931)*:

$$P = \int_0^\infty \frac{e^{-zu}}{u} J_0(\varrho\lambda)\,\lambda\,d\lambda = \frac{1}{r} e^{-\sqrt{i\omega\sigma\mu}\,r} \tag{1. 53}$$

и

$$N = \int_0^\infty e^{-zu} J_0(\varrho\lambda)\frac{d\lambda}{u} =$$

$$= I_0\left[\sqrt{i\omega\sigma\mu}\,\frac{(r-z)}{2}\right] K_0\left[\sqrt{i\omega\sigma\mu}\,\frac{(r+z)}{2}\right], \tag{1. 54}$$

где I_0 и K_0 — функции Бесселя от мнимого аргумента, $r^2 = \varrho^2 + z^2$ и $u^2 = \lambda^2 + i\omega\sigma\mu$. Отсюда

$$\Omega_1'' = \frac{i\omega\mu\Delta\sigma M}{4} \int_{2h}^\infty \frac{e^{-\sqrt{i\omega\sigma\mu}\,r}}{r}\,dz, \tag{1. 55}$$

$$H_\varrho'' = \frac{i\omega\mu\Delta\sigma M}{4}\,\frac{d}{d\varrho}\left(\int_{2h}^\infty \frac{e^{-\sqrt{i\omega\sigma\mu}\,r}}{r}\,dz\right), \tag{1. 56}$$

$$H_z'' = -\frac{i\omega\mu\Delta\sigma M}{4}\left[-\left(\frac{\partial N}{\partial z}\right)_{z=2h} - i\omega\sigma\mu\int_{2h}^\infty N dz\right]. \tag{1. 57}$$

3. Проводящий слой на основании-изоляторе. В этом случае $u_2 = \lambda$, и (1. 44) преобразуется следующим образом:

$$\Omega_1 = M\int_0^\infty \frac{(u_1^2-\lambda^2)(1-e^{2hu_1})}{(u_1-\lambda)^2-(u_1+\lambda)^2 e^{2u_1h}}\,e^{z\lambda} J_0(\varrho\lambda)\,\lambda\,d\lambda. \tag{1. 58}$$

Это выражение упростится, если допустить, что

$$(u_1+\lambda)^2 e^{2u_1h} \gg (u_1-\lambda)^2.$$

Тогда после преобразования (1. 58) получим:

$$\Omega_1 = M\int_0^\infty \frac{(\lambda^2-u_1^2)(1-e^{2hu_1})}{(\lambda+u_1)^2 e^{2hu_1}}\,e^{z\lambda} J_0(\varrho\lambda)\,\lambda\,d\lambda =$$

$$= M\int_0^\infty \frac{\lambda-u_1}{\lambda+u_1}\left(e^{-2hu_1}-1\right)e^{z\lambda} J_0(\varrho\lambda)\,\lambda\,d\lambda. \tag{1. 59}$$

---

* Компоненты электромагнитного поля на земной поверхности ($z = 0$) можно рассчитывать с помощью известного интеграла Фока (1926, 1933). В этих же работах академиком Фоком дан вывод интеграла, известного в иностранной литературе под названием интеграла Фостера. Некоторые преобразования, сделанные иностранными авторами, выполняются столь же просто с помощью формул Фока (см., например, работы Гасаненко, Козулина и др.). *Ред.*

Выделяя член Ω_1'', который появляется из-за неоднородности в электропроводности, найдем:

$$\Omega_1'' = M\int_0^\infty \frac{\lambda-u_1}{\lambda+u_1}\,e^{z\lambda-2hu_1} J_0(\varrho\lambda)\,\lambda\,d\lambda \tag{1. 60}$$

или

$$\Omega_1'' = -\frac{M}{i\omega\sigma_1\mu}\int_0^\infty (\lambda-u_1)^2 e^{z\lambda-2hu_1} J_0(\varrho\lambda)\,\lambda\,d\lambda. \tag{1. 61}$$

Отсюда получены выражения для потенциала и компонент вторичного магнитного поля на поверхности $z = 0$:

$$\Omega_1'' = -\frac{M}{i\omega\sigma_1\mu}\int_0^\infty (\lambda-u_1)^2 e^{-2hu_1} J_0(\varrho\lambda)\,\lambda\,d\lambda, \tag{1. 62}$$

$$H_\varrho'' = -\frac{M}{i\omega\sigma_1\mu}\int_0^\infty (\lambda-u_1)^2 e^{-2hu_1} J_1(\varrho\lambda)\,\lambda^2\,d\lambda \tag{1. 63}$$

и

$$H_z'' = \frac{M}{i\omega\sigma_1\mu}\int_0^\infty (\lambda-u_1)^2 e^{-2hu_1} J_0(\varrho\lambda)\,\lambda^2\,d\lambda. \tag{1. 64}$$

Интеграл

$$I = \int_0^\infty (\lambda-u_1)^2 e^{-2hu_1} J_0(\varrho\lambda)\,\lambda\,d\lambda \tag{1. 65}$$

можно представить в виде суммы трех интегралов:

$$I = I_1 + I_2 + I_3, \tag{1. 66}$$

где

$$\left.\begin{aligned} I_1 &= 2\int_0^\infty e^{-2hu_1} J_0(\varrho\lambda)\,\lambda^3\,d\lambda,\\ I_2 &= i\omega\sigma_1\mu\int_0^\infty e^{-2hu_1} J_0(\varrho\lambda)\,\lambda\,d\lambda,\\ I_3 &= 2\int_0^\infty \lambda^2 u_1 e^{-2u_1h} J_0(\varrho\lambda)\,d\lambda. \end{aligned}\right\} \tag{1. 67}$$

Интегралы I_1, I_2, I_3 можно выразить через интегралы P и N, определенные формулами (1. 53) и (1. 54):

$$\left.\begin{aligned} I_1 &= 2\left[\frac{d}{dz}\,\frac{1}{\varrho}\,\frac{d}{d\varrho}\left(\varrho\,\frac{dP}{d\varrho}\right)\right]_{z=2h},\\ I_2 &= -i\omega\sigma_1\mu\left(\frac{dP}{dz}\right)_{z=2h},\\ I_3 &= -2\,\frac{d^2}{dz^2}\left[\frac{1}{\varrho}\,\frac{d}{d\varrho}\left(\varrho\,\frac{dN}{d\varrho}\right)\right]_{z=2h}. \end{aligned}\right\} \tag{1. 68}$$

Следовательно, потенциал

$$\Omega_1'' = -\frac{M}{i\,\omega\sigma_1\mu}(I_1 + I_2 - I_3)$$

можно вычислить с помощью формул (1. 68). Тогда

$$H_\varrho'' = -\frac{M}{i\,\omega\sigma_1\mu}\frac{d}{d\varrho}(I_1 + I_2 - I_3). \qquad (1.\ 69)$$

Таким же путем можно найти, что

$$H_z'' = \frac{M}{i\,\omega\sigma_1\mu}(\hat{I}_1 + \hat{I}_2 + \hat{I}_3), \qquad (1.\ 70)$$

где

$$\left.\begin{aligned} \hat{I}_1 &= 2\int_0^\infty e^{-2hu_1} J_0(\varrho\lambda)\,\lambda^4\,d\lambda, \\ \hat{I}_2 &= i\omega\,\sigma_1\mu\int_0^\infty e^{-2hu_1} J_0(\varrho\lambda)\,\lambda^2\,d\lambda, \\ \hat{I}_3 &= 2\int_0^\infty \lambda^3 u_1 e^{-2u_1 h} J_0(\varrho\lambda)\,d\lambda. \end{aligned}\right\} \qquad (1.\ 71)$$

Эти три интеграла можно выразить через интегралы (1. 53) и (1. 54):

$$\left.\begin{aligned} \hat{I}_1 &= -2\frac{d}{dz}\frac{1}{\varrho}\frac{d}{d\varrho}\left\{\varrho\frac{d}{d\varrho}\left[\frac{1}{\varrho}\frac{d}{d\varrho}\left(\varrho\frac{dN}{d\varrho}\right)\right]\right\}_{z=2h}, \\ \hat{I}_2 &= i\,\omega\sigma_1\mu\left\{\frac{d}{dz}\left[\frac{1}{\varrho}\frac{d}{d\varrho}\left(\varrho\frac{dN}{d\varrho}\right)\right]\right\}_{z=2h}, \\ \hat{I}_3 &= -2\left\{\frac{d^2}{dz^2}\left[\frac{1}{\varrho}\frac{d}{d\varrho}\left(\varrho\frac{dP}{d\varrho}\right)\right]\right\}_{z=2h}, \end{aligned}\right\} \qquad (1.\ 72)$$

Отсюда можно вычислить H_z''.

4. Потенциал вторичного поля для трехслойной среды (Гапта, 1958). Потенциал трехслойной структуры рассматривается в виде суммы потенциала двухслойной среды и добавочного потенциала, появление которого вызвано влиянием третьего слоя. Потенциал для случая двухслойной среды считается известным. Приводятся формулы потенциала вторичного поля Ω_3, связанного с третьим слоем. Когда первый и третий слои имеют одинаковую проводимость и разница между проводимостями первого и второго слоя $\Delta\sigma$ мала, то

$$\Omega_3 = \frac{i\,\omega\mu\Delta\sigma\,M}{16\pi}\int_{2h_2}^{\infty} P dz,$$

где P — интеграл Зоммерфельда, а μ — магнитная проницаемость, одинаковая для всех трех слоев. Если первый и третий

слои имеют одинаковую электропроводность и разделены пластом, имеющим свойства изолятора,

$$\Omega_3 = \frac{M}{4\pi\,i\,\omega\mu\sigma_1}\left[Q_0 - aQ_1 + \frac{a^2}{2!}Q_2 + \frac{a^3}{3!}Q_3 + \dots\right],$$

где члены Q_0, Q_1, Q_2 являются комбинациями из интегралов Зоммерфельда и Фостера. С помощью выражений для потенциалов можно вычислить компоненты вторичного поля, обусловленного вертикальным магнитным диполем, расположенным на поверхности земли.

§ 2. Вертикальный диполь. Решение Уэйта

(Уэйт, 1951, 1952d, 1953a)

1. Общее решение для двухслойной среды. Пусть магнитный диполь или небольшая рамка ориентируется своей осью в направлении координатной оси Oz и располагается в начале системы цилиндрических координат (ϱ, ϕ, z). Диполь помещен на поверхности проводящей среды, для которой $z < 0$. Среда над верхней плоской границей раздела характеризуется электропроводностью, диэлектрической постоянной и магнитной проницаемостью σ_0, ε_0, μ; слой толщиной d имеет постоянные σ_1, ε_1, μ, основание — σ_2, ε_2, μ. Решение проводится в единицах системы MKS. Векторы напряженности поля $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ можно выразить через магнитный вектор-потенциал $\boldsymbol{F}$:

$$\boldsymbol{E} = -\operatorname{rot}\boldsymbol{F}, \qquad (2.\ 1)$$

$$\boldsymbol{H} = -(\sigma + i\,\omega\varepsilon)\boldsymbol{F} + \frac{1}{i\,\mu\omega}\operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{F}. \qquad (2.\ 2)$$

Временной множитель $e^{i\omega t}$ опущен.

Первичное поле вызвано магнитным диполем с моментом $\frac{IdS}{4\pi}$, где I — ток, текущий в рамке, а dS — площадь рамки. Первичный возбуждающий ток имеет только ϕ-составляющую, поэтому вектор-потенциал $\boldsymbol{F}$ имеет лишь z-составляющую. Для диполя, расположенного на границе двух сред, слагаемое вектор-потенциала, учитывающее особенность в точке $r = 0$, может быть выражено одной из двух приведенных ниже формул:

$$F_{\text{п}} = i\,\mu\omega\,IdS\frac{e^{-k_0 r}}{4\pi r} \quad (z \geqslant 0) \qquad (2.\ 3)$$

или

$$F_{\text{п}} = i\,\mu\omega\,IdS\frac{e^{-k_1 r}}{4\pi r}, \quad (-d \leqslant z \leqslant 0), \qquad (2.\ 4)$$

где

$$k_0 = (i\,\mu\sigma_0\omega - \varepsilon_0\mu\omega^2)^{\frac{1}{2}}, \quad k_1 = (i\,\mu\sigma_1\omega - \varepsilon_1\mu\omega^2)^{\frac{1}{2}},$$

и

$$r = (\varrho^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Результирующие вектор-потенциалы F_j в воздухе (среда 0), слое (среда 1) и подстилающей среде 2 должны удовлетворять волновому уравнению:

$$\frac{1}{\varrho}\frac{\partial}{\partial\varrho}\left(\varrho\frac{\partial F_j}{\partial\varrho}\right)+\frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial^2 F_j}{\partial\phi^2}+\frac{\partial^2 F_j}{\partial z^2}-k_j^2F_j=0, \qquad (2.5)$$

где

$$k_j=(i\sigma_j\mu\omega-\varepsilon_j\mu\omega^2)^{\frac{1}{2}}, \quad (j=0,\ 1,\ 2).$$

Решения этих уравнений вытекают из теории цилиндрических гармоник и являются произведениями следующих функций:

$$(A_\phi\cos n\phi+B_\phi\sin n\phi)\,[A_z e^{+(\lambda^2+k_j^2)^{\frac{1}{2}}z}+B_z e^{-(\lambda^2+k_j^2)^{\frac{1}{2}}z}]\times$$
$$\times[A_\varrho J_n(\varrho\lambda)+B_\varrho Y_n(\varrho\lambda)], \quad (n=0,\ 1,\ 2,\ 3\ldots). \qquad (2.6)$$

Поля должны быть конечными, когда $\varrho=0$, $z\neq 0$, так что решения не могут содержать функции Бесселя $Y_n(\varrho\lambda)$. Знак экспоненты выбирается так, чтобы исключить неконечные решения, когда $z\to\infty$. Интегрируя решения (2. 6) по всем значениям λ, получим общие выражения для вектор-потенциалов Fj, имеющих составляющие только в направлении оси $0z$:

$$F_0=M\frac{e^{-k_0r}}{r}+M\int_0^\infty\psi_1(\lambda)\,e^{-(\lambda^2+k_0^2)^{\frac{1}{2}}z}J_0(\varrho\lambda)\,d\lambda, \qquad (2.7)$$

$$F_1=M\frac{e^{-k_1r}}{r}+M\int_0\,[\psi_2(\lambda)\,e^{+(\lambda^2+k_1^2)^{\frac{1}{2}}z}+$$
$$+\psi_3(\lambda)\,e^{-(\lambda^2+k_1^2)^{\frac{1}{2}}z}]\,J_0(\varrho\lambda)\,d\lambda, \qquad (2.8)$$

$$F_2=M\int_0^\infty\psi_4(\lambda)\,e^{+(\lambda^2+k_1^2)^{\frac{1}{2}}z}J_0(\varrho\lambda)\,d\lambda, \qquad (2.9)$$

где

$$M=\frac{i\mu\omega IdS}{4\pi}.$$

Неизвестные функции $\psi(\lambda)$ определяются из граничных условий, согласно которым тангенциальные составляющие электрического и магнитного полей непрерывны при переходе через плоскую поверхность раздела. На основании формул (2. 1) и (2. 2) найдем:

$$E_{\phi j}=\frac{\partial F_j}{\partial\varrho}, \quad H_{\varrho j}=\frac{1}{i\mu\omega}\frac{\partial^2 F_j}{\partial\varrho\,\partial z}, \qquad (2.10)$$

после чего получим уравнения, следующие из граничных условий:

$$\frac{\partial F_0}{\partial\varrho}=\frac{\partial F_1}{\partial\varrho}, \quad \frac{\partial^2 F_0}{\partial\varrho\,\partial z}=\frac{\partial^2 F_1}{\partial\varrho\,\partial z}, \quad (z=0) \qquad (2.11)$$

и

$$\frac{\partial F_1}{\partial\varrho}=\frac{\partial F_2}{\partial\varrho}, \quad \frac{\partial^2 F_1}{\partial\varrho\,\partial z}=\frac{\partial^2 F_2}{\partial\varrho\,\partial z}, \quad (z=-d). \qquad (2.12)$$

Эти условия справедливы для всех значений ϱ, поэтому их можно проинтегрировать по ϱ. Функция F_j и ее производные убывают, когда ϱ стремится к бесконечности, из-за чего постоянная интегрирования должна равняться нулю. Поэтому условия (2. 11) и (2. 12) сводятся к следующим четырем уравнениям:

$$F_0=F_1, \quad \frac{\partial F_0}{\partial z}=\frac{\partial F_1}{\partial z}, \ (z=0) \qquad (2.13)$$

и

$$F_1=F_2, \quad \frac{\partial F_1}{\partial z}=\frac{\partial F_2}{\partial z}, \quad (z=-d). \qquad (2.14)$$

Выражения (2. 3), (2. 4) можно преобразовать с помощью интеграла Зоммерфельда:

$$\frac{e^{-k_0r}}{r}=\int_0^\infty\lambda(\lambda^2+k_0^2)^{-\frac{1}{2}}e^{-(\lambda^2+k_0^2)^{\frac{1}{2}}z}J_0(\varrho\lambda)\,d\lambda, \quad (z\geqslant 0),$$

$$\frac{e^{-k_1r}}{r}=\int_0^\infty\lambda(\lambda^2+k_1^2)^{-\frac{1}{2}}e^{+(\lambda^2+k_1^2)^{\frac{1}{2}}z}J_0(\varrho\lambda)\,d\lambda, \ (-d\leqslant z\leqslant 0).$$

Решая затем четыре уравнения (2. 13) и (2. 14) относительно $\psi_1(\lambda)$, $\psi_2(\lambda)$, $\psi_3(\lambda)$ и $\psi_4(\lambda)$, получим:

$$\psi_1(\lambda)=\frac{u_1}{u_0}\left[\left(1+\frac{u_0}{u_1}\right)\left(\frac{\lambda}{u_2}-\frac{\lambda}{u_1}\right)-\left(1-\frac{u_1}{u_2}\right)\left(\frac{\lambda}{u_1}-\frac{u_0\lambda}{u_1^2}\right)-\right.$$
$$\left.-\left(\frac{\lambda}{u_1}-\frac{u_0\lambda}{u_1^2}\right)\left(1+\frac{u_1}{u_2}\right)e^{2u_1d}+\left(\frac{\lambda}{u_2}-\frac{\lambda}{u_1}\right)\left(\frac{u_0}{u_1}-1\right)\right]\frac{1}{\Delta},$$

$$\psi_2(\lambda)=\left[\left(\frac{\lambda}{u_1}-\frac{u_0\lambda}{u_1^2}\right)\left(1+\frac{u_1}{u_2}\right)e^{2u_1d}-\left(\frac{\lambda}{u_2}-\frac{\lambda}{u_1}\right)\left(\frac{u_0}{u_1}-1\right)\right]\frac{1}{\Delta},$$

$$\psi_3(\lambda)=\left[\left(1+\frac{u_0}{u_1}\right)\left(\frac{\lambda}{u_2}-\frac{\lambda}{u_1}\right)-\left(1-\frac{u_1}{u_2}\right)\left(\frac{\lambda}{u_1}-\frac{u_0\lambda}{u_1^2}\right)\right]\frac{1}{\Delta},$$

где

$$\Delta=\left(1+\frac{u_0}{u_1}\right)\left(1+\frac{u_1}{u_2}\right)e^{2u_1d}-\left(1-\frac{u_1}{u_2}\right)\left(\frac{u_0}{u_1}-1\right)$$

и

$$u_j=(\lambda^2+k_j^2)^{\frac{1}{2}}, \quad j=0,\ 1,\ 2.$$

На поверхности земли ($z = 0$) для магнитного вектор-потенциала можно записать

$$F_1 = \frac{i\mu\omega IdS}{2\pi}\int_0^\infty G(\lambda) J_0(\varrho\lambda)\, d\lambda, \qquad (2.15)$$

где I есть ток, протекающий в рамке, dS — ее площадь и

$$G(\lambda) = \frac{\lambda\,[u_1+u_2+(u_1-u_2)\,e^{-2du_1}]}{(u_0+u_1)(u_1+u_2)+(u_0-u_1)(u_1-u_2)^{-2du_1}}. \qquad (2.16)$$

В случае однородной среды с плоской границей раздела $u_1 = u_2 = u$ и $k_1 = k_2 = k$. Если пренебречь токами смещения, то $k^2 = i\sigma\mu\omega$. Волновое число верхней среды считается достаточно малым ($k_0 = 0$), так что $u_0 = \lambda$. Тогда для вектор-потенциала в проводящем полупространстве получим:

$$F_1 = \frac{i\mu\omega IdS}{2\pi}\int_0^\infty \frac{\lambda}{\lambda+u}\, e^{uz} J_0(\varrho\lambda)\, d\lambda, \quad (z \leqslant 0). \qquad (2.17)$$

Когда $z = 0$,

$$F_1 = \frac{i\mu\omega IdS}{2\pi}\int_0^\infty \frac{\lambda}{\lambda+u} J_0(\varrho\lambda)\, d\lambda,$$

что совпадает с выражением (II, 1.7).

2. Случай, когда верхний слой имеет небольшую электропроводность. Часто электропроводность основания значительно больше электропроводности перекрывающего слоя, т. е. $\sigma_2 \gg \sigma_1$. Тогда для низких частот $|k_1 d|, |k_1\varrho| \ll 1$. Такое же допущение справедливо и для воздуха, где $|k_0\varrho| \ll 1$. Из этих условий следует, что уравнение Лапласа справедливо в области над проводящим основанием. В силу сделанных ограничений запишем:

$$u_1 = (\lambda^2 + k_1^2)^{\frac{1}{2}} = \lambda, \quad u_0 = (\lambda^2 + k_0^2)^{\frac{1}{2}} = \lambda$$

и

$$u_2 = \sqrt{\lambda^2 + k_2^2} = \sqrt{\lambda^2 + k^2} = u.$$

Отсюда согласно (2.8) вектор-потенциал в слое, ограниченном поверхностью земли и поверхностью проводящего основания, определится выражением:

$$F_1 = M\int_0^\infty \left[e^{z\lambda} + \left(\frac{\lambda-u}{\lambda+u}\right) e^{-(z+2d)\lambda}\right] J_0(\varrho\lambda)\, d\lambda, (0 \geqslant z \geqslant -d). \qquad (2.18)$$

Составляющие поля связаны с вектор-потенциалом F_1 соотношениями:

$$E_\varrho = 0, \quad E_\varphi = \frac{\partial F_1}{\partial z}, \quad E_z = 0,$$

$$H_\varrho = \frac{\partial^2 F_1}{\partial\varrho\,\partial z}, \quad H_\varphi = 0, \quad H_z = -k^2 F_1 + \frac{\partial^2 F_1}{\partial z^2}. \qquad (2.19)$$

Интеграл F_1 можно выразить через табулированные функции. С этой целью перепишем равенство (2.18) следующим образом:

$$\frac{F_1}{M} = \int_0^\infty e^{z\lambda} J_0(\varrho\lambda)\, d\lambda + \int_0^\infty \left(\frac{\lambda-u}{\lambda+u}\right) J_0(\varrho\lambda)\, d\lambda +$$

$$+ \int_0^\infty \{1 - e^{-(z+2d)\lambda}\} \frac{u-\lambda}{\lambda+u} J_0(\varrho\lambda)\, d\lambda = J_1 + J_2 + J_3, \qquad (2.20)$$

$$J_1 = (\varrho^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}}, \qquad (2.21)$$

$$J_2 = -\int_0^\infty J_0(\varrho\lambda)\, d\lambda + \int_0^\infty \frac{2\lambda}{\lambda+u} J_0(\varrho\lambda)\, d\lambda =$$

$$= -\frac{1}{\varrho} + 2\left[\frac{1-(1+k\varrho)\,e^{-k\varrho}}{k^2\varrho^3}\right], \qquad (2.22)$$

где второй интеграл в J_2 определяется равенством (II, 1,7). Далее

$$J_3 = \frac{1}{\delta}\int_0^\infty [1 - e^{-\frac{1}{\delta}(2d+z)g}] \left[\frac{(g^2+2i)^{\frac{1}{2}} - g}{(g^2+2i)^{\frac{1}{2}} + g}\right] J_0\left(\frac{\varrho g}{\delta}\right) dg =$$

$$= \frac{iN_1}{\delta}\left[\frac{\varrho}{\delta}, \frac{(2d+z)}{\delta}\right]. \qquad (2.23)$$

При вычислениях в интеграле J_3 формулы (2.20) сделана подстановка: $\lambda = \frac{g}{\delta}$, $\delta = \left(\frac{2}{\sigma\mu\omega}\right)^{\frac{1}{2}}$. Функция N_1 табулирована Фостером (1931). На поверхности земли ($z = 0$) получим для вектор-потенциала:

$$\frac{F_1}{IdS} = \frac{i\mu\omega}{2\pi}\left[\frac{1-(1+k\varrho)\,e^{-k\varrho}}{k^2\varrho^3}\right] + \frac{i\mu\omega}{4\pi\delta} N_1\left(\frac{\varrho}{\delta}, \frac{2d}{\delta}\right), \qquad (2.24)$$

где второй член является поправкой, обусловленной тем, что магнитный диполь приподнят на высоту d над проводящим основанием, а первый член совпадает с выражением (II, 1.7).

3. Случай, когда слой и основание незначительно отличаются по электропроводности. Положив $u_0 = \lambda$, представим выражение (2.15) в виде двух интегралов:

$$F = J_4 - J_5,$$

$$J_4 = \frac{i\mu\omega IdS}{2\pi}\int_0^\infty (\lambda + u_1)^{-1}\lambda J_0(\varrho\lambda)\,d\lambda =$$

$$= \frac{i\mu\omega IdS}{2\pi k_1^2\varrho^3}\left[1 - (1 + k_1\varrho)e^{-k_1\varrho}\right] i\omega IdSJ_4(\varrho)$$

и

$$J_5 = \frac{i\mu\omega IdS}{2\pi}\int_0^\infty \frac{2u_1(u_2 - u_1)e^{-2du_1}\lambda J_0(\varrho\lambda)}{(u_1 + u_2)(\lambda + u_1)^2 - k_1^2(u_1 - u_2)e^{-2u_1d}}\,d\lambda.$$

Как и выше, интеграл J_4 связан с однородным полупространством электропроводности σ_1, J_5 можно интерпретировать как влияние слоя мощности d.

Пусть разность в сопротивлениях между слоем и основанием мала, то есть $\sigma_2 = \sigma_1 + \Delta\sigma$, где $|\Delta\sigma| \ll \sigma_1$. Тогда можно сделать подстановку:

$$u_2 - u_1 \approx \frac{i\mu\omega\Delta\sigma}{2u_1},$$

которая упрощает интеграл J_5:

$$J_5 = \frac{(i\mu\omega)^2 IdS\,\Delta\sigma}{4\pi}\int_0^\infty \frac{e^{-2u_1d}}{u_1(\lambda + u_1)^2}\lambda J_0(\varrho\lambda)\,d\lambda.$$

Умножая числитель и знаменатель предыдущего выражения на $(u_1 - \lambda)^2$, получим:

$$J_5 = \frac{IdS\,\Delta\sigma}{4\pi\sigma_1^2}\int_0^\infty (2u_1^2 - 2\lambda u_1 - k_1^2)u_1^{-1}e^{-2u_1d}\lambda J_0(\varrho\lambda)\,d\lambda.$$

Последнее выражение можно выразить через производные по параметру b от интегралов Зоммерфельда (P) и Фостера (N):

$$J_5 = \frac{IdS\,\Delta\sigma}{4\pi\sigma_1^2}\left[\left(2\frac{\partial^2}{\partial b^2} - k_1^2\right)P - \left(2\frac{\partial^3}{\partial b^3} - 2k_1^2\frac{\partial}{\partial b}\right)N\right],$$

где

$$P = \int_0^\infty J_0(\varrho\lambda)u_1^{-1}e^{bu_1}\lambda\,d\lambda = \frac{e^{-k_1r}}{r}$$

и

$$N = \int_0^\infty J_0(\varrho\lambda)u_1^{-1}e^{bu_1}\,d\lambda = I_0\left[\frac{k_1}{2}(r + b)\right]K_0\left[\frac{k_1}{2}(r - b)\right],$$

где

$$r = (b^2 + \varrho^2)^{\frac{1}{2}}, \quad b = -2d.$$

Выполняя дифференцирование, получим следующие выражения для J_5:

$$J_5 = i\omega IdSJ_5(\varrho),$$

где

$$J_5(\varrho) = \frac{\mu\Delta\sigma}{4\pi\sigma_1}\Big\{2k_1^{-2}r^{-5}[(3b^2 - r^2)(1 + k_1r) + k_1^2r^2b^2] \times$$
$$\times e^{-k_1r} - r^{-1}e^{-k_1r} + br^{-4}(3b^2 - r^2)I_0K_0 + 3\varrho^2br^{-4}I_1K_1 +$$
$$+ [k_1^{-1}r^{-5}(r^2 - 3b^2)(r - b) - k_1\varrho^2br^{-3}]I_0K_1 +$$
$$+ [k_1^{-1}r^{-5}(r^2 - 3b^2)(r + b) + k_1\varrho^2br^{-3}]I_1K_0\Big\},$$

тогда

$$F = [J_4(\varrho) - J_5(\varrho)]\,i\omega IdS.$$

4. Тонкий проводящий пласт. Рассмотрим случай, когда электропроводность всех областей вне слоя конечной толщины d будет пренебрежимо малой. Верхняя граница пласта имеет координату $z = -h$. Примем, что $d \ll h$. Диполь помещается в начале координатной системы и, следовательно, приподнят над пластом на высоту h. На основании изложенного для вектор-потенциала в области $0 \geqslant z \geqslant -h$ получим:

$$F = M\int_0^\infty e^{z\lambda}J_0(\varrho\lambda)\,d\lambda - M\int_0^\infty e^{-(z+2h)\lambda}J_0(\varrho\lambda)\,d\lambda +$$
$$+ 2M\int_0^\infty \left[\frac{(u + \lambda)\lambda + (u - \lambda)\lambda e^{-2ud}}{(\lambda + u)^2 - (\lambda - u)^2e^{-2ud}}\right]e^{-(z+2h)\lambda}J_0(\varrho\lambda)\,d\lambda, \qquad (2.25)$$

где

$$u = (\lambda^2 + k^2)^{\frac{1}{2}}, \quad k^2 = i\sigma\mu\omega.$$

Преобразуем член в квадратных скобках в последнем интеграле:

$$\left[\quad\right] = \frac{\dfrac{\lambda}{\lambda + u} + \dfrac{(u - \lambda)\lambda}{(\lambda + u)^2}}{1 - \left(\dfrac{u - \lambda}{u + \lambda}\right)^2 e^{-2ud}}. \qquad (2.26)$$

Положим, что толщина проводящего слоя d очень мала, а электропроводность очень велика и воспользуемся следующими разложениями: $e^{-2ud} = 1 - 2ud + \ldots$, $\dfrac{\lambda}{\lambda + u} = \dfrac{\lambda}{u}\left(1 - \dfrac{\lambda}{u} + \ldots\right)$, $\dfrac{u - \lambda}{u + \lambda} = 1 - \dfrac{2\lambda}{u} + \ldots$, $\left(\dfrac{u - \lambda}{u + \lambda}\right)^2 = 1 - \dfrac{4\lambda}{u} + \ldots$

Если допустить, что d стремится к нулю, а σ — к бесконечности, но так, что произведение $\sigma\, d$ остается конечным, член в квадратных скобках принимает простой вид:

$$\left[\quad\right] = \frac{\lambda}{2(\lambda + i\hat{p})}, \tag{2.27}$$

где

$$\hat{p} = \lim_{\substack{\sigma \to \infty \\ d \to 0}} \frac{u^2 d}{2i} = \lim \frac{(i\,\sigma\mu\omega + \lambda^2)\, d}{2i} = \frac{\sigma\mu\omega\, d}{2}.$$

В рассматриваемом предельном случае λ принимается конечной величиной, так как подынтегральное выражение быстро убывает при больших λ.

Следовательно, для вектор-потенциала можно записать:

$$F = M\left[(\varrho^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} - i\hat{p}\int_0^\infty (\lambda + i\hat{p})^{-1} e^{-(z+2h)\lambda} J_0(\varrho\lambda)\, d\lambda.\right. \tag{2.28}$$

Второй член в уравнении (2.28) характеризует вторичное поле. Сделав подстановку

$$\frac{1}{\lambda + i\hat{p}} = -i\int_0^\infty e^{-(\hat{p} - i\lambda)\nu}\, d\nu, \tag{2.29}$$

можно выполнить интегрирование по λ, после чего получим:

$$F = M\left\{(\varrho^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} - \hat{p}\int_0^\infty [\varrho^2 + (z + 2h - i\nu)^2]^{-\frac{1}{2}} e^{-\hat{p}\nu}\, d\nu\right\}. \tag{2.30}$$

Это выражение соответствует формуле Графа (Graf, 1934), который применил несколько иной метод. Подобный анализ для случая горизонтального электрического диполя над тонкой проводящей пластиной проделал Стефанеску (1934). Его метод аналогичен примененному выше для магнитного диполя. Стефанеску ограничивается первой степенью $\frac{1}{\hat{p}}$ и делает обычное допущение о пренебрежимо малой величине волнового числа в окружающей среде.

Для тонкого слоя аналогичное решение можно выполнить, вводя специальные граничные условия. Решение такой задачи рассматривается ниже. Как и раньше в непроводящей среде

$$i\,\mu\omega\, \boldsymbol{H} = \operatorname{grad}\operatorname{div} \boldsymbol{F},$$

где $\boldsymbol{F}$ — вектор, имеющий компоненту только в направлении оси Oz:

$$i\,\mu\omega\, H_{\varrho j} = \frac{\partial^2 F_j}{\partial\varrho\,\partial z}, \tag{2.31}$$

$$i\,\mu\omega\, H_{\varphi j} = 0, \tag{2.32}$$

$$i\,\mu\omega\, H_{zj} = \frac{\partial^2 F_j}{\partial z^2}, \tag{2.33}$$

$$E_{\varrho j} = E_{zj} = 0, \quad E_{\varphi j} = \frac{\partial F_j}{\partial\varrho}. \tag{2.34}$$

Здесь индекс j равен 1 или 2 для верхней или нижней среды, между которыми находится тонкий слой.

Когда поля меняются настолько медленно, что основные размеры остаются намного меньше длины волны, поля в среде выше и ниже пласта можно найти как решения уравнения Лапласа. Поэтому F_j также будет решением уравнения Лапласа:

$$F_1 = M\int_0^\infty f_1(\lambda)\, e^{-z\lambda} J_0(\varrho\lambda)\, d\lambda + F_{\text{п}}, \tag{2.35}$$

$$F_2 = M\int_0^\infty f_2(\lambda)\, e^{z\lambda} J_0(\varrho\lambda)\, d\lambda. \tag{2.36}$$

Выражения (2.35) и (2.36) имеют симметрию относительно оси Oz, удовлетворяют начальным условиям и ведут себя надлежащим образом при $z = \infty$ и $z = -\infty$. $F_{\text{п}}$ — потенциальная функция, характеризующая первичное поле магнитного диполя:

$$F_{\text{п}} = M(\varrho^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} = M\int_0^\infty e^{-z\lambda} J_0(\varrho\lambda)\, d\lambda, \quad (-h \leqslant z \leqslant 0). \tag{2.37}$$

Введем граничные условия. Тангенциальное магнитное поле должно претерпевать разрыв непрерывности, равный величине тока, протекающего внутри пластины в направлении, перпендикулярном магнитному полю. В этом случае

$$H_{1\varrho} = H_{2\varrho} \pm \sigma\, d E_\varphi, \quad (z = -h), \tag{2.38}$$

где E_φ — электрическое поле в пределах пласта, а $\sigma\, d$ — продольная проводимость*. Электрическое поле $E_{\varphi j}$ должно оставаться непрерывным при переходе через тонкий пласт:

$$E_{1\varphi} = E_\varphi = E_{2\varphi}, \quad (z = -h). \tag{2.39}$$

Используя (2.38), (2.39), (2.31) и (2.34), запишем, что

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 F_1}{\partial\varrho\,\partial z} - \frac{\partial^2 F_2}{\partial\varrho\,\partial z} &= i\,\sigma\mu\omega\, d\,\frac{\partial F_1}{\partial\varrho}, \\ \frac{\partial F_1}{\partial\varrho} &= \frac{\partial F_2}{\partial\varrho}. \end{aligned}\right\} \tag{2.40}$$

---

* Аналогичные граничные условия для тонкой проводящей пластины рассмотрены в работе Шейнманна (1947), где они применены для вычисления компонент электромагнитного поля в земле. *А. В., Г. Ф.*

Уравнения (2. 40) после подстановки значений F_j приводятся к двум алгебраическим уравнениям, из которых определяются функции $f_1(\lambda)$ и $f_2(\lambda)$:

$$f_1(\lambda) = -(i\sigma\mu\omega d)(2\lambda + i\sigma\mu\omega d)^{-1} e^{-2h\lambda},$$

$$f_2(\lambda) = -(i\sigma\mu\omega d)(2\lambda + i\sigma\mu\omega d)^{-1}.$$

Тогда можно записать общее решение задачи с помощью интегралов:

$$F_1 = Mr^{-1} - Mi\hat{p}\int_0^\infty (\lambda + i\hat{p})^{-1} e^{-(z+2h)\lambda} J_0(\varrho\lambda)\, d\lambda, \quad (2.$$

$$F_2 = Mr^{-1} - Mi\hat{p}\int_0^\infty (\lambda + i\hat{p})^{-1} e^{z\lambda} J_0(\varrho\lambda)\, d\lambda, \quad (2.42)$$

где

$$r = (\varrho^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}, \quad \hat{p} = \frac{\sigma\mu\omega d}{2}.$$

Формула (2. 41) тождественна выражению (2. 30).

Удобно выразить этот результат через скалярный магнитный потенциал Φ, который связан с вектором напряженности магнитного поля соотношением

$$\boldsymbol{H}_j = -\operatorname{grad}\Phi_j, \quad (2.43)$$

где

$$\Phi_1 = \Phi_\text{п} + M\frac{\partial}{\partial z}\hat{J}(2h + z), \quad (2.44)$$

$$\Phi_2 = \Phi_\text{п} + M\frac{\partial}{\partial z}\hat{J}(-z), \quad (2.45)$$

$$\Phi_\text{п} = Mz(\varrho^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}}. \quad (2.46)$$

Функция $\hat{J}(\beta)$ в выражениях (2. 44), (2. 45) определяется равенством:

$$\hat{J}(\beta) = i\hat{p}\int_0^\infty (\lambda + i\hat{p})^{-1} e^{-\beta\lambda} J_0(\varrho\lambda)\, d\lambda. \quad (2.47)$$

Придадим этому выражению более удобную форму, воспользовавшись известной формулой для функции Бесселя J_0:

$$J_0(a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{a}{2}\right)^{2n}}{(n!)^2}. \quad (2.48)$$

Подставив (2. 48) в (2. 47), получим

$$J(\beta) = i\hat{p}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{\varrho}{2}\right)^{2n}}{(n!)^2} \int_0^\infty \lambda^{2n} \frac{e^{-\beta\lambda}}{\lambda + i\hat{p}}\, d\lambda. \quad (2.49)$$

Последний интеграл последовательным дифференцированием по β сводится к табулированному интегралу

$$\int_0^\infty \frac{e^{-\beta\lambda}}{\lambda + i\hat{p}}\, d\lambda = -e^{+i\beta\hat{p}}\, Ei(-i\beta\hat{p}), \quad (2.50)$$

который имеется, например, у Янке и Эмде (1949). В итоге получим, что

$$\hat{J}(\beta) = i\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{\varrho}{2}\right)^{2n}}{(n!)^2} \hat{p}^{2n+1} \frac{\partial^{2n}}{\partial x^{2n}} [-e^{+ix} Ei(-ix)], \quad (2.51)$$

где $x = \hat{p}\beta$. Эта формула пригодна для вычислений, когда $\hat{p}\varrho$ меньше единицы при любых значениях x. С другой стороны, подставив

$$\frac{i\hat{p}}{\lambda + ip} = \hat{p}\int_0^\infty e^{-(\hat{p}+i\lambda)\alpha}\, d\alpha \quad (2.52)$$

в (2. 47), выведем, что

$$\hat{J}(\beta) = \hat{p}\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\hat{p}\alpha} e^{-(\beta - i\alpha)\lambda} J_0(\varrho\lambda)\, d\lambda\, d\alpha, \quad (2.53)$$

и, интегрируя по λ, найдем

$$\hat{J}(\beta) = \hat{p}\int_0^\infty \frac{e^{-\hat{p}\alpha}\, d\alpha}{[(\beta - i\alpha)^2 + \varrho^2]^{\frac{1}{2}}}. \quad (2.54)$$

Последовательным интегрированием по частям интеграл можно представить в виде следующего ряда:

$$\hat{J}(\beta) = \lim_{\alpha \to 0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\hat{p}}\right)^n \frac{\partial^n}{\partial \alpha^n} [(\beta - i\alpha)^2 + \varrho^2]^{-\frac{1}{2}}, \quad (2.55)$$

или, более кратко,

$$\hat{J}(\beta) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{i}{\hat{p}}\right)^n \frac{\partial^n}{\partial \beta^n} (\beta^2 + \varrho^2)^{-\frac{1}{2}}. \quad (2.56)$$

Формула применима, когда $\hat{p}\beta$ и $\hat{p}\varrho$ несколько больше единицы.

§ 3. Вертикальное магнитное поле в центре петли

(Йосидзуми и др., 1959)

1. Круглая петля над двухслойной и трехслойной средой. В случае двух слоев (рис. 1) выражения для магнитных компонент поля можно записать в системе единиц MKS следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} H_{0\varrho} &= H_{\text{п}\varrho} + H'_{0\varrho} = \frac{aI}{2}\int_0^\infty e^{-z\lambda} J_1(a\lambda) J_1(\varrho\lambda)\lambda\, d\lambda - \\ &- \frac{1}{i\omega\mu_0}\int_0^\infty f_0(\lambda) e^{z\lambda} J_1(\varrho\lambda)\lambda\, d\lambda, \\ H_{0z} &= H_{\text{п}z} + H'_{0z} = \\ &= \frac{aI}{2}\int_0^\infty e^{-z\lambda} J_1(a\lambda) J_0(\varrho\lambda)\lambda\, d\lambda + \\ &+ \frac{1}{i\omega\mu_0}\int_0^\infty f_0(\lambda) e^{z\lambda} J_0(\varrho\lambda)\lambda\, d\lambda, \\ &(0 < z < h_0), \end{aligned}\right\} \quad (3.1)$$

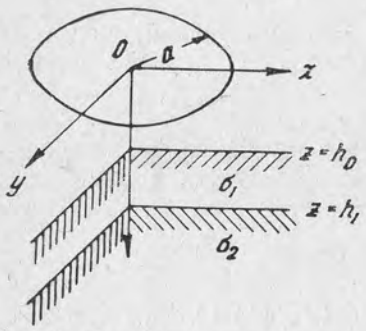


Рис. 1. Координатная система (случай круглой петли).

$$\left.\begin{aligned} H_{1\varrho} &= \frac{1}{i\omega\mu_0}\int_0^\infty [f_1(\lambda) e^{-zu_1} - \\ &- f_2(\lambda) e^{+zu_1}] J_1(\varrho\lambda) u_1 d\lambda, \\ H_{1z} &= \frac{1}{i\omega\mu_0}\int_0^\infty [f_1(\lambda) e^{-zu_1} + f_2(\lambda) e^{+zu_1}] J_0(\varrho\lambda)\lambda\, d\lambda, \ (h_0 < z < h_1), \end{aligned}\right\} \quad (3.2)$$

$$\left.\begin{aligned} H_{2\varrho} &= \frac{1}{i\omega\mu_0}\int_0^\infty f_3(\lambda) e^{-zu_2} J_1(\varrho\lambda) u_2 d\lambda, \\ H_{2z} &= \frac{1}{i\omega\mu_0}\int_0^\infty f_3(\lambda) e^{-zu_2} J_0(\varrho\lambda)\lambda\, d\lambda, \quad (h_1 < z), \end{aligned}\right\} \quad (3.3)$$

где

$$\begin{aligned} u_1 &= \sqrt{\lambda^2 - k_1^2}, \quad u_2 = \sqrt{\lambda^2 - k_2^2}, \\ k_1^2 &= i2\pi f \mu_0\sigma_1, \quad k_2^2 = i2\pi f \mu_0\sigma_2. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Обозначения — такие же, как в § 3, гл. II. Здесь, как и раньше, полагается, что $q_j = 1$. Граничные условия определяются равенствами:

$$\begin{aligned} H_{0\varrho} &= H_{1\varrho}, \quad H_{0z} = H_{1z}, \quad (z = h_0), \\ H_{1\varrho} &= H_{2\varrho}, \quad H_{1z} = H_{2z}, \quad (z = h_1). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Подставляя (3.2) и (3.3) в (3.5), получим для вертикальной компоненты магнитного поля H_{0z} на поверхности земли ($h_0 = 0$):

$$H_{0z} = \frac{aI}{2}\int_0^\infty [1 + G_0(\lambda)] e^{z\lambda} J_1(a\lambda) J_0(\varrho\lambda)\lambda\, d\lambda, \ (z \leqslant 0), \quad (3.6)$$

где

$$G_0(\lambda) = \frac{g_0 + g_1 e^{-2u_1h_1}}{1 + g_0 g_1 e^{-2u_1h_1}}, \quad (3.7)$$

$$g_0 = \frac{\lambda - u}{\lambda + u}, \quad g_1 = \frac{u_1 - u_2}{u_1 + u_2}. \quad (3.8)$$

В центре петли ($z = 0$, $\varrho = 0$)

$$H_{0z} = \frac{aI}{2}\int_0^\infty [1 + G_0(\lambda)] J_1(a\lambda)\lambda\, d\lambda. \quad (3.9)$$

В случае трех слоев функция G_0 имеет вид:

$$G_0 = \frac{g_0 + g_1 e^{-2u_1h_1} + g_2 e^{-2u_1h_1 - 2u_1(h_2 - h_1)} + g_0 g_1 g_2 e^{-2u_2(h_2 - h_1)}}{1 + g_0 g_1 e^{-2u_1h_1} + g_0 g_2 e^{-2u_1h_1 - 2u_2(h_2 - h_1)} + g_1 g_2 e^{-2u_2(h_2 - h_1)}}, \quad (3.10)$$

где

$$g_2 = \frac{u_2 - u_3}{u_2 + u_3}, \quad u_3 = \sqrt{\lambda^2 - k_3^2}, \quad k_3^2 = i2\pi f \mu_0\sigma_3. \quad (3.11)$$

2. Интерпретация. Для двухслойной среды функция

$$\begin{aligned} \hat{M}_{0z} &= -i\lim_{f \to 0}\frac{\partial H_{0z}}{\partial f} = \\ &= \frac{\pi\mu_0 aI}{4}\int_0^\infty [\sigma_1 + (\sigma_2 - \sigma_1) e^{-2h_1\lambda}] e^{z\lambda} J_1(a\lambda)\frac{\partial\lambda}{\lambda}, \end{aligned} \quad (3.12)$$

откуда, применяя формулу (II, 3.43), найдем, что

$$\hat{M}_{0z} = \frac{\pi\mu_0 I}{4}[a\sigma_1 + (\sigma_2 - \sigma_1)(\sqrt{a^2 + 4h_1^2} - 2h_1)]. \quad (3.13)$$

Уравнение (3.13) аналогично уравнению (II, 3.46) для однородного полупространства. В случае трех слоев

$$\begin{aligned} \hat{M}_{0z} = \frac{\pi\mu_0 I}{4}[a\sigma_1 &+ (\sigma_2 - \sigma_1)(\sqrt{a^2 + 4h_1^2} - 2h_1) + \\ &+ (\sigma_3 - \sigma_2)(\sqrt{a^2 + 4h_2^2} - 2h_2)]. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Электропроводность однородного полупространства можно определить по формуле (II, 3.47). Подобным образом можно определить кажущуюся электропроводность фиктивного полупространства, которое на самом деле состоит из двух и более слоев. Кажущаяся электропроводность определяется с помощью функции $\hat{M}_{0z}$

многослойной среды. Подставляя (3. 13) и (3. 14) в (II, 3. 47), получим для кажущейся электропроводности σ в случае двухслойной среды:

$$\sigma = \sigma_1 + (\sigma_2 - \sigma_1)\left[\sqrt{1 + \left(\frac{2h_1}{a}\right)^2} - \frac{2h_1}{a}\right]. \qquad (3.15)$$

Для трехслойной среды

$$\sigma = \sigma_1 + (\sigma_2 - \sigma_1)\left[\sqrt{1 + \left(\frac{2h_1}{a}\right)^2} - \frac{2h_1}{a}\right] + $$
$$+ (\sigma_3 - \sigma_2)\left[\sqrt{1 + \left(\frac{2h_2}{a}\right)^2} - \frac{2h_2}{a}\right]. \qquad (3.16)$$

По аналогии найдем, что в случае N слоев

$$\sigma = \sigma_1 + \sum_{n=1}^{N-1} (\sigma_{n+1} - \sigma_n)\left[\sqrt{1 + \left(\frac{2h_n}{a}\right)^2} - \frac{2h_n}{a}\right]. \qquad (3.17)$$

Из уравнения (3. 17) следует, что каждый новый слой увеличивает число членов суммы. Последнее относится к преимуществам индукционного метода по сравнению с методом сопротивлений.

Когда радиус круговой петли достаточно мал, т. е. $1 \ll \left(\frac{2h_1}{a}\right)^2$, кажущаяся электропроводность равна электропроводности первого слоя. Так, из уравнения (3. 17) найдем, что

$$\sigma \approx \sigma_1, \ (a \ll h_1). \qquad (3.18)$$

С другой стороны, когда радиус круговой петли настолько велик, что $\frac{2h_{N-1}}{a} \ll 1$, кажущаяся электропроводность

$$\sigma = \sigma_1 + \sum_{n=1}^{N-1} (\sigma_{n+1} - \sigma_n),$$

откуда следует, что

$$\sigma \approx \sigma_N, \text{ когда } a \gg h_{N-1}. \qquad (3.19)$$

С помощью уравнения (3. 19) можно определить электропроводность N-го слоя, когда петля имеет достаточно большие размеры.

Измеряя величину JmH_{0z} в центре круговой петли для разных частот f, можно вычислить функцию

$$\hat{M}_{0z} = \lim_{f \to 0} \frac{JmH_{0z}}{f}. \qquad (3.20)$$

Подставляя найденное значение в (II, 3. 47), вычислим кажущуюся электропроводность. Проводя измерения для различных значений радиуса круговой петли, можно построить график, связывающий σ и a. Сравнивая палеточную кривую с таким графиком, можно определить мощность и электропроводность горизонтальных слоев. Палеточная кривая показана на рис. 2. Она представляет собой построенную в логарифмическом масштабе зависимость

$$w_1(l) = \frac{\sqrt{1 + l^2} - 1}{l}, \qquad (3.21)$$

где $l = \frac{a}{2h_1}$. Используя (3. 21), равенство (3. 17) запишем следующим образом;

$$\sigma - \sigma_1 = (\sigma_2 - \sigma_1)\, w_1\left(\frac{a}{2h_1}\right) + $$
$$+ \sum_{n=2}^{N-1} (\sigma_{n+1} - \sigma_n)\left[\sqrt{1 + \left(\frac{2h_n}{a}\right)^2} - \frac{2h_n}{a}\right]. \qquad (3.22)$$

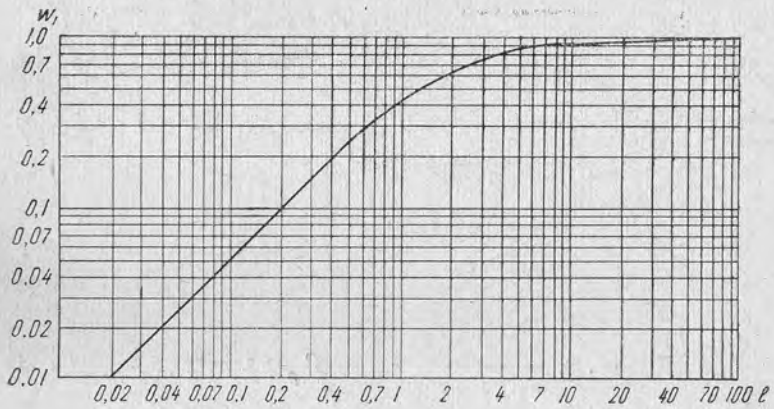


Рис. 2. Палетка $w_1(l)$.

Так как электропроводность первого слоя определяется уравнением (3. 18), левая часть уравнения (3. 22) известна. Когда a мало, значение правой части уравнения (3. 22) приблизительно равно первому члену и график измеренных значений σ в зависимости от a будет соответствовать левой части палеточной кривой. Вертикальное и горизонтальное смещения графика $\sigma(a)$ будут давать величину $\sigma_2 - \sigma_1$ и $2h_1$. Используя эти результаты, получим:

$$(\sigma - \sigma_1) - (\sigma_2 - \sigma_1)\, w_1\left(\frac{a}{2h_1}\right) = (\sigma_3 - \sigma_2)\, w_1\left(\frac{a}{2h_2}\right) + $$
$$+ \sum_{n=3}^{N-1} (\sigma_{n+1} - \sigma_n)\left[\sqrt{1 + \left(\frac{2h_n}{a}\right)^2} - \frac{2h_n}{a}\right]. \qquad (3.23)$$

Из (3. 23) видно, что аналогичным приемом можно определить $2h_2$ и $\sigma_3 - \sigma_2$. Точно так же рассчитывается $2h_{N-1}$ и $\sigma_N - \sigma_{N-1}$ в случае N-слойной структуры.

3. Вычисление кажущейся электропроводности в случае прямоугольной петли. Так как при полевых измерениях разложить прямоугольную петлю проще, чем круговую, разберем этот случай. Для этого вначале вычислим функцию $\hat{M}_{0z}$ для круглой рамки с небольшим радиусом. На основании уравнений (3. 6) и (3. 12) получим:

$$\hat{M}_{0z} = \frac{\pi\mu_0 I}{4}\int_0^\infty [\sigma_1 + (\sigma_2 - \sigma_1)e^{-2h_1\lambda}]\, e^{z\lambda} \times$$

$$\times J_0(\varrho\lambda)\left[\frac{a}{\lambda} J_1(a\lambda)\right] d\lambda. \qquad (3.24)$$

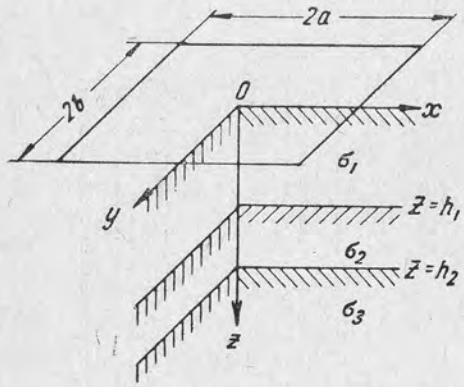


Рис. 3.

Когда a мало, $\frac{aJ_1(a\lambda)}{\lambda} \approx \frac{a^2}{2}$ и

$$d\hat{M}_{0z} = \frac{\pi\mu_0 I}{8} dS \int_0^\infty [\sigma_1 + (\sigma_2 - \sigma_1)e^{-2h_1\lambda}]\, J_0(\varrho\lambda)\, e^{z\lambda} d\lambda, \qquad (3.25)$$

где dS — площадь рамки, а $d\hat{M}_{0z}$ — функция $\hat{M}_{0z}$ для маленькой рамки. Учитывая, что

$$\int_0^\infty e^{-b\lambda} J_0(c\lambda)\, d\lambda = \frac{1}{\sqrt{b^2 + c^2}},$$

преобразуем уравнение (3. 25):

$$d\hat{M}_{0z} = \frac{\mu_0 I}{8}\left[\frac{\sigma_1}{\sqrt{\varrho^2 + z^2}} + \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{\sqrt{\varrho^2 + (z - 2h_1)^2}}\right] dS.$$

В случае N слоев

$$d\hat{M}_{0z} = \frac{\mu_0 I}{8}\left[\frac{\sigma_1}{\sqrt{\varrho^2 + z^2}} + \sum_{n=0}^{N-1} \frac{\sigma_{n+1} - \sigma_n}{\sqrt{\varrho^2 + (z - 2h_n)^2}}\right] dS. \qquad (3.26)$$

В силу уравнения (3. 26) в любой точке P (x, y, z) для функции $d\hat{M}_{0z}$, связанной с небольшой петлей, имеющей площадь $dx'dy'$ и расположенной в окрестностях точки P' $(x', y', 0)$, получим следующее выражение (рис. 3):

$$d\hat{M}_{0z} = \frac{\mu_0 I}{8}\left[\frac{\sigma_1}{\sqrt{(x'-x)^2 + (y'-y)^2 + z^2}} + \right.$$

$$\left. + \sum_{n=1}^{N-1} \frac{\sigma_{n+1} - \sigma_n}{\sqrt{(x'-x)^2 + (y'-y)^2 + (z - 2h_n)^2}}\right] dx'dy'. \qquad (3.27)$$

Интегрируя, найдем значение функции $\hat{M}_{0z}$ для петли конечной площади:

$$\hat{M}_{0z} = \frac{\mu_0 I}{8}\int_{-b}^{+b} dy' \int_{-a}^{+a}\left[\frac{\sigma_1}{\sqrt{(x'-x)^2 + (y'-y)^2 + z^2}} + \right.$$

$$\left. + \sum_{n=1}^{N-1} \frac{\sigma_{n+1} - \sigma_n}{\sqrt{(x'-x)^2 + (y'-y)^2 + (z - 2h_n)^2}}\right] dx'. \qquad (3.28)$$

Если точка P находится в центре петли:

$$\hat{M}_{0z} = \frac{\mu_0 I}{4}\left[\sigma_1\left(a \ln \frac{\sqrt{a^2 + b^2} + b}{\sqrt{a^2 + b^2} - b} + b \ln \frac{\sqrt{a^2 + b^2} + a}{\sqrt{a^2 + b^2} - a}\right) + \right.$$

$$+ \sum_{n=1}^{N-1} (\sigma_{n+1} - \sigma_n)\left(a \ln \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + 4h_n^2} + b}{\sqrt{a^2 + b^2 + 4h_n^2} - b} + b \ln \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + 4h_n^2} + a}{\sqrt{a^2 + b^2 + 4h_n^2} - a} - \right.$$

$$\left.\left. - 4h_n \operatorname{arctg} \frac{ab}{2h_n\sqrt{a^2 + b^2 + 4h_n^2}}\right)\right]. \qquad (3.29)$$

Когда петля квадратная $(a = b)$:

$$\hat{M}_{0z} = \frac{\mu_0 I}{2}\left[\sigma_1 a \ln \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} - 1} + \sum_{n=1}^{N-1} (\sigma_{n+1} - \sigma_n) \times \right.$$

$$\left. \times \left(a \ln \frac{\sqrt{2a^2 + 4h_n^2} + a}{\sqrt{2a^2 + 4h_n^2} - a} - 2h_n \operatorname{arctg} \frac{a^2}{2h_n\sqrt{2a^2 + 4h_n^2}}\right)\right]. \qquad (3.30)$$

Для однородной среды

$$\hat{M}_{0z} = \mu_0 I \sigma a \ln(\sqrt{2} + 1), \qquad (3.31)$$

откуда кажущаяся электропроводность

$$\sigma = \frac{1}{\mu_0}\frac{1}{\ln(\sqrt{2} + 1)}\frac{\hat{M}_{0z}}{aI} = \frac{1}{\mu_0}\frac{1}{\ln(\sqrt{2} + 1)}\frac{1}{aI}\lim_{f \to 0}\frac{JmH_{0z}}{f}. \qquad (3.32)$$

Подставляя уравнение (3. 30) в (3. 32) для кажущейся электропроводности в случае N слоев можно записать:

$$\sigma = \sigma_1 + \frac{1}{2\ln(\sqrt{2} + 1)}\sum_{n=1}^{N-1} (\sigma_{n+1} - \sigma_n) \times$$

$$\times \left(\ln \frac{\sqrt{2a^2 + 4h_n^2} + a}{\sqrt{2a^2 + 4h_n^2} - a} - \frac{2h_n}{a} \operatorname{arctg} \frac{a^2}{2h_n\sqrt{2a^2 + 4h_n^2}}\right). \qquad (3.33)$$

Интерпретация проводится с помощью графиков функции $(w_2(l)$ так же, как и в случае круглой петли. На рис. 4 приведен график функции w_2 (l) для прямоугольной петли. Функция w_2 (l) имеет следующий вид:

$$w_2(l) = \frac{1}{2\ln(\sqrt{2} + 1)}\left[\ln \frac{\sqrt{1 + 2l^2} + l}{\sqrt{1 + 2l^2} - l} - \frac{1}{l} \operatorname{arctg} \frac{l^2}{\sqrt{1 + 2l^2}}\right]. \qquad (3.34)$$

Числовые значения функций $w_1(l)$ и $w_2(l)$ приводятся в табл. 1, 2.

Кажущуюся электропроводность можно также определить, измеряя фазовые сдвиги между вторичными и первичными полями. Из (3. 32)

$$JmH_{0z} = \mu_0 I f \sigma a \ln(\sqrt{2}+1). \qquad (3.35)$$

Вещественная компонента суммарного магнитного поля $\mathrm{Re}\, H_{0z}$ совпадает с вертикальной компонентой первичного поля $H_{\text{п}z}$, когда частота низка, причем

$$\lim_{f\to 0} H_{\text{п}z} = \frac{\sqrt{2}\, I}{\pi a}. \qquad (3.36)$$

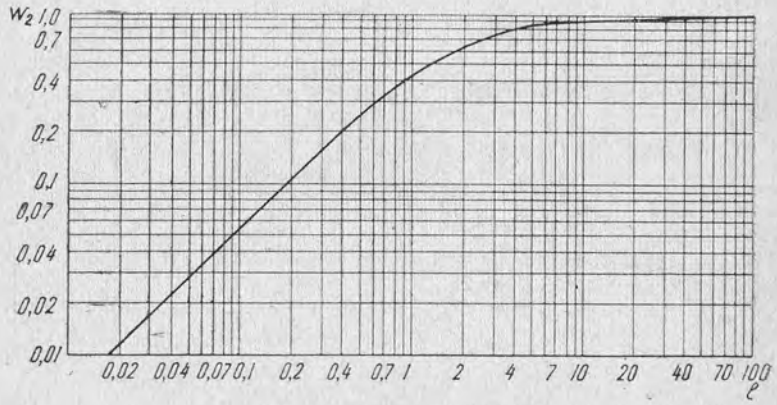


Рис. 4. Палетка $w_2(l)$.

Следовательно,

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{JmH_{0z}}{H_{\text{п}z}} = \left[\frac{\pi\mu_0}{\sqrt{2}} \ln(\sqrt{2}+1)\right] a^2 \sigma f, \qquad (3.37)$$

если f невелико. Из уравнения (3. 37) найдем, что при измерениях с помощью квадратной петли кажущаяся электропроводность

$$\sigma = 4{,}064 \cdot 10^5 \frac{1}{a^2} \lim_{f\to 0} \frac{\operatorname{tg}\varphi}{f}. \qquad (3.38)$$

Для круговой петли

$$\sigma = 5{,}066 \cdot 10^5 \frac{1}{a^2} \lim_{f\to 0} \frac{\operatorname{tg}\varphi}{f} \qquad (3.39)$$

Измеряя φ, можно рассчитать кажущуюся электропроводность, построить графики значений σ в зависимости от a и определить параметры горизонтально-слоистой среды приемами, которые аналогичны разобранным выше.

Таблица 1

Функция $w_1(l)$

l	$w_1(l)$	l	$w_1(l)$	l	$w_1(l)$
0,00	0,000000	1,0	0,414214	5	0,819804
0,05	0,024984	1,1	0,442370	6	0,847127
0,10	0,049876	1,2	0,468375	7	0,867295
0,15	0,074583	1,3	0,492402	8	0,882782
0,20	0,099020	1,4	0,514618	9	0,895043
0,25	0,123106	1,5	0,535184	10	0,904988
0,30	0,146769	1,6	0,554248	11	0,913215
0,35	0,169946	1,7	0,571946	12	0,920133
0,40	0,192582	1,8	0,588403	15	0,935553
0,45	0,214635	1,9	0,603732	20	0,951249
0,50	0,236068	2,0	0,618034	25	0,960800
0,55	0,256857	2,1	0,631400	30	0,967222
0,60	0,276984	2,2	0,643913	35	0,971837
0,65	0,296440	2,3	0,655647	40	0,975312
0,70	0,315222	2,4	0,666667	45	0,978025
0,75	0,333333	2,5	0,677033	50	0,980200
0,80	0,350781	3,0	0,720759	60	0,983472
0,85	0,367577	3,5	0,754301	70	0,985816
0,90	0,383736	4,0	0,780776	80	0,987578
0,95	0,399275	4,5	0,802172	90	0,988951
1,00	0,414214	5,0	0,819804	100	0,990050

Таблица 2

Функция $w_2(l)$

l	$w_2(l)$	l	$w_2(l)$	l	$w_2(l)$
0,00	0,000000	1,0	0,450070	5	0,837692
0,05	0,028341	1,1	0,478483	6	0,862558
0,10	0,056542	1,2	0,504479	7	0,880851
0,15	0,084466	1,3	0,528297	8	0,894860
0,20	0,111987	1,4	0,550155	9	0,905928
0,25	0,138992	1,5	0,570253	10	0,914893
0,30	0,165381	1,6	0,588772	11	0,923300
0,35	0,191072	1,7	0,605871	12	0,928523
0,40	0,216001	1,8	0,621694	15	0,942374
0,45	0,240120	1,9	0,636367	20	0,956447
0,50	0,263395	2,0	0,650003	25	0,964998
0,55	0,285808	2,1	0,662701	30	0,970942
0,60	0,307350	2,2	0,674549	35	0,974868
0,65	0,328026	2,3	0,785626	40	0,977974
0,70	0,347846	2,4	0,696001	45	0,980417
0,75	0,366829	2,5	0,705736	50	0,982340
0,80	0,384995	3,0	0,746550	60	0,985260
0,85	0,402373	3,5	0,777606	70	0,987352
0,90	0,418991	4,0	0,801977	80	0,988924
0,95	0,434880	4,5	0,821586	90	0,990148
1,00	0,450070	5,0	0,837692	100	0,991129

§ 4. Вертикальный магнитный диполь. Случай, когда электрические свойства верхнего слоя изменяются в зависимости от глубины по произвольному закону

(Слихтер, 1951)

Проблема интерпретации для случая вертикального магнитного диполя, расположенного на поверхности полупространства, электропроводность которого σ и диэлектрическая проницаемость ε являются неизвестными функциями глубины, изучалась Слихтером (1933). Решения для функций электропроводности и диэлектрической проницаемости в зависимости от глубины были выражены через значения магнитного поля на земной поверхности по методу Лангера (Langer, 1933). Ниже используется тот же самый подход, но дается более простое решение. По сравнению с ранними работами в число неизвестных характеристик среды включена магнитная проницаемость.

1. Общее решение. Уравнения Максвела для любой однородной или неоднородной изотропной среды в системе MKS, если допустить, что ε и μ не зависят от напряженности поля, имеют следующий вид:

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{H} = \sigma \boldsymbol{E} + \varepsilon \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}, \tag{4.1}$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = -\mu \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}, \tag{4.2}$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{B} = 0, \tag{4.3}$$

$$\operatorname{div} \varepsilon \boldsymbol{E} = 0, \tag{4.4}$$

где ε, μ и σ полагаются непрерывными функциями координат x, y, z и не зависят от времени. Исключая $\frac{d\boldsymbol{H}}{dt}$ из уравнений (4. 1) и (4. 2), получим:

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = \mu^{-1} \operatorname{grad} \mu \times \operatorname{rot} \boldsymbol{E} - \mu\sigma \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2}. \tag{4.5}$$

В геофизических задачах удобно представить уравнение (4. 5) и связанные с ним уравнения (4. 3) и (4. 4) в безразмерной форме. Для этого введем безразмерную систему координат $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{t}$, определяемую равенствами

$$x = l\bar{x}, \quad y = l\bar{y}, \quad z = l\bar{z}, \quad t = \tau\bar{t}, \tag{4.6}$$

где l и τ являются условными единицами длины и времени, измеряемыми в метрах и секундах. Тогда

$$\overline{\operatorname{rot}}\,\overline{\operatorname{rot}}\, \boldsymbol{E} = \mu^{-1} \overline{\operatorname{grad}}\, \mu \times \overline{\operatorname{rot}}\, \boldsymbol{E} - l^2 \tau^{-1} \mu\sigma \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial \bar{t}} - l^2 \tau^{-2} \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial \bar{t}^2}, \tag{4.7}$$

$$\overline{\operatorname{div}} \boldsymbol{B} = 0, \tag{4.8}$$

$$\overline{\operatorname{div}}\, \varepsilon \boldsymbol{E} = 0, \tag{4.9}$$

где все операции выполняются над безразмерными переменными $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$. Отношение $\mu^{-1} \overline{\operatorname{grad}}\, \mu$ также безразмерно, так как дифференцирование по безразмерным координатам $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ не изменяет исходной размерности μ. Очевидно, что величины

$$k_1^* = -l^2 \tau^{-1} \mu\sigma \text{ и } k_2^* = -l^2 \tau^{-2} \mu\varepsilon$$

в равенстве (4. 7) должны быть безразмерными, исходя из тех же соображений, примененных к $\boldsymbol{E}$. Постоянство величин k_1^* и k_2^* при изменении имеющих размерность масштабных множителей l и τ является необходимым и достаточным условием электродинамического подобия (Стрэттон, 1948, стр. 430).

В случае гармонических колебаний обычный множитель $e^{-i\omega\tau\bar{t}}$, введенный в (4. 7), изменяет вид безразмерных функций k_1^* и k_2^*. Это проявляется в замене множителя τ угловой частотой ω:

$$k_1^* \to il^2 \omega\mu\sigma = ik_1^*, \quad k_2^* \to l^2 \omega^2 \mu\varepsilon = k_2^*. \tag{4.10}$$

При этом условие подобия сводится к постоянству комплексной величины

$$k^{*2} = l^2 \omega^2 \mu\varepsilon + il^2 \omega\mu\sigma = k_2^* + ik_1^*. \tag{4.11}$$

Выражение (4. 11) является квадратом волнового числа*, которое записано в безразмерной форме. В дальнейшем будут применяться безразмерные координаты и безразмерная форма волнового числа. Отношение $\frac{k_2^*}{k_1^*}$ в практике геофизических работ обычно бывает очень небольшим. Например, когда $\sigma^{-1} = 1$ *омм*, $\varepsilon = 8{,}854 \cdot 10^{-11}$ *ф/м*, что в десять раз больше значения ε в вакууме, и $\frac{\omega}{2\pi} = 10\,000$ *гц*, отношение $\frac{k_2^*}{k_1^*}$ будет равно примерно $5{,}5 \times 10^{-6}$. В реальных условиях μ меняется, как правило, незначительно и величина критерия подобия $l^2 \omega\mu\sigma$ контролируется сомножителем $l^2\omega\sigma$, то есть сохранение подобия при изменениях масштаба в l раз определяется обычно выбором произведения $\omega\sigma$. Однако не всегда можно полагать, что токи смещения незначительны и отношения $\frac{k_2^*}{k_1^*}$ мало.

Источник dS представлен на рис. 5 в виде кругового витка тока с радиусом a. При решении считается, что источник имеет форму диска, параллельного плоской земной поверхности и расположен на высоте h от нее. Плотность тока в источнике

* В отечественной литературе рассматриваемое безразмерное число чаще называют параметром или критерием подобия электромагнитного поля. *Ред.*

изменяется как функция радиуса по заданному закону. Фаза тока в источнике не зависит от пространственных координат, частота колебаний тока равна $\frac{\omega}{2\pi}$. Соотношение между таким источником и малой петлей разобрано в примечании на стр. 124.

Электрические свойства среды: магнитная проницаемость, электропроводность и диэлектрическая проницаемость полагаются непрерывными и конечными функциями глубины в пределах

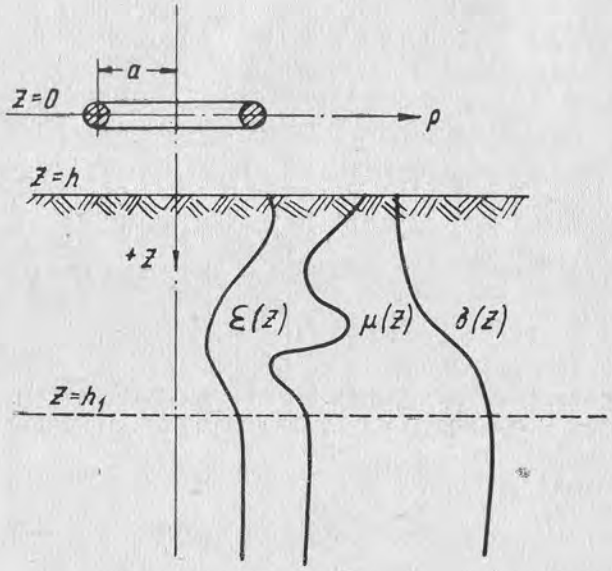


Рис. 5.

пласта мощностью $\bar{d}$. Сверху пласт ограничен поверхностью раздела воздух — земля. На глубине $\bar{h}_1$ эти три функции принимают постоянные значения $\bar{\mu}$, $\bar{\sigma}$, $\bar{\varepsilon}$.

Воспользуемся системой цилиндрических координат ($\bar{\varrho}$, φ, $\bar{z}$), положительное направление оси Oz — вниз. Центр диска источника совпадает с началом координат.

Составляющая H_φ магнитного поля везде равна нулю, так же как составляющие E_ϱ и E_z электрического поля, поэтому индекс у E_φ будет опущен для простоты. Модули и фазы составляющих H_ϱ и H_z наблюдаются на земной поверхности на расстоянии $\bar{\varrho}$ от источника. Задача состоит в определении трех неизвестных функций σ, ε и μ, зависящих только от $\bar{z}$ в области $\bar{h} \leqslant \bar{z} \leqslant \bar{d} + \bar{h} = \bar{h}_1$.

Так как впредь будут применяться только безразмерные координаты $\bar{\varrho}$, $\bar{z}$, $\bar{t}$, то для упрощения записи опускаются

черточки над ними. Уравнение (4. 7) в системе цилиндрических координат примет вид:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} - \mu^{-1}\frac{d\mu}{\partial z}\frac{\partial E}{\partial z} + \frac{\partial^2 E}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial E}{\partial \varrho} - \\ - (\varrho^{-2} - k_2^* - ik_1^*)\,E = 0. \qquad (4.12)$$

Подстановкой $E = R(\varrho)\,Z(z)$ уравнение (4. 12) сводится к двум дифференциальным уравнениям:

$$\frac{\partial^2 R}{\partial \varrho^2} + \varrho^{-1}\frac{dR}{\partial \varrho} + (\lambda^2 - \varrho^{-2})\,R = 0, \qquad (4.13)$$

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} - \mu^{-1}\frac{d\mu}{\partial z}\frac{\partial Z}{\partial z} - (\lambda^2 - k_2^* - ik_1^*)\,Z = 0. \qquad (4.14)$$

Здесь использована сокращенная запись в соответствии с формулами (4. 10). Произвольный безразмерный параметр λ^2 выбирается вещественным и положительным или равным нулю. Решением уравнения Бесселя (4. 13), которое остается конечным в начале координат, будет функция $J_1(\varrho\lambda)$.

Рассмотрим решения уравнения (4. 14) в четырех областях, ограниченных плоскостями $z = 0$, $z = h$ и $z = h_1$. В самой верхней области:

$$Z_1 = A_1(\lambda)\,e^{u_0 z}, \quad (z \leqslant 0), \qquad (4.15)$$

где

$$u_0 = (\lambda^2 - k_0^{*2})^{\frac{1}{2}}, \ (\lambda > k_0^*), \qquad (4.16)$$

$$u_0 = -\,i\,(k_0^{*2} - \lambda^2)^{\frac{1}{2}}, \ (\lambda < k_0^*),$$

$$k_0^{*2} = l^2\omega^2\varepsilon_0\mu_0,$$

причем $\varepsilon_0 = 8{,}854 \cdot 10^{-12}$ *ф/м* и $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ *гн/м*. При сделанном выборе знаков элементарное решение представляет волну, распространяющуюся вверх, когда $\lambda^2 < k_0^{*2}$, и стоячую волну с амплитудой, убывающей экспоненциально в направлении отрицательных значений z, когда $\lambda^2 >> k_0^{*2}$.

В слое между источником и поверхностью земли, имеющем мощность h, общее решение уравнения (4. 14)

$$Z_2 = A_2(\lambda)\,\mathrm{ch}\,u_0 z + B_2(\lambda)\,\mathrm{sh}\,u_0 z, \ (0 \leqslant z \leqslant h). \qquad (4.17)$$

В пределах слоя с неизвестными свойствами два линейно независимых неизвестных решения уравнения (4. 14) обозначим через $Z_1^*(\lambda, z)$ и $Z_2^*(\lambda, z)$, тогда для общего решения Z_3 получим:

$$Z_3 = A_3 Z_1^* + B_3 Z_2^*, \quad (h \leqslant z \leqslant h_1). \qquad (4.18)$$

На глубине большей h_1 для решения Z_4 имеем:

$$Z_4 = A_4 e^{-\bar{u}z}, \quad (h_1 \leqslant z), \tag{4.19}$$

где

$$\bar{k}^{*2} = l^2 \omega^2 \bar{\mu}\,\bar{\varepsilon} + i l^2 \omega \bar{\mu}\,\bar{\sigma} = \bar{k}_2^* + i\bar{k}_1^*, \tag{4.20}$$

и

$$\bar{u} = (\lambda^2 - \bar{k}^{*2})^{\frac{1}{2}} = 2^{-\frac{1}{2}} \{[(\lambda^2 - \bar{k}_2^*)^2 + \bar{k}_1^{*2}]^{\frac{1}{2}} + |\lambda^2 - \bar{k}_2^*|\}^{\frac{1}{2}} -$$

$$- i 2^{-\frac{1}{2}} \{[(\lambda^2 - \bar{k}_2^*)^2 + \bar{k}_1^*]^{\frac{1}{2}} - |\lambda^2 - \bar{k}_2^*|\}^{\frac{1}{2}}. \tag{4.21}$$

Решение для E в указанных четырех областях будем искать в виде интеграла

$$E_i = \int_0^\infty J_1(\varrho\lambda)\, Z_i(\lambda, z)\, d\lambda, \quad (i = 1, 2, 3, 4), \tag{4.22}$$

где Z_i определяется выражениями (4. 15), (4. 17), (4. 18) и (4. 19). Допуская равномерную сходимость интеграла* (4. 22), найдем выражение для напряженности магнитного поля с помощью формул (4. 22) и (4. 2):

$$H_\varrho = - i l^{-1} \omega^{-1} \mu^{-1} \int_0^\infty J_1(\varrho\lambda)\, \dot{Z}_i(\lambda, z)\, d\lambda, \tag{4.23}$$

$$H_z = i l^{-1} \omega^{-1} \mu^{-1} \int_0^\infty J_0(\varrho\lambda)\, Z_i(\lambda, z)\, \lambda\, d\lambda, \tag{4.24}$$

Точка над Z_i указывает на дифференцирование по z.

На каждой из трех поверхностей $z = 0$, $z = h$ и $z = h_1$ должны выполняться граничные условия, по которым напряженность электрического поля E непрерывна на всех поверхностях раздела. Составляющая H_ϱ непрерывна повсюду, за исключением источника, где H_ϱ имеет разрыв, равный поверхностной плотности тока $j(\varrho)$. Непрерывность E на границе $z = 0$ требует, чтобы

$$\int_0^\infty J_1(\varrho\lambda)\,(A_2 - A_1)\, d\lambda = 0, \tag{4.25}$$

откуда

$$A_2 - A_1 = 0,$$

так как равенство (4. 25) должно выполняться при всех значениях ϱ. Используя выражение (4. 23), (4. 15) и (4. 17), запишем

* Равномерная сходимость аналогичного интеграла доказана Слихтером (1933).

условие разрыва H_ϱ на границе с источником:

$$- i l^{-1} \omega^{-1} \mu_0^{-1} \int_0^\infty (B_2 - A_1)\,(\lambda^2 - k_0^{*2})^{\frac{1}{2}} J_1(\varrho\lambda)\, d\lambda =$$

$$= \begin{cases} j(\varrho), & (0 < \varrho < a), \\ 0, & (\varrho > a), \end{cases} \tag{4.26}$$

где a радиус диска. Условия, выраженные равенствами (4. 25) и (4. 26), можно записать для каждой из остальных двух границ $z = h$ и $z = h_1$. Тем не менее в двух уравнениях на границе $z = h_1$ дополнительно появляются 5 неизвестных функций: $Z_1^*(\lambda, h_1)$, $Z_2^*(\lambda, h_1)$, их производные по z и неизвестный коэффициент $A_4(\lambda)$. Поэтому этих двух граничных условий недостаточно для решения задачи. С другой стороны, на границе $z = h$ справедливы 4 равенства: два условия непрерывности электромагнитного поля, соответствующих (4. 25) и (4. 26), и два добавочных условия, которые можно построить, наблюдая значения H_ϱ и H_z на поверхности земли. Два условия непрерывности имеют следующий вид:

$$Z_2(\lambda, h) - Z_3(\lambda, h) = 0, \tag{4.27}$$

$$\mu_1 \dot{Z}_2(\lambda, h) - \mu_0 \dot{Z}_3(\lambda, h) = 0, \tag{4.28}$$

где μ_1 есть величина магнитной проницаемости вблизи поверхности земли ниже плоскости $z = h$. Два дополнительных условия можно получить из формул (4. 23) и (4. 24), воспользовавшись преобразованием Фурье — Бесселя (Ватсон, 1949, стр. 502):

$$\dot{Z}_i(\lambda, z) = i l\, \omega\mu\lambda \int_0^\infty J_1(\varrho\lambda)\, H_\varrho(\varrho, z)\, \varrho\, d\varrho, \tag{4.29}$$

$$Z_i(\lambda, z) = - i l\, \omega\mu \int_0^\infty J_0(\varrho\lambda)\, H_z(\varrho, z)\, \varrho\, d\varrho, \quad (i = 1, 2, 3, 4). \tag{4.30}$$

Величины $H_\varrho(\varrho, h)$ и $H_z(\varrho, h)$ измеряются на поверхности земли, что позволяет вычислить функции $\dot{Z}_i(\lambda, h)$ и $Z_i(\lambda, h)$, когда $i = 2,3$. Если $j(\varrho)$ удовлетворяет некоторым заданным условиям, уравнение (4. 26) можно преобразовать так, что удается получить выражение для $B_2 - A_1$ через $j(\varrho)$. В частности, удобно задать следующие значения $j(\varrho)$:

$$j(\varrho) = \begin{cases} \varrho, & (0 \leqslant \varrho < a), \\ \frac{a}{2}, & (\varrho = a), \\ 0, & (\varrho > a). \end{cases} \tag{4.31}$$

Тогда, сравнивая выражение (4. 26) с известным разрывным интегралом (Ватсон, 1949, стр. 444),

$$a^2 \int_0^\infty J_2(a\lambda) J_1(\varrho\lambda)\, d\lambda = \begin{cases} \varrho, & (0 \leqslant \varrho < a), \\ \frac{a}{2}, & (\varrho = a), \\ 0, & (\varrho > a), \end{cases} \tag{4. 32}$$

найдем, что

$$B_2 - A_1 = il\,\omega\mu_0\, a^2(\lambda^2 - k_0^{*2})^{-\frac{1}{2}} J_2(a\lambda) = \psi(\lambda,\ a,\ k_0^{*2}), \tag{4. 33}$$

где правый член, обозначенный через ψ, известен*.

---

* Можно вывести связь между применяемым на практике источником в виде одновитковой круглой рамки и источником, введенным в задаче. Радиус источника a входит только в множитель $a^2 J_2\ (a, \lambda)$ [см. формулу (4. 33)]. Таким образом, если функция $\varphi_i\,(z, \lambda)$ определена условием

$$a^2 J_2(a\lambda)\,\varphi_i(z, \lambda) = Z_i(z, \lambda),$$

то уравнение (4.22) можно переписать:

$$E_i = a^2 \int_0^\infty J_2(a\lambda) J_1(\varrho\lambda)\,\varphi_i(z, \lambda)\, d\lambda.$$

Для поля $E_{0\,i}$ источника в виде кольца радиуса a и ширины $\Delta\, a$ с плотностью тока a (сила тока $I = a\ \Delta\ a$) получим:

$$E_{0\,i} = \frac{\partial E_i}{\partial a}\,\Delta\, a = aI \int_0^\infty J_1(a\lambda) J_1(\varrho\lambda)\,\varphi_i(z,\ \lambda)\,\lambda\, d\lambda.$$

Так как $J_2\ (a\lambda) = \frac{1}{8}\, a^2\lambda^2$ и $J_1(a\lambda) = \frac{1}{2}\, a\lambda$, когда $a\lambda$ мало, имеет место следующее соотношение между $E_{0\,i}$ и E_i:

$$E_{0\,i} = 4E_i\,\frac{\Delta\, a}{a} = \frac{1}{2}\, a^2 I \int_0^\infty J_1(\varrho\lambda)\,\varphi_i(z,\ \lambda)\,\lambda^2\, d\lambda.$$

В случае рамки радиуса a, расположенной в однородной среде с волновым числом $k^{*2} = k_2^* + ik_1^*$, компоненты H_ϱ и H_z имеют следующий вид:

$$H_\varrho = \frac{aI}{2} \int_0^\infty J_1(a\lambda) J_1(\varrho\lambda)\, e^{\mp uz}\,\lambda\, d\lambda,$$

$$H_z = \frac{aI}{2} \int_0^\infty J_1(a\lambda) J_0(\varrho\lambda)\, e^{\mp uz}\, u^{-1}\,\lambda^2\, d\lambda.$$

где

$$u = (\lambda^2 - k^{*2})^{\frac{1}{2}},\quad (\lambda > k^*),$$

$$u = i\,(k^{*2} - \lambda)^{\frac{1}{2}},\quad (\lambda < k^*).$$

Применив тождество $A_1 = A_2$, получим три условия, связывающих два неизвестных коэффициента A_2 и B_2:

$$A_2 - B_2 = -\psi, \tag{4. 34а}$$

$$A_2 \operatorname{ch} u_0 h + B_2 \operatorname{sh} u_0 h = Z_3(\lambda,\ h), \tag{4. 34в}$$

$$A_2 \operatorname{sh} u_0 h + B_2 \operatorname{ch} u_0 h = \mu_0\mu_1^{-1} u_0^{-1}\,\dot{Z}_3(\lambda, h), \tag{4. 34с}$$

где все правые члены известны. Решения уравнений (4. 34в) и (4. 34с), подставленные в (4. 34а), дают следующее соотношение между Z_3 и $\dot{Z}_3$:

$$\mu_0\mu_1^{-1} u_0^{-1}\,\dot{Z}_3 = Z_3 + \psi\,[\operatorname{sh} u_0\, h + \operatorname{ch} u_0\, h]^{-1}. \tag{4. 35}$$

Выражение (4. 35) инвариантно относительно электрических свойств земли. Равенства типа (4. 35) будут справедливы на любом уровне в области $z < h$, а именно:

$$u_0^{-1}\,\dot{Z}_1(z) = Z_1(z),\quad (z < 0) \tag{4. 36}$$

и

$$u_0^{-1}\,\dot{Z}_2(z) = Z_2(z) + \psi\,[\operatorname{sh} u_0 z + \operatorname{ch} u_0 z]^{-1},\ (0 < z < h). \tag{4. 37}$$

Это соотношение в силу (4. 23), (4. 24), (4. 29) и (4. 30) показывает, что вертикальная и горизонтальная составляющие напряженности магнитного поля являются взаимно зависимыми.

и знак минус ставится при $z > 0$ и наоборот. Пользуясь интегралом Зоммерфельда

$$r^{-1}\, e^{-ik^* r} = \int_0^\infty J_0(\varrho\lambda)\, e^{-uz}\, u^{-1}\lambda\, d\lambda$$

и его производными по a, ϱ и z, получим из написанных выше выражений известные формулы: 1) для поля H_z на оси рамки и 2) выражения для H_ϱ и H_z на расстояниях $r = (z^2 + \varrho^2)^{\frac{1}{2}}$ значительно больших a:

1)

$$H_z(0,\ z) = \frac{a^2 I}{2R^3}\,(1 + ik^* R)\, e^{i\,(\omega t - k^* R)},$$

где

$$R = (a^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}$$

и

2)

$$H_\varrho(\varrho,\ z) = \frac{3a^2 I}{4}\,(r^{-3} + ik^* r^{-2})\,\varrho\, z r^{-2}\, e^{i\,(\omega t - k^* r)},$$

$$H_z(\varrho,\ z) = \frac{a^2 I}{4}\,[r^{-3}(3z^2 r^{-2} - 1) +$$

$$+ ik^* r^{-2}(3z^2 r^{-2} - 1) + k^{*2} r^{-1}(1 - z^2 r^{-2})]\, e^{i\,(\omega t - k^* r)}.$$

В любой плоскости $z_i \leqslant h$ знания $H_\varrho(\varrho, z_i)$ достаточно, чтобы определить $H_z(\varrho, z_i)$ и т. д. Следовательно, имеется только одна независимая измеряемая функция. $H_z(\varrho, z_i)$ или $H_\varrho(\varrho, z_i)$.

2. *Вычисление функций* $\mu(z)$, $\sigma(z)$, $\varepsilon(z)$. Введем функцию «керн»* $\hat{K}_3(\lambda, h)$, которая имеет вещественную и мнимую части $\hat{K}_3'$ и $\hat{K}_3''$ и определяется следующим выражением:

$$\hat{K}_3(\lambda, h) = -\frac{\dot{Z}_3(\lambda, h)}{\lambda Z_3(\lambda, h)} = \hat{K}_3'(\lambda, h) + i\hat{K}_3''(\lambda, h). \qquad (4.38)$$

Если взять выражение (4. 29) и (4. 30), или любое из них и (4. 35), становится очевидным, что функция «керн» определяется из результатов полевых наблюдений, причем справедлива и обратная связь. Считая, что

$$Z_3 = Z_3' + iZ_3'',$$

$$H_z(\varrho, h) = H_z'(\varrho, h) + iH_z''(\varrho, h), \qquad (4.39)$$

$$H_\varrho(\varrho, h) = H_\varrho'(\varrho, h) + iH_\varrho''(\varrho, h),$$

введем функции n_0, v_0, n_1, v_1, которые определяются через получаемые в поле данные по формулам:

$$\left.\begin{aligned} n_0 &= \int_0^\infty J_0(\varrho\lambda) H_z'(\varrho, h)\, \varrho\, d\varrho, \\ v_0 &= \int_0^\infty J_0(\varrho\lambda) H_z''(\varrho, h)\, \varrho\, d\varrho, \\ n_1 &= \int_0^\infty J_1(\varrho\lambda) H_\varrho'(\varrho, h)\, \varrho\, d\varrho, \\ v_1 &= \int_0^\infty J_1(\varrho\lambda) H_\varrho''(\varrho, h)\, \varrho\, d\varrho. \end{aligned}\right\} \qquad (4.40)$$

Тогда с помощью формул (4. 29) и (4. 30) получим:

$$\hat{K}' = \frac{n_0 n_1 + v_0 v_1}{n_0^2 + v_0^2}, \quad \hat{K}'' = \frac{n_0 v_1 - n_1 v_0}{n_0^2 + v_0^2}. \qquad (4.41)$$

---

* Соответствующие функции $\hat{K}_3(\lambda, z)$, $\hat{K}_4$ также будут именоваться функциями «керн». Название функции происходит от слова «kernel». *А. В., Г. Ф.*

Запишем, что

$$Z_3(\lambda, z) = R(\lambda, z)\, e^{i\int \beta(\lambda, z)\, dz}, \qquad (4.42)$$

где R и β вещественны. Тогда

$$\hat{K}_3(\lambda, z) = -\frac{\dot{R}(\lambda z)}{\lambda R(\lambda, z)} - i\,\frac{\beta(\lambda, z)}{\lambda} = \hat{K}_3' + i\hat{K}_3''. \qquad (4.43)$$

Подставляя (4. 42) в (4. 14), получим

$$\ddot{R} - \dot{\mu}\mu^{-1}\dot{R} - (\lambda^2 - k_2^* + \beta^2) R = 0, \qquad (4.44)$$

$$\dot{\beta} + (2\dot{R}R^{-1} - \dot{\mu}\mu^{-1})\beta = -k_1^*(z). \qquad (4.45)$$

Сделав подстановку $n = \frac{\dot{R}}{R}$, $R \neq 0$ в уравнение (4. 44), приведем его к уравнению Риккати:

$$\dot{n} - \dot{\mu}\mu^{-1} n + n^2 = \lambda^2 + \beta^2(z, \lambda) - k_2^*(z, \omega). \qquad (4.46)$$

Деленные на $-\lambda$ величины n и β в уравнениях (4. 45) и (4. 46) представляют собой реальную и мнимую части функции «керн». Из уравнений (4. 40) можно ожидать, что последние зависят от высоты размещения источника h, радиуса источника a и плотности тока источника $j(\varrho)$. Тем не менее уравнения (4. 45) и (4. 46) дают дифференциальную связь между составляющими функции «керн» и характеристиками свойств среды, которая следует непосредственно из уравнений поля независимо от граничных условий или свойств источника. Как будет показано ниже [см. уравнения (4. 56), (4. 57)], асимптотические выражения для функции «керн», фактически однозначно определяются электрическими свойствами среды и, наоборот, из асимптотических выражений могут быть определены функции, характеризующие изменение электрических свойств с глубиной. Для $z > h_1$ решение уравнений (4. 44) и (4. 45), в соответствии с (4.19), записывается как $Z_4 = A_4 e^{-(\lambda^2 - \bar{k}^{*2})^{\frac{1}{2}} z}$. Поэтому для соответствующей функции «керн» найдем

$$\hat{K}_4 = -\frac{\dot{Z}_4}{\lambda Z_4} = (\lambda^2 - \bar{k}^{*2})^{\frac{1}{2}} \lambda^{-1} = (1 - \bar{k}_2^* \lambda^{-2} - i\bar{k}_1^* \lambda^{-2})^{\frac{1}{2}}. \qquad (4.47)$$

Для больших значений λ разложение вещественной и мнимой частей функции $\hat{K}_4$ будет иметь следующий вид:

$$-\frac{\dot{\bar{R}}}{\lambda \bar{R}} = 1 - \frac{1}{2}\bar{k}_2^* \lambda^{-2} + \frac{1}{8}(\bar{k}_1^{*2} - \bar{k}_2^{*2})\lambda^{-4} + \\ + \frac{1}{16}(3\bar{k}_1^{*2} - \bar{k}_2^{*2}) k_2^* \lambda^{-6} \ldots, \qquad (4.48)$$

$$\frac{\bar{\beta}}{\lambda} = \frac{\bar{k}_1^*}{2}\lambda^{-2} + \frac{1}{4}\bar{k}_1^* \bar{k}_2^* \lambda^{-4} + \frac{1}{16}(3\bar{k}_2^{*2} - \bar{k}_1^{*2})\bar{k}_1^* \lambda^{-6} \ldots \qquad (4.49)$$

Аналогия с этими результатами позволяет написать следующие асимптотические выражения для вещественной и мнимой частей функции «керн» $\hat{K}_3$:

$$-\frac{\dot{R}(\lambda, z)}{\lambda R(\lambda, z)} \approx \sum_{i=0}^{\infty} r_i \lambda^{-i}, \quad \text{где } r_0 = 1{,}0, \tag{4.50}$$

и

$$\frac{\beta(\lambda, z)}{\lambda} \approx \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} b_i \lambda^{-i-1}, \tag{4.51}$$

где неизвестные коэффициенты r_i и b_i являются вещественными функциями z и ω, но не функциями λ. Каждый коэффициент рассматривается в интервале $h \leqslant z \leqslant h_1$. Когда $z = h$, левые члены уравнений (4.50) и (4.51) есть известные функции $\hat{K}_3'(\lambda, h)$ и $-\hat{K}_3''(\lambda, h)$. Следовательно, коэффициенты r_i и b_i известны при $z = h$ для любых заданных значений l и ω.

Если λ достаточно велико, то ряды (4.50) и (4.51) сходятся абсолютно. Подставив (4.50) и (4.51) в уравнения (4.45) и (4.46), при больших λ получим

$$\begin{gathered}-\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{\dot{b}_i}{2} - \frac{\dot{\mu}}{2\mu} b_i\right)\lambda^{-i} + b_1 + (b_1 r_1 + b_2)\lambda^{-1} + \\ + (b_1 r_2 + b_2 r_1 + b_3)\lambda^{-2} + (b_1 r_3 + b_2 r_2 + b_3 r_1 + b_4)\lambda^{-4} + \\ + \ldots = k_1^{*}(z, \omega),\end{gathered} \tag{4.52}$$

$$\begin{gathered}-\sum_{i=1}^{\infty} \dot{r}_i \lambda^{1-i} + \frac{\dot{\mu}}{\mu}\sum_{i=0}^{\infty} r_1 \lambda^{1-i} + 2\lambda^2\left[r_1\lambda^{-1} + \left(r_2 + \frac{r_1^2}{2}\right)\lambda^{-2} + \right. \\ \left. + (r_3 + r_2 r_1)\lambda^{-3} + \left(r_4 + r_3 r_1 + \frac{r_2^2}{2}\right)\lambda^{-4} + \ldots\right] - \\ - \frac{1}{4}\left[b_1^2\lambda^{-2} + 2b_2 b_1 \lambda^{-3} + (2b_3 b_1 + b_2^2)\lambda^{-4} + \ldots\right] = \\ = -k_2^{*}(z, \omega).\end{gathered} \tag{4.53}$$

Так как правые члены этих уравнений не зависят от λ и являются функциями только z и ω, коэффициенты при всех степенях λ за исключением нулевой степени должны быть равны нулю, что приводит к двум системам уравнений:

$$\left.\begin{gathered}(a)\ b_1 = k_1^{*}(z), \quad (b)\ \dot{b}_1 = 2b_2, \quad (c)\ \dot{b}_2 = 2(b_1 r_2 + b_3), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dot{b}_n = 2\sum_{i=1}^{n-1} b_i r_{n+1-i} + 2b_{n+1}, \ldots\end{gathered}\right\} \tag{4.54}$$

$$\left.\begin{gathered}(a)\ r_0 = 1, \ (b)\ r_1 = -\frac{\dot{\mu}}{2\mu}, \ (c)\ \dot{r}_1 = 2r_2 - r_1^2 + k_2^{*}(z), \\ (d)\ \dot{r}_2 = 2r_3, \quad (e)\ \dot{r}_3 = r_2^2 + 2r_4 - \frac{b_1^2}{4}, \\ (f)\ \dot{r}_4 = 2(r_5 + r_3 r_2) - \frac{b_1 b_2}{2}, \\ (g)\ \dot{r}_5 = 2\left(r_6 + r_4 r_2 + \frac{r_3^2}{2}\right) - \frac{1}{4}(2b_1 b_3 + b_2^2), \\ (h)\ \dot{r}_6 = 2(r_7 + r_5 r_2 + r_4 r_3) - \frac{1}{2}(b_1 b_4 + b_2 b_3), \ldots\end{gathered}\right\} \tag{4.55}$$

В уравнениях (4.55c) и (4.54b) использовано равенство (4.55b): $\frac{\dot{\mu}}{\mu} = -2r_1$. Системы (4.54) и (4.55) позволяют последовательно вычислить производные b_1 и r_2 всех порядков через функции b_i и r_i:

$$\left.\begin{gathered}b_1 = k_1^{*}(z), \quad \dot{b}_1 = 2b_2, \quad \ddot{b}_1 = 2\dot{b}_2 = 4(b_1 r_2 + b_3), \\ \dddot{b}_1 = 4(\dot{b}_1 r_2 + \dot{r}_2 b_1 + \dot{b}_3) = 16\left(b_2 r_2 + b_1 r_3 + \frac{b_4}{2}\right), \\ \ddddot{b}_1 = 16\left(3b_1 r_2^2 + 3b_3 r_2 + 5b_2 r_3 + 3b_1 r_4 - \frac{b_1^3}{4} + b_5\right), \ldots,\end{gathered}\right\} \tag{4.56}$$

$$\left.\begin{gathered}r_2 = \frac{1}{2}\left[\dot{r}_1 + r_1^2 - k_2^{*}(z)\right], \\ \dot{r}_2 = 2r_3, \quad \ddot{r}_2 = 2\left(r_2^2 + 2r_4 - \frac{b_1^2}{4}\right), \\ \dddot{r}_2 = 8(3r_2 r_3 + 2r_5 - b_1 b_2), \\ \ddddot{r}_2 = 8\left(4r_6 + 8r_3^2 + 3r_2^2 + 10r_4 r_2 - \right. \\ \left. - \frac{11}{4} b_1^2 r_2 - 3b_1 b_3 - \frac{5}{2} b_2^2\right), \ldots\end{gathered}\right\} \tag{4.57}$$

Учитывая, что b_1, r_2 и все правые члены уравнений в системах (4.56) и (4.57) известны на поверхности $z = h$, функцию электропроводности $b_1 = k_1^{*}(z) = l^2 \omega\mu\sigma$ и функцию r_2 можно разложить в ряд Тэйлора с известными коэффициентами при $z = h$. Определение коэффициентов приведенных выше равенств не требует точного знания ни одного из трех электрических свойств среды. Наоборот, если допустить, что функции $k_1^{*}(z)$ и $r_2(z)$ и все их производные известны, уравнения (4.56) и (4.57) образуют систему для определения функций b_i и r_i через производные функ-

ции $b_1 = k_1^*(z)$ и $r_2(z)$. Таким образом, асимптотическое выражение для функции «керн» связывается только с электрическими свойствами среды.

Из трех величин $\frac{\dot{\mu}}{\mu}$, k_2^* и k_1^*, характеризующих свойства среды, только первая не зависит от частоты и масштабного коэффициента l. Когда произведения $\omega^2 l^2$ и ωl^2 достаточно малы, функции k_2^* и k_1^* также малы и магнитная проницаемость становится доминирующим свойством среды. Более того, когда $k_1^* = 0$, все коэффициенты b_i в асимптотических рядах для мнимой части функции «керн» также равны нулю. В этом случае, последовательно дифференцируя уравнение (4. 55c) и подставляя в полученные таким образом равенства величины $\dot{r}_i$ из системы (4. 55), получим следующее выражение для r_1 и его производных:

$$\left.\begin{aligned} r_1 &= -\frac{\dot{\mu}}{2\mu}, \quad \dot{r}_1 = -r_1^2 + 2r_2, \\ \ddot{r}_1 &= 2r_1^3 - 4r_1 r_2 + 4r_3, \\ \dddot{r}_1 &= 16r_1^2 r_2 - 16r_1^4 - 8r_1 r_3 - 4r_2^2 + 8r_4, \ldots \end{aligned}\right\} \quad (4.58)$$

поэтому

$$\mu = \mu_1 e^{-2\int_h^z r_1(z)\,dz}, \quad (4.59)$$

где коэффициенты ряда Тэйлора для $r_1(z)$ даны в (4. 58). Интересно отметить общность решения (4. 59) и соответствующего решения для стационарных токов, где функция электропроводности $\sigma(z)$ получается из распределения потенциала на поверхности земли при установившемся токе точечного электрода, расположенного на земной поверхности (Лангер, 1933) *. Рассмотренное выше решение для магнитной проницаемости находится с помощью известных вертикальной и горизонтальной компонент магнитного поля, создаваемого магнитным диполем. Решения этих двух задач имеют идентичную форму, а именно равенства (4. 58) и (4. 59) для магнитной проницаемости идентичны с равенствами (1. 13) и (1. 14) для электропроводности (Слихтер, 1933).

Когда магнитная проницаемость постоянна, то, как следует из (4. 55b), $r_1(z) = 0$ и функция, характеризующая изменение диэлектрических свойств, выражается через известный ряд Тэйлора для r_2 (4. 57), а именно:

$$k_2^*(z) = -2r_2. \quad (4.60)$$

* В последнее время этот вопрос исследовал Онодера (1960), в статье которого можно также найти библиографию. *А. В., Г. Ф.*

Когда магнитная проницаемость меняется, диэлектрическую функцию, зависящую от ω^2, можно определить с помощью двух различных частот $\frac{\omega_1}{2\pi}$ и $\frac{\omega_2}{2\pi}$. Для удобства допускается, что $\omega_2^2 = 2\,\omega_1^2$. Так как функции r_1 и $\dot{r}_1$ определяются только магнитной проницаемостью независимо от частоты, величину $k_2^*(z)$ можно оценить с помощью (4. 55c), для чего необходимо записать это уравнение для двух частот и вычесть одно из другого (при $\omega_2^2 = 2\,\omega_1^2$):

$$k_2^*(z, \omega) = 2\,[r_2(z, \omega_1) - r_2(z, \omega_2)], \quad (4.61)$$

где формулы коэффициентов ряда Тэйлора для $r_2(z)$ известны.

Выведем формулу для определения μ, справедливую в случае методов переменного тока. Полагая, что $k_2^*(z, \omega)$ найдено из уравнения (4. 61), можно на основании уравнения (4. 55c) определить последовательные производные $r_1(z)$:

$$\left.\begin{aligned} \dot{r}_1(\omega_1) &= 4r_2(\omega_1) - 2r_2(\omega_2) - r_1^2(\omega_1), \\ \ddot{r}_1(\omega_1) &= 4\dot{r}_2(\omega_1) - 2\dot{r}_2(\omega_2) - 2r_1\dot{r}_1, \\ \dddot{r}_1(\omega_1) &= 4\ddot{r}_2(\omega_1) - 2\ddot{r}_2(\omega_2) - 2\dot{r}_1^2 - 2r_1\ddot{r}_1, \ldots \end{aligned}\right\} \quad (4.62)$$

Здесь производные от r_2 всех порядков известны из (4. 57). Производные от r_1, встречающиеся в правой части, можно выразить через предыдущие члены системы (4. 62), которые не содержат производных. В итоге находим ряд Тэйлора для r_1, причем коэффициенты ряда известны на поверхности, что дает возможность подсчитать магнитную проницаемость по уравнению (4. 59). Решение уравнения (4. 59) получается в виде логарифма отношения магнитных проницаемостей. Такая форма решения удобна, так как именно отношение магнитных проницаемостей имеет значение при оценке магнитной индукции. С другой стороны, именно абсолютные величины диэлектрических проницаемостей и электропроводностей определяют электродинамику процесса. В решениях для магнитной проницаемости и для диэлектрической функции величины r_i из вещественной части функции «керн» играют главную роль.

Для определения магнитной и диэлектрической проницаемостей необходимо иметь результаты измерений на двух частотах. Если функции $k_2^*(z)$ или $\mu(z)$ известны, то из уравнения (4. 55) и предыдущего анализа следует, что функцию электропроводности можно найти по наблюдениям на одной частоте. Когда магнитная и диэлектрическая проницаемости известны, можно определить электропроводность на основании зависимости между действительной и мнимой частями функции «керн». Например, пусть известно, что диэлектрическая функция очень мала в сравнении с функцией электропроводности и что магнитная проницаемость

постоянна. Из (4. 55) получим выражения для коэффициентов r_i через b_i:

$$\left.\begin{aligned} &r_0 = 1, \quad r_1 = r_2 = r_3 = 0, \quad r_4 = \frac{b_1^2}{8}, \quad r_5 = \frac{b_1 b_2}{2}, \\ &r_6 = \left(\frac{3}{4} b_1 b_3 + \frac{5}{8} b_2^2\right), \quad r_7 = b_1 b_4 + \frac{9}{2} b_2 b_3, \\ &r_8 = \frac{15}{128} b_1^4 + \frac{5}{4} b_1 b_5 + \frac{7}{2} b_2 b_4 + \frac{19}{8} b_3^2, \ldots \end{aligned}\right\} \quad (4.63)$$

Отсюда:

$$\left.\begin{aligned} &b_1 = 2(2r_4)^{\frac{1}{2}}, \quad b_2 = r_5 (2r_4)^{-\frac{1}{2}}, \\ &b_3 = \frac{2}{3} (2r_4)^{-\frac{1}{2}} \left(r_6 - \frac{5}{16} r_5^2 r_4^{-1}\right), \\ &b_4 = r_7 - \frac{3}{2} r_5 r_4^{-1} \left(r_6 - \frac{5}{16} r_5^2 r_4^{-1}\right), \ldots \end{aligned}\right\} \quad (4.64)$$

Разложение для функции электропроводности в этом случае принимает следующую форму:

$$k_1^*(z) = b_1 + 2b_2 \eta + 2b_3 \eta^2 + \frac{4}{3} b_4 \eta^3 + \\ + \left(\frac{b_1^3}{12} + \frac{2}{3} b_5\right) \eta^4 + \frac{4}{15} (b_2 b_1^2 + b_6) \eta^5 + \ldots, \quad (4.65)$$

где $\eta = z - h$. В этих коэффициентах все величины r_i можно вычислить по равенствам (4. 63). Если коэффициенты в разложении определить, пользуясь только вещественной частью функции «керн», придем к более сложному выражению.

В случае небольших электропроводностей и высоких частот диэлектрическая функция может играть главную роль. Например, если $\varepsilon \geqslant 20\,\varepsilon_0$, $\sigma^{-1} > 10$ *омм*, $f \geqslant 1$ *мгц*, то отношение $\frac{k_2^*}{k_1^*} = 111{,}2$. Считая в этом случае электропроводность равной нулю, найдем, что все коэффициенты b_i в выражении для мнимой части функции «керн» равны нулю. Тогда в разложение Тэйлора для $k_2^*(z)$ будут входить коэффициенты r_i только из вещественной части функции «керн» в силу системы (4. 57):

$$k_2^*(z) = -2\Big[r_2 + 2r_3 \eta + (r_2^2 + 2r_4) \eta^2 + \\ + \frac{4}{3} (3r_2 r_3 + 2r_5) \eta^3 + \frac{1}{3} (4r_6 + 8r_3^2 + 3r_2^2 + 10 r_4 r_2) \eta^4 + \ldots\Big]. \quad (4.66)$$

В общем случае, когда ни одним из трех свойств нельзя пренебречь, электропроводность определяется мнимой частью функции «керн», а диэлектрическая и магнитная проницаемости определяются ее вещественной частью. Так, первые два коэффициента из (4. 56) входят в решение для электропроводности первым и вторым коэффициентами и они же входят в выражение для мнимой части функции «керн». Аналогично первые два коэффициента в решении для диэлектрической функции (4. 61) и (4. 57) являются вторым и третьим коэффициентами в выражении для вещественной части функции «керн». Разложение Тэйлора для логарифма магнитной проницаемости содержит в своих первых трех коэффициентах (4. 62) и (4. 57) только величины r_i из первых трех членов вещественной части разложения функции «керн». Грубую оценку электропроводности, а также диэлектрической и магнитной проницаемостей можно сделать, определив только первые два члена в асимптотическом выражении для $\hat{K}_3''$ и первые три члена в выражении $\hat{K}_3'$. Так как частота входит в функцию магнитной проницаемости в нулевой степени, в функцию электропроводности — в первой, в функцию диэлектрической проницаемости — в квадрате, очевидно, что для разделения этих трех функций желательно проводить наблюдения на нескольких частотах.

Алгебраическую проверку выражений $k_1^*(z)$, $k_2^*(z)$ и $\mu(z)$, полученных выше, можно сделать, сравнивая их с формулами для случая однородного полупространства. При этом асимптотические ряды для вещественной и мнимой частей функции «керн» определяются уравнениями (4. 48) и (4. 49) соответственно.

Подставляя значения r_i и b_i, найденные с помощью этих выражений, в общие формулы (4. 56) для последовательных производных $b_1(z) = k_1^*(z)$, найдем, что все эти производные, за исключением нулевого порядка, равны нулю, а для функции электропроводности получается точное равенство $k_1^*(z) = \overline{k}_1^*(z)$. Например, четвертая производная

$$\ddddot{k}_1(z) = \ddddot{b}_1 = 16\left[3b_1 r_2^2 + 3b_3 r_2 + 5b_2 r_3 + 3b_1 r_1 - \frac{b_1^3}{4} + b_5\right] = \\ = 16\left[\frac{3}{4} \overline{k}_1^* \overline{k}_2^{*2} + 3\,\frac{\overline{k}_1^* \overline{k}_2^*}{2}\left(-\frac{\overline{k}_2^*}{2}\right) + \right. \\ \left. + \frac{3\overline{k}_1^*}{8} (\overline{k}_1^{*2} - \overline{k}_2^{*2}) - \frac{1}{4} \overline{k}_1^{*3} + \frac{1}{8}(3\overline{k}_2^{*2} - \overline{k}_1^{*2})\, k_1^*\right] = 0. \quad (4.67)$$

Подобная проверка может быть проделана и для диэлектрической функции. Если значения r_i и b_i по (4. 48) и (4. 49) подставляются в формулы (4. 57) для производных $r_2(z)$, то опять найдем, что эти производные обращаются в нуль и получается извест-

ный результат $k_2^* = \bar{k}_2^*$. Например, для $\dddot{r}_2$ в (4. 57) получим:

$$\dddot{r}_2 = 8\left[\frac{\bar{k}_2^*}{4}(3\bar{k}_1^{*2} - \bar{k}_2^{*2}) - \frac{3}{8}\bar{k}_2^{*3} - \frac{5}{8}\bar{k}_2^*(\bar{k}_1^{*2} - \bar{k}_2^{*2}) + \right.$$

$$\left. + \frac{11}{8}\bar{k}_1^{*2}\bar{k}_2^* - \frac{3}{2}\bar{k}_1^{*2}\bar{k}_2^*\right] = 0. \qquad (4.\ 68)$$

Наконец, из уравнения (4. 55) следует, что результат $r_1 = 0$ в уравнении (4. 48) также удовлетворяет требованию постоянной магнитной проницаемости. Величину этой постоянной можно найти, измеряя свойства образцов.

Решения в виде степенных рядов для электрических свойств зависят от характера изменения этих свойств. Если изменения носят простой характер, то достаточно нескольких членов в степенном ряду, чтобы получить удовлетворительное приближение, характеризующее функции в ограниченном интервале глубин. Если функция колеблется, как, например, кривая μ на рис. 5, метод несомненно бесполезен, ибо расчеты будут требовать непрактично большого числа членов ряда, определение которых потребует и очень высокой точности полевых работ.

§ 5. Вертикальный диполь. Решение Слихтера и Кнопова (1959)

В параграфе рассматривается магнитное поле на поверхности двухслойной среды. Источник поля — магнитный диполь, расположен на этой же поверхности. Квадрат безразмерного волнового числа верхнего слоя принимает значения, равные 0, $^1/_4$, 1 и 4. В подстилающем однородном полупространстве этот параметр равен 0, $^1/_4$, 1, 4 и ∞. Вторичное поле вычисляется на расстояниях от источника, равных $^1/_2$, 1, 2, 4, 8 и 16 мощностям верхнего слоя.

Начало координатной системы (ϱ, ϕ, z) располагается ниже источника на границе между слоем и фундаментом. Положительная ось Oz направлена вниз. Решение дается для произвольных значений магнитной проницаемости и электропроводности, но расчеты ограничиваются случаем постоянной проницаемости. Магнитные проницаемости воздуха, слоя и основания обозначаются через μ_0, μ_1 и μ_2, соответствующие электропроводности — через σ_0, σ_1, σ_2, причем σ_0 равно нулю. Член с диэлектрической постоянной, входящий в волновое число, считается настолько малым, что им можно пренебречь в сравнении с членом, в который входит электропроводность. Решение для H_ϱ и H_z выражаются через интегралы, содержащие бесселевы функции J_0 и J_1. Для облегчения вычислений в подынтегральное выражение вводится множителем бесселева функция J_2. С этой целью дипольный источник принимается состоящим из концентрических круговых токов,

сила которых возрастает в линейной зависимости от радиуса источника ϱ. Тогда, если J_0 — плотность поверхностного тока, протекающего по краю диска с радиусом ϱ_0, для плотности поверхностного тока J, протекающего в диске на расстоянии ϱ от центра, можно записать:

$$J = J_0\,\varrho\varrho_0^{-1}e^{-i\omega t}, \quad (\varrho \leqslant \varrho_0), \qquad (5.\ 1)$$

$$j = 0, \ (\varrho > \varrho_0).$$

Гармонический временной множитель $e^{-i\omega t}$ опускается в дальнейшем изложении. В воздухе на расстояниях от источника, малых в сравнении с длиной излучаемой волны и больших в сравнении с радиусом ϱ_0, находим для напряженности магнитного поля в плоскости источника:

$$H_{\text{п}} = -J_0\frac{\varrho_0^3\varrho^{-3}}{16}, \quad (\varrho_0 \ll \varrho). \qquad (5.\ 2)$$

Здесь ϱ — расстояние до точки наблюдения.

Ниже компоненты суммарного магнитного поля выражаются в единицах напряженности поля в воздухе $H_{\text{п}}$. Все расстояния будут характеризоваться безразмерными числами в единицах мощности слоя d. Величина d в дальнейшем встретится самостоятельно только в безразмерном выражении для квадратов волновых чисел слоя и основания: $k_1^* = d^2\omega\mu_1\sigma_1$, $k_2^* = d^2\omega\mu_2\sigma_2$. Общее решение уравнений поля в случае плоской поверхности раздела известно. Условие разрыва горизонтальной компоненты магнитного вектора H на границе с источником выбранного типа может быть удовлетворено при помощи следующего интеграла (§ 4):

$$\varrho_0\int_0^\infty J_\nu(\varrho_0\lambda)J_{\nu-1}(\varrho\lambda)\,d\lambda = \begin{cases} \left(\frac{\varrho}{\varrho_0}\right)^{\nu-1}, & \left(0 < \frac{\varrho}{\varrho_0} < 1\right) \\ \frac{1}{2}, & \left(\frac{\varrho}{\varrho_0} = 1\right) \\ 0, & \left(\frac{\varrho}{\varrho_0} > 1\right) \end{cases}$$

где $\nu = 2$.

На поверхности земли ($z = -1$) интегралы для H_ϱ и H_z имеют вид:

$$H_\varrho = J_0\varrho_0\int_0^\infty J_1(\varrho\lambda)J_2(\varrho_0\lambda)(1+G)^{-1}\,d\lambda \qquad (5.\ 3)$$

и

$$H_z = J_0\varrho_0\left[\int_0^\infty J_0(\varrho\lambda)J_2(\varrho_0\lambda)\,d\lambda - \int_0^\infty J_0(\varrho\lambda)J_2(\varrho_0\lambda)\times\right.$$

$$\left.\times(1+G)^{-1}d\lambda\right], \qquad (5.\ 4)$$

где

$$G = \lambda u_1^{-1} \mu_1 \mu_0^{-1} (1 + Qe^{-2u_1})(1 - Qe^{-2u_1})^{-1},$$

$$Q = \frac{u_1 - u_2}{u_1 + u_2}, \quad u_i = \lambda (1 - s_i)^{\frac{1}{2}}, \quad s_i = ik_i^* \lambda^{-2}. \tag{5.5}$$

В воздухе $u_1 = u_2 = \lambda$, $\mu_0 = \mu_1 = \mu_2$, $G = 1$ и из упрощенной формулы (5.4) найдем (Ватсон, 1949, стр. 449, 114):

$$H_z = H_\text{п} = \frac{1}{2} J_0 \varrho_0 \int_0^\infty J_0(\varrho\lambda) J_2(\varrho_0\lambda)\, d\lambda =$$

$$= -J_0 \frac{\varrho_0^3 \varrho^{-3}}{16}, \quad (\varrho \gg \varrho_0), \tag{5.6}$$

что находится в соответствии с (5.2). Из равенств (5.3), (5.4) и (5.6) для магнитных чисел h_ϱ и h_z получим:

$$-h_\varrho = -H_\varrho H_\text{п}^{-1} =$$

$$= 16 \varrho^3 \varrho_0^{-2} \int_0^\infty J_1(\varrho\lambda) J_2(\varrho_0\lambda)(1 + G)^{-1}\, d\lambda \tag{5.7}$$

и

$$h_z = H_z H_\text{п}^{-1} =$$

$$= 2 + 16 \varrho^3 \varrho_0^{-2} \int_0^\infty J_0(\varrho\lambda) J_2(\varrho_0\lambda)(1 + G)^{-1}\, d\lambda. \tag{5.8}$$

Когда λ велико, G приближается к $\mu_1\mu_0^{-1}$:

$$G = \mu_1\mu_0^{-1}(1 - s_1)^{-\frac{1}{2}} \times$$

$$\times [1 + 2Qe^{-2u_1}(1 + Qe^{-2u_1} + Q^2 e^{-4u_1} + \ldots)] =$$

$$= \mu_1\mu_0^{-1}(1 + 2\alpha_1)(1 + 2\alpha_2) = \mu_1\mu_0^{-1}(1 + 2\gamma), \tag{5.9}$$

где

$$\gamma = \alpha_1 + \alpha_2(1 + 2\alpha_1) \tag{5.10}$$

и

$$\alpha_1 = \frac{1}{4} s_1 \left(1 + \frac{3}{4} s_1 + \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 6} s_1^2 + \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{4 \cdot 6 \cdot 8} s_1^3 + \ldots\right), \tag{5.11}$$

$$\alpha_2 = Qe^{-2u_1}(1 + Qe^{-2u_1} + Q^2 e^{-4u_1} + \ldots). \tag{5.12}$$

Разлагая множитель $(1 + G)^{-1}$ в степенной ряд по γ, будем иметь:

$$(1 + G)^{-1} = q_0(1 + 2q_1\gamma)^{-1} =$$

$$= q_0[1 - 2q_1\gamma + (2q_1\gamma)^2 - \ldots], \tag{5.13}$$

где

$$q_0 = \mu_0(\mu_0 + \mu_1)^{-1}, \quad q_1 = \mu_1(\mu_0 + \mu_1)^{-1}. \tag{5.14}$$

Интегралы в уравнениях (5.7) и (5.8) вычислены интегрированием по λ в двух интервалах: $0 \leqslant \lambda < a$ и $a \leqslant \lambda < \infty$. При интегрировании в первом интервале использовано приблизительное равенство $J_2(\varrho_0\lambda) = \frac{1}{8}\varrho_0^2\lambda^2$, а во втором — степенной ряд (5.13) для множителя $(1 + G)^{-1}$. С учетом сделанного замечания интегралы (5.7) и (5.8) будут иметь следующий вид:

$$2\varrho^3 \int_0^a J_i(\varrho\lambda)\lambda^2(1 + G)^{-1}\, d\lambda +$$

$$+ 16\varrho^3\varrho_0^{-2} q_0 \int_a^\infty J_i(\varrho\lambda) J_2(\varrho_0\lambda) \times$$

$$\times [1 - 2q_1\gamma + \ldots]\, d\lambda, \quad (i = 0, 1).$$

Преобразовывая первый член второго интеграла, получим:

$$\int_a^\infty J_i(\varrho\lambda) J_2(\varrho\lambda)\, d\lambda =$$

$$= \int_0^\infty J_i(\varrho\lambda) J_2(\varrho_0\lambda)\, d\lambda - \frac{\varrho_0^2}{8} \int_0^a J_i(\varrho\lambda)\lambda^2\, d\lambda,$$

где первый интеграл справа равен нулю, когда $i = 1$, и равен $-\frac{1}{8}\varrho^{-3}\varrho_0^2$, $\varrho \gg \varrho_0$, когда $i = 0$. Тогда для (5.7) и (5.8) найдем, переходя к дипольному источнику:

$$-h_\varrho = 2\varrho^3 \int_0^a J_1(\varrho\lambda)[(1 + G)^{-1} - q_0]\lambda^2\, d\lambda -$$

$$- 2\varrho\, q_0 \int_a^\infty J_1(\varrho\lambda)[2q_1\gamma - (2q_1\gamma)^2 + \ldots]\lambda^2\, d\lambda, \tag{5.15}$$

$$h_z = 2 - 2q_0 + 2\varrho^3 \int_0^a J_0(\varrho\lambda)[(1 + G)^{-1} - q_0]\lambda^2\, d\lambda -$$

$$- 2\varrho^3 q_0 \int_a^\infty J_0(\varrho\lambda)[2q_1\gamma - (2q_1\gamma)^2 + \ldots]\lambda^2\, d\lambda. \tag{5.16}$$

У большинства горных пород магнитная проницаемость мало отличается от ее значения в воздухе. Это позволяет ограничить

выражения для h_ϱ и h_z случаем $\mu_1 = \mu_0$, то есть $q_0 = q_1 = \frac{1}{2}$. Магнитная проницаемость основания μ_2 входит в формулы только множителем в произведении с σ_2, поэтому μ_2 можно выбирать столь же произвольно, как и σ_2. Интегралы в выражениях (5. 15) и (5. 16) были вычислены на электронной вычислительной машине *.

С учетом гармонического множителя $e^{-i\omega t}$ магнитные числа $h_z - 1$ и h_ϱ в случае изменений источника по закону $\cos \omega t$ будут иметь следующий вид:

$$h_z - 1 = (h_z' - 1)\cos\omega t + h_z'' \sin\omega t,$$

$$h_\varrho = h_\varrho' \cos\omega t + h_\varrho'' \sin\omega t.$$

Значения магнитных чисел $h_z' - 1$, h_z'', h_ϱ' и h_ϱ'' приводятся в табл. 3, 4 и 5. Они же нанесены на графиках в зависимости от ϱ (рис. 6) **. На этих рисунках графики, соответствующие полям над однородным полупространством, изображены пунктиром.

Для однородной среды $k_1^* = k_2^* = k^*$. Результаты вычислений для этого случая приводятся в табл. 3. Они совпадают с результатами Гордона для однородного полупространства (§ 1, II).

В случае двухслойной среды изменения электропроводности основания проявляются в отклонении графиков для различных значений k_1^* и k_2^* от пунктирной кривой, характеризующей однородное полупространство $k_1^* = k_2^*$. Наиболее значительные искажения графиков возникают, когда $\varrho \geqslant 2$. Когда $k_1^* > 4$, кривые для всех случаев почти сливаются.

Для вещественных составляющих $h_z' - 1$ и h_ϱ' влияние слоя проявляется наиболее сильно для выбранных значений k_2^*, когда $k_1^* = 0$ или $\frac{1}{4}$ и $\varrho \geqslant 2$. Когда $k_1^* = 1$ или 4, графики $h_z' - 1$ и h_ϱ' значительно меньше отличаются от аналогичных графиков для случая однородного полупространства. Из четырех типов графиков $h_z' - 1$, h_z'', h_ϱ', h_ϱ'' наиболее отчетливо искажаются под влиянием слоя графики мнимой компоненты h_ϱ'' для небольших величин ϱ и для любого их трех значений $k_1^* = 0, \frac{1}{4}, 1$. Однако когда $k_1^* = 4$, графики h_ϱ'' хорошо совпадают с кривой для однородного полупространства. Составляющая h_z'' отчетливо указывает на присутствие слоя, когда $\varrho \geqslant 4$ и $k_1^* = 0, \frac{1}{4}, 1$.

---

* Рассматриваемые Слихтером и Кноповым вопросы программирования интегралов с бесселевыми функциями и оценка остаточных членов в выражениях (5. 15), (5. 16) в обзоре опущены. *А. В., Г. Ф.*

** Большой цифровой материал приводится в работе Гасаненко и Шолпо (1960). *А. В.; Г. Ф.*

Вертикальная и горизонтальная составляющие в этой задаче не являются зависимыми. Одна может быть получена теоретически из другой (§ 4).

Во всех случаях выбранные частоты должны быть достаточно низкими, чтобы получить квадрат безразмерного волнового числа слоя меньше единицы. Вполне удовлетворительным значением безразмерного волнового числа является 1/4. Можно отметить, что в случае максимальной разницы в электропроводностях, соответствующей случаю $k_1^* = 0$, для всех четырех компонент не получается столь больших значений, как в случае $k_1^* = \frac{1}{4}$.

Таблица 3

Магнитные числа $h_z' - 1, h_z'', -h_\varrho', -h_\varrho''$ для случая однородного полупространства

$\varrho\sqrt{k^*}$	$k_1^* = k_2^*$	ϱ	$h_z' - 1$	h_z''	$-h_\varrho'$	$-h_\varrho''$
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	0,0025	−0,01270	0,0006	−0,01544
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1	0,01659	−0,03964	0,00625	−0,05960
	1	$\frac{1}{2}$	0,01659	−0,03964	0,00625	−0,05960
	$\frac{1}{4}$	2	0,08959	−0,08080	0,05932	−0,20866
1	1	1	0,08960	−0,08080	0,05933	−0,20867
	4	$\frac{1}{2}$	0,08960	−0,08080	0,05934	−0,20867
По Гордону			0,0896 *	−0,0808	0,0593 *	−0,2087
2	$\frac{1}{4}$	4	0,27786	0,06669	0,39756	−0,51291
	1	2	0,27786	0,06673	0,39755	−0,51293
	4	1	0,27786	0,06673	0,39755	−0,51293
По Гордону			0,27776 *	0,0664	0,3976 *	−0,5128
	$\frac{1}{4}$	8	−0,07771	0,74249	1,1963	−0,2376
4	1	4	−0,07771	0,74248	1,1963	−0,2374
	4	2	−0,07771	0,74248	1,1964	−0,2374
	$\frac{1}{4}$	16	−1,0389	0,3517	0,6669	0,5206
8	1	8	−1,0398	0,3506	0,6681	0,5215
	4	4	−1,0398	0,3508	0,6681	0,5213
16	1	16	−1,015	0,0706	0,2737	0,2581
	4	8	−1,015	0,0695	0,2770	0,2591
∞			−1,000	0	0	0

* Знак изменен для согласования результатов.

Таблица 4

Магнитные числа $-h'_Q$ и $-h''_Q$ для двухслойной среды

k_1^*	Q	$-h'_Q$					$-h''_Q$				
		$k_2^*=0$	$k_2^*=\frac{1}{4}$	$k_2^*=1$	$k_2^*=4$	$k_2^*=\infty$	$k_2^*=0$	$k_2^*=\frac{1}{4}$	$k_2^*=1$	$k_2^*=4$	$k_2^*=\infty$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0	$\frac{1}{2}$	0	0,0000	0,0003	0,0010	0,0101	0	−0,0004	−0,0011	−0,0021	0
	1	0	0,0014	0,0076	0,0267	0,1073	0	−0,0052	−0,0142	−0,0258	0
	2	0	0,0189	0,0900	0,2450	0,5303	0	−0,0524	−0,1205	−0,1582	0
	4	0	0,1847	0,5680	0,8242	0,8586	0	−0,2742	−0,3438	−0,1484	0
	8	0	0,8515	0,9836	0,8075	0,6446	0	−0,4016	0,0407	0,0934	0
	16	0	0,9200	0,6010		0,3612	0	0,2532	0,1887		0
	∞	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1/4	$\frac{1}{2}$	0,0066	0,0006	0,0008	0,0020	0,0010	−0,0151	−0,0154	−0,0162	−0,0176	−0,0170
	1	0,0065	0,0063	0,0098	0,0256	0,1102	−0,0544	−0,0596	−0,0701	−0,0864	−0,0790
	2	0,0606	0,0593	0,1020	0,2347	0,5568	−0,1563	−0,2087	−0,2964	−0,3824	−0,3452
	4	0,3670	0,3976	0,6549	0,9037	1,0609	−0,2355	−0,5129	−0,7346	−0,7381	−0,8196
	8	0,8481	1,1963	1,3625	1,2900	1,1664	0,1754	−0,2376	−0,0352	0,0222	0,0784
	16	0,4328	0,6670	0,4296		−0,0661	0,1655	0,5206	0,6730		1,1064
	∞	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	$\frac{1}{2}$	0,0066	0,0065	0,0063	0,0065	0,0139	−0,0587	−0,0589	−0,0596	−0,0613	−0,0645
	1	0,0641	0,0619	0,0593	0,0631	0,1345	−0,1966	−0,1998	−0,2087	−0,2289	−0,2655
	2	0,4340	0,4136	0,3975	0,4343	0,6593	−0,4131	−0,4416	−0,5129	−0,6361	−0,8363
	4	1,2087	1,1563	1,1964	1,2778	1,2478	0,0349	−0,0773	−0,2374	−0,3093	−0,4603
	8	0,4517	0,5721	0,6681	0,6491	0,6126	0,4225	0,3537	0,5210	0,6613	0,9433
	16	0,2465	0,2767	0,2737		0,1067	0,1058	0,2159	0,2581		1,4625
	∞	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	$\frac{1}{2}$	0,0606	0,0605	0,0602	0,0593	0,0586	−0,2084	−0,2083	−0,2083	−0,2087	−0,2140
	1	0,4121	0,4107	0,4069	0,3976	0,3814	−0,5097	−0,5094	−0,5093	−0,5129	−0,5611
	2	1,2637	1,2545	1,2337	1,1964	1,0860	−0,2233	−0,2207	−0,2208	−0,2374	−0,3184
	4	0,6456	0,6344	0,6332	0,6681	0,7549	0,5631	0,5571	0,5334	0,5213	0,5740
	8	0,2415	0,2508	0,2726	0,2770	0,3085	0,2352	0,2258	0,2410	0,2591	0,2824
	∞	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Таблица 5

Магнитные числа $h'_z - 1$ и h''_z для двухслойной среды

k_1^*	ϱ	$h'_z - 1$					h''_z				
		$k_2^*=0$	$k_2^*=\frac{1}{4}$	$k_2^*=1$	$k_2^*=4$	$k_2^*=\infty$	$k_2^*=0$	$k_2^*=\frac{1}{4}$	$k_2^*=1$	$k_2^*=4$	$k_2^*=\infty$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0	$\frac{1}{2}$	0	0,0004	0,0016	0,0042	0,0260	0	−0,0019	−0,0042	−0,0063	0
	1	0	0,0065	0,0232	0,0551	0,1252	0	−0,0129	−0,0262	−0,0341	0
	2	0	0,0438	0,1268	0,2080	0,1768	0	−0,0671	−0,0853	−0,0448	0
	4	0	0,1961	0,2569	0,0341	−0,2861	0	−0,0944	0,0868	0,1955	0
	8	0	0,1876	−0,3742	−0,5916	−0,7522	0	0,3263	0,3819	0,1761	0
	16	0	−0,6369	−0,8268		−0,9320	0	0,4250	0,1481		0
	∞	0	−1,0	−1,0	−1,0	−1,0	0	0	0	0	0
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	0,0024	0,0025	0,0039	0,0083	0,0267	−0,0108	−0,0127	−0,0157	−0,0194	−0,0179
	1	0,0160	0,0166	0,0269	0,0544	0,1321	−0,0268	−0,0396	−0,0582	−0,0768	−0,0692
	2	0,0817	0,0896	0,1447	0,2203	0,01928	−0,0196	−0,0808	−0,1368	−0,1424	−0,1520
	4	0,2047	0,2779	0,3408	0,1744	−0,1556	0,1642	0,0667	0,1722	0,2884	0,2164
	8	−0,2067	−0,0777	−0,4398	−0,6669	−0,9884	0,3916	0,7425	1,0308	1,1114	1,3074
	16	−0,6088	−1,039	−1,1133		−1,4220	−0,0716	0,3516	0,2686		1,4021
	∞	−1,0	−1,0	−1,0	−1,0	−1,0	0	0	0	0	0
1	$\frac{1}{2}$	0,0178	0,0171	0,0166	0,0177	0,0330	−0,0362	−0,0372	−0,0396	−0,0445	−0,0531
	1	0,0965	0,0923	0,0896	0,0971	0,1542	−0,0592	−0,0658	−0,0808	−0,1068	−0,1504
	2	0,2883	0,2749	0,2779	0,3029	0,2268	0,1340	0,1086	0,0667	0,0385	−0,0013
	4	−0,1909	−0,1523	−0,0777	−0,1198	−0,3247	0,6591	0,6474	0,7425	0,9311	1,2392
	8	−0,9896	−0,9160	−1,0398	−1,121	−1,290	0,0259	0,1880	0,3506	0,4133	0,6461
	16	−1,4282	−1,3802	−1,0150		−1,1209	−0,1154	−0,0384	0,0706		0,0037
	∞	−1,0	−1,0	−1,0	−1,0	−1,0	0	0	0	0	0
4	$\frac{1}{2}$	0,0928	0,0925	0,0916	0,0896	0,0861	−0,0800	−0,0799	−0,0800	−0,0808	−0,0905
	1	0,2929	0,2910	0,2866	0,2779	0,2542	0,0703	0,0707	0,0706	0,0667	0,0389
	2	−0,0821	−0,0851	−0,0873	−0,0777	−0,0663	0,7493	0,7489	0,7451	0,7425	0,8251
	4	−1,1250	−1,1149	−1,0807	−1,0398	−0,9400	0,3345	0,3262	0,3235	0,3508	0,3874
	8	−1,0526	−1,0361	−1,0350	−0,0150	−1,0095	0,0237	0,0328	0,0540	0,0695	0,4415
	∞	−1,0	−1,0	−1,0	−1,0	−1,0	0	0	0	0	0

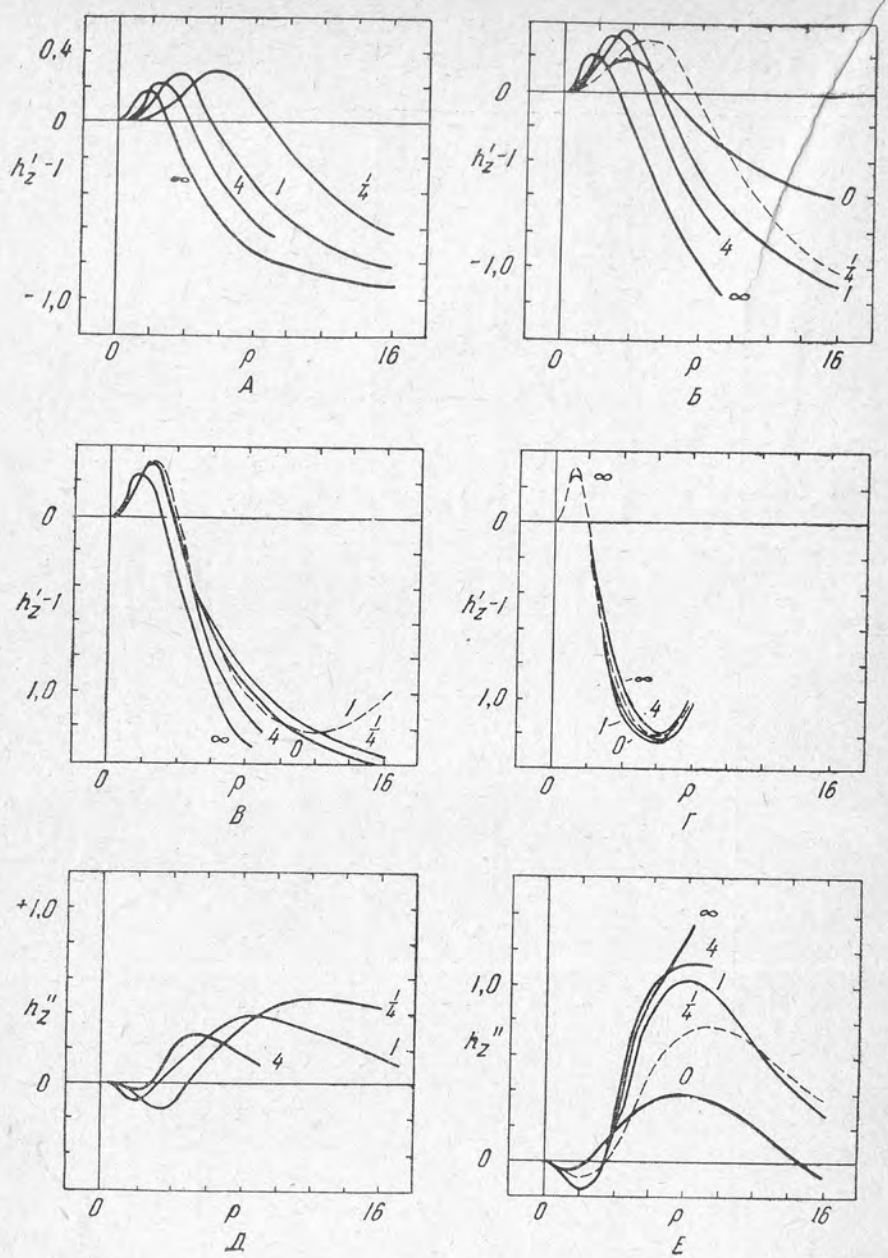


Рис. 6.

а) $-h_z'-1$ для $k_1^*=0$ и $k_2^*=\infty, 4, 1, \frac{1}{4}$; б) $-h_z'-1$ для $k_1^*=\frac{1}{4}$ и $k_2^*=\infty, 4, 1, \frac{1}{4}, 0$;

в) $-h_z'-1$ для $k_1^*=1$ и $k_2^*=\infty, 4, 1, \frac{1}{4}, 0$; г) $-h_z'-1$ для $k_1^*=4$ и $k_2^*=\infty, 4, 1, 0$;

д) $-h_z''$ для $k_1^*=0$ и $k_2^*=4, 1, \frac{1}{4}$; е) $-h_z''$ для $k_1^*=\frac{1}{4}$ и $k_2^*=\infty, 4, 1, \frac{1}{4}, 0$.

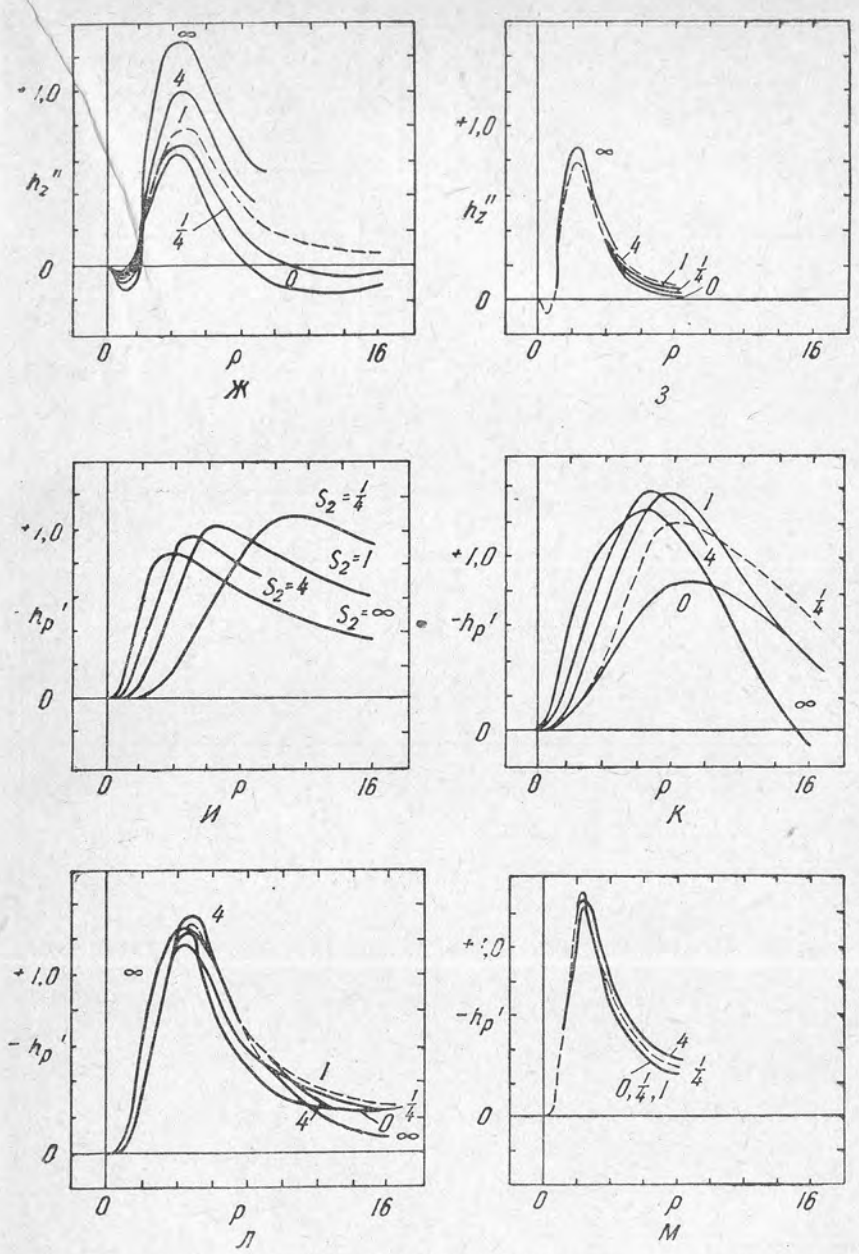


Рис. 6 (продолжение).

ж) $-h_z''$ для $k_1^*=1$ и $k_2^*=\infty, 4, 1, \frac{1}{4}, 0$; з) $-h_z''$ для $k_1^*=4$ и $k_2^*=\infty, 4, 1, \frac{1}{4}, 0$;

и) $-h_Q'$ для $k_1^*=0$ и $k_2^*=\infty, 4, 1, \frac{1}{4}$; к) $-h_Q'$ для $k_1^*=\frac{1}{4}$ и $k_2^*=\infty, 4, 1, \frac{1}{4}, 0$;

л) $-h_Q'$ для $k_1^*=1$ и $k_2^*=\infty, 4, 1, \frac{1}{4}, 0$; м) $-h_Q'$ для $k_1^*=4$ и $k_2^*=\infty, 4, 1, \frac{1}{4}, 0$.

10 Заказ 860.

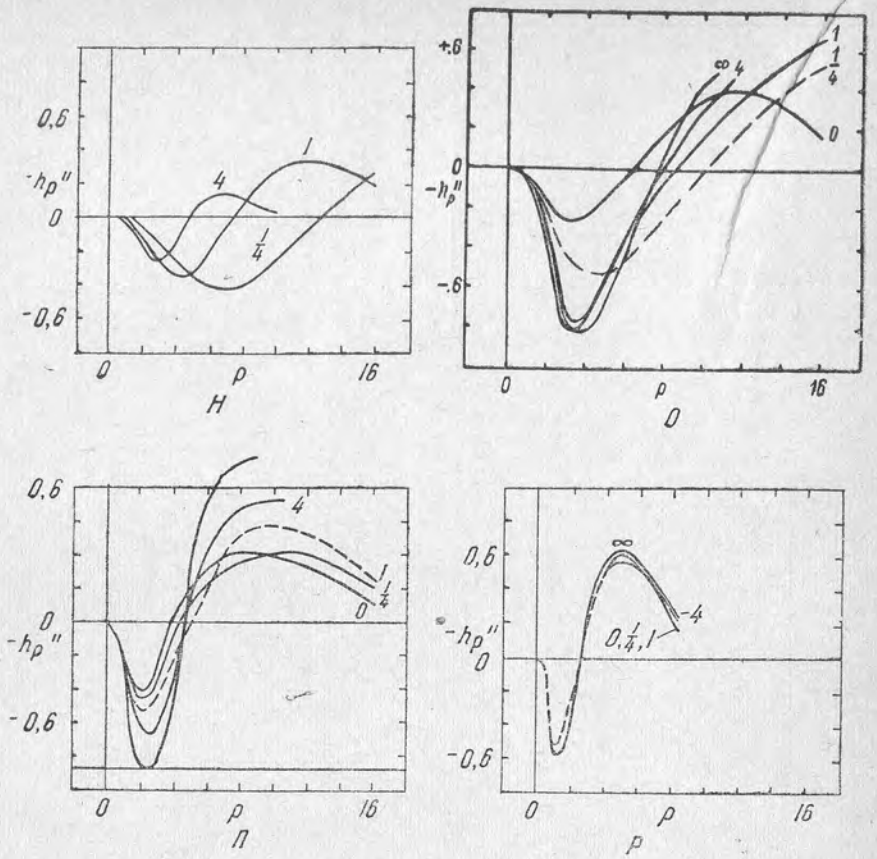


Рис. 6. (продолжение).

н)—h_Q^* для $k_1^* = 0$ и $k_2^* = 4,\ 1,\ \frac{1}{4}$; о)—$h_Q''$ для $k_1^* = \frac{1}{4}$ и $k_2^* = \infty,\ 4,\ 1,\ \frac{1}{4},\ 0$;

п)—h_Q'' для $k_1^* = 1$ и $k_2^* = \infty,\ 4,\ 1,\ \frac{1}{4},\ 0$; р)—$h_Q''$ для $k_1^* = 4$ и $k_2^* = \infty,\ 4,\ 1,\ \frac{1}{4},\ 0$.

§ 6. Горизонтальный магнитный диполь над тонким проводящим пластом

(Уэйт, 1953а)

Условия задачи такие же, как в пункте 4, § 2 с той разницей, что рамка ориентируется своей осью параллельно пласту. Эквивалентный рамке диполь расположен в начале прямоугольной системы координат $(x,\ y,\ z)$ и ориентирован в направлении оси Oy. Пласт расположен так, что имеет координату $z = -h$. По аналогии с предыдущим изложением компоненты магнитного поля

можно выразить через вектор-потенциал $\boldsymbol{F}$:

$$i\mu\omega \boldsymbol{H} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{F}, \tag{6.1}$$

$$F_{y1} = M\int_0^\infty f_3(\lambda)\, e^{-z\lambda} J_0(\varrho\lambda)\, d\lambda + F_{\text{п}y}, \tag{6.2}$$

$$F_{y2} = M\int_0^\infty f_4(\lambda)\, e^{z\lambda} J_0(\varrho\lambda)\, d\lambda, \tag{6.3}$$

$$F_{z1} = M\frac{\partial}{\partial y}\int_0^\infty f_5(\lambda)\, e^{-z\lambda}\lambda^{-1} J_0(\varrho\lambda)\, d\lambda, \tag{6.4}$$

$$F_{z2} = M\frac{\partial}{\partial y}\int_0^\infty f_6(\lambda)\, e^{z\lambda}\lambda^{-1} J_0(\varrho\lambda)\, d\lambda, \tag{6.5}$$

причем функция $F_{\text{п}y}$ связана с первичным полем диполя и для нее справедливо выражение:

$$F_{\text{п}y} = M(\varrho^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} = M\int_0^\infty e^{z\lambda} J_0(\varrho\lambda)\, d\lambda,\ (z < 0), \tag{6.6}$$

где $\varrho = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}$. Условия разрыва тангенциальных составляющих магнитного поля на границе пласта $z = -h$ имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} H_{1y} - H_{2y} &= -\sigma\, dE_{1x}, \\ H_{1x} - H_{2x} &= \sigma\, dE_{1y}. \end{aligned} \tag{6.7}$$

Условия непрерывности тангенциальных составляющих электрического поля на пластине записываются:

$$E_{1x} = E_{2x},\ E_{1y} = E_{2y},\ (z = -h). \tag{6.8}$$

Так как

$$i\mu\omega H_{yj} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F_{yj}}{\partial y} + \frac{\partial F_{zj}}{\partial z}\right), \tag{6.9}$$

$$i\mu\omega H_{xj} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F_{yj}}{\partial y} + \frac{\partial F_{zj}}{\partial z}\right), \tag{6.10}$$

$$E_{xj} = \frac{\partial F_{yj}}{\partial z} - \frac{\partial F_{zj}}{\partial y}, \tag{6.11}$$

$$E_{yj} = \frac{\partial F_{zj}}{\partial x}, \tag{6.12}$$

граничные условия можно выразить через компоненты вектора $\boldsymbol{F}_j$:

$$F_{z1} = F_{z2},\quad \frac{\partial F_{y1}}{\partial z} = \frac{\partial F_{y2}}{\partial z} = 0,$$

$$\left(\frac{\partial F_{y1}}{\partial y} + \frac{\partial F_{z1}}{\partial z}\right) - \left(\frac{\partial F_{y2}}{\partial y} + \frac{\partial F_{z2}}{\partial z}\right) = i\sigma\mu\omega\, dF_{z1},\ (z = -h).$$

Решая эти уравнения, определим неизвестные функции f_3, f_4, f_5 и f_6:

$$\left.\begin{aligned} f_3(\lambda) &= e^{-2h\lambda}, \\ f_4(\lambda) &= 0, \\ f_5(\lambda) &= 2e^{-2h\lambda}\lambda(2\lambda + i\sigma\mu\omega d)^{-1}, \\ f_6(\lambda) &= 2\lambda(2\lambda + i\sigma\mu\omega d)^{-1}. \end{aligned}\right\}$$

Подставляя выражения для функции f_j в (6.2) — (6.5), найдем общее решение задачи.

Окончательный результат удобно выразить через магнитный потенциал Φ

$$\boldsymbol{H} = -\operatorname{grad}\Phi_{\text{г}},$$

где

$$\Phi_1 = \Phi_{\text{п}} - M\frac{\partial}{\partial y}\hat{J}(2h + z), \tag{6.13}$$

$$\Phi_2 = \Phi_{\text{п}} + M\frac{\partial}{\partial y}\hat{J}(-z), \tag{6.14}$$

$$\Phi_0 = My(\varrho^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}}. \tag{6.15}$$

Функция $\hat{J}(\beta)$ определяется уравнением (2.47).

§ 7. Импеданс рамок

Начатый в § 4 гл. II обзор формул для взаимного импеданса между рамками над однородным полупространством, дополнен в § 7 формулами для взаимного импеданса между рамками над двухслойной средой. Приведенные здесь выражения записаны в форме, пригодной для числовых расчетов на электронных вычислительных машинах. Для случая, когда высота, на которую рамки приподняты над землей, или разнос между рамками больше толщины скин-слоя в земле, даны простые асимптотические выражения. Приводится формула взаимного импеданса рамок над тонким слоем. Кроме того, рассмотрен самоимпеданс рамки над двухслойной средой.

1. Взаимный импеданс между рамками над двухслойной средой. (Уэйт, 1958). Возьмем систему прямоугольных координат (x, y, z). Генераторную рамку можно представить в виде магнитного диполя, помещенного в точке с координатами $(0, 0, h)$ относительно земной поверхности. Однородная среда, ограниченная поверхностями $z = 0$ и $z = -d$, имеет проводимость σ_1 и диэлектрическую постоянную ε_1. Среда, расположенная ниже границы $z = -d$, также однородна и характеризуется постоянными σ_2 и ε_2. Обе среды имеют координату $z < 0$, магнитную проницаемость всего пространства μ примем равной $4\pi 10^{-7}$ *гн/м*.

Будем считать, что все основные размеры в верхнем полупространстве намного меньше длины волны в воздухе. Тогда выражения для полей в области $z > 0$ должны быть решениями уравнения Лапласа.

С другой стороны, поля в нижнем полупространстве находятся как решения волнового уравнения. Это квазистационарное приближение применялось и в предыдущих параграфах.

Для вертикального диполя, помещенного в точку с координатами $(0, 0, h)$ и ориентированного в направлении оси $0z$, напряженность магнитного поля в области $z > 0$

$$\boldsymbol{H} = -\operatorname{grad}\Phi_{\text{в}}, \tag{7.1}$$

где

$$\Phi_{\text{в}} = -M\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{1}{r} + \int_0^\infty G(\lambda)e^{-(z+h)\lambda}J_0(\varrho\lambda)\,d\lambda\right], \tag{7.2}$$

$$r = [\varrho^2 + (z-h)]^{\frac{1}{2}}, \quad \varrho = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}},$$

$$G(\lambda) = \frac{(u_1+\lambda)(u_1-u_2)e^{-2du_1} - (u_1-\lambda)(u_1+u_2)}{(u_1+\lambda)(u_1+u_2) - (u_1-\lambda)(u_1-u_2)e^{-2du_1}}, \tag{7.3}$$

$$u_1 = (\lambda^2 + k_1^2)^{\frac{1}{2}}, \quad u_2 = (\lambda^2 + k_2^2)^{\frac{1}{2}},$$

$$k_1^2 = i\sigma_1\mu_0\omega - \varepsilon_1\mu_0\omega^2, \quad k_2^2 = i\sigma_2\mu_0\omega - \varepsilon_2\mu_0\omega^2, \quad M = \frac{i\mu\omega IdS}{4\pi}.$$

В случае горизонтального диполя, ориентированного в направлении оси $0y$

$$\boldsymbol{H} = -\operatorname{grad}\Phi^{\text{г}}, \tag{7.4}$$

где

$$\Phi^{\text{г}} = -\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{1}{r} - \int_0^\infty G(\lambda)e^{-(z+h)\lambda}J_0(\varrho\lambda)\,d\lambda\right]M, \tag{7.5}$$

а значения r и $G(\lambda)$ определены выше.

Три компоненты магнитного поля в направлении осей системы координат для верхнего полупространства можно выразить через интегралы T_3, T_4 и T_5, которые зависят от безразмерных параметров A, B и γ, определяемых равенствами:

$$A = \frac{z+h}{\delta}, \quad B = \frac{\varrho}{\delta},$$

где

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{(\sigma_1 + i\omega\varepsilon_1)\mu_0\omega}}$$

и

$$\gamma = \frac{\sigma_2 + i\omega\varepsilon_2}{\sigma_1 + i\omega\varepsilon_1}.$$

Для низких частот токами смещения в земле можно пренебречь. В этом случае толщина скин-слоя $\delta \approx \sqrt{\frac{2}{\sigma_1\mu_0\omega}}$ и $\gamma \approx \frac{\sigma_2}{\sigma_1}$, причем δ и γ вещественны.

При упомянутых ограничениях формулы для компонент магнитного поля имеют следующий вид:

Вертикальный диполь.

Первичные поля.

$$\left.\begin{aligned} H_{\text{п}x} &= \frac{3Mx(z-h)}{r^5}, \\ H_{\text{п}y} &= \frac{3My(z-h)}{r^5}, \\ H_{\text{п}z} &= \frac{3M(z-h)}{r^5} - \frac{M}{r^3}, \end{aligned}\right\} \tag{7.6}$$

где

$$r = [(z-h)^2 + x^2 + y^2]^{\frac{1}{2}}.$$

Вторичные поля.

$$\left.\begin{aligned} H_{\text{в}x} &= -\frac{M}{\delta^3} T_4(A, B) \frac{x}{\varrho}, \\ H_{\text{в}y} &= -\frac{M}{\delta^3} T_4(A, B) \frac{y}{\varrho}, \\ H_{\text{в}z} &= -\frac{M}{\delta^3} T_3(A, B). \end{aligned}\right\} \tag{7.7}$$

Горизонтальный диполь.

Первичные поля.

$$\left.\begin{aligned} H_{\text{п}x} &= \frac{3Mxy}{r^5}, \\ H_{\text{п}y} &= \frac{3My^2}{r^5} - \frac{M}{r^3}, \\ H_{\text{п}z} &= \frac{3M(z-h)}{r^5}. \end{aligned}\right\} \tag{7.8}$$

Вторичные поля.

$$\left.\begin{aligned} H_{\text{в}x} &= \frac{M}{\delta^3}\left[\frac{2}{B} T_5(A, B) - T_3(A, B)\right]\frac{xy}{\varrho^2}, \\ H_{\text{в}y} &= \frac{M}{\delta^3}\left[\left(1 - \frac{x^2}{y^2}\right)\frac{1}{B} T_5(A, B) - T_3(A, B)\right]\frac{y^2}{\varrho^2}, \\ H_{\text{в}z} &= \frac{M}{\delta^3} T_4(A, B)\frac{y}{\varrho}. \end{aligned}\right\} \tag{7.9}$$

В формулах (7.7) и (7.9) интегралы T_3, T_4, T_5 определяются равенствами:

$$T_3 = \int_0^\infty R(g)\, g^2 e^{-Ag} J_0(Bg)\, dg, \tag{7.10}$$

$$T_4 = \int_0^\infty R(g)\, g^2 e^{-Ag} J_1(Bg)\, dg, \tag{7.11}$$

$$T_5 = \int_0^\infty R(g)\, g e^{-Ag} J_1(Bg)\, dg, \tag{7.12}$$

где

$$\left.\begin{aligned} R(g) &= 1 - 2g\frac{R_1(g)}{R_2(g)}, \\ R_1(g) &= (U+Y) + (U-Y)e^{-UD}, \\ R_2(g) &= (U+g)(U+Y) - (U-g)(U-Y)e^{-UD}, \\ U &= (g^2+2i)^{\frac{1}{2}}, \quad Y = (g^2+2i\gamma)^{\frac{1}{2}}, \quad D = \frac{2d}{\delta}. \end{aligned}\right\} \tag{7.13}$$

Выведем формулы для взаимного импеданса Z между генераторной и приемными рамками, приподнятыми над поверхностью двухслойной среды на высоту h и разнесенными на расстояние ϱ между центрами рамок, малое по сравнению с длиной волны.

Взаимный импеданс рамок над двухслойной средой удобно представить в виде отношения $\frac{Z}{Z_0}$, где Z_0 — взаимный импеданс между рамками в воздухе, определенный в § 4 гл. II. Продолжая нумерацию § 4, где рассмотрены 10 случаев взаимного импеданса между рамками, получим следующие формулы для импеданса $\frac{Z}{Z_0}$, который выражен через интегралы T_3, T_4, T_5.

XI. Компланарные рамки с вертикальными осями (перпендикулярными земле).

$$\frac{Z}{Z_0} = 1 + B^3 T_3, \quad Z_0 = m. \tag{7.14}$$

XII. Одна рамка имеет вертикальную ось, а вторая — горизонтальную, параллельную земле и направленную по радиусу первой рамки.

$$\frac{Z}{Z_0} = B^3 T_4, \quad Z_0 = m. \tag{7.15}$$

XIII. Коаксиальные рамки с горизонтальной осью.

$$\frac{Z}{Z_0} = 1 + \frac{B^2}{2}(T_5 - BT_3), \quad Z_0 = 2m. \tag{7.16}$$

XIV. Компланарные рамки с горизонтальными осями.

$$\frac{Z}{Z_0} = 1 + B^2 T_5, \quad Z_0 = m. \tag{7.17}$$

В формулах (7.14)—(7.17) принято $A = \frac{2h}{\delta}$, $B = \frac{\varrho}{\delta}$.

При больших значениях A или B можно получить асимптотические разложения для интегралов T_3, T_4 и T_5. Например, $R(g)$ можно разложить в ряд Тэйлора около точки $g = 0$, воспользовавшись формулой

$$R(g) = \sum_{n=0}^{\infty} L_n g^n, \tag{7.18}$$

где

$$L_n = \frac{1}{n!}\left[\frac{\partial^n}{\partial g^n} R(g)\right]_{g=0}. \tag{7.19}$$

Рассмотрим интегралы:

$$\int_0^{\infty} g^{\nu} e^{-Ag} J_0(Bg)\, dg = Q_{\nu} \tag{7.20}$$

и

$$\int_0^{\infty} g^{\nu} e^{-Ag} J_1(Bg)\, dg = W_{\nu}, \tag{7.21}$$

где ν — целое число. Так как

$$\int_0^{\infty} e^{-Ag} J_0(Bg)\, dg = (A^2 + B^2)^{-\frac{1}{2}}, \tag{7.22}$$

то

$$Q_{\nu} = (-1)^{\nu}\left(\frac{\partial}{\partial A}\right)^{\nu} (A^2 + B^2)^{-\frac{1}{2}}, \tag{7.23}$$

и

$$W_{\nu} = (-1)^{\nu}\left(\frac{\partial}{\partial A}\right)^{\nu-1} \frac{\partial}{\partial B}(A^2 + B^2)^{-\frac{1}{2}}. \tag{7.24}$$

Следовательно

$$T_3 = \sum_{n=0}^{\infty} L_n (-1)^{n+2}\left(\frac{\partial}{\partial A}\right)^{n+2} (A^2 + B^2)^{-\frac{1}{2}}, \tag{7.25}$$

$$T_4 = \sum_{n=0}^{\infty} L_n (-1)^{n+2}\left(\frac{\partial}{\partial A}\right)^{n+1} \frac{\partial}{\partial B}(A^2 + B^2)^{-\frac{1}{2}} \tag{7.26}$$

и

$$T_5 = \sum_{n=0}^{\infty} L_n (-1)^{n+1}\left(\frac{\partial}{\partial A}\right)^{n} \frac{\partial}{\partial B}(A^2 + B^2)^{-\frac{1}{2}}. \tag{7.27}$$

Первые три коэффициента имеют значения: $L_0 = 1$, $L_1 = -\left(\frac{2}{i}\right)^{\frac{1}{2}} V$, $L_2 = -iV^2$,

где

$$V = \frac{(\ \ + \gamma^{\frac{1}{2}}) + (1 - \gamma^{\frac{1}{2}})\, e^{-(2i)^{\frac{1}{2}} D}}{(1 + \gamma^{\frac{1}{2}}) - (1 - \gamma^{\frac{1}{2}})\, e^{-(2i)^{\frac{1}{2}} D}}. \tag{7.28}$$

Оставляя только три первых члена, получим для асимптотических выражений:

$$T_3 \approx \frac{2A^2 - B^2}{(A^2 + B^2)^{\frac{5}{2}}} - \left(\frac{2}{i}\right)^{\frac{1}{2}} V \frac{6A^3 - 9AB^2}{(A^2 + B^2)^{\frac{7}{2}}} - iV^2 \frac{24A^4 - 72A^2B^2 + 9B^4}{(A^2 + B^2)^{\frac{9}{2}}}, \tag{7.29}$$

$$T_4 \approx \frac{3AB}{(A^2 + B^2)^{\frac{5}{2}}} - \left(\frac{2}{i}\right)^{\frac{1}{2}} V \frac{12A^2B - 3B^3}{(A^2 + B^2)^{\frac{7}{2}}} - iV^2 \frac{60A^3B - 45AB^3}{(A^2 + B^2)^{\frac{9}{2}}}, \tag{7.30}$$

$$T_5 \approx \frac{B}{(A^2 + B^2)^{\frac{3}{2}}} - \left(\frac{2}{i}\right)^{\frac{1}{2}} V \frac{3AB}{(A^2 + B^2)^{\frac{5}{2}}} - iV^2 \frac{12A^2B - 3B^3}{(A^2 + B^2)^{\frac{7}{2}}}. \tag{7.31}$$

Подставляя эти выражения в (7. 14)—(7. 17), получим асимптотические выражения для взаимного импеданса рамок над двухслойной средой, которые справедливы, когда A или B больше единицы.

2. Взаимный импеданс между рамками над тонким пластом (Уэйт, 1953а). Воспользовавшись результатами, полученными в пункте 4, § 2 и § 6 этой главы, можно вычислить взаимный импеданс между двумя небольшими рамками, расположенными на расстоянии ϱ друг от друга.

XV. Рамки приподняты на высоту h над тонким пластом толщины d и электропроводности σ. Ось первой рамки перпендикулярна пласту, а ось второй — параллельна и находится на продолжении радиуса первой рамки.

$$\frac{Z}{Z_0} = T_6, \quad Z_0 = m,$$

где

$$T_6 = i\hat{p}\varrho\cos^3\theta + \hat{p}^2\varrho^2\frac{\cos^2\theta}{1+\sin\theta} + i\hat{p}^3\varrho^3\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta} + \ldots =$$

$$= 3\cos\theta\left[\cos^3\theta\sin\theta - \frac{i}{\hat{p}\varrho}\cos^4\theta(\cos^2\theta - 4\sin^2\theta) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\hat{p}^2\varrho^2}\sin\theta\cos^5\theta(3\cos^2\theta - 4\sin^2\theta) - \ldots\right]$$

и

$$\hat{p}\varrho = \frac{\sigma\mu\omega\varrho d}{2}, \quad \theta = \operatorname{arctg}\frac{2h}{\varrho}.$$

Интересно отметить, что на низких частотах ($\hat{p}\varrho \ll 1$) множитель T_6 пропорционален произведению электропроводности σ и толщины d пласта. На высоких частотах ($\hat{p}\varrho \gg 1$) T_6 не зависит от произведения σd и пласт эквивалентен идеальному проводнику.

3. Самоимпеданс рамки (Уэйт, 1958). Вышеприведенные формулы выведены при условии, что разнос ϱ между рамками намного превосходит диаметры рамок. Для взаимного импеданса можно записать

$$Z = Z_0 + Z_в,$$

где Z_0 — взаимный импеданс рамок в воздухе, $Z_в$ — добавочный член, обусловленный влиянием вторичного поля. Если ϱ устремить к нулю, то Z_0 будет самоимпедансом рамки, определяемым геометрией рамки, а $Z_в$ вычисляется с помощью формул вторичного поля $\boldsymbol{H}_в$, обусловленного магнитным диполем в точке $(0, 0, h)$ (см. п. 1). Диполь находится в плоскости $x = 0$ и образует угол θ с вертикалью, то есть с осью Oz. Такой диполь можно представить в виде суммы двух диполей: $M^г = M\sin\theta$, направленного по горизонтальной оси Oy и $M^в = M\cos\theta$, направленного по вертикальной оси Oz ($M = \frac{i\mu\omega ISN}{4\pi}$, где N число витков рамки).

Вторичные магнитные поля, обусловленные диполями $M^г$ и $M^в$ имеют составляющие только в направлении осей Oy и Oz:

$$H_{в\,y} = M^г\frac{1}{\delta^3}\left[\frac{T_5(A, B)}{B} - T_3(A, B)\right]_{B\to 0} =$$

$$= -M^г\frac{1}{\delta^3}\left[\frac{T_3(A, 0)}{2}\right], \qquad (7.32)$$

$$H_{в\,z} = -M^в\frac{1}{\delta^3}[T_3(A, B)]_{B\to 0} = -M^в\frac{1}{\delta^3}T_3(A, 0), \qquad (7.33)$$

где $A = \frac{2h}{\delta}$.

Вторичная э. д. с., индуцированная в рамке,

$$v = i\mu\omega SN(H_{в\,z}\cos\theta + H_{в\,y}\sin\theta)_{z=h}.$$

Записав, что $Z_в = \Delta R + i\Delta X$, можно показать, что

$$\Delta R = \frac{\mu\omega S^2N^2}{4\pi\delta^3}\left(\cos^2\theta + \frac{\sin^2\theta}{2}\right)Jm\,T_3(A, 0), \qquad (7.34)$$

$$\Delta X = -\frac{\mu\omega S^2N^2}{4\pi\delta^3}\left(\cos^2\theta - \frac{\sin^2\theta}{2}\right)Re\,T_3(A, 0), \qquad (7.35)$$

где

$$T_3(A, 0) \approx \frac{2}{A^3} - \left(\frac{2}{i}\right)^{\frac{1}{2}}V\frac{6}{A^4} - iV^2\frac{24}{A^5} - \frac{V^3}{(2i)^{\frac{3}{2}}}\frac{60}{A^6}. \qquad (7.36)$$

В случае однородного полупространства ($D \to \infty$) при пренебрежимо малых токах смещения:

$$\Delta R_1 \approx \frac{3\mu\omega S^2N^2}{16\pi h^3}\left(\cos^2\theta + \frac{\sin^2\theta}{2}\right)\left(\frac{1}{A} - \frac{4}{A^2} + \frac{5}{A^3}\ldots\right), \qquad (7.37)$$

$$\Delta X_1 \approx -\frac{\mu\omega S^2N^2}{16\pi h^3}\left(\cos^2\theta - \frac{\sin^2\theta}{2}\right)\times$$

$$\times\left(1 - \frac{3}{A} + \frac{15}{A^2}\ldots\right), \qquad (7.38)$$

так как A вещественно и $V = 1$. Для вертикальной рамки ($\theta = 0°$) формула (7. 37) находится в соответствии с результатами четвертого пункта § 1 гл. II.

Вычисляя ΔR и ΔX для слоистой среды, необходимо знать значения членов ряда $T_3(A, 0)$. Когда A настолько велико, что удовлетворительное приближение можно получить, взяв два первых члена ряда, отношение вещественных частей импедансов для слоистой среды и однородного полупространства

$$\frac{\Delta R}{\Delta R_1} \approx \sqrt{2}\,|V|\sin\left(\frac{1}{4}\pi - v\right), \qquad (7.39)$$

где $V = |V|e^{iv}$. Численные значения комплексного множителя V приведены в § 2 гл. IV. Там отмечено, что при $d > 5\delta$, $V \approx 1{,}01$.

§ 8. Неустановившееся поле вертикального магнитного диполя

1. Тонкий пласт (Уэйт, 1951). Пусть пласт расположен на глубине $z = h$, толщина его $d \to 0$, но так, что произведение $d\sigma_1$ остается конечной величиной ($\sigma_0 = \sigma_2 = 0$). Как было показано выше (§ 2), вектор-потенциал для стационарного синусоидального поля можно записать следующим образом:

$$\frac{F(i\omega)}{I(i\omega)} = \frac{i\mu\omega dS}{4\pi}\left[\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1}\right] +$$

$$+ \frac{i\mu\omega dS}{4\pi}\int_0^\infty \frac{\lambda}{\lambda + i\omega\hat{p}}e^{-(z+2h)\lambda}J_0(\varrho\lambda)\,d\lambda, \qquad (8.1)$$

где

$$\hat{p} = \frac{\sigma\mu d}{2}$$

и

$$r = (\varrho^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}, \quad r_1 = [\varrho^2 + (z + 2h)^2]^{\frac{1}{2}}.$$

Вектор-потенциал $f(t)$ неустановившегося поля, возбуждаемого ступенчатой функцией тока $I_0 u(t)$, определяется выражением:

$$\frac{f(t)}{I_0} = \frac{\mu\, dS}{4\pi} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{i\omega t} \int\limits_0^\infty \frac{\lambda}{\lambda + i\omega\hat{p}} e^{-(z+2h)\lambda} \times$$

$$\times J_0(\varrho\lambda)\, d\lambda\, d(i\omega) + \frac{\mu\, dS}{4\pi} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty} \times$$

$$\times \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1}\right) e^{i\omega t}\, d(i\omega). \qquad (8.2)$$

В этом случае допускается изменение порядка интегрирования, так что интегрирование по $i\omega$, выполняемое первым, приводит к выражению:

$$\frac{f(t)}{I_0} = \frac{\mu\, dS}{4\pi} \int\limits_0^\infty e^{-\frac{t\lambda}{\hat{p}}} e^{-(z+2h)\lambda} u(t)\, \lambda J_0(\varrho\lambda)\, d\lambda +$$

$$+ \frac{\mu\, dS}{4\pi} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1}\right) u_1(t). \qquad (8.3)$$

Выполняя интегрирование по λ, получим:

$$\frac{f(t)}{I_0} = \frac{\mu\, dS}{4\pi} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1}\right) u_1(t) +$$

$$+ \frac{\mu\, dS}{4\pi} \left(\frac{t}{\hat{p}} + z + 2h\right) \left[\left(\frac{t}{\hat{p}} + z + 2h\right)^2 + \varrho^2\right]^{-\frac{3}{2}}, \qquad (8.4)$$

где $u_1(t)$ есть единичная импульсная функция *. Тогда составляющая электрического поля имеет следующий вид:

$$\frac{e_\varphi(t)}{I_0} = -\frac{1}{I_0} \frac{\partial f(t)}{\partial \varrho} = -\frac{\mu\, dS}{4\pi} \frac{\partial}{\partial \varrho} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1}\right) u_1(t) +$$

$$+ \frac{3\mu\, dS}{4\pi} \left(\frac{t}{\hat{p}} + z + 2h\right) \varrho \left[\left(\frac{t}{\hat{p}} + z + 2h\right)^2 + \varrho^2\right]^{-\frac{5}{2}}. \qquad (8.5)$$

---

* Единичная импульсная функция $u_1(t)$ обладает следующими свойствами:

$$u_1(0) = \infty, \quad u_1(t) = 0, \quad (t \neq 0),$$

$$\int\limits_0^t u_1(t)\, dt = 1.$$

Взаимный импеданс $Z(t)$ рамки с площадью dS и элемента тока длины dl на поверхности земли, когда на глубине h имеется горизонтальный проводящий пласт:

$$Z(t) = \frac{e_\varphi(t) dS}{I_0} = \frac{\mu\, dS dl \sin\psi}{4\pi} \times$$

$$\times \left[\frac{\partial}{\partial \varrho}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r}\right) u_1(t) + \frac{6}{\sigma\mu d} A\left(\frac{t}{h\hat{p}}, \frac{\varrho}{h}\right)\right], \qquad (8.6)$$

где ψ есть угол между направлением dl и направлением линии, соединяющей центр рамки dS и центр элемента провода. Характеристическая функция $A\left(\frac{t}{h\hat{p}}, \frac{\varrho}{h}\right)$ построена на рис. 7 и имеет вид:

$$A\left(\frac{t}{h\hat{p}}, \frac{\varrho}{h}\right) = \frac{\varrho}{h}\left(\frac{t}{h\hat{p}} + 2\right) \left[\left(\frac{t}{h\hat{p}} + 2\right)^2 + \left(\frac{\varrho}{h}\right)^2\right]^{-\frac{5}{2}}. \qquad (8.7)$$

Зависимость от времени первого члена, а в квадратных скобках выражения (8.6) характеризуется единичной импульсной функцией $u_1(t)$ для случая, когда среда имеет бесконечно

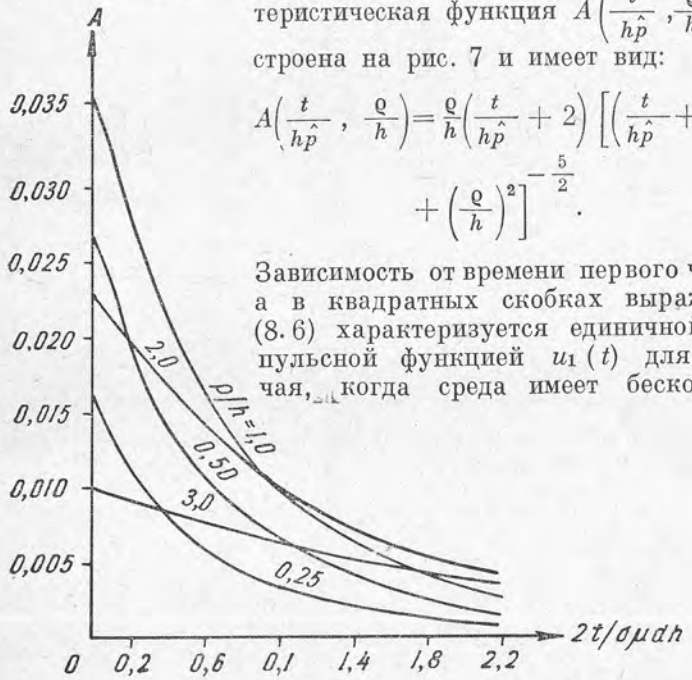


Рис. 7. Графики функции A в зависимости от $\frac{2t}{\sigma\mu dh}$.

большое сопротивление. В действительности, из-за конечной электропроводности среды, окружающей проводящий пласт, первичный импульс имеет конечную длительность и определяется как взаимный импеданс рамки и проволочного элемента в неустановившемся режиме на поверхности однородной среды конечной электропроводности [§ 5, гл. I, формулы (5. 4), (5. 5)]. Если в момент измерения время $t \gg \sigma_1\mu h^2$, где σ_1 — электропроводность окружающей среды, то преобладающая часть поля обусловлена вихревым током, который характеризуется членом $A\left(\frac{t}{h\hat{p}}, \frac{\varrho}{h}\right)$.

Из графиков рис. 7 видно, что для проводящего слоя, расположенного на глубине h максимальная аномалия неустановившегося поля будет в точке, где отношение $\frac{\varrho}{h}$ равно единице. Затухание поля во времени значительно больше для больших значений отношения $\frac{\varrho}{h}$.

2. Двухслойная среда. Электропроводность основания близка к электропроводности вышележащего слоя (Петр, 1959). Пусть диполь расположен на границе воздух — слой. Введем систему цилиндрических координат (ϱ, φ, z), начало которой совмещено с точкой расположения диполя. Решение проводится в системе MKS. Если принять $\mu_0 = \mu_1 = \mu_2 = 1$*, то вектор-потенциал установившегося синусоидального поля на поверхности $z = 0$ определяется выражением, аналогичным формуле (2. 16):

$$F_1^* = M^* \int_0^\infty \frac{2\lambda\,[(u_1 - u_2) + (u_1 + u_2)\,e^{2du_1}]}{(\lambda - u_1)(u_1 - u_2) + (\lambda + u_1)(u_1 + u_2)\,e^{2du_1}} J_0(\varrho\lambda)\,d\lambda, \qquad (8.8)$$

где

$$M^* = \frac{i\,\omega\,IdS}{4\pi}\,e^{i\omega t},$$

$u_1 = \sqrt{\lambda^2 + k_1^2}$, $u_2 = \sqrt{\lambda^2 + k_2^2}$, d — мощность слоя. Когда $\sigma_2 = \sigma_1 + \Delta\sigma_1$ и $\Delta\sigma_1$ невелико, подынтегральную функцию выражения (8. 8) в окрестности точки $\sigma_2 = \sigma_1$ можно разложить в ряд Тэйлора. После разложения в ряд и преобразования результатов получим, взяв два первых члена разложения:

$$F_1^* = M^* \Big[\int_0^\infty \frac{2\lambda}{\lambda + u_1} J_0(\varrho\lambda)\,d\lambda + \frac{\Delta\sigma_1}{\sigma_1} \int_0^\infty \frac{\lambda}{u_1} e^{-2du_1} J_0(\varrho\lambda)\,d\lambda - \frac{\Delta\sigma_1}{\sigma_1} \int_0^\infty \frac{2\lambda}{\lambda + u_1} e^{-2du_1} J_0(\varrho\lambda)\,d\lambda \Big]. \qquad (8.9)$$

Применяя к этому выражению интеграл Фурье **, получим составляющую вектор-потенциала неустановившегося поля $f(t)$ в на-

---

* Упрощающее допущение $\mu_0 = \mu_1 = \mu_2 = 1$ приводит к тому, что в числовых расчетах по результатам настоящего параграфа следует заменить σ на $\sigma \cdot 4\pi 10^{-7}$. *Ред.*

** $$\Phi(t) = \frac{M}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega t}}{\omega}\,\Phi(\omega)\,d\omega + \frac{1}{2} \lim_{t \to \infty} \Phi(t),$$

$$M^* = Me^{i\omega t}.$$

правлении оси Oz. Для этого перепишем выражение (8. 9) следующим образом:

$$f(t) = M \Big[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}\,d\omega \int_0^\infty \frac{2\lambda}{\lambda + u_1} J_0(\varrho\lambda)\,d\lambda + \frac{\Delta\sigma_1}{\sigma_1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}\,d\omega \int_0^\infty \frac{\lambda}{u_1} e^{-2du_1} J_0(\varrho\lambda)\,d\lambda - \frac{\Delta\sigma_1}{\sigma} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}\,d\omega \int_0^\infty \frac{2\lambda}{\lambda + u_1} e^{-2du_1} J_0(\varrho\lambda)\,d\lambda + \frac{1}{2} \lim_{t \to \infty} f(t). \qquad (8.10)$$

Если принять для отдельных интегралов обозначения:

$$I_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}\,d\omega \int_0^\infty \frac{2\lambda}{\lambda + u_1} J_0(\varrho\lambda)\,d\lambda,$$

$$I_2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}\,d\omega \int_0^\infty \frac{\lambda}{u_1} e^{-2du_1} J_0(\varrho\lambda)\,d\lambda,$$

$$I_3 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}\,d\omega \int_0^\infty \frac{2\lambda}{\lambda + u_1} e^{-2du_1} J_0(\varrho\lambda)\,d\lambda,$$

то для вектор-потенциала можно записать:

$$f(t) = M \left(I_1 + \frac{\Delta\sigma_1}{\sigma_1} I_2 - \frac{\Delta\sigma_1}{\sigma_1} I_3 \right) + \frac{1}{2} \lim_{t \to \infty} f(t).$$

Учитывая, что интеграл I_1 является частным случаем интеграла I_3 при $d \to 0$, достаточно вычислить выражения I_2 и I_3. При помощи интеграла Зоммерфельда получим:

$$I_2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{i\omega\sigma_1}\,r}}{r}\,e^{i\omega t}\,d\omega, \qquad (8.11)$$

где $r = \sqrt{\varrho^2 + (2d)^2}$. Этот интеграл легко вычисляется в комплексной плоскости ω. Униформируем подынтегральную функцию выражения (8. 11) с помощью двухлистной поверхности Римана. Для сходимости интеграла (8. 11) надо потребовать, чтобы было выполнено условие: $Re\sqrt{i\omega\sigma_1} > 0$, то есть произвести интегрирование на этом листе поверхности Римана. Разрез, отделяющий листы друг от друга, задан уравнением:

$$\sqrt{i\omega\sigma_1} = i\nu, \qquad (8.12)$$

где ν — вещественное число; точка разветвления совпадает с точкой $\omega = 0$. Примем $\omega = \omega_1 + i\omega_2$. Для выполнения равенства (8.12) должны быть справедливы соотношения:

$$Jm(i\omega\sigma_1) = 0 \text{ при } \omega_1 = 0,$$
$$Re(i\omega\sigma_1) < 0 \text{ при } \omega_2 > 0.$$

Следовательно, разрез является положительной частью мнимой оси комплексной плоскости ω. Если путь интегрирования выбрать так, как это показано на рис. 8, то на основании леммы Коши

$$\int_{-R}^{R} + \int_{C_{1R}} + \int_{C_1} + \int_{C_2} + \int_{C_{2R}} = 0.$$

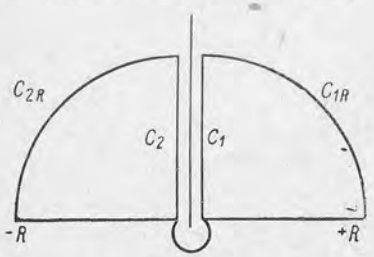


Рис. 8.

При $R \to \infty$ на основании леммы Жордана получается, что $\int_{C_{1R}} = \int_{C_{2R}} = 0$. Если применить упомянутые соотношения, то интеграл в выражении (8.11) будет равен лишь интегралам вдоль разреза на поверхности Римана. Если считать, что вдоль разреза справедливо равенство (8.12), то выражение (8.11) можно переписать:

$$I_2 = \frac{1}{2\pi r}\left(\int_{\infty}^{0} \frac{2i\nu}{\sigma_1} e^{-\frac{\nu^2}{\sigma_1}t - i\nu r} d\nu + \int_{0}^{\infty} \frac{2i\nu}{\sigma_1} e^{-\frac{\nu^2}{\sigma_1}t + i\nu r} d\nu\right) =$$

$$= \frac{2}{\pi r \sigma_1}\frac{\partial}{\partial r}\int_{0}^{\infty} e^{-\frac{\nu^2}{\sigma_1}t} \cos\nu r d\nu = \frac{2}{r\sigma_1}\left(\frac{r\sqrt{\sigma_1}}{2\sqrt{t}}\right)^3 erf'\left(\frac{r\sqrt{\sigma_1}}{2\sqrt{t}}\right). \qquad (8.13)$$

Интеграл I_3 можно записать в виде разности двух выражений:

$$I_3 = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega t}}{i\omega\sigma_1} d\omega \int_{0}^{\infty} u_1 e^{-2du_1} J_0(\varrho\lambda)\lambda d\lambda -$$

$$-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega t}}{i\omega\sigma_1} d\omega \int_{0}^{\infty} e^{-2du_1} J_0(\varrho\lambda)\lambda^2 d\lambda.$$

Обозначим их через I_3' и I_3'' и вычислим сначала выражение I_3'. С помощью интеграла Зоммерфельда выражение для I_3' можно упростить, так что

$$I_3' = \frac{\partial^2}{\partial(2d)^2}\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega t}}{i\omega\sigma_1}\frac{e^{-\sqrt{i\omega\sigma_1}\,r}}{r} d\omega. \qquad (8.14)$$

Последний интеграл можно вычислить аналогично тому, как это было сделано в предыдущем случае, а именно путем решения в комплексной плоскости ω. Путь интегрирования здесь тот же,

что и при вычислении I_2. Если применить здесь приведенный выше способ решения, то для интеграла в выражении (8.14) найдем:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega t}}{i\omega\sigma_1}\frac{e^{-\sqrt{i\omega\sigma_1}\,r}}{r} d\omega = -\frac{4}{r\sigma_1}\int_{0}^{\infty} \frac{e^{-\frac{\nu^2}{\sigma_1}t}}{\nu}\sin\nu r d\nu.$$

Если сделать интегрирование по параметру r, то последний интеграл можно представить в виде:

$$-\frac{4}{r\sigma_1}\int_{0}^{\infty} e^{-\frac{\nu^2}{\sigma_1}t} d\nu \int_{0}^{r} \cos\nu r dr.$$

Вычисляя оба интеграла, получим:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega t}}{i\omega\sigma_1}\frac{e^{-\sqrt{i\omega\sigma_1}\,r}}{r} d\omega =$$
$$= -\frac{2\pi}{r\sigma_1} erf\left(\frac{r\sqrt{\sigma_1}}{2\sqrt{t}}\right).$$

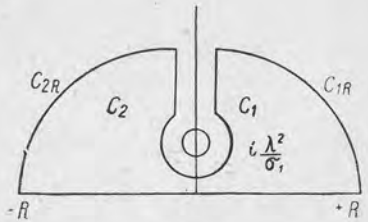


Рис. 9.

После подстановки этого выражения в (8.14) и вычисления производных, получим для I_3':

$$I_3' = \frac{2}{r^3\sigma_1}\left\{\left[1 - 3\left(\frac{2d}{r}\right)^2\right]\left[erf\left(\frac{r\sqrt{\sigma_1}}{2\sqrt{t}}\right) -\right.\right.$$
$$\left.\left. -\frac{r\sqrt{\sigma_1}}{2\sqrt{t}} erf'\left(\frac{r\sqrt{\sigma_1}}{2\sqrt{t}}\right)\right] - \left(\frac{2d}{r}\right)^2\left(\frac{r\sqrt{\sigma_1}}{2\sqrt{t}}\right)^2 erf''\left(\frac{r\sqrt{\sigma_1}}{2\sqrt{t}}\right)\right\}. \qquad (8.15)$$

Вычисление I_3'' произведем также в комплексной плоскости ω. Так же, как и в предыдущих случаях, будем униформировать подынтегральную функцию на двухлистной поверхности Римана и проведем интегрирование на том листе, где $Re\sqrt{\lambda^2 + i\omega\sigma_1} > 0$. Разрез, отделяющий листы друг от друга, задан условием $\sqrt{\lambda^2 + i\omega\sigma_1} = i\nu$, где ν — вещественное число. Отмеченное выше условие будет выполнено, если

$$Re(\lambda^2 + i\omega\sigma_1) < 0 \text{ при } \omega_2 > \frac{\lambda^2}{\sigma_1},$$
$$Jm(\lambda^2 + i\omega\sigma_1) = 0 \text{ при } \omega_1 = 0.$$

Из предыдущих соотношений вытекает, что разрезом является та часть мнимой оси, для которой справедливо неравенство $\omega_2 > \frac{\lambda^2}{\sigma_1}$. Итак, путь интегрирования состоит из частей $-R$, $+R$, C_{1R}, C_2, C_{2R} (рис. 9). Интегралы вдоль дуг C_{1R} и C_{2R} на осно-

вании леммы Жордана при $R \to \infty$ равны нулю, так что на основании леммы Коши можно написать

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega t}}{i\omega\sigma_1} d\omega \int_0^{\infty} e^{-2du_1} J_0(\varrho\lambda)\lambda^2 d\lambda =$$

$$= \left(\int_{\infty}^{0} \frac{e^{-\frac{\nu^2+\lambda^2}{\sigma_1}t}}{\nu^2+\lambda^2} e^{-i\nu 2d} \frac{2i\nu}{\sigma_1} d\nu + \right.$$

$$\left. + \int_0^{\infty} \frac{e^{-\frac{\nu^2+\lambda^2}{\sigma_1}t}}{\nu^2+\lambda^2} e^{i\nu 2d} \frac{2i\nu}{\sigma_1} d\nu \right) \int_0^{\infty} J_0(\varrho\lambda)\lambda^2 d\lambda =$$

$$= -\frac{4}{\sigma_1} \int_0^{\infty} \frac{e^{-\frac{\nu^2+\lambda^2}{\sigma_1}t}}{\nu^2+\lambda^2} \sin(2d\nu)\nu\, d\nu \int_0^{\infty} J_0(\varrho\lambda)\lambda^2 d\lambda.$$

Интегрируя и вычисляя производные по параметру, получим для предыдущих интегралов:

$$\frac{4}{\sigma_1^2} \frac{\partial}{\partial(2d)} \int_{\infty}^{t} dt \int_0^{\infty} e^{-\frac{\nu^2}{\sigma_1}t} \cos(2d\nu)\, d\nu \int_0^{\infty} e^{-\frac{\lambda^2}{\sigma_1}t} J_0(\varrho\lambda)\lambda^2 d\lambda =$$

$$= -\pi \frac{\partial}{\partial(2d)} \frac{1}{t} e^{-\frac{(2d)^2\sigma_1}{4t} - \frac{\varrho^2\sigma_1}{8t}} I_0\left(\frac{\varrho^2\sigma_1}{8t}\right) -$$

$$- \frac{2}{\pi} \frac{\partial}{\partial(2d)} \int_{\infty}^{t} \frac{1}{t^2} e^{-\frac{(2d)^2\sigma_1}{4t} - \frac{\varrho^2\sigma_1}{8t}} I_0\left(\frac{\varrho^2\sigma_1}{8t}\right) +$$

$$+ \pi \frac{\partial}{\partial(2d)} \int_{\infty}^{t} \frac{1}{t} \frac{(2d)^2\sigma_1}{4t^2} e^{-\frac{(2d)^2\sigma_1}{4t} - \frac{\varrho^2\sigma_1}{8t}} I_0\left(\frac{\varrho^2\sigma_1}{8t}\right) dt,$$

где $I_0\left(\frac{\varrho^2\sigma_1}{8t}\right)$ — функция Бесселя нулевого порядка от мнимого аргумента. После вычисления производных и преобразования интегралов найдем:

$$I_3'' = \frac{8}{\varrho^3\sigma_1} \frac{2d}{\varrho} \left(\frac{\varrho^2\sigma_1}{4t}\right)^2 e^{-\frac{\varrho^2\sigma_1}{4t}\left[\frac{1}{2}+\left(\frac{2d}{\varrho}\right)^2\right]}$$

$$I_0\left(\frac{1}{2}\frac{\varrho^2\sigma_1}{4t}\right) - \frac{12}{\varrho^3\sigma_1} \frac{2d}{\varrho} \int_0^{\frac{\varrho^2\sigma_1}{4t}} \tau e^{-\left[\frac{1}{2}+\left(\frac{2d}{\varrho}\right)^2\right]\tau} I_0\left(\frac{\tau}{2}\right) d\tau +$$

$$+ \frac{8}{\varrho^3\sigma_1} \left(\frac{2d}{\varrho}\right)^3 \int_0^{\frac{\varrho^2\sigma_1}{4t}} \tau^2 e^{-\left[\frac{1}{2}+\left(\frac{2d}{\varrho}\right)^2\right]\tau} I_0\left(\frac{\tau}{2}\right) d\tau.$$

Применяя равенство $2\frac{d}{d\tau}\left[\tau I_1\left(\frac{\tau}{2}\right)\right] = \tau I_0\left(\frac{\tau}{2}\right)$, получим

$$I_3'' = \frac{8}{\varrho^3\sigma_1} \frac{2d}{\varrho} \frac{\varrho^2\sigma_1}{4t} K_{00} - \frac{24}{\varrho^3\sigma_1} \frac{2d}{\varrho} \frac{\varrho^2\sigma_1}{4t} K_{01} +$$

$$+ \frac{16}{\varrho^3\sigma_1} \left(\frac{2d}{\varrho}\right)^3 \left(\frac{\varrho^2\sigma_1}{4t}\right) K_{01} - \frac{4}{\varrho^3\sigma_1} \left[3\frac{2d}{\varrho} + 10\left(\frac{2d}{\varrho}\right)^3\right] K_{11} +$$

$$+ \frac{8}{\varrho^3\sigma_1} \left(\frac{2d}{\varrho}\right)^3 \left[1 + 2\left(\frac{2d}{\varrho}\right)^2\right] K_{21}, \qquad (8.16)$$

где

$$K_{00} = e^{-\frac{\varrho^2\sigma_1}{4t}\left[\frac{1}{2}+\left(\frac{2d}{\varrho}\right)^2\right]} I_0\left(\frac{1}{2}\frac{\varrho^2\sigma_1}{4t}\right), \qquad (8.17)$$

$$K_{01} = e^{-\frac{\varrho^2\sigma_1}{4t}\left[\frac{1}{2}+\left(\frac{2d}{\varrho}\right)^2\right]} I_1\left(\frac{1}{2}\frac{\varrho^2\sigma_1}{4t}\right), \qquad (8.18)$$

$$K_{11} = \int_0^{\frac{\varrho^2\sigma_1}{4t}} \tau e^{-\left[\frac{1}{2}+\left(\frac{2d}{\varrho}\right)^2\right]\tau} I_1\left(\frac{\tau}{2}\right) d\tau, \qquad (8.19)$$

$$K_{21} = \int_0^{\frac{\varrho^2\sigma_1}{4t}} \tau^2 e^{-\left[\frac{1}{2}+\left(\frac{2d}{\varrho}\right)^2\right]\tau} I_1\left(\frac{\tau}{2}\right) d\tau. \qquad (8.20)$$

Из формул (8.15) и (8.16) можно определить I_1, взяв предельный случай, когда $d \to 0$ (I_1 является потенциалом вертикального магнитного диполя для неустановившегося поля в присутствии однородного полупространства, в чем можно убедиться из (8.10), принимая $\Delta\sigma_1 = 0$):

$$I_1 = \frac{2}{\varrho^3\sigma_1}\left[erf\left(\frac{\varrho\sqrt{\sigma_1}}{2\sqrt{t}}\right) - \frac{\varrho\sqrt{\sigma_1}}{2\sqrt{t}} erf'\left(\frac{\varrho\sqrt{\sigma_1}}{2\sqrt{t}}\right)\right]. \qquad (8.21)$$

Пользуясь соотношениями (8.13), (8.15), (8.16), и (8.21), можно представить выражение для вектор-потенциала следующим образом:

$$f(t) = M\left(\frac{2}{\varrho^3\sigma_1}\left[erf\left(\frac{\varrho\sqrt{\sigma_1}}{2\sqrt{t}}\right) - \frac{\varrho\sqrt{\sigma_1}}{2\sqrt{t}} erf'\left(\frac{\varrho\sqrt{\sigma_1}}{2\sqrt{t}}\right)\right] +\right.$$

$$+ \frac{\Delta\sigma_1}{\sigma_1}\left\{\frac{2}{r^3\sigma_1}\left(\frac{r\sqrt{\sigma_1}}{2\sqrt{t}}\right)^3 erf'\left(\frac{r\sqrt{\sigma_1}}{2\sqrt{t}}\right) +\right.$$

$$+ \frac{2}{r^3\sigma_1}\left[-1 + 3\left(\frac{2d}{r}\right)^2\right]\left[erf\left(\frac{r\sqrt{\sigma_1}}{2\sqrt{t}}\right) - \frac{r\sqrt{\sigma_1}}{2\sqrt{t}} erf'\left(\frac{r\sqrt{\sigma_1}}{2\sqrt{t}}\right)\right] +$$

$$+ \frac{2}{r^3\sigma_1}\left(\frac{2d}{r}\right)^2\left(\frac{r\sqrt{\sigma_1}}{2\sqrt{t}}\right)^2 erf''\left(\frac{r\sqrt{\sigma_1}}{2\sqrt{t}}\right) - \frac{8}{\varrho^3\sigma_1}\frac{2d}{\varrho}\frac{\varrho^2\sigma_1}{4t} K_{00} +$$

$$+\frac{24}{\varrho^3\sigma_1}\frac{2d}{\varrho}\frac{\varrho^2\sigma_1}{4t}K_{01}-\frac{16}{\varrho^3\sigma_1}\left(\frac{2d}{\varrho}\right)^3\left(\frac{\varrho^2\sigma_1}{4t}\right)^2K_{01}+$$

$$+\frac{4}{\varrho^3\sigma_1}\left[3\frac{2d}{\varrho}+10\left(\frac{2d}{\varrho}\right)^3\right]K_{11}-\frac{8}{\varrho^3\sigma_1}\left(\frac{2d}{\varrho^3}\right)^3\times$$

$$\times\left[1+2\left(\frac{2d}{\varrho}\right)^2\right]K_{21}\Bigg\}\Bigg).$$

Членом $\frac{1}{2}\lim\limits_{t\to\infty}f(t)$ из (8.10) можно пренебречь, так как при $t\to\infty$ вектор-потенциал неустановившегося поля обращается в нуль. Интегралы K_{11} и K_{21} можно выразить через интеграл

$$K_{10}=\int\limits_0^{\frac{\varrho^2\sigma_1}{4t}}\tau e^{-\left[\frac{1}{2}+\left(\frac{2d}{\varrho}\right)^2\right]\tau}I_0\left(\frac{\tau}{2}\right)d\tau.$$

Интегрируя по частям, получим

$$K_{11}=-\frac{\frac{\varrho^2\sigma_1}{4t}}{\frac{1}{2}+\left(\frac{2d}{\varrho}\right)^2}K_{01}+\frac{1}{2\left[\frac{1}{2}+\left(\frac{2d}{\varrho}\right)^2\right]}K_{10}.$$

После трехкратного интегрирования по частям найдем

$$K_{21}=-\frac{\left(\frac{\varrho^2\sigma_1}{4t}\right)^2}{\frac{1}{2}+\left(\frac{2d}{\varrho}\right)^2}K_{01}-\frac{\frac{\varrho^2\sigma_1}{4t}}{\left[\frac{1}{2}+\left(\frac{2d}{\varrho}\right)^2\right]^2}K_{01}+$$

$$+\frac{3}{2\left[\frac{1}{2}+\left(\frac{2d}{\varrho}\right)^2\right]^2}K_{10}-\frac{\left(\frac{\varrho^2\sigma_1}{4t}\right)^2}{2\left[\frac{1}{2}+\left(\frac{2d}{\varrho}\right)^2\right]^2}K_{00}+$$

$$+\frac{1}{4\left[\frac{1}{2}+\left(\frac{2d}{\varrho}\right)^2\right]^2}K_{21}.$$

Преобразовывая последнее выражение, получим

$$K_{21}=-\frac{1}{1+\left(\frac{2d}{\varrho}\right)^2}\frac{\left(\frac{\varrho^2\sigma_1}{4t}\right)^2}{2\left(\frac{2d}{\varrho}\right)^2}K_{00}-\frac{1}{1+\left(\frac{2d}{\varrho}\right)^2}\times$$

$$\times\frac{\frac{\varrho^2\sigma_1}{4t}}{\left(\frac{2d}{\varrho}\right)^2}K_{01}-\frac{\frac{1}{2}+\left(\frac{2d}{\varrho}\right)^2}{1+\left(\frac{2d}{\varrho}\right)^2}\frac{\left(\frac{\varrho^2\sigma_1}{4t}\right)^2}{\left(\frac{2d}{\varrho}\right)^2}K_{01}+$$

$$+\frac{3}{2}\frac{1}{\left(\frac{2d}{\varrho}\right)\left[1+\left(\frac{2d}{\varrho}\right)^2\right]}K_{10}.$$

Вычислим производную K_{10} по ϱ:

$$\frac{dK_{10}}{\partial\varrho}=\frac{2}{\varrho}\left(\frac{\varrho^2\sigma_1}{4t}\right)^2K_{00}+\frac{2}{\varrho}\left(\frac{2d}{\varrho}\right)^2\int\limits_0^{\frac{\varrho^2\sigma_1}{4t}}\tau^2e^{-\left[\frac{1}{2}+\left(\frac{2d}{\varrho}\right)^2\right]\tau}I_0\left(\frac{\tau}{2}\right)d\tau.$$

Интегрируя по частям интеграл в последнем выражении, найдем

$$\int\limits_0^{\frac{\varrho^2\sigma_1}{4t}}\tau^2e^{-\left[\frac{1}{2}+\left(\frac{2d}{\varrho}\right)^2\right]\tau}I_0\left(\frac{\tau}{2}\right)d\tau=-\frac{\left(\frac{\varrho^2\sigma_1}{4t}\right)^2}{\frac{1}{2}+\left(\frac{2d}{\varrho}\right)^2}K_{00}+$$

$$+\frac{2}{\frac{1}{2}+\left(\frac{2d}{\varrho}\right)^2}K_{10}+\frac{1}{2\left[\frac{1}{2}+\left(\frac{2d}{\varrho}\right)^2\right]}K_{21}.$$

Подставив это выражение, а также выражение для K_{21} в предыдущее равенство, получим

$$\frac{dK_{10}}{d\varrho}=\frac{1}{\varrho}\frac{1}{1+\left(\frac{2d}{\varrho}\right)^2}\left(\frac{\varrho^2\sigma_1}{4t}\right)K_{00}-\frac{1}{\varrho}\frac{1}{1+\left(\frac{2d}{\varrho}\right)^2}\left(\frac{\varrho^2\sigma_1}{4t}\right)K_{01}-$$

$$-\frac{1}{\varrho}\frac{1}{\left[\frac{1}{2}+\left(\frac{2d}{\varrho}\right)^2\right]\left[1+\left(\frac{2d}{\varrho}\right)^2\right]}\frac{\varrho^2\sigma_1}{4t}K_{01}+$$

$$+\frac{8\left(\frac{2d}{\varrho}\right)^2\left[1+\left(\frac{2d}{\varrho}\right)^2\right]+3}{2\varrho\left[\frac{1}{2}+\left(\frac{2d}{\varrho}\right)^2\right]\left[1+\left(\frac{2d}{\varrho}\right)^2\right]}K_{10}.$$

Если принять, что

$$erf''(x)=-2x\,erf'(x),\tag{8.22}$$

то для вектор-потенциала получим выражение:

$$f(t)=\frac{2M}{\varrho^3\sigma_1}\left(\left[erf\left(\frac{\varrho\sqrt{\sigma_1}}{2\sqrt{t}}\right)-\frac{\varrho\sqrt{\sigma_1}}{2\sqrt{t}}erf'\left(\frac{\varrho\sqrt{\sigma_1}}{2\sqrt{t}}\right)\right]-\right.$$

$$-\frac{\Delta\sigma_1}{\sigma_1}\left\{2\frac{\frac{1}{2}-\left(\frac{2d}{\varrho}\right)^2}{\left[1+\left(\frac{2d}{\varrho}\right)^2\right]^{\frac{5}{2}}}erf\left(\frac{r\sqrt{\sigma_1}}{2\sqrt{t}}\right)-2\frac{\frac{1}{2}-\left(\frac{2d}{\varrho}\right)^2}{\left[1+\left(\frac{2d}{\varrho}\right)^2\right]^2}\times\right.$$

$$\times\frac{\varrho\sqrt{\sigma_1}}{2\sqrt{t}}erf'\left(\frac{r\sqrt{\sigma_1}}{2\sqrt{t}}\right)-\frac{1-\left(\frac{2d}{\varrho}\right)^2}{1+\left(\frac{2d}{\varrho}\right)^2}\left(\frac{\varrho\sqrt{\sigma_1}}{2\sqrt{t}}\right)^3erf'\left(\frac{r\sqrt{\sigma_1}}{2\sqrt{t}}\right)+$$

$$+4\frac{2d}{\varrho}\frac{\varrho^2\sigma_1}{4t}K_{00}-4\frac{2d}{\varrho}\frac{\frac{1}{2}+\left(\frac{2d}{\varrho}\right)^2}{1+\left(\frac{2d}{\varrho}\right)^2}\left(\frac{\varrho^2\sigma_1}{4t}\right)K_{00}-$$

$$-2\frac{\frac{2d}{\varrho}}{\left[\frac{1}{2}+\left(\frac{2d}{\varrho}\right)^2\right]\left[1+\left(\frac{2d}{\varrho}\right)^2\right]}\frac{\varrho^2\sigma_1}{4t}K_{01}-2\frac{2d}{\varrho}\frac{1}{1+\left(\frac{2d}{\varrho}\right)^2}\times$$

$$\times\left(\frac{\varrho^2\sigma_1}{4t}\right)_2K_{01}-2\left(\frac{2d}{\varrho}\right)^3\frac{\frac{1}{2}-\left(\frac{2d}{\varrho}\right)^2}{\left[\frac{1}{2}+\left(\frac{2d}{\varrho}\right)^2\right]\left[1+\left(\frac{2d}{\varrho}\right)^2\right]}K_{10}\Bigg\}\Bigg). \qquad (8.23)$$

3. Взаимный импеданс рамки и горизонтального провода малой длины. Взаимное положение рамки и горизонтального провода dl показано на рис. 10. Вектор-потенциал рамки имеет вид $\boldsymbol{f}=[0,\ 0,\ f(\varrho,\ z=0,\ t)]$. Отсюда неустановившееся напряжение, индуцированное в горизонтальном проводе dl, определяется соотношением $v=E_y dl=-E_\varphi dl\sin\psi$. Если угол $\psi=90°$, то есть, если направление горизонтального провода будет перпендикулярно радиусу ϱ, то напряжение $v=-E_\varphi dl$, а взаимный импеданс:

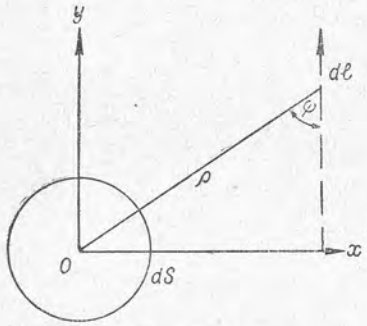


Рис. 10.

$$Z(t)=-\frac{E_\varphi}{I_0}dl. \qquad (8.24)$$

Так как

$$E_\varphi=\frac{\partial f}{\partial\varrho}, \qquad (8.25)$$

то, вычисляя производную по ϱ выражения (8.23), получим

$$E_\varphi=\frac{2M}{\varrho^4\sigma_1}\Bigg(\Bigg\{\left[3\frac{\varrho\sqrt{\sigma_1}}{2\sqrt{t}}+2\left(\frac{\varrho\sqrt{\sigma_1}}{2\sqrt{t}}\right)^3\right]erf'\left(\frac{\varrho\sqrt{\sigma_1}}{2\sqrt{t}}\right)-$$

$$-3erf\left(\frac{\varrho\sqrt{\sigma_1}}{2\sqrt{t}}\right)\Bigg\}-\frac{\Delta\sigma_1}{\sigma_1}\Bigg\{-3\frac{1-4\left(\frac{2d}{\varrho}\right)^2}{\left[1+\left(\frac{2d}{\varrho}\right)^2\right]^{\frac{7}{2}}}erf\left(\frac{r\sqrt{\sigma_1}}{2\sqrt{t}}\right)+$$

$$+3\frac{1-4\left(\frac{2d}{\varrho}\right)^2}{\left[1+\left(\frac{2d}{\varrho}\right)^2\right]^3}\left(\frac{\varrho\sqrt{\sigma_1}}{2\sqrt{t}}\right)erf'\left(\frac{r\sqrt{\sigma_1}}{2\sqrt{t}}\right)+$$

$$+2\frac{1-4\left(\frac{2d}{\varrho}\right)^2}{\left[1+\left(\frac{2d}{\varrho}\right)^2\right]^2}\left(\frac{\varrho\sqrt{\sigma_1}}{2\sqrt{t}}\right)^3erf'\left(\frac{r\sqrt{\sigma_1}}{2\sqrt{t}}\right)+$$

$$+2\frac{1-\left(\frac{2d}{\varrho}\right)^2}{1+\left(\frac{2d}{\varrho}\right)^2}\left(\frac{\varrho\sqrt{\sigma_1}}{2\sqrt{t}}\right)^5erf'\left(\frac{r\sqrt{\sigma_1}}{2\sqrt{t}}\right)-$$

$$-8\frac{2d}{\varrho}\frac{\varrho^2\sigma_1}{4t}K_{00}-2\frac{2d}{\varrho}\frac{1-2\left(\frac{2d}{\varrho}\right)^2+2\left(\frac{2d}{\varrho}\right)^4}{\left[1+\left(\frac{2d}{\varrho}\right)^2\right]^2}\left(\frac{\varrho^2\sigma_1}{4t}\right)^2K_{00}+$$

$$+4\frac{\left(\frac{2d}{\varrho}\right)^3}{1+\left(\frac{2d}{\varrho}\right)^2}\left(\frac{\varrho^2\sigma_1}{4t}\right)K_{01}+2\frac{2d}{\varrho}\frac{5+2\left(\frac{2d}{\varrho}\right)^2+2\left(\frac{2d}{\varrho}\right)^4}{\left[\frac{1}{2}+\left(\frac{2d}{\varrho}\right)^2\right]\left[1+\left(\frac{2d}{\varrho}\right)^2\right]^2}\times$$

$$\times\frac{\varrho^2\sigma_1}{4t}K_{01}+2\frac{2d}{\varrho}\frac{4+\left(\frac{2d}{\varrho}\right)^2+2\left(\frac{2d}{\varrho}\right)^4}{\left[1+\left(\frac{2d}{\varrho}\right)^2\right]^2}\left(\frac{\varrho^2\sigma_1}{4t}\right)^2K_{01}-$$

$$-4\frac{\left(\frac{2d}{\varrho}\right)^3}{1+\left(\frac{2d}{\varrho}\right)^2}\left(\frac{\varrho^2\sigma_1}{4t}\right)^3K_{01}+$$

$$+\left(\frac{2d}{\varrho}\right)^3\frac{3-12\left(\frac{2d}{\varrho}\right)^2}{\left[\frac{1}{2}+\left(\frac{2d}{\varrho}\right)^2\right]\left[1+\left(\frac{2d}{\varrho}\right)^2\right]^2}K_{10}\Bigg\}\Bigg). \qquad (8.26)$$

Подставив выражение (8.26) в (8.24), получим искомое выражение для взаимного импеданса $Z(t)$ (рис. 11). По оси абсцисс отложено отношение $\frac{4t}{\varrho^2\sigma_1}$, а по оси ординат — выражение $ZI_0\ \frac{\varrho^4\sigma_1}{2Mdl}=\hat{Z}$, параметры кривых: $\frac{d}{\varrho}=\frac{1}{4}$; $\frac{\Delta\sigma_1}{\sigma_1}=\frac{\sigma_2}{\sigma_1}-1=0,\ \pm0{,}1,\ \pm0{,}2,\ \pm0{,}3,\ \pm0{,}4,\ \pm0{,}5$.

4. Взаимный импеданс двух рамок.

$$Z=\frac{v}{I_0}. \qquad (8.27)$$

Наводимая в малой рамке э. д. с. $v=-\frac{\partial H_z dS_1}{\partial t}$. Величину H_z определим из уравнения Максвелла:

$$-\frac{\partial H_z}{\partial t} = \mathrm{rot}_z\, \boldsymbol{E}.$$

Так как вектор $\boldsymbol{E}$ имеет лишь φ-составляющую, предыдущее выражение может быть переписано:

$$-\frac{\partial H_z}{\partial t} = \frac{1}{\varrho} E_\varphi + \frac{\partial E_\varphi}{\partial \varrho}.$$

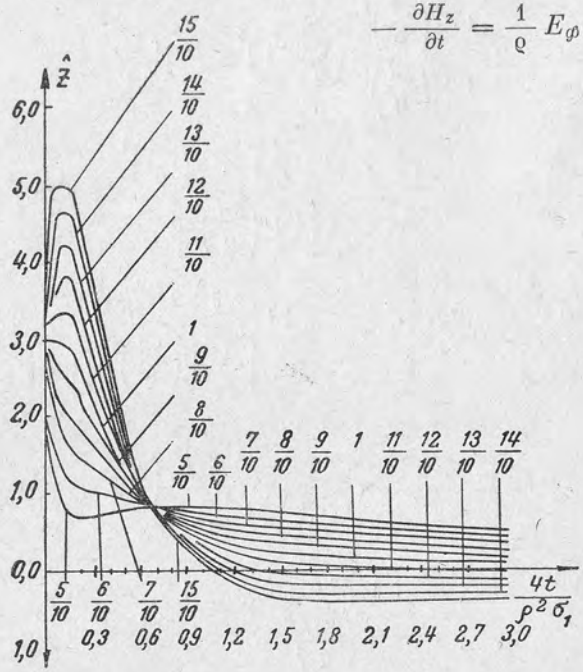


Рис. 11. График и $\hat{Z}$ для системы рамка — горизонтальный провод $\left(\text{параметры графиков } \frac{\sigma_2}{\sigma_1}\right)$.

Подставив сюда значение E_φ из (8.26) и выполняя дифференцирование по ϱ, получим

$$v = \frac{2MdS_1}{\varrho^5\sigma_1}\left(-\left[9erf\left(\frac{\varrho\sqrt{\sigma_1}}{2\sqrt{t}}\right) - 9\frac{\varrho\sqrt{\sigma_1}}{2\sqrt{t}}\, erf'\left(\frac{\varrho\sqrt{\sigma_1}}{2\sqrt{t}}\right) - \right.\right.$$

$$\left. - 6\left(\frac{\varrho\sqrt{\sigma_1}}{2\sqrt{t}}\right)^3 erf'\left(\frac{\varrho\sqrt{\sigma_1}}{2\sqrt{t}}\right) - 4\left(\frac{\varrho\sqrt{\sigma_1}}{2\sqrt{t}}\right)^5 erf'\left(\frac{\varrho\sqrt{\sigma_1}}{2\sqrt{t}}\right)\right] +$$

$$+ \frac{\Delta\sigma_1}{\sigma_1}\left\{3\frac{3-24\left(\frac{2d}{\varrho}\right)^2+8\left(\frac{2d}{\varrho}\right)^4}{\left[1+\left(\frac{2d}{\varrho}\right)^2\right]^{\frac{9}{2}}}\, erf\left(\frac{r\sqrt{\sigma_1}}{2\sqrt{t}}\right) - \right.$$

$$- 3\frac{3-24\left(\frac{2d}{\varrho}\right)^2+4\left(\frac{2d}{\varrho}\right)^8}{\left[1+\left(\frac{2d}{\varrho}\right)^2\right]^4}\frac{\varrho\sqrt{\sigma_1}}{2\sqrt{t}}\, erf'\left(\frac{r\sqrt{\sigma_1}}{2\sqrt{t}}\right) -$$

$$- 2\frac{3-24\left(\frac{2d}{\varrho}\right)^2+8\left(\frac{2d}{\varrho}\right)^4}{\left[1+\left(\frac{2d}{\varrho}\right)^2\right]^3}\left(\frac{\varrho\sqrt{\sigma_1}}{2\sqrt{t}}\right)^3 erf'\left(\frac{r\sqrt{\sigma_1}}{2\sqrt{t}}\right) +$$

$$+ 4\left(\frac{2d}{\varrho}\right)^2\frac{6-\left(\frac{2d}{\varrho}\right)^2}{\left[1+\left(\frac{2d}{\varrho}\right)^2\right]^2}\left(\frac{\varrho\sqrt{\sigma_1}}{2\sqrt{t}}\right)^5 erf'\left(\frac{r\sqrt{\sigma_1}}{2\sqrt{t}}\right) -$$

$$- 4\frac{1-\left(\frac{2d}{\varrho}\right)^2}{1+\left(\frac{2d}{\varrho}\right)^2}\left(\frac{\varrho\sqrt{\sigma_1}}{2\sqrt{t}}\right)^7 erf'\left(\frac{r\sqrt{\sigma_1}}{2\sqrt{t}}\right) + 16\frac{2d}{\varrho}\frac{\varrho^2\sigma_1}{4t}K_{00} +$$

$$+ 2\frac{2d}{\varrho}\frac{14+\left(\frac{2d}{\varrho}\right)^2+26\left(\frac{2d}{\varrho}\right)^4+4\left(\frac{2d}{\varrho}\right)^6}{\left[1+\left(\frac{2d}{\varrho}\right)^2\right]^3}\left(\frac{\varrho^2\sigma_1}{4t}\right)^2 K_{00} +$$

$$+ 2\frac{2d}{\varrho}\frac{5-\left(\frac{2d}{\varrho}\right)^2+8\left(\frac{2d}{\varrho}\right)^4}{\left[1+\left(\frac{2d}{\varrho}\right)^2\right]^2}\left(\frac{\varrho^2\sigma_1}{4t}\right)^3 K_{00} - 8\left(\frac{2d}{\varrho}\right)^3\frac{1}{1+\left(\frac{2d}{\varrho}\right)^2}\left(\frac{\varrho^2\sigma_1}{4t}\right)^4 K_{00} +$$

$$+ 2\left(\frac{2d}{\varrho}\right)^3\frac{33+2\left(\frac{2d}{\varrho}\right)^2+4\left(\frac{2d}{\varrho}\right)^4}{\left[\frac{1}{2}+\left(\frac{2d}{\varrho}\right)^2\right]\left[1+\left(\frac{2d}{\varrho}\right)^2\right]^3}\frac{\varrho^2\sigma_1}{4t}K_{01} -$$

$$- 2\frac{2d}{\varrho}\frac{22+5\left(\frac{2d}{\varrho}\right)^2-2\left(\frac{2d}{\varrho}\right)^4+6\left(\frac{2d}{\varrho}\right)^6+6\left(\frac{2d}{\varrho}\right)^8}{\left[1+\left(\frac{2d}{\varrho}\right)^2\right]^3}\left(\frac{\varrho^2\sigma_1}{4t}\right)^2 K_{01} -$$

$$- 2\frac{2d}{\varrho}\frac{5+11\left(\frac{2d}{\varrho}\right)^2+20\left(\frac{2d}{\varrho}\right)^4}{\left[1+\left(\frac{2d}{\varrho}\right)^2\right]^2}\left(\frac{\varrho^2\sigma_1}{4t}\right)K_{01} + 8\left(\frac{2d}{\varrho}\right)^3\frac{1}{1+\left(\frac{2d}{\varrho}\right)^2}\left(\frac{\varrho^2\sigma_1}{4t}\right)^4 K_{01} +$$

$$\left.\left. + 3\left(\frac{2d}{\varrho}\right)^3\frac{5+24\left(\frac{2d}{\varrho}\right)^2}{\left[\frac{1}{2}+\left(\frac{2d}{\varrho}\right)^2\right]\left[1+\left(\frac{2d}{\varrho}\right)^2\right]^3}K_{10}\right\}\right). \qquad (8.28)$$

Подставив (8. 28) в (8. 27), получим выражение для импеданса двух рамок. Временная зависимость $Z(t)$ показана на рис. 12. По оси абсцисс нанесено отношение $\frac{4t}{\varrho^2\sigma_1}$, а по оси ординат—выра-

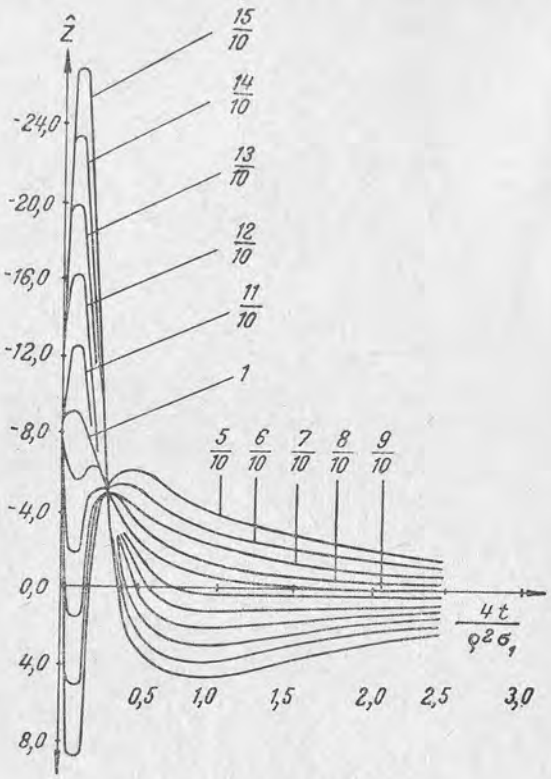


Рис. 12. График и $\hat{Z}$ для случая двух рамок $\left(\text{параметры графиков } \frac{\sigma_2}{\sigma_1}\right)$.

жение $ZI_0\frac{\varrho^5\sigma_1}{2MdS}=\hat{Z}$. Параметры кривых те же, что и в предыдущем случае, изображенном на рис. 11.

Интеграл в выражениях (8. 26), (8. 28) вычислен с помощью численного интегрирования.

Глава IV

БЕСКОНЕЧНО ДЛИННЫЙ КАБЕЛЬ И ГОРИЗОНТАЛЬНО-СЛОИСТЫЕ СРЕДЫ НАД ЗЕМЛЕЙ

В главе рассматриваются электромагнитные поля, создаваемые бесконечно длинным прямолинейным током при наличии горизонтально-слоистого полупространства.

Основоположниками геофизических расчетов в этой области были отечественные ученые Фок и Бурсиан (1926, 1933, 1934, 1936). Ими исследованы случаи бесконечно длинного и конечного кабелей над слоистыми средами и однородным полупространством. Для однородного полупространства расчеты доведены до числа (Бурсиан, 1934, 1936, Лепешинский, 1933). Основные решения для кабельного источника разбираются в книге Заборовского (1960). В последнее время теория Фока и Бурсиана для случая слоистых сред анализировалась Гельфандом (1955) применительно к методу интенсивности. Дмитриев (1959) изучил решение Бурсиана в применении к аэроэлектроразведке методом бесконечно длинного кабеля. Электрическую компоненту устанавливающегося поля бесконечно длинного и конечного заземленного кабелей над однородным полупространством и тонким слоем исследовал Шейнманн (1947).

За рубежом первые расчеты электромагнитных полей токонесущих линий в основном были выполнены компанией Белла для нужд техники связи. Так, Карсон (Carson, 1926) рассмотрел взаимный импеданс бесконечно длинных линий, расположенных выше поверхности раздела земля — воздух. Грэй (Gray, 1933, 1934) вычислил импеданс линий, считая, что сопротивление полупространства убывает в зависимости от глубины по экспоненциальному закону. Основные результаты иностранных авторов, исследовавших поле кабеля, приводятся в монографии Санде (Sunde, 1949), которая посвящена разбору физических процессов, происходящих в телефонных линиях.

В последнее время импеданс заземленного конечного кабеля, расположенного на однородном полупространстве, и его самоиндукция были вычислены Эверхольтом (Överholt, 1960), который воспользовался результатами Вольфа (Wolf, 1942).

Поле становления для конечного кабеля над однородным полупространством изучал Уэйт (1951а).

Глава построена по материалам работ Прайса, Уэйта и Беллуиджи. Прайс (1950) приводит решение для бесконечно длинного кабеля над однородным полупространством с помощью развитой им теории (гл. 1).

Уэйт (1953в) дает общее решение для поля кабеля над слоистой средой. Проводится анализ для случая однородного полупространства, тонкого слоя и произвольного числа слоев.

Беллуиджи и Уэйт развивают решение Эванса (Evans, 1930) для случая двухслойной среды. Уэйт (1952) проводит расчеты для двухслойной среды, когда основание является идеальным проводником. Беллуиджи (Belluigi, 1955, 1956) приводит асимптотические выражения для двухслойной и трехслойной среды.

§ 1. Однородное полупространство
(Прайс, 1950)

1. Вертикальное и горизонтальное магнитное поле. Предположим, что первичное поле вызвано периодическим током с $I_0 e^{i\omega t}$ электростатических единиц, текущим в направлении оси Ox вдоль линии $y=0$, $z=h$. Магнитный потенциал Ω_0 такого тока равен $2I_0 e^{i\omega t}\operatorname{arctg}\frac{h-z}{y}$. По интегральной теореме Фурье эту функцию можно представить следующим образом:

$$\Omega_0 = -2\int_0^\infty I_0 e^{i\omega t + z\lambda - h\lambda}\sin y\lambda\,\frac{d\lambda}{\lambda}, \qquad (z \leqslant h). \tag{1.1}$$

Сравнивая последнее выражение с (I, 5.1) найдем, что $P(x, y) = \sin y\lambda$ и $A = 2I_0 e^{-h\lambda}\frac{d\lambda}{\lambda}$. Поэтому, пользуясь формулой (I,5.9), запишем для потенциала Ω_1 вторичного поля:

$$\Omega_1 = -2\int_0^\infty \frac{u-\mu\lambda}{u+\mu\lambda} I_0 e^{i\omega t - z\lambda - h\lambda}\sin y\lambda\,\frac{d\lambda}{\lambda}. \tag{1.2}$$

Согласно (I, 5.11), плотность индуцированного тока

$$i_x = -2\int_0^\infty \frac{2\sigma\mu i\omega}{c(u+\mu\lambda)} I_0 e^{i\omega t - h\lambda + zu}\cos y\lambda\, d\lambda, \tag{1.3}$$

причем $i_y = i_z = 0$. Компоненты вторичного поля в воздухе

$$H_x = 0,$$

$$H_y = -\frac{\partial\Omega_1}{\partial y} = 2I_0\int_0^\infty \frac{u-\mu\lambda}{u+\mu\lambda} e^{i\omega t - z\lambda - h\lambda}\cos y\lambda\, d\lambda,$$

$$H_z = -\frac{\partial\Omega_1}{\partial z} = -2I_0\int_0^\infty \frac{u-\mu\lambda}{u+\mu\lambda} e^{i\omega t - z\lambda - h\lambda}\sin y\lambda\, d\lambda.$$

В этих выражениях u — комплексное число и в подынтегральном выражении берется вещественная часть. Можно записать, что

$$H_y + iH_z = 2\int_0^\infty Re\left[\frac{u-\mu\lambda}{u+\mu\lambda} I_0 e^{i\omega t}\right] e^{-(h+z+iy)\lambda}\, d\lambda. \tag{1.4}$$

Отметим, что для первичного поля линейного тока имеет место простое выражение:

$$H_{\text{п}\,y} + iH_{\text{п}\,z} = \frac{2I_0\cos\omega t}{h-z-iy}.$$

Если взять вещественное значение для I_0, то индуцирующий ток определится как $I_0\cos\omega t$. Приняв, что магнитная проницаемость μ равна единице, найдем

$$Re\left[\frac{u-\mu\lambda}{u+\mu\lambda} I_0 e^{i\omega t}\right] = I_0 Re\left[\left(1 - \frac{2i\lambda^2}{\varkappa^2} + \frac{2i\lambda u}{\varkappa^2}\right)e^{i\omega t}\right] =$$

$$= I_0\cos\omega t\left\{1 - \lambda^*\sqrt{2}\left[(1+\lambda^{*4})^{\frac{1}{2}} - \lambda^{*2}\right]^{\frac{1}{2}}\right\} +$$

$$+ I_0\sin\omega t\left\{2\lambda^{*2} - \lambda^*\sqrt{2}\left[(1+\lambda^{*4})^{\frac{1}{2}} + \lambda^{*2}\right]^{\frac{1}{2}}\right\},$$

где $\lambda^* = \frac{\lambda}{\varkappa}$, а $\varkappa$ определяется равенством (I, 5.6). Тогда преобразуем выражение (1.4):

$$H_y + iH_z = 2I_0\varkappa\cos\omega t\int_0^\infty \left\{1 - \lambda^*\sqrt{2}\left[(1+\lambda^{*4})^{\frac{1}{2}} - \lambda^{*2}\right]^{\frac{1}{2}}\right\}\times$$

$$\times e^{-\zeta\lambda^*}\, d\lambda^* + 2I_0\varkappa\sin\omega t\int_0^\infty \left\{2\lambda^{*2} - \lambda^*\sqrt{2}\left[(1+\lambda^{*4})^{\frac{1}{2}} +\right.\right.$$

$$\left.\left. + \lambda^{*2}\right]^{\frac{1}{2}}\right\} e^{-\zeta\lambda^*}\, d\lambda^*, \tag{1.5}$$

где

$$\zeta = \varkappa(h+z) + i\varkappa y = \xi + i\eta. \tag{1.6}$$

Асимптотические выражения интегралов (1. 5) можно найти, разложив коэффициенты при экспоненциальных множителях в каждом из подынтегральных выражений по возрастающим степеням λ^* и последовательно интегрируя каждый член. В результате получим, что

$$H_y + iH_z = 2I_0\varkappa\cos\omega t\left[\zeta^{-1} - \sqrt{2}(\zeta^{-2} - 3\zeta^{-4} + 15\zeta^{-6} +\right.$$

$$\left. + 315\zeta^{-8} + \ldots)\right] + 2I_0\varkappa\sin\omega t\left[4\zeta^{-3} -\right.$$

$$\left. - \sqrt{2}(\zeta^{-2} + 3\zeta^{-4} + 15\zeta^{-6} - 315\zeta^{-8} + \ldots)\right]. \tag{1.7}$$

Если σ, а следовательно, и $\varkappa$ стремятся к бесконечности, то выражение $H_y + iH_z$ стремится к $\frac{2I_0\cos\omega t}{h+z+iy}$. Иными словами, вторичное поле равно полю тока, который равен и противоположно направлен по отношению к первичному току и течет вдоль прямой $y=0$.

Полученные выше выражения верны с точностью до трех значащих цифр при $|\zeta|$ несколько больше 6. Когда $|\zeta| < 6$, что встречается в области средних значений σ и небольших величин

Таблица 1

Значения Y_1, Y_2, Z_1, Z_2

	ξ \ η	0	0,5	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0	10,0
Y_1	0	0,471	0,452	0,405	0,291	0,195	0,111	0,065	0,0146
Y_2		−0,471	−0,298	−0,169	−0,021	0,070	0,082	0,051	0,0137
Z_1		0	−0,092	−0,164	−0,239	−0,271	−0,250	−0,200	−0,1000
Z_2		0	0,197	0,235	0,189	0,111	0,062	0,032	0,0040
Y_1	0,5	0,401	0,383	0,348	0,269	0,194	0,125	0,081	0,0196
Y_2		−0,250	−0,213	−0,149	−0,046	0,026	0,038	0,036	0,0131
Z_1		0	−0,070	−0,123	−0,189	−0,221	−0,209	−0,185	−0,0983
Z_2		0	0,105	0,145	0,136	0,103	0,068	0,038	0,0053
Y_1	1,0	0,334	0,327	0,308	0,249	0,195	0,136	0,094	0,0240
Y_2		−0,176	−0,161	−0,128	−0,052	−0,004	0,018	0,028	0,0123
Z_1		0	−0,048	−0,092	−0,143	−0,175	−0,175	−0,166	−0,0962
Z_2		0	0,053	0,093	0,111	0,093	0,066	0,044	0,0064
Y_1	2,0	0,250	0,249	0,245	0,211	0,171	0,137	0,104	0,0320
Y_2		−0,095	−0,093	−0,089	−0,060	−0,033	−0,001	0,011	0,0102
Z_1		0	−0,029	−0,058	−0,103	−0,126	−0,132	−0,133	−0,0906
Z_2		0	0,024	0,040	0,057	0,063	0,055	0,040	0,0081
Y_1	3,0	0,202	0,200	0,196	0,180	0,152	0,129	0,108	0,0387
Y_2		−0,064	−0,061	−0,059	−0,032	−0,010	−0,008	0,003	0,0078
Z_1		0	−0,019	−0,039	−0,075	−0,092	−0,102	−0,108	−0,0843
Z_2		0	0,010	0,020	0,031	0,038	0,041	0,034	0,0090
Y_1	4,0	0,170	0,168	0,165	0,157	0,140	0,121	0,103	0,0433
Y_2		−0,048	−0,047	−0,042	−0,029	−0,018	−0,010	−0,004	0,0059
Z_1		0	−0,015	−0,028	−0,053	−0,067	−0,080	−0,087	−0,0775
Z_2		0	0,006	0,012	0,024	0,027	0,030	0,026	0,0094
Y_1	5,0	0,148	0,148	0,146	0,141	0,129	0,112	0,098	0,0467
Y_2		−0,032	−0,032	−0,030	−0,023	−0,017	−0,012	−0,006	0,0041
Z_1		0	−0,011	−0,020	−0,036	−0,050	−0,065	−0,072	−0,0707
Z_2		0	0,005	0,009	0,017	0,020	0,021	0,020	0,0093
Y_1	10,0	0,0863	0,0862	0,0857	0,0839	0,0811	0,0774	0,0731	0,0499
Y_2		−0,0106	−0,0105	−0,0103	−0,0097	−0,0087	−0,0075	−0,0062	−0,0009
Z_1		0	−0,0037	−0,0073	−0,0143	−0,0207	−0,0264	−0,0312	−0,0429
Z_2		0	0,0008	0,0017	0,0034	0,0048	0,0058	0,0065	0,0061

$h + z$ и y, интегралы вычисляются методами численного интегрирования. В силу равенства (1. 6) формулу (1. 5) можно записать следующим образом:

$$H_y = 2I_0 \varkappa [Y_1(\xi, \eta) \cos \omega t + Y_2(\xi, \eta) \sin \omega t], \tag{1.8}$$

$$H_z = 2I_0 \varkappa [Z_1(\xi, \eta) \cos \omega t + Z_2(\xi, \eta) \sin \omega t], \tag{1.9}$$

где

$$Y_1(\xi, \eta) = \int_0^\infty \{1 - \lambda^* \sqrt{2} [(1 + \lambda^{*4})^{\frac{1}{2}} - \lambda^{*2}]^{\frac{1}{2}}\} e^{-\xi\lambda^*} \times \times \cos \eta\lambda^* d\lambda^*, \tag{1.10}$$

$$Y_2(\xi, \eta) = \int_0^\infty \{2\lambda^{*2} - \lambda^* \sqrt{2} [(1 + \lambda^{*4})^{\frac{1}{2}} + \lambda^{*2}]^{\frac{1}{2}}\} e^{-\xi\lambda^*} \times \times \cos \eta\lambda^* d\lambda. \tag{1.11}$$

Выражения для $Z_1(\xi, \eta)$ и $Z_2(\xi, \eta)$ отличаются от интегралов (1. 10) и (1. 11) тем, что в них $\cos \eta\lambda^*$ заменен на $\sin \eta\lambda^*$. Значения функций Y_1, Y_2, Z_1 и Z_2 при $0 \leqslant \xi \leqslant 10$ и $0 \leqslant \eta \leqslant 10$ приведены в табл. 1. Для величин $|\xi + i\eta| < 6$ интегралы, определяющие эти функции, вычислены методом численного интегрирования в области $0 \leqslant \lambda^* \leqslant 10$. Ординаты были вычислены с точностью до пятой значащей цифры. Шаг интегрирования изменялся в зависимости от λ^* и равен 0,1 для $0 \leqslant \lambda^* \leqslant 1$; 0,25 для $1 \leqslant \lambda^* \leqslant 2$; 0,5 для $2 \leqslant \lambda^* \leqslant 5$; 1 для $5 \leqslant \lambda^* \leqslant 10$. Расчеты выполнены по формуле Симпсона, результат округлен до трех цифр. При больших λ^* множители в фигурных скобках под знаком интеграла в (1. 10) и (1. 11) стремятся к $\frac{1}{8\lambda^{*4}}$ и $-\frac{1}{4\lambda^{*2}}$. Это позволяет вычислить остаточный член. Так, для остаточного члена R функции Y_1, найдем:

$$R = \int_{10}^\infty \frac{1}{8\lambda^{*4}} d\lambda^* = 0{,}00004.$$

Следовательно, величина остаточного члена пренебрежимо мала по сравнению со значением интеграла в интервале от 0 до 10, где он равен 0,471.

Для $|\xi + i\eta| \geqslant 5$, функции Y_1 Y_2, Z_1 и Z_2 подсчитаны с помощью асимптотического разложения (1. 7), которое дает ошибку в пределах третьей значащей цифры при $|\xi + i\eta| = 5$ и в пределах четвертой значащей цифры при $|\xi + i\eta| = 10$. В области $|\xi + i\eta| \approx 5$ расчеты велись обоими методами и совпали с точностью до 1—2%. Можно полагать, что цифры, приведенные в таблице, точны до третьего знака, за исключением области $|\xi + i\eta| \leqslant 2$, где можно взять под сомнение 2 или 3 единицы последнего знака.

Для значений $|\xi + i\eta| > 10$ функции Y_1, Y_2, Z_1, Z_2 легко вычисляются из ряда (1. 7).

Графики функций Y_1, Y_2, Z_1, Z_2 в зависимости от η для разных значений ξ приведены на рис. 1 и 2. Так как $\xi = (h + z) \times \times \sqrt{4\pi\sigma\omega}$ и $\eta = y\sqrt{4\pi\sigma\omega}$, можно считать, что каждый график характеризует распределение компоненты вторичного поля в некоторой плоскости, параллельной поверхности среды. Например, если $\sqrt{4\pi\sigma\omega} = \frac{2}{h}$, графики для $\xi = 2$ дают распределения

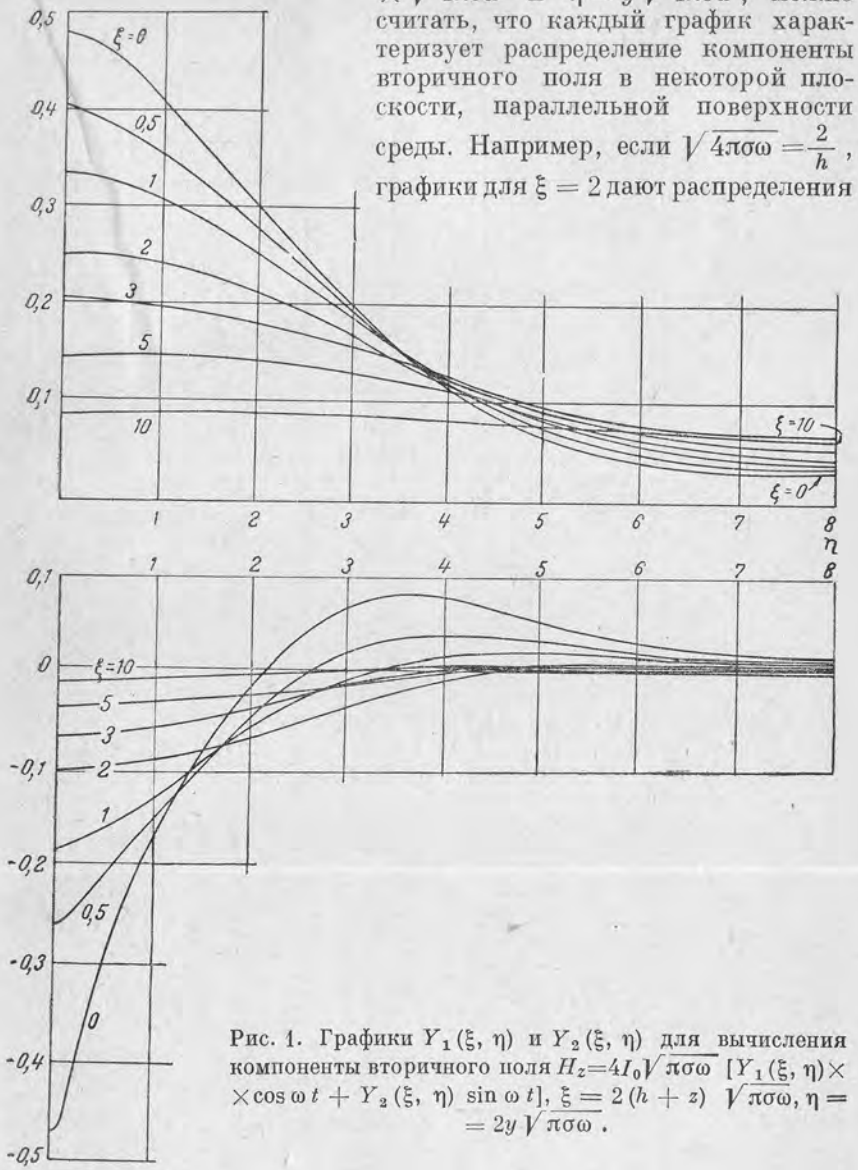


Рис. 1. Графики $Y_1(\xi, \eta)$ и $Y_2(\xi, \eta)$ для вычисления компоненты вторичного поля $H_z = 4I_0\sqrt{\pi\sigma\omega}\,[Y_1(\xi, \eta) \times \times \cos \omega t + Y_2(\xi, \eta) \sin \omega t]$, $\xi = 2(h + z)\sqrt{\pi\sigma\omega}$, $\eta = 2y\sqrt{\pi\sigma\omega}$.

поля в плоскости $z = 0$, причем $y = \frac{1}{2}\eta h$. Графики для $\xi = 3$ соответствуют плоскости $z = \frac{1}{2}h$ с тем же коэффициентом перехода для y.

2. *Распределение вторичного тока.* Формула (1.3) для индуцированного тока при $\mu = 1$ упрощается:

$$i_x = -\frac{1}{c\pi}\int_0^\infty (u-\lambda) I_0 e^{i\omega t + uz - h\lambda} \cos y\lambda \, d\lambda. \qquad (1.12)$$

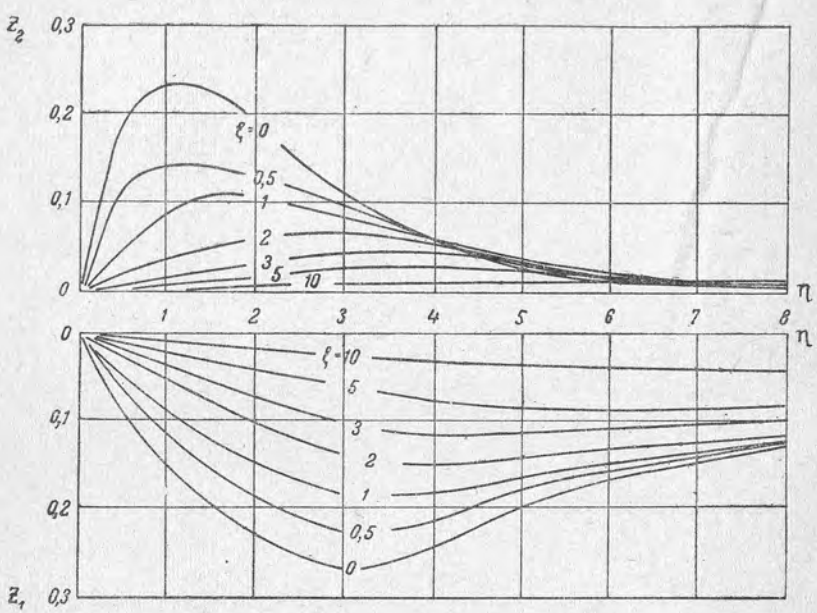


Рис. 2. Графики $Z_1(\xi, \eta)$ и $Z_2(\xi, \eta)$ для вычисления компоненты вторичного поля $H_z = 4I_0 \sqrt{\pi\sigma\omega}\,[Z_1(\xi, \eta)\cdot\cos\omega t + Z_2(\xi, \eta)\sin\omega t]$, $\xi = 2(h+z) \times \sqrt{\pi\sigma\omega}$, $\eta = 2y\sqrt{\pi\sigma\omega}$.

Подставив в выражение (1.12) значение u и разделив вещественную и мнимую части, получим

$$i_x = -\frac{I_0\varkappa^2}{c\pi\sqrt{2}}\cos\omega t\int_0^\infty \{[(1+\lambda^{*4})^{\frac{1}{2}} + \lambda^{*2}]^{\frac{1}{2}} - \lambda^*\sqrt{2}\}\, e^{-\varkappa h\lambda^*} \times$$
$$\times \cos\eta\lambda^* d\lambda^* + \frac{I_0\varkappa^2}{c\pi\sqrt{2}}\sin\omega t\int_0^\infty [(1+\lambda^{*4})^{\frac{1}{2}} - \lambda^{*2}]^{\frac{1}{2}} e^{-\varkappa h\lambda^*} \times$$
$$\times \cos\eta\lambda^* d\lambda^*, \qquad (1.13)$$

где сделана подстановка $\lambda^* = \frac{\lambda}{\varkappa}$. Интегралы в правой части равенства (1.13) можно выразить через известные уже функции $Y_1(\xi, \eta)$ и $Y_2(\xi, \eta)$. Так, если

$$J_1(\xi, \eta) = \int_0^\infty \{2\lambda^* - \sqrt{2}\,[(1+\lambda^{*4})^{\frac{1}{2}} + \lambda^{*2}]^{\frac{1}{2}}\}\, e^{-\xi\lambda^*}\cos\eta\lambda^* d\lambda^*,$$

то

$$\frac{\partial J_1}{\partial\xi} = -\int_0^\infty \{2\lambda^{*2} - \lambda^*\sqrt{2}[(1+\lambda^{*4})^{\frac{1}{2}} + \lambda^{*2}]^{\frac{1}{2}}\}\, e^{-\xi\lambda^*} \times$$
$$\times \cos\eta\lambda^* d\lambda^* = -Y_2(\xi, \eta). \qquad (1.14)$$

Отсюда

$$J_1(\xi, \eta) = \int_\xi^\infty Y_2(\xi, \eta)\, d\xi,$$

поскольку $J_1(\xi, \eta) \to 0$, когда $\xi \to \infty$. Введем еще один интеграл

$$J_2(\xi, \eta) = \int_0^\infty \sqrt{2}\,[(1+\lambda^{*4})^{\frac{1}{2}} - \lambda^{*2}]^{\frac{1}{2}} e^{-\xi\lambda^*}\cos\eta\lambda\, d\lambda,$$

для которого

$$\frac{\partial J_2}{\partial\xi} = -\int_0^\infty \lambda^*\sqrt{2}\,[(1+\lambda^{*4})^{\frac{1}{2}} - \lambda^{*2}]^{\frac{1}{2}} e^{-\xi\lambda^*}\cos\eta\lambda^* d\lambda^* =$$
$$= Y_1(\xi, \eta) - \frac{\xi}{\xi^2+\eta^2}$$

и поэтому

$$J_2(\xi, \eta) = \int_\xi^\infty \left[\frac{\xi}{\xi^2+\eta^2} - Y_1(\xi, \eta)\right] d\xi. \qquad (1.15)$$

Легко показать, что этот интеграл сходится, заметив, что $Y_1(\xi, \eta)$ есть вещественная часть соответствующего интеграла в (1.5). Кроме того,

$$Y_1(\xi, \eta) \to \frac{\xi}{\xi^2+\eta^2} \text{ при } |\xi + i\eta| \to \infty. \qquad (1.16)$$

Тогда выражение (1.3) для плотности индуцированного тока на поверхности проводящего полупространства можно записать следующим образом:

$$i_x = \frac{I_0\varkappa^2}{2\pi c}[J_1(\varkappa h, \varkappa y)\cos\omega t + J_2(\varkappa h, \varkappa y)\sin\omega t]. \qquad (1.17)$$

Для определения плотности тока ниже поверхности раздела необходимо вычислить интеграл (1.12), который является функцией трех переменных: $\varkappa h$, $\varkappa y$ и $\varkappa z$.

3. *Апериодический линейный ток, текущий параллельно поверхности раздела.* Для потенциала магнитного поля линейного тока силы $I(t)$, текущего вдоль линии $y = 0$, $z = h$ в области $z \leqslant h$, как показано в начале параграфа, имеет место следующее выражение:

$$\Omega_0 = -2\int_0^\infty I(t)\, e^{z\lambda - h\lambda}\sin y\lambda\frac{d\lambda}{\lambda}, \qquad (1.18)$$

где $I(t)$ — периодическая функция от t. Тогда потенциал соответствующего вторичного поля

$$\Omega_1 = -2\int_0^\infty \frac{u-\mu\lambda}{u+\mu\lambda} I(t)\, e^{-z\lambda - h\lambda} \sin y\lambda \frac{d\lambda}{\lambda}, \qquad (1.19)$$

и для компонент вторичного поля в воздухе можно записать:

$$H_y + iH_z = 2\int_0^\infty \frac{u-\mu\lambda}{u+\mu\lambda} I(t)\, e^{-(h+z+iy)\lambda}\, d\lambda. \qquad (1.20)$$

Чтобы вычислить действие тока, внезапно возрастающего в линии до значения I_0, запишем, что

$$I(t) = I_0 u(t). \qquad (1.21)$$

Положив $\mu = 1$ и воспользовавшись формулой (I, 5. 36), получим

$$H_y + iH_z = 8I_0 \sqrt{\frac{\sigma}{t}} \int_0^\infty D_{-3}(v) \times$$

$$\times\, e^{\sqrt{\frac{2\pi\sigma}{t}}(h+z+iy)\, v - \frac{1}{4} v^2}\, dv. \qquad (1.22)$$

Если в (1. 22) подставить степенной ряд (I, 5. 35) для $e^{-\frac{v^2}{4}} \times$ $\times\, D_{-3}(v)$, получим асимптотическое разложение для $H_y + iH_z$, справедливое при больших значениях $(h+z+iy)\, t^{-\frac{1}{2}}$. Это дает удобный метод расчета при малых значениях t. В случае больших значений t появляется необходимость использовать асимптотическое разложение (I, 5. 38).

§ 2. Двухслойная среда

1. Подстилающая среда обладает свойствами идеального проводника (Уэйт, 1952). Система прямоугольных координат (x, y, z) ориентируется так, что провод совпадает с осью Oz. Поверхность земли совпадает с плоскостью $y = 0$. Слой, ограниченный плоскостями $y = 0$ и $y = -d$, имеет электропроводность σ и магнитную проницаемость μ, область $y < -d$ имеет электропроводность σ_1 и магнитную проницаемость μ. Будем считать, что нет разницы в магнитных свойствах обеих сред. Токи смещения в воздухе и в обоих слоях считаются незначительными. Эванс * (1930) дал общее интегральное решение этой задачи, на основании которого для

* Решение Эванса (1930) является частным случаем решения Бурсиана (1934, 1936), записанным в несколько иной форме. Более подробно о решении Эванса говорится в начале пункта 2 этого параграфа. *А. В., Г. Ф.*

электрического поля E_z на поверхности земли ($y = 0$) можно записать:

$$E_z = \frac{i\mu\omega I}{\pi}\int_0^\infty \frac{[(u+u_1)+(u-u_1)\, e^{-2du}]\cos x\lambda}{(u+u_1)(\lambda+u)+(u-u_1)(\lambda-u_1)\, e^{-2du}}\, d\lambda, \qquad (2.1$$

где $u = (\lambda^2 + i\sigma\mu\omega)^{\frac{1}{2}}$ и $u_1 = (\lambda^2 + i\sigma_1\mu\omega)^{\frac{1}{2}}$. Все величины выражаются в системе единиц MKS. Сила тока определяется действительной частью выражения $Ie^{i\omega t}$. Вещественное электрическое поле связывается с вещественной частью выражения $E_z e^{i\omega t}$. Рассмотрим частный случай общего решения, когда электропроводность нижней среды $\sigma_1 = \infty$. Тогда электрическое поле

$$E_z = \frac{i\mu\omega I}{\pi}\int_0^\infty \frac{(1-e^{-2du})\cos x\lambda}{(\lambda+u)-(\lambda-u)\, e^{-2du}}\, d\lambda. \qquad (2.2)$$

Выражение (2. 2) запишем в виде двух членов:

$$E_z = \frac{i\mu\omega I}{\pi}\,[\hat{P}(x) - 2\hat{Q}(x)], \qquad (2.3)$$

где

$$\hat{P}(x) = \int_0^\infty \frac{\cos x\lambda}{\lambda+u}\, d\lambda \qquad (2.4)$$

и

$$\hat{Q}(x) = \int_0^\infty \frac{u e^{-2du}\cos x\lambda}{(\lambda+u)^2 + i\sigma\mu\omega\, e^{-2du}}\, d\lambda. \qquad (2.5)$$

Интеграл $\hat{Q}(x)$ стремится к нулю, когда d стремится к бесконечности и в выражении для E_z сохраняется только член $\hat{P}(x)$. Выразим интеграл $\hat{P}(x)$ через табулированные функции. Умножая числитель и знаменатель формулы (2. 5) на $u - \lambda$, получим

$$\hat{P}(x) = \frac{1}{k^2}\int_0^\infty [(\lambda^2 + k^2)^{\frac{1}{2}} - \lambda]\cos x\lambda\, d\lambda, \qquad (2.6)$$

где $k^2 = i\sigma\mu\omega$. Коэффициент $(\lambda^2 + k^2)^{\frac{1}{2}} - \lambda$ в подынтегральном выражении можно заменить интегралом, используя формулу, приводимую у Ватсона (1949, стр. 422), так что

$$\hat{P}(x) = \frac{1}{k}\int_0^\infty \frac{J_1(kp)}{p}\, dp \int_0^\infty e^{-p\lambda}\cos x\lambda\, d\lambda. \qquad (2.7)$$

Интегрирование по λ можно выполнить, воспользовавшись интегралом Фурье с косинусом, имеющимся у Пирса (Pierce, 1929, стр. 64):

$$\hat{P}(x) = \frac{1}{k}\int_0^\infty \frac{J_1(kp)}{p^2+x^2}\, dp. \qquad (2.8)$$

В дальнейших вычислениях применяются следующие интегралы (Ватсон, 1949, стр. 477, 422):

$$\int_0^\infty \frac{pJ_0(p\nu)}{1+p^2}\,dp = K_0(\nu), \tag{2.9}$$

$$\int_0^\infty J_1(p\nu)\,dp = \frac{1}{\nu}. \tag{2.10}$$

Дифференцируя равенство (2.9) почленно по ν, найдем

$$\int_0^\infty \frac{p^2 J_1(p\nu)}{1+p^2}\,dp = K_1(\nu). \tag{2.11}$$

С помощью формул (2.10) и (2,11) получим, что

$$\hat{P}(x) = \frac{1}{k^2x^2}\,[1 - kxK_1(kx)]. \tag{2.12}$$

Значения функции $\hat{P}(x)$ приведены в табл 2. Интеграл $Q(x)$ упрощается, если сделать подстановки:

$$\lambda = (\sigma\mu\omega)^{\frac{1}{2}}\lambda^*, \quad 2d = (\sigma\mu\omega)^{-\frac{1}{2}} d^*, \quad x = (\sigma\mu\omega)^{-\frac{1}{2}}\xi.$$

Таблица 2

$\lvert kx \rvert$	Вещественная часть $\hat{P}(x)$	Мнимая часть $\hat{P}(x)$
0,0	∞	−0,392
0,2	1,115	−0,382
0,4	0,774	−0,370
0,6	0,579	−0,351
0,8	0,449	−0,328
1,0	0,350	−0,305
1,4	0,221	−0,259
2,0	0,111	−0,197
2,4	0,067	−0,197
3,0	0,031	−0,118

Тогда

$$Q(x) = \int_0^\infty \frac{(\lambda^{*2}+i)^{\frac{1}{2}}\, e^{-d^*(\lambda^*+i)^{\frac{1}{2}}} \cos\xi\lambda^*}{[\lambda^* + (\lambda^{*2}+i)^{\frac{1}{2}}]^2 + ie^{-d^*(\lambda^{*2}+i)^{\frac{1}{2}}}}\, d\lambda^*. \tag{2.13}$$

Результаты вычислений интеграла (2.13) представлены в табл. 3.

Таблица 3

$\lvert kx \rvert = \xi$	$\hat{Q}(x)$ для $d^* = 0{,}632455$		$\hat{Q}(x)$ для $d^* = 2{,}000000$		$\hat{Q}(x)$ для $d^* = 6{,}324550$	
	Вещественная часть	Мнимая часть	Вещественная часть	Мнимая часть	Вещественная часть	Мнимая часть
0,0316238	0,2685	−0,1866	0,003855	−0,1068	0,0001071	0,003662
0,0474342	0,2681	−0,1866	0,003841	−0,1068	0,0001074	0,003662
0,0632455	0,2676	−0,1865	0,003820	−0,1068	0,0001075	0,003662
0,0790570	0,2669	−0,1864	0,003793	−0,1067	0,0001081	0,003661
0,0948635	0,2661	−0,1863	0,003761	−0,1067	0,0001085	0,003661
					0,0001087	
0,10	0,2659	−0,1862	0,003748	−0,1065	0,0001107	0,003661
0,15	0,2624	−0,1856	0,003601	−0,1062	0,0001130	0,003659
0,20	0,2578	−0,1847	0,003396	−0,1059	0,0001161	0,003656
0,25	0,2521	−0,1836	0,003135	−0,1054	0,0001203	0,003652
0,30	0,2455	−0,1823	0,002820		0,0001220	0,003648
0,316238	0,2432	−0,1819	0,002706	−0,1053		0,003647
0,474342	0,2182	−0,1763	0,001331	−0,1034	0,0001402	0,003629
0,632455	0,1913	−0,1695	−0,0004613	−0,1008	0,0001653	0,003604
0,790570	0,1653	−0,1616	−0,002561	−0,09767	0,0001966	0,003571
0,948635	0,1414	−0,1533	−0,004850	−0,09402	0,0002342	0,003531
1,0	0,1342	−0,1505	−0,005615	−0,09274	0,0002478	0,003517
1,5	0,07825	−0,1230	−0,01280	−0,7881	0,0004030	0,003339
2,0	0,04324	−0,09763	−0,01813	−0,06402	0,0005871	0,003098
2,5	0,02227	−0,07615	−0,02088	−0,05030	0,0007740	0,002803
3,0	0,009930	−0,05878	−0,02140	−0,03862	0,0009405	0,002471

В качестве примера приводится расчет, сделанный для значений $\sigma = 10^{-3}$ *мо/м*, $\mu = 4\pi \cdot 10^{-7}$ *гн/м*, $\frac{\omega}{2\pi} = 500$ *гц*, $x = 100$ *м*, $I = 0{,}78$ *а*. Комплексное электрическое поле, отнесенное к току, вычислено по табл. 2 и 3. Значения E_z для четырех глубин залегания проводящего основания даны в табл. 4. Из таблицы следует, что зоны, обладающие высокой электропроводностью, можно обнаружить на глубинах до 500 *м*.

Таблица 4

d, *м*	E_z, *мв/м*
∞	$0{,}382+i1{,}115$
1580	$0{,}384+i1{,}115$
500	$0{,}160+i1{,}112$
158	$0{,}012+i0{,}599$

2. Слой и основание имеют конечные сопротивления (*Беллуиджи, 1955, 1956*). Начало координатной системы помещается на земной поверхности, совпадающей с плоскостью $y = 0$. Кабель расположен на высоте h над поверхностью земли и параллелен оси $0z$. Ось $0y$ направлена вертикально вверх. Слой имеет мощность d. Расстояния точки измерения $P(x, y)$ от кабеля и от точки зеркального отражения источника относительно плоскости xz обозначаются через r_0 и r_1 (рис. 3). Геометрические значения преобразуются в приведенные с помощью множителя $\varkappa = c^{-1}(4\pi\omega\sigma_1)^{\frac{1}{2}}$:

$$x = \xi\varkappa^{-1}, \quad y = \eta\varkappa^{-1}, \quad r_0 = r_0^*\varkappa^{-5}, \quad r_1 = r_1^*\varkappa^{-1},$$

$$h = h^*\varkappa^{-1}, \quad d = d^*\varkappa^{-1}.$$

Все величины выражаются в системе единиц Гаусса. Электрическое поле $\boldsymbol{E}$ имеет только одну компоненту E_z, которая, как показал Эванс (1930), удовлетворяет уравнению:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial \eta^2} = i\gamma E, \tag{2.14}$$

где

$$\gamma = \begin{cases} 0 & \text{в воздухе,} \\ 1 & \text{в среде I,} \\ \frac{\sigma_2}{\sigma_1} & \text{в среде II,} \quad i = \sqrt{-1}. \end{cases}$$

Здесь, как и при дальнейшем изложении, индекс z опускается. На поверхностях раздела (воздух — верхний слой, верхний слой — подстилающая среда) тангенциальные компоненты вектора $\boldsymbol{E}$, вектора магнитной индукции $\boldsymbol{B}$ и нормальная составляющая

вектора $\boldsymbol{B}$ непрерывны. Векторы $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{B}$ стремятся к нулю на бесконечности. В окрестностях кабеля вектор $\boldsymbol{B}$ подчиняется закону Био-Савара.

Из-за большой трудоемкости численного интегрирования Эванс ограничился в своих расчетах вычислением модуля напряженности электрического поля E на поверхности земли под кабелем в зависимости от мощности верхнего проводящего слоя d, помещенного на основании с очень высоким сопротивлением. Так, при условии,

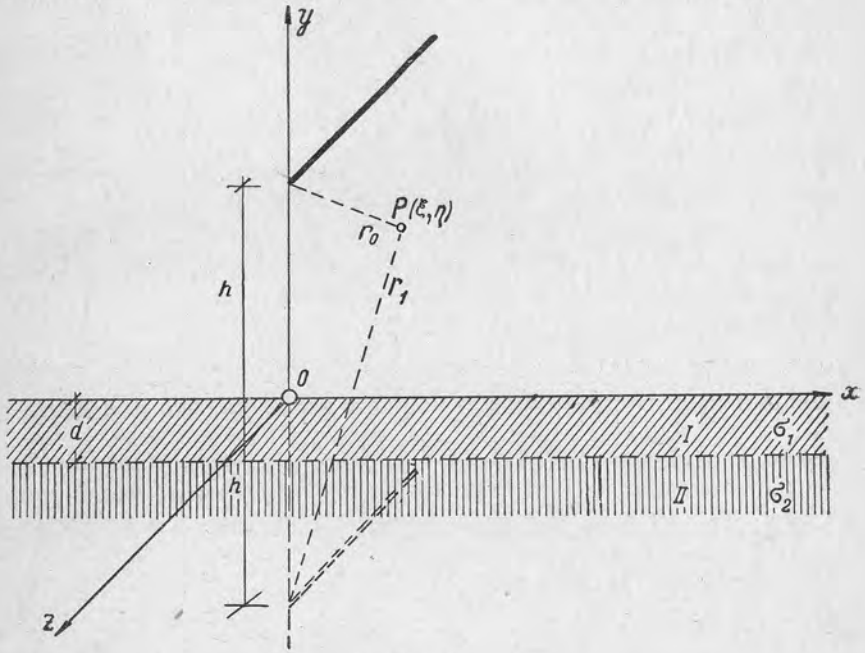


Рис. 3.

что $\omega = 2\pi f = 6{,}28 \cdot 10^3$ *рад/сек*, $\sigma_1 = 9 \cdot 10^8$ ед. CGSE, $h^* = c^{-1} h (4\pi\omega\sigma_1)^{\frac{1}{2}} = 0{,}281$, $d^* = c^{-1} d (4\pi\omega\sigma_1)^{\frac{1}{2}} = 2{,}81 \cdot 10^4$, у Эванса приводятся следующие значения $|E|$ (без множителя $4\omega I c^{-1}$):

Таблица 5

d, *см*	10	500	1000	1500	2000	∞
$\lvert E \rvert$	1,58	1,48	1,38	1,31	1,21	1,04

Напряженность электрического поля на поверхности тонкого проводящего слоя мощностью 10 *см* в 1,5 раза больше, чем на

поверхности полупространства, имеющего ту же самую электропроводность. С увеличением толщины проводящего слоя напряженность электрического поля уменьшается. Начиная с определенной толщины слоя, градиент этих изменений равен нулю. Следовательно, тонкий слой имеет бóльшие возможности для обнаружения по сравнению со слоем значительной мощности. Такая же картина наблюдается для источников типа электрических диполей (Беллуиджи, 1955а).

Удобно рассмотреть вместо E характеристические функции $c^{-1}\, 2i\, \omega\Phi_j$, где $j = 0$ для воздуха, 1 — для среды I и 2 — для среды II. Введем обозначения:

$$\eta = h^* + \eta', \quad \alpha = (\lambda^2 + i)^{\frac{1}{2}}, \quad \theta = (\lambda^2 + i\gamma)^{\frac{1}{2}},$$

где λ — вещественный положительный параметр. Тогда решение Эванса можно представить следующим образом:

$$\frac{\Phi_0}{I} = \ln\frac{r_0^*}{r_1^*} + 2\int_0^\infty f(\lambda)\, e^{-\eta\lambda}\cos(\xi\lambda)\, d\lambda,$$

где

$$f(\lambda) = \frac{(\theta-\alpha)\, e^{-\alpha d^*} - (\theta+\alpha)\, e^{\alpha d^*}}{(\theta-\alpha)(\alpha-\lambda)\, e^{-\alpha d^*} + (\theta+\alpha)(\alpha+\lambda)\, e^{\alpha d^*}}. \tag{2.15}$$

Из теории асимптотических разложений известно, что для достаточно больших значений $(\eta^2 + \xi^2)^{\frac{1}{2}}$ можно получить приближенное выражение для интеграла (2.15), разлагая $f(\lambda)$ в степенной ряд вблизи от $\lambda = 0$:

$$2\int_0^\infty f(\lambda)\, e^{-\eta\lambda}\cos(\xi\lambda)\, d\lambda \approx \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(0)\, \varphi_n, \tag{2.16}$$

где

$$\varphi_n = \frac{2}{n!}\int_0^\infty \lambda^n e^{-\eta\lambda}\cos(\xi\lambda)\, d\lambda =$$

$$= \frac{1}{n!}\int_0^\infty \lambda^n e^{-(\eta+i\xi)\lambda}\, d\lambda + \frac{1}{n!}\int_0^\infty \lambda^n e^{-(\eta-i\xi)\lambda}\, d\lambda =$$

$$= (\eta + i\xi)^{-(n+1)} + (\eta - i\xi)^{-(n+1)}.$$

Формула (2.16) справедлива при условии, что множитель $f(\lambda)$ изменяется более медленно по сравнению с множителем $e^{-\eta\lambda}\cos(\xi\lambda)$.

Если взять первых два члена разложения, то

$$2\int_0^\infty f(\lambda)\, e^{-\eta\lambda}\cos(\xi\lambda)\, d\lambda \approx 2\eta(\eta^2 + \xi^2)^{-1} f(0) +$$

$$+ 2(\eta^2 - \xi^2)(\eta^2 + \xi^2)^{-2} f'(0). \tag{2.17}$$

Раскрывая скобки в числителе и знаменателе выражений $f(0)$, $f'(0)$ и пренебрегая членами со степенями λ больше единицы, получим, что $\alpha = \varepsilon$, $\theta = \varepsilon\sqrt{\gamma}$, где $\varepsilon = \sqrt{i} = \frac{i+1}{\sqrt{2}}$ и

$$f(\lambda) = \frac{(\sqrt{\gamma}-1)\, e^{-\varepsilon d^*} - (\sqrt{\gamma}+1)\, e^{\varepsilon d^*}}{\varepsilon\,[(\sqrt{\gamma}-1)\, e^{-\varepsilon d^*} + (\sqrt{\gamma}+1)\, e^{\varepsilon d^*}]} \times$$

$$\times \frac{(\sqrt{\gamma}-1)\, e^{-\varepsilon d^*} - (\sqrt{\gamma}+1)\, e^{\varepsilon d^*}}{-\lambda\,[(\sqrt{\gamma}-1)\, e^{-\varepsilon d^*} - (\sqrt{\gamma}+1)\, e^{\varepsilon d^*}]} \tag{2.18}$$

Вводя обозначения

$$\left.\begin{aligned} \beta &= \frac{\sqrt{\gamma}-1}{\sqrt{\gamma}+1}, \\ U &= \frac{(1-i)}{\sqrt{2}}\,\frac{(\beta - e^{2\varepsilon d^*})}{(\beta + e^{2\varepsilon d^*})}, \end{aligned}\right\} \tag{2.19}$$

перепишем (2.18) следующим образом:

$$f(\lambda) = \frac{U}{1 - U\lambda}. \tag{2.20}$$

Отсюда видно, что для изменений этой функции более медленных по сравнению с $e^{-\eta\lambda}\cos(\xi\lambda)$ должно выполняться условие:

$$(\eta^2 + \xi^2)^{\frac{1}{2}} \gg |U|, \tag{2.21}$$

которое накладывает ограничения на частоту. Если d^* и γ не слишком малы одновременно, $|U| \approx 1$ и для условия (2.21) найдем:

$$(\eta^2 + \xi^2)^{\frac{1}{2}} \gg 1. \tag{2.22}$$

Наоборот, если d^* и γ очень малы, (2.21) примет вид:

$$(d^* + \sqrt{\gamma})(\eta^2 + \xi^2)^{\frac{1}{2}} \gg 1, \tag{2.23}$$

так как в этом случае для $|U|$ получается величина приблизительно равная $(d^* + \sqrt{\gamma})^{-1}$, что следует из определения U, если в него вместо β и экспоненты подставить их приближенные значения: $\beta \approx -1 + 2\sqrt{\gamma}$, $e^{2\varepsilon d^*} \approx 1 + 2\varepsilon d^*$.

Ограничив область применения асимптотических формул, можно записать искомое выражение. Из (2.20) найдем, что $f(0) = U$, $f'(0) = U^2$, после чего с учетом (2.17) и (2.15) получим:

$$\frac{\Phi_0}{I} \approx \ln\frac{r_0^*}{r_1^*} + \frac{2\eta U}{\eta^2+\xi^2} + \frac{2(\eta^2-\xi^2)\, U^2}{(\eta^2+\xi^2)^2}. \tag{2.24}$$

Если $\eta = 0$, что соответствует случаю, когда кабель расположен на поверхности земли и измерения производятся на поверхности земли, можно выразить (2. 24) следующим образом:

$$\left(\frac{\Phi_0}{I}\right)_{\eta=0} \approx -2U^2\xi^{-2}. \qquad (2.25)$$

Из формулы (2. 25) следует, что электрическое поле затухает обратно пропорционально квадрату расстояния от кабеля. Эту закономерность можно проконтролировать полевыми измерениями, если удаление от кабеля настолько велико, что возможно применение формулы (2. 25).

Для однородного полупространства (2. 25) принимает следующий вид:

$$\frac{\Phi_0'}{I} \approx 2i\,\xi^{-2}. \qquad (2.26)$$

Если через E_0' обозначить напряженность электрического поля, когда мощность слоя $d = \infty$, то из (2. 25) и (2. 26) получим для напряженности E_0, учитывая, что $\frac{E_0}{E_0'} = \frac{\Phi_0}{\Phi_0'}$:

$$E_0 = V^2 E_0',$$

где

$$V = -\frac{i(1+i)U}{\sqrt{2}} = \frac{e^{2\varepsilon d^*} - \beta}{e^{2\varepsilon d^*} + \beta}. \qquad (2.27)$$

Рассмотрим поведение функции V в зависимости от d^* и γ. Положив $\delta = d^* \sqrt{2}$, получим из (2. 27):

$$\left|\frac{E_0}{E_0'}\right| = |V|^2 = \frac{e^{2\delta} - 2\beta e^{\delta}\cos\delta + \beta^2}{e^{2\delta} + 2\beta e^{\delta}\cos\delta + \beta^2}. \qquad (2.28)$$

Отсюда найдем, что в предельных случаях:

$$\left|\frac{E_0}{E_0'}\right| = \frac{(\beta-1)^2}{(\beta+1)^2} = \gamma^{-1}, \ (\delta = 0); \quad \left|\frac{E_0}{E_0'}\right| = 1, \quad (\delta = \infty).$$

Оценим корни производной выражения (2. 28) по d. После элементарных вычислений получим уравнение:

$$e^{2\delta}\,\mathrm{tg}\left(\delta + \frac{\pi}{4}\right) = \beta^2. \qquad (2.29)$$

Уравнение (2.29) имеет бесконечное число корней, из которых рассматриваются только положительные *. Эти корни, соответствующие экстремумам (максимумам и минимумам) функции $\left|\frac{E_0}{E_0'}\right|$, обозначим через $\delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_n, \ldots$ в возрастающем порядке. Для δ_0 и δ_n можно записать:

$$\delta_0 \approx \frac{3\pi}{4} + \beta^2 e^{-\frac{3\pi}{2}}, \qquad (2.30)$$

. . . . . .

$$\delta_n \approx \left(n + \frac{3}{4}\right)\pi + \beta^2 e^{-\frac{3\pi}{2}}, \quad (n = 1, 2, \ldots). \qquad (2.31)$$

Соответствующие значения отношений $\left|\frac{E_0}{E_0'}\right|$, которые обозначаются через $\left|\frac{E_0}{E_0'}\right|_n$, будут равны:

$$\left|\frac{E_0}{E_0'}\right|_0 \approx 1 + 2\sqrt{2}\,\beta\, e^{-\frac{3\pi}{4}} + 4\beta^2 e^{-\frac{3\pi}{2}},$$

$$\left|\frac{E_0}{E_0'}\right|_1 \approx 1 - 2\sqrt{2}\,\beta\, e^{-\frac{7\pi}{4}}, \ \ldots, \left|\frac{E_0}{E_0'}\right|_n \approx 1. \quad (n \geqslant 2) \qquad (2.32)$$

Другими словами, при $\delta > \delta_1$ значения $\left|\frac{E_0}{E_0'}\right|$ осцилируют около единицы настолько медленно, что E_0 можно считать постоянной величиной. Амплитуда каждого полуцикла колебаний убывает по геометрической прогрессии со знаменателем $e^{-\pi} = 0{,}043$, период полуцикла равен π.

Значения $\left|\frac{E_0}{E_0'}\right|$, определяемые формулой (2.28), приводятся в табл. 6, графики — на рис. 4, 5. Когда $\gamma < 1$ (верхний

Таблица 6

γ	$\left\|\frac{E_0}{E_0'}\right\|$		
	$\delta=0$	$\delta=\delta_0$	$\delta=\delta_1$
1/4	4,000	0,915	1,004
1/2	2,000	0,955	1,002
3/4	1,333	0,981	1,001
3/2	0,667	1,027	0,999
2	0,500	1,047	0,998
4	0,250	1,093	0,996
	0	1,304	0,988

* Решения уравнения (2. 29) подробно анализируются в двух примечаниях к первой работе Беллуиджи (1955), опубликованной на итальянском языке. Текст более поздней статьи Беллуиджи (1956), опубликованной на английском языке, отличается от работы 1955 г. только отсутствием этих примечаний. *А. В., Г. Ф.*

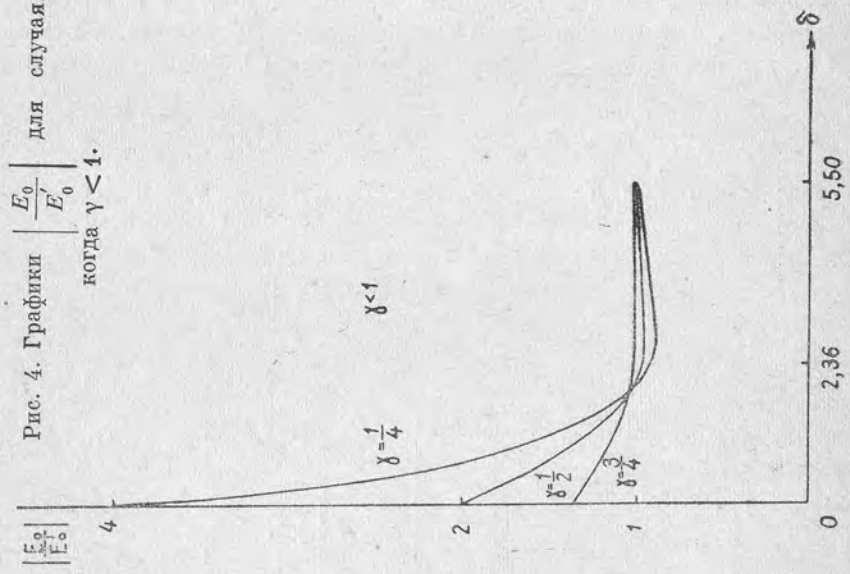


Рис. 4. Графики $\left|\frac{E_0}{E_0'}\right|$ для случая, когда $\gamma < 1$.

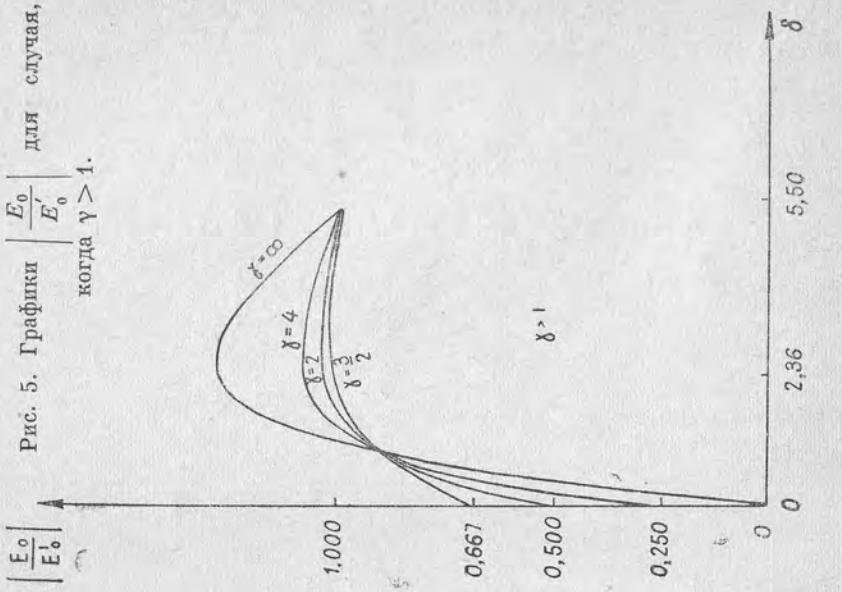


Рис. 5. Графики $\left|\frac{E_0}{E_0'}\right|$ для случая, когда $\gamma > 1$.

слой проводит больше, чем основание), отношение $\left|\frac{E_0}{E_0'}\right|$ уменьшается от γ^{-1} для $\delta = 0$ до $\left|\frac{E_0}{E_0'}\right|_0$ для $\delta = \delta_0$, затем отношение очень медленно возрастает до точки $\delta = \delta_1$, принимая значения, близкие к единице, и, наконец, с периодом 2π колеблется около единицы с такими небольшими амплитудами, что ими можно пренебречь и считать отношение постоянным.

Если $\gamma > 1$ (верхний слой плохо проводит), получим обратную картину, для которой в тексте предыдущего абзаца нужно вместо слов «возрастает» поставить слово «убывает» и наоборот. Для $\gamma < 1$ $\left|\frac{E_0}{E_0'}\right|$ уменьшается при возрастании δ (толщины), как это видно из рис. 4. Если, наоборот, основание имеет бóльшую электропроводность ($\gamma > 1$), асимптотика $\left|\frac{E_0}{E_0'}\right|$ возрастет с ростом δ до максимума, а затем медленно убывает (рис. 5).

§ 3. Трехслойная среда

(Беллуиджи, 1955, 1956)

Предположим, что горизонтальный слой, имеющий толщину d и электропроводность σ, перекрывается слоем с электропроводностью σ_1 и основание также имеет электропроводность σ_1 (рис. 6). Слой расположен на глубине d_0 от поверхности, причем $d_0 + d = d_1$. Сохраним координатную систему и обозначения такими же, как в пункте 2, § 2 с разницей только в некоторых индексах. Как обычно, выражение, характеризующее E, стремится к нулю, когда y стремится к бесконечности. Кроме того, E функция непрерывная вместе со своими производными, которые только коэффициентом отличаются от составляющих магнитного поля. Около точки с координатами $x = 0$, $y = h$:

$$E = 2ic^{-1}\omega I \ln [(y-h)^2 + x^2]^{\frac{1}{2}} + C, \tag{3.1}$$

где C — произвольная постоянная.

Приведенные расстояния определяются соотношениями:

$$d_0^* = \varkappa d_0,\ d^* = \varkappa d,\ d_1^* = d_0^* + d^* = \varkappa d_1,\ \varkappa = c^{-1}(4\pi\omega\sigma_1)^{\frac{1}{2}},$$

$$\gamma = \frac{\sigma}{\sigma_1},\ r_0^{*2} = \xi^2 + (\eta - h^*)^2,\ r_1^{*2} = \xi^2 + (\eta + h^*)^2.$$

Если положить, что $E = 2ic^{-1} I\omega\Psi$, то задача сводится к тому, чтобы определить функцию $\Psi(\xi, \eta)$, удовлетворяющую следующим дифференциальным уравнениям:

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial\eta^2} = 0,\ (\eta > 0), \tag{3.2}$$

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial\eta^2} = i\Psi,\ (-d_0^* < \eta < 0), \tag{3.3}$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \eta^2} = i\gamma\Psi, \quad (-d_1^* < \eta < -d_0^*), \tag{3.4}$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \eta^2} = i\Psi, \quad (\eta < d_1^*), \tag{3.5}$$

которые получаются из уравнения (2.14) после соответствующих подстановок. Функция Ψ удовлетворяет следующим предельным условиям:

$$\Psi \to 0, \text{ когда } \xi \to \pm\infty \text{ или } \eta \to \pm\infty. \tag{3.6}$$

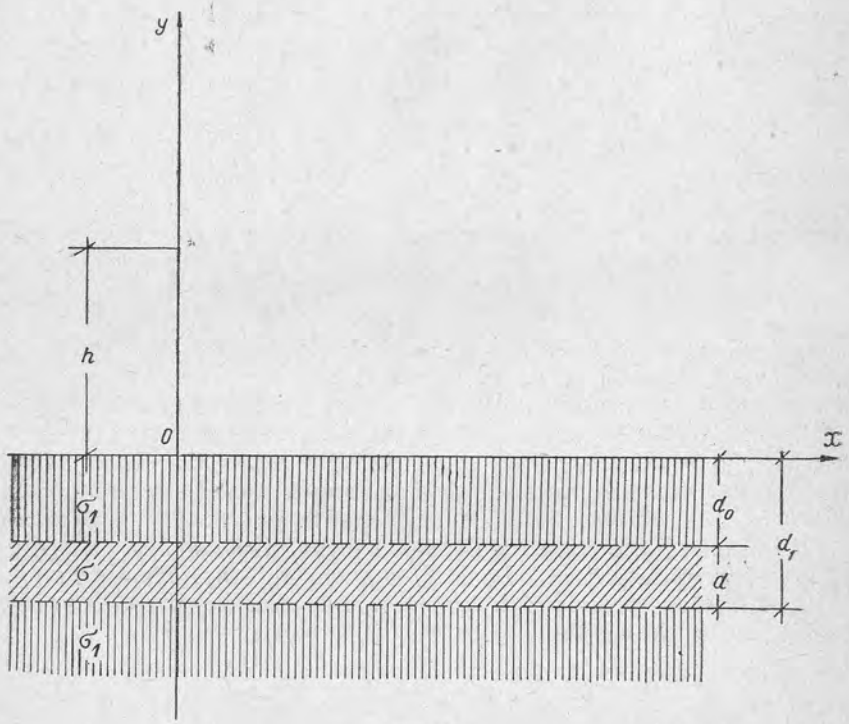


Рис. 6.

Пусть Ψ непрерывна вместе со своими производными $\frac{\partial \Psi}{\partial \eta}$ для $\eta = 0$, $\eta = -d_0^*$, $\eta = -d_1^*$; в окрестности точки $\xi = 0$, $\eta = h^*$:

$$\Psi = \ln r_0^* + C. \tag{3.7}$$

Непрерывность производной $\frac{\partial \Psi}{\partial \xi}$ является следствием непрерывности Ψ. Частными решениями уравнения (3.2) будут функции:

$$\ln r_0^*, \quad \ln r_1^*, \quad e^{-\eta\lambda}\cos(\xi\lambda), \quad e^{\eta\lambda}\cos(\xi\lambda),$$

последняя из которых не удовлетворяет условию равенства нулю, когда $\eta \to \infty$, поэтому для общего решения можно записать:

$$\Psi = \ln\frac{r_0^*}{r_1^*} + \int_0^\infty A(\lambda)\, e^{-\eta\lambda}\cos(\xi\lambda)\, d\lambda. \tag{3.8}$$

Это решение удовлетворяет уравнению (3.2). Положим, что $\alpha = (\lambda^2 + i)^{\frac{1}{2}}$, $\theta = (\lambda^2 + i\gamma)^{\frac{1}{2}}$. С помощью подстановки можно показать, что функции $e^{\eta\alpha}\cos(\xi\lambda)$, $e^{-\eta\alpha}\cos(\xi\lambda)$ есть решения уравнений (3.3) и (3.5), в то время как функции $e^{\eta\theta}\cos(\xi\lambda)$, $e^{-\eta\theta}\cos(\xi\lambda)$ являются решениями уравнения (3.4). В силу изложенного выражения

$$\Psi = \int_0^\infty A_1(\lambda)\, e^{-\eta\alpha}\cos(\xi\lambda)\, d\lambda + \int_0^\infty B_1(\lambda)\, e^{\eta\alpha}\cos(\xi\lambda)\, d\lambda, \tag{3.9}$$

$$\Psi = \int_0^\infty A_2(\lambda)\, e^{-\eta\theta}\cos(\xi\lambda)\, d\lambda + \int_0^\infty B_2(\lambda)\, e^{\eta\theta}\cos(\xi\lambda)\, d\lambda, \tag{3.10}$$

$$\Psi = \int_0^\infty B_3(\lambda)\, e^{\eta\alpha}\cos(\xi\lambda)\, d\lambda, \tag{3.11}$$

также являются решениями уравнений (3.3), (3.4) и (3.5). В (3.11) отсутствует член, содержащий $e^{-\eta\alpha}$, так как он не стремится к нулю, когда $\eta \to -\infty$. Чтобы определить функции $A_j(\lambda)$ и $B_j(\lambda)$, воспользуемся условиями непрерывности на поверхностях раздела, где должны быть равны следующие функции:

1) при $\eta = 0$: Ψ и $\frac{\partial \Psi}{\partial \eta}$, вычисленные по (3.8) и (3.9),

2) при $\eta = -d_0^*$: Ψ и $\frac{\partial \Psi}{\partial \eta}$, вычисленные по (3.9) и (3.10),

3) при $\eta = -d_1^*$: Ψ и $\frac{\partial \Psi}{\partial \eta}$, вычисленные по (3.10) и (3.11).

Всего будет 6 уравнений для определения 6 функций:

1) $\eta = 0$: $$\int_0^\infty A_0(\lambda)\cos(\xi\lambda)\, d\lambda = \int_0^\infty A_1(\lambda)\cos(\xi\lambda)\, d\lambda + \int_0^\infty B_1(\lambda)\cos(\xi\lambda)\, d\lambda,$$

$$-\frac{2h^*}{\xi^2 + h^{*2}} - \int_0^\infty A_0(\lambda)\,\lambda\cos(\xi\lambda)\, d\lambda = -\int_0^\infty A_1(\lambda)\,\alpha\cos(\xi\lambda)\, d\lambda + \int_0^\infty B_1(\lambda)\,\alpha\cos(\xi\lambda)\, d\lambda,$$

2) $\eta = -d_0^* : \int^{\infty} A_1(\lambda) e^{d_0^* \alpha} \cos(\xi\lambda)\, d\lambda + \int_0^{\infty} B_1(\lambda) e^{d_0^* \alpha} \cos(\xi\lambda)\, d\lambda =$

$$= \int_0^{\infty} A_2(\lambda) e^{d_0^* \theta} \cos(\xi\lambda)\, d\lambda + \int_0^{\infty} B_2(\lambda) e^{-d_0^* \theta} \cos(\xi\lambda)\, d\lambda,$$

$$-\int_0^{\infty} A_1(\lambda)\, \alpha\, e^{d_0^* \alpha} \cos(\xi\lambda)\, d\lambda + \int_0^{\infty} B_1(\lambda)\, \alpha\, e^{-d_0^* \alpha} \cos(\xi\lambda)\, d\lambda =$$

$$= -\int_0^{\infty} A_2(\lambda)\, \theta e^{d_0^* \theta} \cos(\xi\lambda)\, d\lambda + \int_0^{\infty} B_2(\lambda)\, \theta\, e^{-d_0^* \theta} \cos(\xi\lambda)\, d\lambda,$$

3) $\eta = -d_1^* : \int_0^{\infty} A_2(\lambda) e^{d_1^* \theta} \cos(\xi\lambda)\, d\lambda + \int_0^{\infty} B_2(\lambda) e^{-d_1^* \theta} \cos(\xi\lambda)\, d\lambda =$

$$= \int_0^{\infty} B_1(\lambda) e^{-d_1^* \alpha} \cos(\xi\lambda)\, d\lambda,$$

$$-\int_0^{\infty} A_2(\lambda)\, \theta e^{d_1^* \theta} \cos(\xi\lambda)\, d\lambda + \int_0^{\infty} B_2(\lambda)\, \theta\, e^{-d_1^* \theta} \cos(\xi\lambda)\, d\lambda =$$

$$= \int_0^{\infty} B_3(\lambda)\, \alpha\, e^{-d_1^* \alpha} \cos(\xi\lambda)\, d\lambda.$$

Запишем член $-\dfrac{2h^*}{h^{*2}+\xi^2}$ в форме интеграла $\int_0^{\infty} f(\lambda) \cos \xi\lambda\, d\lambda$:

$$2\int_0^{\infty} e^{-h^*\lambda} \cos(\xi\lambda)\, d\lambda = \int_0^{\infty} e^{-(h^* - i\xi)\lambda} d\lambda + \int_0^{\infty} e^{-(h^* + i\xi)\lambda} d\lambda = \frac{2h^*}{h^{*2}+\xi^2}.$$

Тогда получим следующую систему линейных уравнений для определения функций $A_j(\lambda)$ и $B_j(\lambda)$:

$$\left.\begin{aligned}
A_0 &= A_1 + B_1,\\
-2e^{-h^*} &- \lambda A_0 = \alpha(-A_1 + B_1),\\
A_1 e^{d_0^* \alpha} &+ B_1 e^{-d_0^* \alpha} = A_2 e^{d_0^* \theta} + B_2 e^{-d_0^* \theta},\\
\alpha(-A_1 e^{d_0^* \alpha} &+ B_1 e^{-d_0^* \alpha}) = \theta(-A_2 e^{d_0^* \theta} + B_2 e^{-d_0^* \theta}),\\
A_2 e^{d_1^* \theta} &+ B_2 e^{-d_1^* \theta} = B_3 e^{-d_1^* \alpha},\\
\theta(-A_2 e^{d_1^* \theta} &+ B_2 e^{-d_1^* \theta}) = \alpha B_3 e^{-d_1^* \alpha}.
\end{aligned}\right\} \quad (3.12)$$

Так как наибольший интерес представляет поле в воздухе, ограничимся определением функции A_0. Умножая предпоследнее уравнение (3.12) на α и вычитая из него последнее, найдем:

$$(\theta + \alpha) A_2 e^{d_1^* \theta} - (\theta - \alpha) B_2 e^{-d_1^* \theta} = 0,$$

$$B_2 = A_2 \frac{\theta + \alpha}{\theta - \alpha} e^{2 d_1^* \theta}.$$

Подставляя последнее уравнение в третье и в четвертое из (3.12), будем иметь:

$$A_1 e^{d_0^* \alpha} + B_1 e^{-d_0^* \alpha} = \left[\frac{\theta+\alpha}{\theta-\alpha} e^{(2d_1^* - d_0^*)\theta} + e^{d_0^* \theta}\right] A_2,$$

$$\alpha(-A_1 e^{d_0^* \alpha} + B_1 e^{-d_0^* \alpha}) = \theta\left[\frac{\theta+\alpha}{\theta-\alpha} e^{(2d_1^* - d_0^*)\theta} - e^{d_0^* \theta}\right] A_2.$$

Исключая A_2 из этих двух уравнений и учитывая, что $d_1^* - d_0^* = d^*$, получим:

$$\begin{gathered}
(\nu^{-1} e^{d^* \theta} - \nu e^{-d^* \theta}) A_1 e^{d_0^* \alpha} + \\
+ (e^{d^* \theta} - e^{-d^* \theta}) B_1 e^{-d_0^* \alpha} = 0, \qquad (3.13)\\
\nu = \frac{\theta - \alpha}{\theta + \alpha}.
\end{gathered}$$

Решая первые два уравнения (3.12) относительно A_1, B_1, придем к следующим результатам:

$$A_1 = \frac{1}{2\alpha}(\alpha + \lambda) A_0 + \frac{1}{\alpha} e^{-h^* \lambda},$$

$$B_1 = \frac{1}{2\alpha}(\alpha - \lambda) A_0 - \frac{1}{\alpha} e^{-h^* \lambda}.$$

Подставляя эти выражения в (3.13), выведем, наконец, выражение для A_0:

$$A_0 = 2f(\lambda) e^{-h^* \lambda},$$

где $f(\lambda) =$

$$= \frac{-(\nu^{-1} e^{d^* \theta} - \nu e^{-d^* \theta}) e^{d_0^* \alpha} + (e^{d^* \theta} - e^{-d^* \theta}) e^{-d_0^* \alpha}}{(\alpha+\lambda)(\nu^{-1} e^{d^* \theta} - \nu e^{-d^* \theta}) e^{d_0^* \alpha} + (\alpha - \lambda)(e^{d^* \theta} - e^{-d^* \theta}) e^{-d_0^* \alpha}}. \quad (3.14)$$

После подстановки в (3.8) получим для электрического поля в воздухе:

$$\Psi = \ln \frac{r_0^*}{r_1^*} + 2\int_0^{\infty} f(\lambda) e^{-(h^* + \eta)\lambda} \cos(\xi\lambda)\, d\lambda. \qquad (3.15)$$

Эта формула совпадает при $d^* \to +\infty$ с формулой Эванса (1930). В случае, когда $\gamma = 1$, она идентична формуле Карсона (1926) для напряженности поля над однородным полупространством. Можно показать, что $f(\lambda)$ не зависит от толщины слоя d^*, когда $\sigma \to \infty$ ($\gamma \to \infty$), так как совершенно проводящий слой играет роль экрана. В самом деле, для $\gamma = \infty$, $\nu = 1$

$$f(\lambda) = \frac{-e^{d_0^* \alpha} + e^{-d_0^* \alpha}}{(\alpha+\lambda)\, e^{d_0^* \alpha} - (\alpha-\lambda)\, e^{-d_0^* \alpha}},$$

что находится в соответствии с аналогичной формулой Эванса (1930) для $\gamma \to \infty$.

Рассмотрим электрическое поле на больших расстояниях от кабеля. Как видно из (2. 17), для больших значений $[\xi^2 + (\eta + h^*)^2]^{\frac{1}{2}}$:

$$\int_0^\infty f(\lambda)\, e^{-(\eta+h^*)\lambda} \cos(\xi\lambda)\, d\lambda \approx f(0)\, \frac{\eta+h^*}{\xi^2+(\eta+h^*)^2} + f'(0)\, \frac{(\eta+h^*)^2-\xi^2}{[(\eta+h^*)^2+\xi^2]^2}. \qquad (3.16)$$

Подставляя (3. 16) в (3. 15), для кабеля, расположенного на земле ($h^* = 0$), и измерений поля на земле ($\eta = 0$), получим:

$$\Psi = -2f'(0)\, \xi^{-2}, \qquad (3.17)$$

то есть асимптотика поля, как и в случае двухслойной среды, затухает обратно пропорционально квадрату расстояния. Это свойство позволяет определить те удаления от кабеля, для которых асимптотические формулы справедливы.

Чтобы выразить $f'(0)$ через d^*_0, d^*, γ, удобно ввести функцию

$$g(\lambda) = -\frac{(\nu^{-1} e^{d^*\theta} - \nu e^{-d^*\theta})\, e^{d_0^* \alpha} + (e^{d^*\theta} - e^{-d^*\theta})\, e^{-d_0^* \alpha}}{\alpha(\nu^{-1} e^{d^*\theta} - \nu e^{-d^*\theta})\, e^{d_0^* \alpha} + \alpha(e^{d^*\theta} - e^{-d^*\theta})\, e^{-d_0^* \alpha}}. \qquad (3.18)$$

При этом $f(\lambda)$ выражается следующим образом через $g(\lambda)$:

$$f(\lambda) = \frac{g(\lambda)}{1-\lambda g(\lambda)},$$

$$f'(\lambda) = \frac{g'(\lambda)+g^2(\lambda)}{[1-\lambda g(\lambda)]^2},$$

$$f'(0) = g'(0) + g^2(0).$$

Но $g'(0) = 0$, поэтому $f'(0) = g^2(0)$, тогда по (3. 17):

$$\Psi \approx -2g^2(0)\, \xi^{-2}, \qquad (3.19)$$

где $g(0)$ необходимо вычислить.

Если положить, что $\varepsilon = i^{\frac{1}{2}} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$,

$$\beta = \frac{\sqrt{\gamma}-1}{\sqrt{\gamma}+1}, \quad \Delta = d^* \sqrt{\gamma} = c^{-1} d\, (4\pi\sigma\omega)^{\frac{1}{2}},$$

причем Δ зависит от σ и d, так же как d_0^* от σ_0 и d_0, то для $\lambda = 0$, $\alpha = \varepsilon$, $\theta = \varepsilon\sqrt{\gamma}$, $\nu = \lambda$, $\theta d^* = \Delta$,

$$g(0) = \frac{i-1}{\sqrt{2}}\, V,$$

$$V = \frac{(\beta^{-1} e^{\varepsilon\Delta} - \beta e^{-\varepsilon\Delta})\, e^{\varepsilon d_0^*} - (e^{\varepsilon\Delta} - e^{-\varepsilon\Delta})\, e^{-\varepsilon d_0^*}}{(\beta^{-1} e^{\varepsilon\Delta} - \beta e^{-\varepsilon\Delta})\, e^{\varepsilon d_0^*} + (e^{\varepsilon\Delta} - e^{-\varepsilon\Delta})\, e^{-\varepsilon d_0^*}} \qquad (3.20)$$

и (3. 17) принимает следующий вид:

$$\Psi \approx 2iV^2\, \xi^{-2}. \qquad (3.21)$$

Обозначив «нормальное» значение функции, связанное с полем над однородным полупространством, через Ψ', получим ($\gamma = 1$, $\beta = 0$, $V = 1$)

$$\Psi' \approx 2i\, \xi^{-2}, \qquad (3.22)$$

что совпадает с (2. 26). Так как $\frac{\Psi}{\Psi'} = \frac{E}{E'}$, где E' — нормальная величина напряженности электрического поля, для (3. 21) можно записать:

$$\frac{E}{E'} = V^2. \qquad (3.23)$$

Обозначим через χ комплексное выражение, которое, между прочим, можно также получить из измерений:

$$\chi = \frac{1-\left(\frac{E}{E'}\right)^{\frac{1}{2}}}{1+\left(\frac{E}{E'}\right)^{\frac{1}{2}}}. \qquad (3.24)$$

Из (3. 23) получим:

$$\chi = \frac{1-V}{1+V}$$

или

$$\chi = e^{-2\varepsilon d_0^*}\, \frac{e^{\varepsilon\Delta} - e^{-\varepsilon\Delta}}{\beta^{-1} e^{\varepsilon\Delta} - \beta e^{-\varepsilon\Delta}}. \qquad (3.25)$$

Если положить, что $\delta_0 = d^* \sqrt{2}$, $\delta = \frac{\Delta}{\sqrt{2}}$, $\tau = -\ln|\beta| = \ln\left|\frac{\sqrt{\gamma}+1}{\sqrt{\gamma}-1}\right|$, то можно переписать (3.25):

$$\chi = \pm\left\{\frac{\operatorname{sh}[(1+i)\delta]\cdot e^{-(1+i)\delta_0}}{\operatorname{sh}(\delta+\tau+i\delta)}\right\}, \tag{3.26}$$

где знак плюс относится к случаю $\gamma > 1$ (хорошо проводящий слой), а минус ставится в случае, когда $\gamma < 1$ (плохо проводящий слой). Выражение χ состоит из двух множителей, один из которых зависит только от δ_0, а другой только от δ и γ (последнее — через τ). Необходимо найти выражение модуля и фазы χ. Так как

$$|\operatorname{sh}(a+ib)| = [\operatorname{sh}(a+ib)\operatorname{sh}(a-ib)]^{\frac{1}{2}} = \left[\frac{(\operatorname{ch}2a-\cos 2b)}{2}\right]^{\frac{1}{2}} \tag{3.27}$$

и

$$\arg\operatorname{sh}(a+ib) = \arg[\operatorname{sh}(a\cos b) + i\operatorname{ch}(a\sin b)] = \operatorname{arctg}\frac{\operatorname{th} b}{\operatorname{th} a},$$

то

$$\left.\begin{aligned} |\chi| &= e^{-\delta_0}\left\{\frac{\operatorname{ch}(2\delta)-\cos(2\delta)}{\operatorname{ch}[2(\tau+\delta)]-\cos(2\delta)}\right\}^{\frac{1}{2}}, \\ \arg\chi &= -\delta_0 + \operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}\delta}{\operatorname{th}\delta} - \operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}\delta}{\operatorname{th}(\delta+\tau)} + \\ &+ \begin{cases}\pi, & \text{если } \gamma < 1,\\ 0, & \text{если } \gamma > 1.\end{cases}\end{aligned}\right\} \tag{3.28}$$

Из первого выражения (3.28) видно, что $|\chi| < 1$ и убывает очень быстро с возрастанием δ_0 или τ (возрастание τ означает приближение γ к единице). Неудобным является то, что для величины $|\chi|$ нельзя различить случай, когда $\gamma > 1$, от случая, когда $\gamma < 1$. Действительно, если устремить τ к нулю (оставляя δ_0 и δ постоянными), $|\chi|$ стремится к $e^{-\delta_0}$. В то же время $\tau \to 0$ как в случае, когда $\gamma \to 0$, так и в случае, когда $\gamma \to \infty$. Отсюда следует, что значения $|\chi|$ могут в равной степени указывать как на повышенную, так и на пониженную электропроводность слоя.

Фазовые характеристики функции χ имеют в этих двух случаях разные значения: $\pi - \delta_0$ для $\gamma < 1$ и $\pi - \delta_0$ для $\gamma > 1$, поэтому с их помощью удобнее проводить разделение плохого и хорошего проводников. Кроме того, фаза очень простым способом зависит от глубины залегания слоя δ_0.

В действительности, чтобы χ можно было измерить, рассматривая $\frac{\sqrt{E}}{\sqrt{E'}}$, ни τ и ни δ_0 не должны иметь очень большие значения.

Следствием этого является то, что $\arg\chi$ также будет достаточно небольшим, когда $\gamma > 1$ или $\gamma < 1$, поэтому $\arg\chi$ будет соответственно более близок к 0 или π.

Выражение, не зависящее от δ_0 (для $\gamma < 1$ всегда $> \pi$), имеет вид:

$$\left.\begin{aligned} \arg\chi - \ln|\chi| &= \operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}\delta}{\operatorname{th}\delta} - \operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}\delta}{\operatorname{th}(\delta+\tau)} + \\ &+ \frac{1}{2}\ln\frac{\operatorname{ch}2(\tau+\delta)-\cos(2\delta)}{\operatorname{ch}(2\delta)-\cos(2\delta)} + \\ &+ \begin{cases}\pi, & \text{если } \gamma < 1,\\ 0, & \text{если } \gamma > 1.\end{cases}\end{aligned}\right\} \tag{3.29}$$

Поэтому, если $0 < \arg\chi - \ln|\chi| < \pi$, то это связано с проводящим слоем. В предельных случаях справедливы две формулы:

1) δ очень велико, тогда для (3.25) получим:

$$\chi = \beta e^{-\delta_0(1+i)}, \quad |\chi| = |\beta| e^{-\delta_0},$$

$$\arg\chi = -\delta_0 + \begin{cases}\pi, & \text{если } \gamma < 1,\\ 0, & \text{если } \gamma > 1.\end{cases}$$

2) δ, τ — малы, тогда можно положить, что $\operatorname{sh}\delta = \delta$ и для (3.26) найдем:

$$\chi = \pm\frac{(1+i)\delta}{\tau+(1+i)\delta}e^{-(1+i)\delta_0}, \quad |\chi| = \frac{\delta\cdot e^{-\delta_0}}{\left(\delta^2+\tau\delta+\frac{\tau^2}{2}\right)^{\frac{1}{2}}},$$

$$\arg\chi = -\delta_0 + \operatorname{arctg}\frac{\tau}{\tau+2\delta} + \begin{cases}\pi,\\ 0.\end{cases}$$

Небольшие δ и τ при $\gamma > 1$ являются признаками тонкого проводящего слоя высокой электропроводности. Если $\gamma < 1$, а δ и τ малы, имеем слой очень низкой электропроводности по отношению к вмещающим породам, но не обязательно очень тонкий. В самом деле, δ пропорционально электропроводности слоя и поэтому может быть очень мало, в то время как d не обязательно мало.

§ 4. Решение для М-слойной среды
(Уэйт, 1953b)

1. Общее решение. Пусть плоская волна падает на поверхность слоистой среды, состоящей из M горизонтальных слоев. Выберем систему прямоугольных координат (x, y, z) так, чтобы слоистая среда имела координату $z > 0$. Вектор электрической напряженности падающей и преломленной волн перпендикулярен к плоскости падения (плоскость xz). Угол падения обозначим

через φ и будем отсчитывать его от отрицательной оси Oz. Электропроводность, диэлектрическую постоянную и магнитную проницаемость слоев обозначим через σ_m, ε_m и μ_m, где индекс m обозначает номер слоя. Используется система MKS, временной множитель $e^{i\omega t}$ подразумевается при изложении.

Напряженность электрического поля E_m в любом слое имеет составляющую только в направлении оси Oy. Выражение для составляющей E_m является решением волнового уравнения:

$$(\nabla^2 - k_m^2) E_m = 0, \tag{4.1}$$

где

$$k_m^2 = i\sigma_m\mu_m\omega - \varepsilon_m\mu_m\omega^2.$$

Общее решение уравнения (4.1) имеет следующий вид:

$$E_m = (a_m e^{-u_m z} + b_m e^{u_m z})\, e^{-i\lambda x}, \tag{4.2}$$

где $u_m^2 = \lambda^2 + k_m^2$ и λ может принимать любые значения. Составляющие магнитного поля связаны с составляющими электрического поля соотношениями:

$$i\mu_m\omega H_{mx} = \frac{\partial E_m}{\partial z}, \tag{4.3}$$

и

$$-i\mu_m\omega H_{mz} = \frac{\partial E_m}{\partial x}. \tag{4.4}$$

Электрическое поле в воздухе можно записать следующим образом:

$$E_0 = (a_0 e^{-k_0\cos\varphi z} + b_0 e^{k_0\cos\varphi z})\, e^{-k_0\sin\varphi x}, \tag{4.5}$$

где угол падения и отражения равен φ. Параметр λ должен при этом определяться соотношением $i\lambda = k_0 \sin\varphi$.

Неизвестные коэффициенты a_m и b_m находятся из граничных условий, требующих непрерывности E_m и H_{mx} на поверхностях раздела между слоями. Кроме того, положим $b_M = 0$, чтобы решение оставалось конечным в самой нижней среде M. Если поверхность раздела между слоями с индексами m и $m+1$ определяется уравнением $z = z_m$, то выполнение граничных условий ведет к равенствам:

$$a_m e^{-u_m z_m} + b_m e^{u_m z_m} = a_{m+1} e^{-u_{m+1} z_m} + b_{m+1} e^{u_{m+1} z_m}$$

и

$$\frac{u_m}{\mu_m}(a_m e^{-u_m z_m} - b_m^{u_m z_m}) = \frac{u_{m+1}}{\mu_{m+1}}(a_{m+1} e^{-u_{m+1} z_m} - b_{m+1} e^{u_{m+1} z_m}).$$

Решая эти уравнения, получим:

$$\frac{b_0}{a_0} = \frac{K_0 - Z_1}{K_0 + Z_1} = R(\lambda), \tag{4.6}$$

где

$$Z_1 = K_1 \frac{Z_2 + K_1 \operatorname{th} u_1 d_1}{K_1 + Z_2 \operatorname{th} u_1 d_1}, \tag{4.7}$$

$$Z_2 = K_2 \frac{Z_3 + K_2 \operatorname{th} u_2 d_2}{K_2 + Z_3 \operatorname{th} u_2 d_2}, \tag{4.8}$$

. . . . . .

$$Z_{M-1} = K_{M-1} \frac{Z_M + K_{M-1} \operatorname{th} u_{M-1} d_{M-1}}{K_{M-1} + Z_M \operatorname{th} u_{M-1} d_{M-1}}, \tag{4.9}$$

$$Z_M = K_M, \qquad K_m = \frac{u_m}{i\mu\omega}, \quad (m = 0, 1, 2 \ . \ . \ . \ M).$$

Отношение $\frac{b_0}{a_0}$ можно интерпретировать как коэффициент отражения для плоских волн, падающих нормально к поверхности слоистой среды, каждый слой которой характеризуется параметрами d_m, u_m, Z_m.

Найдем общее решение для линейного тока, приподнятого на высоту h над поверхностью слоистой среды (рис. 7). Координаты линейного источника $(0, y, -h)$.

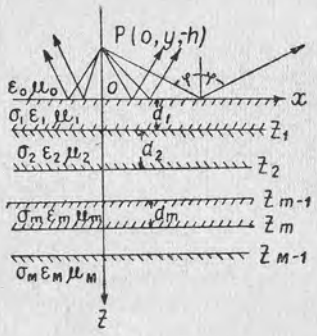


Рис. 7.

Для E_0 в области $-h < z < 0$, воспользовавшись интегралом Фурье, можно записать:

$$E_0 = \int_{-\infty}^{\infty} a_0(\lambda)\, [e^{-u_0 z} + R(\lambda) e^{u_0 z}]\, e^{-ix\lambda}\, d\lambda, \tag{4.10}$$

где интегрируется выражение (4.5) по всем λ. Если в (4.10) положить, что $R(\lambda)$ равно нулю, то поле E_0 будет тождественно первичному полю $E_п$ линейного источника:

$$E_п = \frac{i\mu_0\omega}{2\pi} K_0 \left\{k_0 [x^2 + (z+h)^2]^{\frac{1}{2}}\right\}. \tag{4.11}$$

Используя обратимость интеграла Фурье, найдем:

$$a_0(\lambda)\, e^{-u_0 z} = \frac{i\mu_0\omega}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} K_0 \left\{k_0 [x^2 + (z+h)^2]^{\frac{1}{2}}\right\} e^{ix\lambda}\, d\lambda.$$

Воспользовавшись формулой, имеющейся у Кэмпбелла и Фостера (1950), получим:

$$a_0(\lambda) = \frac{i\mu_0\omega I}{2\pi} \frac{e^{-hu_0}}{2u_0}.$$

Тогда для результирующего электрического поля E_0 в области $-h < z < 0$ будем иметь:

$$E_0 = \frac{i\mu_0\omega I}{2\pi}\int_0^\infty u_0^{-1}\,[e^{-(z+h)u_0} + R(\lambda)\,e^{(z-h)u_0}]\cos(x\lambda)\,d\lambda, \quad (4.12)$$

где $R(\lambda)$ определяется уравнением (4.6). Получив общее решение задачи, рассмотрим несколько частных случаев*.

2. Однородное полупространство как частный случай слоистой среды. Когда линейный источник расположен на поверхности раздела между двумя средами с электрическими свойствами ε_0, μ_0 и σ_1, ε_1, μ_0, электрическое поле E_0 на поверхности раздела определяется выражением

$$E_0 = \lim_{a\to 0}\frac{i\mu_0\omega I}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos(x\lambda)}{u_1+u_0}\,e^{-a\lambda}\,d\lambda, \quad (4.13)$$

являющимся частным случаем формулы (4.12) при $z = h = 0$, $z_1 = d_1 = \infty$. Последнее выражение можно переписать, умножая числитель и знаменатель на $u_1 - u_0$:

$$E_0 = \lim_{a\to 0}\frac{i\mu_0\omega I}{\pi(k_1^2-k_0^2)}\left[\int_0^\infty e^{-a\lambda}\,u\cos(x\lambda)\,d\lambda - \right.$$

$$\left. - \int_0^\infty e^{-a\lambda}\,u_0\cos(x\lambda)\,d\lambda\right]. \quad (4.14)$$

Применив формулы (Кэмпбелл, Фостер, 1950)

$$\lim_{a\to 0}\int_0^\infty \cos(x\lambda)\,u^{-1}e^{-a\lambda}\,d\lambda = K_0(k_1x)$$

и

$$\lim_{a\to 0}\int_0^\infty \cos(x\lambda)\,e^{-a\lambda}\,u\,d\lambda = \left(k_1^2 - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)K_0(k_1x) =$$

$$= -K_1(k_1x)\,k_1x^{-1},$$

получим выражение для электрического поля

$$E_0 = \frac{i\mu_0\omega I}{\pi(k_1^2-k_0^2)x^2}\,[k_0xK_1(k_0x) - k_1xK_1(k_1x)]. \quad (4.15)$$

---

* Леб (Loeb, 1959) изучает распространение электромагнитных волн в горизонтально-слоистой среде, пользуясь аналогией с распределением тока в линейной электрической сети. Решение проводится с помощью теории определителей. *А. В., Г. Ф.*

При больших величинах аргумента β имеет место асимптотическая формула:

$$K_n(\beta) \approx \left(\frac{\pi}{2\beta}\right)^{\frac{1}{2}}[e^{-\beta}$$

и если действительная часть $k_1x \gg 1$, то

$$E_0 \approx \frac{i\mu_0\omega Ik_0}{\pi(k_1^2-k_0^2)x}\,K_1(k_0x).$$

На расстояниях, больших по сравнению с длиной волны в воздухе $|k_0x| \gg 1$, предыдущее выражение упрощается:

$$E_0 \approx \frac{i\mu_0\omega Ik_0}{\pi(k_1^2-k_0^2)x}\left(\frac{\pi}{2k_0x}\right)^{\frac{1}{2}}e^{-k_0x}. \quad (4.16)$$

Для первичного поля $E_п$ линейного источника при том же самом условии получим

$$E_п = \frac{i\mu_0\omega I}{2\pi}K_0(k_0x) \approx \frac{i\mu_0\omega I}{2\pi}\left(\frac{\pi}{2k_0x}\right)^{\frac{1}{2}}e^{-k_0x}. \quad (4.17)$$

Отношения поля E_0 на поверхности раздела к первичному полю $E_п$

$$\frac{E_0}{E_п} \approx \frac{2k_0}{(2k_1^2-k_0^2)x}. \quad (4.18)$$

Этот результат будет правильным для любого источника, который образует волны, поляризованные горизонтально и распространяющиеся вдоль поверхности раздела. Например, такую же формулу можно получить из общего решения для электрического поля вертикального магнитного диполя, расположенного на поверхности раздела (гл. II, § 1).

Вертикальное магнитное поле на поверхности раздела связано с электрическим полем равенством:

$$H_{0z} = -\frac{1}{i\mu_0\omega}\frac{\partial E_y}{\partial x} = \frac{I}{\pi(k_1^2-k_0^2)x^3}\times$$

$$\times[2k_0xK_1(k_0x) + k_0^2x^2K_0(k_0x) -$$

$$- 2k_1xK_1(k_1x) - k_1^2x^2K_0(k_1x)]. \quad (4.19)$$

Если вещественная часть $k_1x \gg 1$, то

$$H_{0z} \approx \frac{k_0I}{\pi(k_1^2-k_0^2)x^2}\,[2K_1(k_0x) + k_0xK_0(k_0x)]. \quad (4.20)$$

Выражение (4.20) упростится для случая, когда $|k_0x| \gg 1$:

$$H_{0z} \approx \frac{k_0^2I}{\pi(k_1^2-k_0^2)x}\left(\frac{\pi}{2k_0x}\right)^{\frac{1}{2}}e^{-k_0x}. \quad (4.21)$$

Поле при очень низких частотах в точках вблизи линейного источника ($|k_0x| \ll 1$) выражается следующим образом:

$$H_{0z} = \frac{I}{\pi k_1^2 x^3}\,[2 - 2k_1xK_1(k_1x) - (k_1x)^2 K_0(k_1x)]. \qquad (4.22)$$

Первичное поле линейного источника в том же самом приближении

$$H_{\text{п}z} = -\frac{I}{2\pi}\frac{\partial}{\partial x}K_0(k_0x) \approx \frac{I}{2\pi x}. \qquad (4.23)$$

Отношение магнитного поля низкой частоты H_{0z} на поверхности раздела к первичному полю $H_{\text{п}z}$ имеет вид:

$$\frac{H_{0z}}{H_{\text{п}z}} = \frac{2}{k_1^2x^2}\,[2 - 2k_1xK_1(k_1x) - (k_1x)^2 K_0(k_1x)]. \qquad (4.24)$$

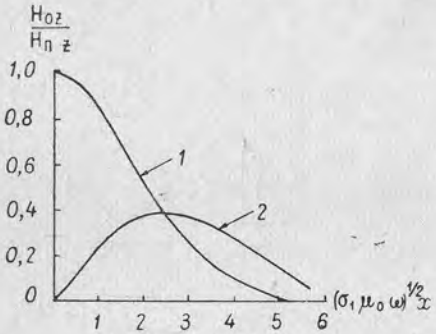


Рис. 8. Графики $\frac{H_{0z}}{H_{\text{п}z}}$ для однородного полупространства.

(1 — вещественная компонента, 2 — мнимая компонента, $|k_0x| \ll 1$).

Аргумент параметра k_1x равен $\frac{\pi}{4}$ радиан в случае малых токов смещения. Значения $\frac{H_{0z}}{H_{\text{п}z}}$ в зависимости от $|k_1x|$ представлены на рис. 8.

Тангенциальное магнитное поле на поверхности раздела в случае, когда $|k_0x| \ll 1$, определяется интегральным выражением:

$$H_{0x} = \lim_{a\to 0}\frac{I}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos(x\lambda)\,\lambda\, e^{-a\lambda}}{u_1+\lambda}\,d\lambda, \qquad (4.25)$$

которое можно записать так:

$$H_{0x} = \lim_{a\to 0}\frac{I}{2\pi k_1^2}\int_0^\infty \lambda(u_1-\lambda)\cos(x\lambda)\,e^{-a\lambda}d\lambda. \qquad (4.26)$$

Используя формулу, приводимую у Ватсона (1949, стр. 422), представим множитель $u_1 - \lambda$ в виде интеграла:

$$H_{0x} = \lim_{a\to 0}\frac{I}{\pi k_1}\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\lambda t}J_1(k_1t)\,t^{-1}\lambda\, e^{-a\lambda}\cos x\lambda\, dt\, d\lambda. \qquad (4.27)$$

Интегрируя по λ, получим

$$H_{0x} = \frac{I}{\pi k_1}\frac{\partial}{\partial x}\left[x\int_0^\infty \frac{J_1(k_1t)\,dt}{(t^2+x^2)\,t}\right]. \qquad (4.28)$$

Применяя интеграл, имеющийся у Ватсона (1949, стр. 468), запишем:

$$H_{0x} = \frac{I}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{1}{k_1x}\,[I_1(k_1x) - \mathbf{L}_1(k_1x)]\right\}, \qquad (4.29)$$

где I_1 — функция Бесселя мнимого аргумента и $\mathbf{L}_1$ функция Никольсона, определение которой приводится у Ватсона (1949, стр. 360). Для малых величин $|k_1x|$ тангенциальное магнитное поле определяется приближенным выражением:

$$H_{0x} \approx \frac{1}{2\pi x}\left(\frac{kx}{2}\right)^{\frac{1}{2}}. \qquad (4.30)$$

3. Тонкий пласт. Общее решение для M слоев можно использовать для вычисления поля линейного источника, расположенного на высоте h над тонким пластом мощности d_1 и электропроводности σ_1. С этой целью в уравнение (4.12) вводится подстановка $\mu_m = \mu_0$, $M = 2$, $k_2 = k_0$, причем полагается, что среда как выше, так и ниже пласта однородна. Электрическое поле в области $z < 0$

$$E_{0y} = \frac{i\mu_0\omega I}{2\pi}\left[K_0(k_0r_1) - K_0(k_0r_2) + \int_0^\infty \frac{2e^{(z-h)u_0}\cos x\lambda}{\hat{u}+u_0}\,d\lambda\right], \qquad (4.31)$$

где

$$\hat{u} = u_1\frac{u_0 + u_1\,\mathrm{th}\,u_1d_1}{u_1 + u_0\,\mathrm{th}\,u_1d_1}, \quad r_1^2 = (z+h)^2 + x^2,$$

$$r_2^2 = (z-h)^2 + x^2.$$

Если мощность пласта d_1 мала, а электропроводность σ_1 велика, то

$$\mathrm{th}\,u_1d_1 \approx u_1d_1, \quad \frac{\varepsilon_1\omega}{\sigma_1} \ll 1$$

и

$$u_1^2d_1 = (\lambda^2 + k_1^2)\,d_1 \approx 2i\hat{p},$$

где $\hat{p} = \frac{\sigma_1\mu_0\omega\, d_1}{2}$. Для больших значений $\hat{p}$, соответствующих высокой электропроводности пласта, интеграл в выражении (4.31) мал и поле характеризуется двумя членами, содержащими функции Бесселя. Второй из них соответствует отражению источника относительно поверхности раздела земля — воздух (r_1, r_2 — расстояния от кабеля и его отражения до точки наблюдения).

Считая электропроводность пласта ограниченной, оценим интеграл (4.31). Заменив в первом приближении $u_0 + \hat{u}$ на $2i\hat{p}$, получим приближенное выражение для электрического поля:

$$E_{0y} \approx \frac{i\mu_0\omega I}{2\pi}\left[K_0(k_0r_1) - K_0(k_0r_2) + \frac{i}{\hat{p}r_2}K_1(k_0r_2)\,k_0(z-h)\right]. \qquad (4.32)$$

В (4.32) применена формула, приводимая у Кэмпбелла и Фостера (1950). При низких частотах, когда $k_0 r_1$ и $k_0 r_2$ намного меньше единицы, выражение для напряженности электрического поля получается после подстановки $k_0 = 0$ в (4.31):

$$E_{0y} \approx \frac{i\mu_0 \omega I}{2\pi}\left[\ln\frac{r_2}{r_1} + \hat{J}(h-z)\right], \qquad (4.33)$$

где

$$\hat{J}(\beta) = \int_0^\infty (\lambda + i\hat{p})^{-1} e^{-\beta\lambda}\cos(x\lambda)\,d\lambda. \qquad (4.34)$$

Подставляя в (4.34) степенной ряд для $\cos x\lambda$, получим

$$\hat{J}(\beta) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(n!)^2}\int_0^\infty \frac{\lambda^{2n} e^{-\beta\lambda}}{\lambda + i\hat{p}}\,d\lambda. \qquad (4.35)$$

Интеграл, входящий в (4.35), сводится дифференцированием по β к следующему табулированному интегралу:

$$\int_0^\infty \frac{e^{-\beta\lambda}\,d\lambda}{\lambda + i\hat{p}} = -e^{i\beta\hat{p}}\,Ei(-i\beta\hat{p}). \qquad (4.36)$$

В итоге получим

$$\hat{J}(\beta) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(n!)^2}\,\hat{p}^{2n}\,\frac{\partial^{2n}}{\partial g^{2n}}\left[e^{ig}\,Ei(-ig)\right], \qquad (4.37)$$

где $g = \beta\hat{p}$. Заменив множитель $\lambda + i\hat{p}$ в (4.34) несобственным интегралом, найдем еще одно выражение для $\hat{J}(\beta)$:

$$\hat{J}(\beta) = -i\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(\beta - ia)\lambda}\,e^{-\hat{p}a}\cos x\lambda\,d\lambda\,da. \qquad (4.38)$$

После интегрирования по λ найдем, что

$$\hat{J}(\beta) = -i\int_0^\infty \frac{e^{-\hat{p}a}(\beta - ia)}{(\beta - ia)^2 + x^2}\,da, \qquad (4.39)$$

вычисляя который по частям, получим

$$\hat{J}(\beta) = \lim_{a\to 0} i\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\hat{p}}\right)^{n+1}\frac{\partial^n}{\partial a^n}\,\frac{(\beta - ia)}{(\beta - ia)^2 + x^2} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{i}{\hat{p}}\right)^{n+1}\frac{\partial^n}{\partial\beta^n}\left(\frac{\beta}{\beta^2 + x^2}\right). \qquad (4.40)$$

Составляющие магнитного поля можно выразить через интеграл $\hat{J}(\beta)$ с помощью уравнений Максвелла. Например, составляющая вертикального магнитного поля в точке $z = 0$ на расстоянии x от линейного источника имеет вид:

$$H_{0z} = H_{\text{п}\,z}\left(1 - \frac{x}{r_2} - x\,\frac{\partial J}{\partial x}\right). \qquad (4.41)$$

Наблюдения проводятся на высоте h, равной превышению линейного источника над пластом. Первичное поле $H_{\text{п}\,z}$ линейного источника

$$H_{\text{п}\,z} = \frac{I}{2\pi x}. \qquad (4.42)$$

Отношение $\frac{H_{0z}}{H_{\text{п}\,z}}$ нанесено на рис. 9 как функция параметра $\hat{p}x = \frac{\sigma_1\mu_0\omega\,d_1 x}{2}$ для различных величин отношения $\frac{x}{d_1}$. Из графиков следует, что пласт ведет себя как идеально проводящая поверхность на высоких частотах, когда $g \gg 1$.

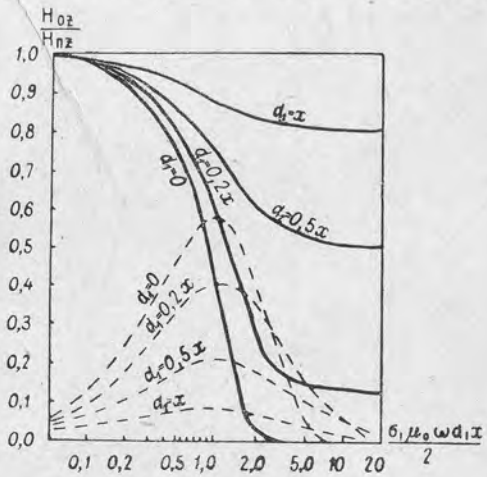


Рис. 9. Графики $\frac{H_{0z}}{H_{\text{п}z}}$ для тонкого пласта (сплошная линия — вещественная компонента, пунктир — мнимая компонента, d_1 — толщина пласта, σ_1 — его проводимость, $|k_0 x| \ll 1$).

Примененный здесь ход решения аналогичен разобранному в конце § 2 главы II для случая дипольного источника над тонким слоем.

4. Произвольное число слоев и частный случай двухслойной среды. Для оценки интегралов в случае любого числа слоев вводятся приближенные условия. Поле линейного источника на поверхности $z = h = 0$ записывается в виде интеграла:

$$E_0 = \int_0^\infty \frac{\cos x\lambda}{u_0 + \hat{u}}\,d\lambda, \qquad (4.43)$$

где

$$\frac{\hat{u}}{u_1} = \frac{\frac{Z_2}{K_1} + \operatorname{th} u_1 d_1}{1 + \frac{Z_2}{K_1}\operatorname{th} u_1 d_1}, \qquad (4.44)$$

причем величина Z_2 связана с нижними слоями среды и определяется равенствами (4.7), (4.8). Оказывается, когда d_1 достаточно велико, правая часть равенства (4.44) равна единице,

а поле совпадает с полем в случае однородного полупространства. Если обосновано приближение

$$u_m = (\lambda^2 + k_m^2)^{\frac{1}{2}} \approx k_m,$$

то это означает, что подынтегральное выражение (4. 43) имеет наибольшее значение для величин λ малых в сравнении с k_m.

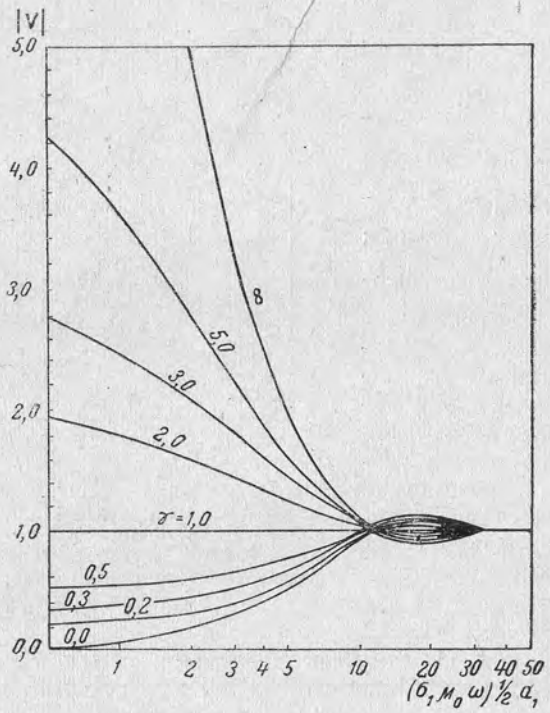


Рис. 10. Графики модуля функции V.

Последнее в свою очередь приводит к тому, что $|k_m x|$ должно быть намного больше единицы. Физический смысл подстановки $\lambda = 0$ в выражение для u_m заключается в том, что угол преломления для плоской волны очень мал по сравнению с углом падения.

Приближенные выражения (4. 44) можно переписать следующим образом:

$$\frac{\hat{u}}{u_1} \approx \frac{\frac{\overline{k}_2}{k_1} + \operatorname{th} k_1 d_1}{1 + \frac{\overline{k}_2}{k_1} \operatorname{th} k_1 d_1} = \frac{1}{V}, \qquad (4.45)$$

где

$$\frac{\overline{k}_m}{k_m} = \frac{\frac{\overline{k}_{m+1}}{k_m} + \operatorname{th} k_m d_m}{1 + \frac{\overline{k}_{m+1}}{k_m} \operatorname{th} k_m d_m}. \quad \overline{k}_M = k_M \, (m = 1, 2, 3, \ldots, M-1)$$

Для $\hat{u}$ можно записать, что $\hat{u} \approx (\lambda^2 + \hat{k}^2)^{\frac{1}{2}}$, где $\hat{k}$ — эффективное волновое число слоистой среды. В том же самом приближении получим:

$$\hat{k} \approx \frac{k_1}{V}. \qquad (4.46)$$

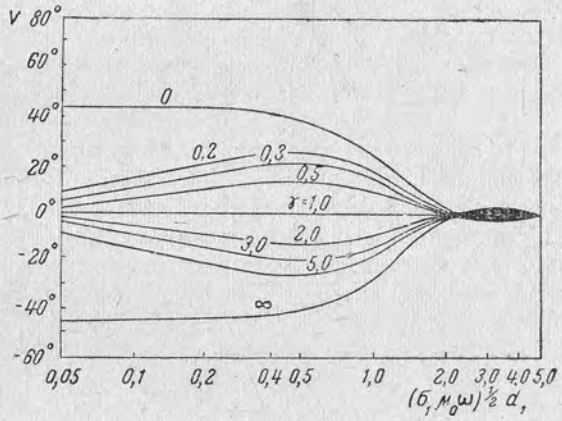


Рис. 11. Графики аргумента функции V.

Используя результаты анализа для однородного полупространства, найдем, что электрическое поле на поверхности слоистой среды*

$$E_0 \approx \frac{i\,\mu_0 \omega\, I k_0}{\pi (k_1^2 - k_0^2)\, x} K_1(k_0 x)\, V^2, \qquad (4.47)$$

когда $|\hat{k}x| \gg 1$. Коэффициент V^2 можно интерпретировать как поправочный множитель, учитывающий расслоения в полупространстве. По аналогии можно определить составляющую магнитного поля H_{0z} тем же самым выражением, что и в случае однородного полупространства с добавлением в виде множителя коэффициента V^2.

* Уэйт дал упрощенные выражения для той зоны электромагнитного поля, которая в отечественной литературе называется волновой. Асимптотические выражения, приводящие к таким упрощениям, широко используются в СССР. Их можно найти в работах Ваньяна (1957), Дмитриева (1959), Козулина (1959), Гасаненко, Шолпо (1960) и других авторов. *Ред.*

Рассмотрим природу функции V для случая полупространства, состоящего из двух слоев ($M = 2$). Будем полагать, что токи смещения незначительны по сравнению с токами проводимости, то есть

$$\frac{\varepsilon_m \omega}{\sigma_m} \ll 1. \quad (m = 1, 2).$$

В таком приближении поправочный коэффициент

$$V = |V| e^{iv} = \left[\frac{1 + \gamma \operatorname{th}(d_1^* e^{\frac{i\pi}{4}})}{\gamma + \operatorname{th}(d_1^* e^{\frac{i\pi}{4}})} \right]^{-1}, \tag{4.48}$$

где

$$d_1^* = (\sigma_1 \mu_0 \omega)^{\frac{1}{2}} d_1, \ \gamma = \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Величины $|V|$ и v нанесены на рис. 10, 11 в зависимости от безразмерного волнового числа слоя d_1^*. Если $d_1^* > 5$, то поправочный коэффициент незначительно отличается от единицы. В этом случае поля имеют те же самые значения, что и для однородного полупространства.

ЧАСТЬ ВТОРАЯ

ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ ИНДУКЦИЯ В ПРОВОДЯЩИХ ТЕЛАХ ПРОСТОЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ФОРМЫ

Глава V

ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ ИНДУКЦИЯ В ТЕЛАХ ВРАЩЕНИЯ

В настоящей главе рассматриваются электромагнитные поля различных источников в присутствии проводников, имеющих форму сферы и цилиндра. В геофизической практике таким проводникам соответствуют хорошо проводящие рудные тела, изометрические или веретенообразные.

Общая теория плоских электромагнитных волн вблизи проводящей сферы разработана еще Ми (Mie, 1908) и Дебаем (1909)*. Уэйт (1951b) рассмотрел задачу проводящей сферы в однородных гармонической и ступенчатой формы полях. Уорд (Ward, 1959) развил решение Уэйта для случая магнитной проводящей сферы. Задача сферы в поле рамочного источника (магнитного диполя) разобрана Марчем (March, 1953). Уорд, используя решение Марча, получил формулы для магнитной проводящей сферы. Уэйт рассмотрел задачу о магнитной проводящей сфере в присутствии соленоидальной рамки (1953) и произвольно ориентированного магнитного диполя (1960a). В последней работе разобрана также задача о цилиндре и идеально проводящем сфероиде в поле произвольно ориентированного диполя. Уэйт (1952) вывел также формулы для случая цилиндрического проводника в поле бесконечно длинного кабеля.

Рассматриваемые решения проведены с учетом конечной проводимости тел, а в отдельных случаях и вмещающих сред. При выводе этих решений делается допущение, оправдываемое на практике в большинстве случаев, о пренебрежимой малости токов смещения по сравнению с токами проводимости.

Заслуживают внимания и другие работы по дифракции поля на телах вращения, которые вследствие небольшого объема настоящего обзора, а также из-за сложной формы, в которой представлены конечные результаты, здесь не рассматриваются. К ним относятся статьи Стивенсона (Stevenson, 1953, 1953a). Последний ищет решение для поля дифракции в виде разложения по степеням отношения размера проводящего тела к длине волны. Для определения коэффициентов ряда Стивенсон решает уравнение

---

* См. также Франк и Мизес (1937, стр. 898). *А. В., Г. Ф.*

Лапласа в соответствующей системе координат, а также вычисляет некоторые интегралы (1953). Общая теория использована им для нахождения решения в случае эллипсоида. Решение представлено при помощи эллиптических интегралов, оно становится элементарным для случая сфероида.

Следует также упомянуть работу Сеньора (Senior, 1960), который, пользуясь рядами Рэлея, развил известное строгое скалярное решение дифракции плоской волны на вытянутом сфероиде.

В СССР аналогичными вопросами занимались Дьяконов (1959, 1960), Белкина (1957), Овчинников (1957), Каменецкий, Кауфман и Якубовский (1957, 1959), Никитина (1956) и др.

§ 1. Проводящая сфера в однородном поле (Уэйт, 1951b, Уорд, 1959)

1. Вертикальная и радиальная составляющие поля. Сфера радиуса a, с проводимостью σ_1, магнитной проницаемостью μ_1 и диэлектрической постоянной ε_1, погружена в неограниченную среду с постоянными σ_2, μ_2 и ε_2 (см. рис. 1). Вблизи сферы первичное поле имеет вид $H_{\text{п}}e^{i\omega t}$. Допущение об однородности внешнего поля сводится к требованию, чтобы размеры сферы были значительно меньше длины волны в окружающей среде. Таким образом $|k_2 a| \ll 1$, где k_2 волновое число вмещающей среды: $k_2 = [i\sigma_2\mu_2\omega - \varepsilon_2\mu_2\omega^2]^{\frac{1}{2}}$. Проводимость сферы однако может быть достаточно большой и на параметр $|k_1 a|$, где $k_1 = [i\sigma_1\mu_1\omega - \varepsilon_1\mu_1\omega^2]^{\frac{1}{2}}$, ограничений не накладывается. Центр сферы помещается в начало системы сферических координат. Полярная ось Oz параллельна первичному полю. Используется система единиц MKS.

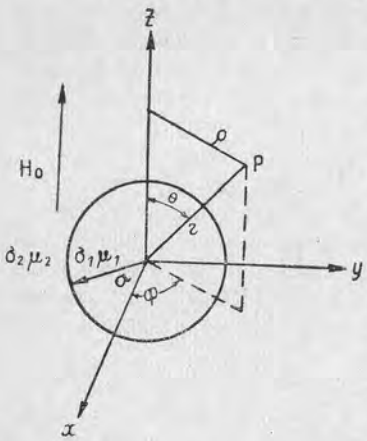


Рис. 1.

Магнитное поле повсюду можно выразить при помощи z-компоненты магнитного вектор-потенциала $\boldsymbol{F}$, так как вихревые токи имеют лишь ϕ-составляющую:

$$\boldsymbol{H} = -(\sigma + i\omega\varepsilon)\boldsymbol{F} + \frac{1}{i\mu\omega}\operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{F}. \qquad (1.1)$$

Магнитный вектор-потенциал $\boldsymbol{F}_{\text{п}}$ первичного поля

$$\boldsymbol{F}_{\text{п}z} = -(\sigma_2 + i\omega\varepsilon_2)^{-1} H_{\text{п}}. \qquad (1.2)$$

Выражения для магнитного вектора $\boldsymbol{F}_1$ внутри сферы и $\boldsymbol{F}_2$ вне сферы:

$$F_{1z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n \hat{I}_n(k_1 r)}{r} P_n(\cos\theta)\, i\mu_1\omega, \qquad (1.3)$$

$$F_{2z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n \hat{K}_n(k_2 r)}{r} P_n(\cos\theta)\, i\mu_2\omega - (\sigma_2 + i\omega\varepsilon_2)^{-1} H_{\text{п}}, \qquad (1.4)$$

где

$$\hat{I}_n(z) = \left(\frac{\pi z}{2}\right)^{\frac{1}{2}} I_{n+\frac{1}{2}}(z), \quad \hat{K}_n(z) = \left(\frac{2z}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} K_{n+\frac{1}{2}}(z),$$

а $I_{n+\frac{1}{2}}(z)$ и $K_{n+\frac{1}{2}}(z)$ функции Бесселя от мнимого аргумента (Ватсон, 1949, стр. 94), $P_{\text{п}}(\cos\theta)$ — полиномы Лежандра. Граничные условия заключаются в непрерывности тангенциальной составляющей магнитного поля и нормальной составляющей магнитной индукции при $r = a$. Это равносильно требованию $a_n = b_n = 0$ для $n > 0$. Тогда выражения для вектор-потенциалов примут вид:

$$F_1 = \frac{i\mu_1\omega b_0 \operatorname{sh} k_1 r}{r}, \quad (r \leqslant a), \qquad (1.5)$$

$$F_2 = -(\sigma_2 + i\omega\varepsilon_2)^{-1} H_{\text{п}} + \frac{i\mu_2\omega a_0 e^{-k_2 r}}{r}. \quad (r \geqslant a) \qquad (1.6)$$

Граничные условия формулируются следующим образом:*

$$\mu_2\left(\frac{1}{r}\frac{\partial F_1}{\partial r} - k_1^2 F_1\right) = \mu_1\left(\frac{1}{r}\frac{\partial F_2}{\partial r} - k_2^2 F_2\right)$$
$$\frac{\partial^2 F_1}{\partial r^2} - k_1^2 F_1 = \frac{\partial^2 F_2}{\partial r^2} - k_2^2 F_2. \qquad (r = a)$$

Решая эти уравнения относительно a_0, получим:

$$a_0 = H_{\text{п}} a^3 \left[\frac{2\mu_1(\operatorname{sh}\alpha - \alpha\operatorname{ch}\alpha) + \mu_2(\operatorname{sh}\alpha - \alpha\operatorname{ch}\alpha + \alpha^2\operatorname{sh}\alpha)}{2\mu_1(\operatorname{sh}\alpha - \alpha\operatorname{ch}\alpha) - 2\mu_2(\operatorname{sh}\alpha - \alpha\operatorname{ch}\alpha + \alpha^2\operatorname{sh}\alpha)}\right], \qquad (1.7)$$

где

$$\alpha = [i\sigma_1\mu_1\omega - \varepsilon_1\mu_1\omega^2]^{\frac{1}{2}} a, \quad (k_2 a \ll 1)$$

или

$$a_0 = -\frac{3}{2} H_{\text{п}} a^3 (\hat{M} + i\hat{N}) \qquad (1.8)$$

и

$$\hat{M} + i\hat{N} = -\frac{2}{3}\left[\frac{2\mu_1(\operatorname{sh}\alpha - \alpha\operatorname{ch}\alpha) + \mu_2(\operatorname{sh}\alpha - \alpha\operatorname{ch}\alpha + \alpha^2\operatorname{sh}\alpha)}{2\mu_1(\operatorname{sh}\alpha - \alpha\operatorname{ch}\alpha) - 2\mu_2(\operatorname{sh}\alpha - \alpha\operatorname{ch}\alpha + \alpha^2\operatorname{sh}\alpha)}\right]. \qquad (1.9)$$

---

* В определении величин F, α, а также в граничных условиях Уэйтом допущены неточности, которые здесь устранены. *Ред.*

Тогда магнитное поле вне сферы определяется равенствами:

$$H_z(\omega) = -\frac{3}{2} H_{\text{п}} a^3 (\hat{M} + i\hat{N}) \left(-\frac{1}{r^3} + \frac{3z^2}{r^5}\right) + H_{\text{п}} \qquad (1.10)$$

и

$$H_\varrho(\omega) = -\frac{3}{2} H_{\text{п}} a^3 (\hat{M} + i\hat{N}) \frac{3z\varrho}{r^5}. \qquad (1.11)$$

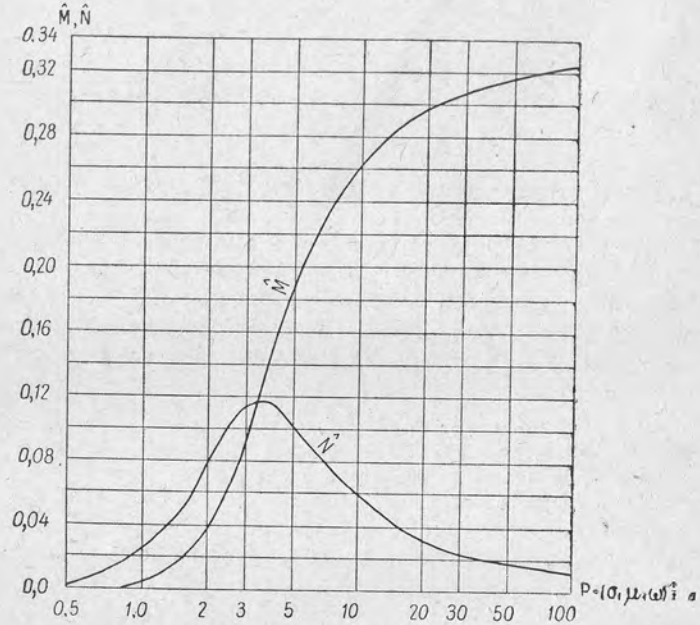


Рис. 2. Графики $\hat{M}$, $\hat{N}$ в зависимости от параметра $p=(\sigma_1\mu_1\omega)^{\frac{1}{2}} a$.

Составляющая по оси Oz поля вертикального диполя в системе цилиндрических координат имеет вид:

$$H_z(\omega) = \frac{\overline{M}}{4\pi}\left[-\frac{1}{r^3} + \frac{3z^2}{r^5}\right]. \qquad (1.12)$$

Отсюда величину

$$\overline{M} = -\frac{3}{2} H_{\text{п}} a^3 (\hat{M} + i\hat{N}) \cdot 4\pi \qquad (1.13)$$

можно рассматривать как эквивалентный дипольный момент сферы.

Полученный результат — частный случай задачи о плоской волне, падающей на сферу, когда $|k_2 a| \ll 1$ [Бриллуен (Brillouin, 1949)].

Рассмотрим случай, когда проводимость сферы значительно больше проводимости внешней среды, а магнитные проницаемости сферы и вмещающей среды равны магнитной проницаемости воздуха $\mu_1 = \mu_2 = \mu = 4\pi\ 10^{-7}\ \frac{\text{гн}}{\text{м}}$, тогда

$$\hat{M} + i\hat{N} = \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{3} - \frac{\operatorname{ch}\alpha}{\alpha \operatorname{sh}\alpha}. \qquad (1.14)$$

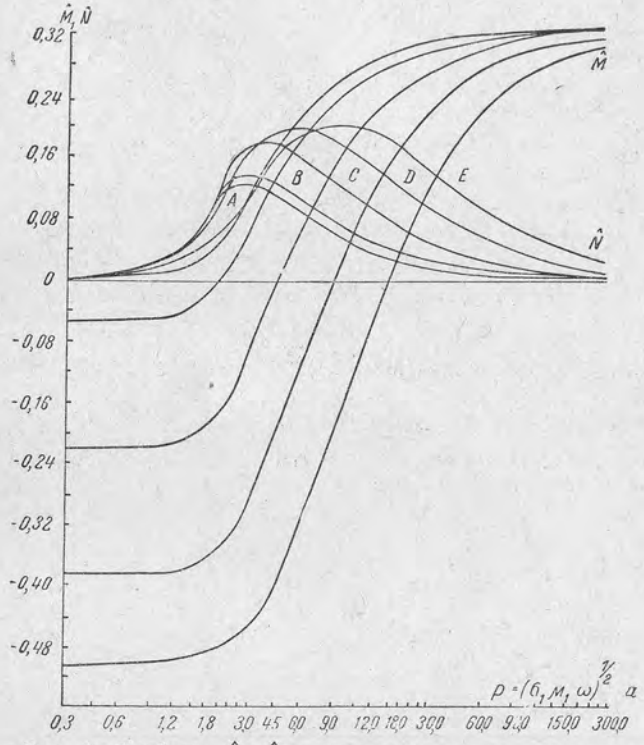


Рис. 3. Графики $\hat{M}$, $\hat{N}$ в зависимости от параметра $p=(\sigma_1\mu_1\omega)^{\frac{1}{2}} a$. Кривым A, B, C, D, E соответствуют значения $\frac{\mu_1}{\mu_2} = 1{,}0;\ 1{,}25;\ 2{,}5;\ 5{,}0;\ 10{,}0$.

Вещественная $\hat{M}$ и мнимая $\hat{N}$, составляющие в зависимости от параметра $p = (\sigma_1\mu\omega)^{\frac{1}{2}} a$, показаны на рис. 2. При вычислениях сделано допущение о пренебрежимо малой величине токов смещения ($\sigma_1 \gg \varepsilon_1\omega$).

Полезно рассмотреть более общий случай, когда отношение магнитных проницаемостей $\frac{\mu_1}{\mu_2} \neq 1$. Вычисление $\hat{M}$ и $\hat{N}$ для пяти значений отношения $\frac{\mu_1}{\mu_2}$ проведено Уордом (1959), и резуль-

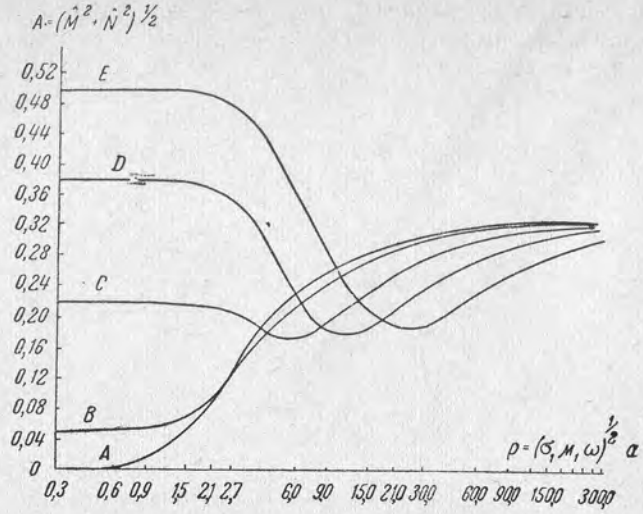


Рис. 4. Графики $A=(\hat{M}^2+\hat{N}^2)^{\frac{1}{2}}$ в зависимости от параметра $p=(\sigma_1\mu_1\omega)^{\frac{1}{2}}\,a$. Кривым A, B, C, D, E соответствуют значения $\frac{\mu_1}{\mu_2}=1{,}0;\ 1{,}25;\ 2{,}5;\ 5{,}0;\ 10{,}0$.

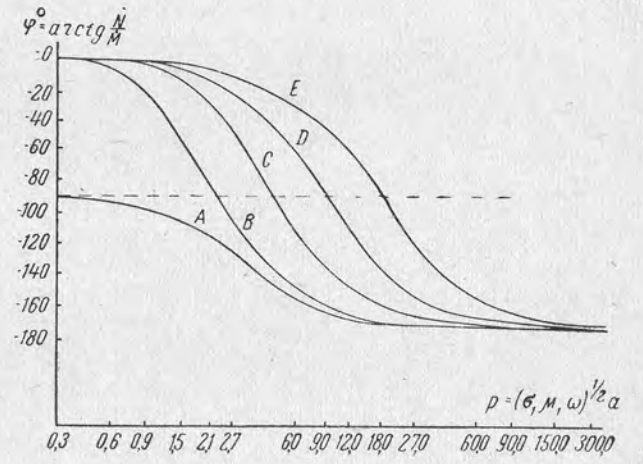


Рис. 5. Графики $\varphi=\operatorname{arctg}\frac{\hat{N}}{\hat{M}}$ в зависимости от параметра $p=(\sigma_1\mu_1\omega)^{\frac{1}{2}}\,a$. Кривым A, B, C, D, E соответствуют значения $\frac{\mu_1}{\mu_2}=1{,}0;\ 1{,}25;\ 2{,}5;\ 5{,}0,\ 10{,}0$.

таты представлены в графической форме на рис. 3, 4 и 5. Графики вторичного поля для $\mu_1=5{,}0\,\mu_2$ или $\mu_1=10{,}0\,\mu_2$ могут относиться к сферическому телу из массивного магнетита в относительно немагнитной породе. Графики для $\mu_1==1{,}25\,\mu_2$ могут быть связаны со сферическим пирротиновым телом также в немагнитной породе. Предполагается, что величина $\frac{\mu_1}{\mu_2}$ не зависит от напряженности поля. Это предположение, по-видимому, справедливо, так как напряженности полей в рассматриваемом случае незначительны. Хейланд (Heiland, 1946) приводит кривые гистерезиса и магнитной восприимчивости для образца магнетита, откуда следует, что при напряженности поля до 10 *а/м* можно ограничиться только начальной восприимчивостью.

Соответствующую задачу для переходных процессов можно решить, если принять как и выше, что для большинства наиболее употребительных частот в спектре $|k_2a|\ll 1$ и $\sigma_1\gg\varepsilon_1\omega$. Это допущение справедливо, если момент измерения t для ступенчатой формы магнитного поля всегда удовлетворяет неравенствам $t\gg\sigma_2\mu\,a^2$ и $t\gg\frac{\varepsilon_1}{\sigma_1}$. Принимается также, что магнитные проницаемости $\mu_1=\mu_2=\mu=4\pi\,10^{-7}$ *гн/м*. Установившееся гармоническое вторичное поле H_z или H_ϱ можно записать следующим образом:

$$H(i\omega)=K\left[\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{3}-\frac{\operatorname{ch}\alpha}{\alpha\operatorname{sh}\alpha}\right]H_{\text{п}}(i\omega), \qquad (1.15)$$

где K — постоянная. Неустановившееся поле можно вычислить при помощи интеграла Фурье:

$$h(t)=\frac{K}{2\pi i}\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty}\left[\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{3}-\frac{\operatorname{ch}\alpha}{\alpha\operatorname{sh}\alpha}\right]H_{\text{п}}(i\omega)\,e^{i\omega t}\,d(i\omega). \qquad (1.16)$$

Если первичное поле $h_{\text{п}}(t)$ есть ступенчатая функция

$$h_{\text{п}}(t)=H_{\text{п}}u(t),$$

где

$$u(t)=1 \text{ для } t>0,$$
$$u(t)=0 \text{ для } t<0,$$

то

$$H_{\text{п}}(i\omega)=\frac{H_{\text{п}}}{i\omega}.$$

Здесь $H_{\text{п}}(i\omega)$ можно рассматривать как спектральную функцию ступенчатого первичного поля. С другой стороны, $H(i\omega)$ есть спектральная функция вторичного поля. В интеграле (1.16) c — малая положительная вещественная постоянная. Для удобства заменим $i\omega$ на s:

$$h(t)=\frac{H_{\text{п}}K}{2\pi i}\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty}\left[\frac{1}{\beta^2 s^2}+\frac{1}{s}-\frac{\operatorname{cth}\beta\,s^{\frac{1}{2}}}{\beta\,s^{\frac{3}{2}}}\right]e^{st}\,ds, \qquad (1.17)$$

где

$$\beta = (\sigma_1 \mu)^{\frac{1}{2}} a.$$

Интегрирование первых двух членов подынтегрального выражения не представляет трудности. Третий член раскладывается в ряд

$$\frac{\operatorname{cth} \beta s^{\frac{1}{2}}}{\beta s^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\beta s^{\frac{3}{2}}} \left[\frac{1 + e^{-2\beta s^{\frac{1}{2}}}}{1 - e^{-2\beta s^{\frac{1}{2}}}} \right] =$$

$$= \frac{1}{\beta s^{\frac{3}{2}}} [1 + e^{-2\beta s^{\frac{1}{2}}} + e^{-4\beta s^{\frac{1}{2}}} + e^{-2\beta s^{\frac{1}{2}}} + \ldots] =$$

$$= \frac{1}{\beta} \left[\frac{1}{s^{\frac{3}{2}}} + 2 \sum_{1}^{\infty} \frac{e^{-2n\beta s^{\frac{1}{2}}}}{s^{\frac{3}{2}}} \right], \qquad (1.18)$$

что приводит к бесконечному ряду интегралов следующего типа (Кэмпбелл, Фостер, 1950):

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} s^{-\frac{3}{2}} e^{-ms^{\frac{1}{2}}} e^{st} ds =$$

$$= m \left[\frac{t^{\frac{1}{2}}}{m} erf' \left(\frac{mt^{-\frac{1}{2}}}{2} \right) - erfc \left(\frac{mt^{\frac{1}{2}}}{2} \right) \right].$$

Тогда вторичное поле определяется при помощи функции $P(t)$:

$$P(t) = \frac{h(t)}{K} = x^2 +$$

$$+ \frac{1}{3} - 2\pi^{-\frac{1}{2}} x - \sum_{1}^{\infty} 2n \left[\frac{x}{n} erf' \left(\frac{n}{x} \right) - 2erfc \left(\frac{n}{x} \right) \right], \qquad (1.19)$$

где

$$x = \frac{t^{\frac{1}{2}}}{\beta} = \frac{t^{\frac{1}{2}}}{(\sigma\mu)^{\frac{1}{2}} a}.$$

В приведенных выше выражениях erf' и $erfc$ — первая производная интеграла вероятности и его дополнение до 1 (Янке и Эмде, 1959). Вторичное поле в точке P вне сферы под действием ступенчатой формы магнитного поля имеет следующий вид:

$$h_z(t) = \frac{3}{2} H_п a^3 P(t) \left[\frac{1}{r^3} - \frac{3z^2}{r^5} \right] u(t) \qquad (1.20)$$

и

$$h_Q(t) = \frac{3}{2} H_п a^3 P(t) \frac{3zQ}{r^5} u(t). \qquad (1.21)$$

Функция $P(t)$ показана на рис. 6.

2. Определение глубины, магнитной проницаемости, радиуса и проводимости сферы. Рассмотрим сначала решение для гармонического поля. Из рис. 3 видно, что есть некоторая «критическая» угловая частота $\omega_к$, при которой равна нулю вещественная

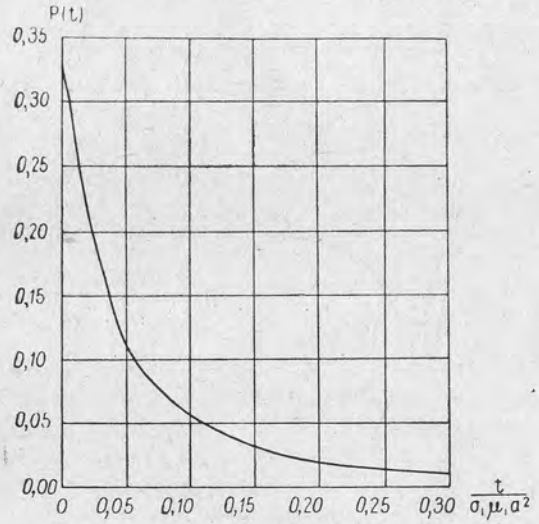


Рис. 6. График $P(t)$ в зависимости от параметра $\frac{t}{\sigma_1 \mu_1 a^2}$.

составляющая вторичного поля. Критическая частота зависит от магнитной проницаемости, проводимости и радиуса сферы и отделяет область, где эквивалентный дипольный момент сферы положителен (преобладающим физическим свойством является магнитная проницаемость), от области, где он отрицателен (преобладает проводимость). Такое распределение вторичных полей наводит на мысль о том, что можно создать один прибор, который может служить для поисков магнитных и проводящих тел. В том случае, когда искомый геологический объект обладает высокой проводимостью и высокой проницаемостью, существует определенная связь между магнитными и электромагнитными методами.

Определение глубины. Глубина залегания вычисляется из соотношения

$$H_Q(\omega) = \frac{\overline{M}}{4\pi} \frac{3zQ}{r^5}. \qquad (1.22)$$

Эта функция имеет максимум или минимум в точках $\varrho = \pm\frac{d}{2}$, когда глубина залегания $z = d$. Отсюда по кривой $H_\varrho(\omega)$, построенной в зависимости от ϱ для $y = 0$, находим d (рис. 7).

Определение магнитной проницаемости. Интересно отметить, что отношение магнитных проницаемостей сферического тела и окружающей среды можно определить, не зная истинного расположения, размеров и проводимости сферы. Для определения $\frac{\mu_1}{\mu_2}$ нужно создать однородное гармоническое поле и измерить вторичное поле в одной точке на низких и высоких частотах по обе стороны от критической частоты.

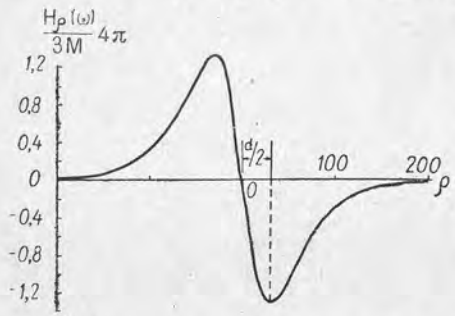


Рис. 7. Определение глубины до центра сферы d по кривой $H_\varrho(\omega)$.

Из формул (1. 7), (1. 9) и (1. 13) следует, что когда вторичное поле вихревых токов бесконечно мало, эквивалентный дипольный момент сферы

$$\overline{M}_0 = \frac{\mu_1-\mu_2}{\mu_1+2\mu_2} H_{\text{п}} a^3 \cdot 4\pi \quad (1.\ 23)$$

(положительный момент диполя). Эта формула характеризует вторичное поле сферы на любой частоте, если проводимость сферы равна нулю, или вторичное поле, экстраполированное до частоты, равной нулю, если проводимость не равна нулю. Таким образом из уравнения (1. 11) получим:

$$H_\varrho(0) = \frac{\mu_1-\mu_2}{\mu_1+2\mu_2} H_{\text{п}} a^3 \frac{3z\varrho}{r^5}. \quad (1.\ 24)$$

Подобно этому индуцированный дипольный момент сферы, когда сила вихревых токов максимальна (максимальное вторичное поле вихревого тока), выражается следующим образом:

$$\overline{M}_\infty = -\frac{H_0 a^3}{2} \cdot 4\pi \quad (1.\ 25)$$

(отрицательный дипольный момент). Это выражение характеризует вторичное поле сферы с конечной проводимостью при бесконечно большой частоте. Следует отметить, что в формуле (1. 9) $\hat{M} \to \frac{1}{3}$ и $\hat{N} \to 0$, когда $\omega \to \infty$. Из формулы (1. 11) следует:

$$H_\varrho(\infty) = -\frac{H_0 a^3}{2} \frac{3z\varrho}{r^5}. \quad (1.\ 26)$$

Знак перед $H_\varrho(\infty)$ обратен тому, который стоит перед $H_\varrho(0)$. Если измерено отношение $H_\varrho(0)$ к $H_\varrho(\infty)$ или $H_z(0)$ к $H_z(\infty)$, то

можно однозначно определить отношение проницаемостей $\frac{\mu_1}{\mu_2}$, так как

$$\frac{H_\varrho(0)}{H_\varrho(\infty)} = \frac{\overline{M}_0}{\overline{M}_\infty} = \frac{\hat{M}_0}{\hat{M}_\infty} = -2\left[\frac{\frac{\mu_1}{\mu_2}-1}{\frac{\mu_1}{\mu_2}+2}\right]. \quad (1.\ 27)$$

Это равенство использовалось для построения кривой на рис. 8.

Для определения $\frac{\mu_1}{\mu_2}$ измеряют составляющую $H_z(\omega)$ или $H_\varrho(\omega)$. Частоту меняют от низкой, на которой вторичное поле, обусловленное индукционными токами, равно нулю, до частоты, на которой это поле достигает максимума. Определив отношение полей в экстремальных точках, находят отношение проницаемостей $\frac{\mu_1}{\mu_2}$ по рис. 8. При определении $\frac{\mu_1}{\mu_2}$ нет надобности калибровать прибор по напряженности поля, поскольку требуется измерять отношение полей.

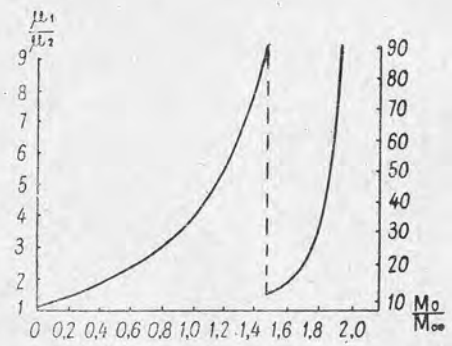


Рис. 8. График $\frac{\mu_1}{\mu_2}$ в зависимости от $\frac{M_0}{M_\infty}$.

Определение радиуса сферы. Определив глубину до центра сферы и отношение $\frac{\mu_1}{\mu_2}$, можно вычислить радиус сферы a. Из формулы (1. 24) находим, что

$$a^3 = \frac{H_\varrho(0)(\mu_1+2\mu_2)}{H_0(\mu_1-\mu_2)} \frac{(d^2+\varrho^2)^{\frac{5}{2}}}{3\varrho d} \quad (1.\ 28)$$

для любой точки поверхности, на которой ведутся наблюдения. Знак перед $H_\varrho(0)$ выбирается таким, чтобы величина a была положительной. Из равенства (1. 26) находим:

$$a^3 = -\frac{H_\varrho(\infty)}{H_0} \frac{2(d^2+\varrho^2)^{\frac{5}{2}}}{3\varrho d} \quad (1.\ 29)$$

для той же самой точки. Знак перед $H_\varrho(\infty)$ противоположен знаку $H_\varrho(0)$ в предыдущей формуле.

Формулы (1. 28) или (1. 29) используются для вычисления радиуса сферы, когда отношение $\frac{H_\varrho(\omega)}{H_п}$ измеряется в точке (ϱ, d). Определение d производится по разобранному выше правилу.

Определение проводимости. Значение безразмерного параметра $p = (\sigma_1\mu_1\omega)^{\frac{1}{2}} a$ определяется на какой-нибудь частоте, например на критической. Для этого из набора кривых (рис. 3) выбирается кривая, соответствующая определенному ранее значению $\frac{\mu_1}{\mu_2}$. Чтобы избежать интерполяции кривых в случае промежуточных значений $\frac{\mu_1}{\mu_2}$, на рис. 9 приводится график критических значений $p_к$ в зависимости от $\frac{\mu_1}{\mu_2}$. Обычно μ_2 можно оценить или измерить, откуда, зная $\frac{\mu_1}{\mu_2}$, можно определить μ_1. Поскольку a и μ_1 известны, можно вычислить σ_1.

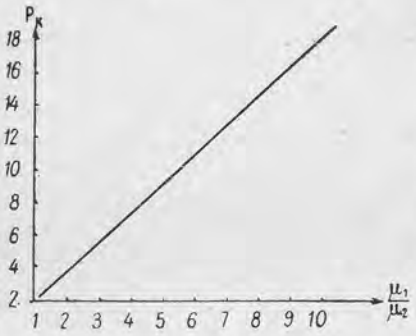


Рис. 9. График p_k в зависимости от $\frac{\mu_1}{\mu_2}$.

Параметр $\sigma_1\mu a^2 (\mu_1 = \mu_2 = \mu = 4\pi 10^{-7} \frac{гн}{м}$ можно также определить по вторичному полю, используя в передающем устройстве ток ступенчатой формы. Первичное поле будет также ступенчатой функцией. Вторичное поле определяется формулами (1. 20) и (1. 21). Если справедливы сделанные ранее приближения, то характер спада функции $P(t)$ зависит только от параметра $\sigma_1\mu a^2$. Условия, при которых рассматриваемые приближения допустимы, довольно жесткие. Тем не менее решение вполне удовлетворительно в случае большого сплошного сульфидного тела с проводимостью, например, $\sigma_1 = 10^2$ *мо/м*, в окружающей среде с проводимостью $\sigma_2 = 10^{-3}$ *мо/м*. Тело имеет радиус порядка 20 *м*. Время спадания вторичного магнитного поля до значения $P(t) = 0{,}12$ равно 2,4 *мсек*. Первичное поле в этом случае затухает за несколько микросекунд, то есть практически сразу же после выключения тока в источнике.

В случае измерения полей становления расстояние от поверхности до центра сферы, а также радиус сферы можно найти при помощи приемов, аналогичных описанным выше.

В заключение можно указать на следующее.

Если можно пренебречь остаточным намагничением, то гораздо проще определить $\overline{M}_0$ по результатам магнитометрической, а не индукционной съемки. Для того, чтобы уменьшить эффект остаточного магнетизма и уверенно оценить вторичное поле

в случае нулевой и бесконечно большой частоты, нужно исследовать стремление частоты к нулю или к бесконечности. Это обусловливает применение нескольких частот.

Таким образом, в случае сферического рудного тела, обладающего высокой магнитной проницаемостью и достаточно хорошей проводимостью, наблюдая переменное магнитное поле, можно определить радиус, глубину залегания, проводимость и относительную магнитную проницаемость тела. Если тело приближается по форме к сферическому, то пользуясь разобранными выше приемами, можно получить сведения о физических свойствах и элементах залегания некоторой эквивалентной телу сферы. Для тел, резко отличающихся по форме от сферы, этот анализ непригоден. Распределение векторов магнитного поля на поверхности земли позволяет судить о степени приближения к сфере.

Если сфера действительно имеет нулевую проводимость, тогда можно определить ее глубину так, как указывалось ранее. Кроме того, можно вычислить произведение

$$\frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1 + 2\mu_2} \cdot a^3.$$

Полное определение всех искомых величин невозможно. В этом случае бо́льшие возможности дает измерение гармонического, а не стационарного магнитного поля, так как при измерении гармонически изменяющихся полей остаточное намагничение оказывает сравнительно небольшое влияние *.

§ 2. Проводящая сфера в присутствии магнитного диполя

(Марч, 1953, Уорд, 1959)

В настоящем параграфе рассматривается общая задача определения поля магнитного диполя в присутствии проводящей сферы. Диполь и сфера располагаются внутри однородной среды. Из общих формул выводятся приближенные выражения для составляющих поля в частном случае, когда проводимость среды низка, радиус сферы мал и как диполь, так и точка наблюдения находятся в непосредственной близости от сферы. Эти приближенные результаты в пределах указанных ограничений применимы к задаче поисков изометрических рудных тел среди вмещающих горных пород.

Чтобы вывести поле, обусловленное магнитным диполем, помещенным в точке D (рис. 10) и имеющим произвольную ориентацию относительно линии OD, проведенной из O, центра сферы, к диполю, удобно изучить поля двух магнитных диполей —

* Рекомендации, данные в п. 2, § 1, в большинстве случаев на практике будет трудно исследовать, так как наблюдаемые поля представляют собой сумму многих аномалий и нормального поля. Все же в отдельных случаях воспользоваться ими можно. *Ред.*

«азимутального», ось которого перпендикулярна линии OD, и «радиального» с осью вдоль этой линии. Диполь любой ориентации может быть представлен посредством комбинации азимутального и радиального диполей.

1. Общее решение. Рассматриваются гармонические поля с периодом $\frac{2\pi}{\omega}$. Уравнения поля в рационализированной электростатической системе единиц имеют вид:

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{H} = \left[(i\,\varepsilon\omega + \sigma)\frac{1}{c}\right] \boldsymbol{E}, \tag{2.1}$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = -\frac{i\,\mu\omega}{c}\,\boldsymbol{H}, \tag{2.2}$$

где ε, μ и σ обозначают диэлектрическую постоянную, магнитную проницаемость и проводимость рассматриваемой среды, а c — скорость света.

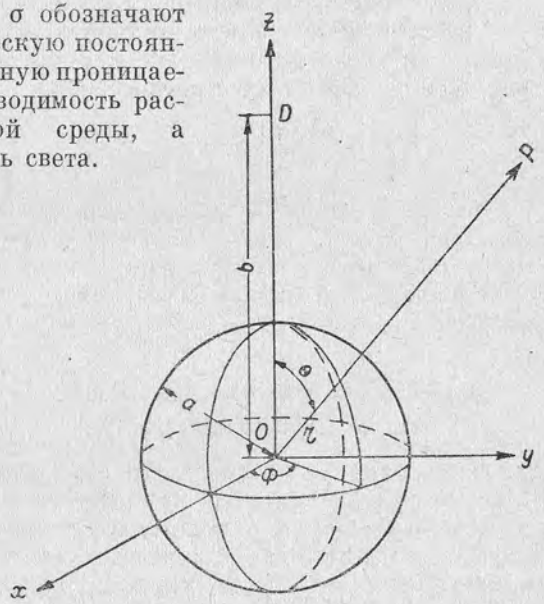


Рис. 10.

Используется система сферических координат r, θ и ϕ с началом в центре сферы (рис. 10). Компоненты электрического вектора $\boldsymbol{E}$ в этой системе координат обозначены через E_r, E_θ и E_ϕ, а составляющие магнитного вектора $\boldsymbol{H}$ через H_r, H_θ и H_ϕ. Введем следующие обозначения для постоянных среды:

$$\kappa_1 = (i\,\varepsilon\omega + \sigma)\frac{1}{c}, \tag{2.3}$$

$$\kappa_2 = \frac{i\,\mu\omega}{c}, \tag{2.4}$$

$$k^2 = -\kappa_1\kappa_2 = (\varepsilon\mu\omega^2 - i\,\mu\sigma\omega)\frac{1}{c^2}, \tag{2.5}$$

Ми (1908) и Дебай (1909) разлагают вычисляемое поле на два частных, для первого из которых исчезает радиальная компонента магнитного поля, а для второго исчезает радиальная компонента электрического поля. Дебай (1909) показал, что каждое поле может быть получено при помощи скалярного потенциала. Потенциалы первого и второго частных полей обозначены через u и v. Индексы *1* и *2* указывают на компоненты первого и второго полей. Последние выражены через потенциалы u и v посредством следующих равенств*:

$$E_{1r} = \frac{\partial^2 (ru)}{\partial r^2} + k^2 ru, \tag{2.6a}$$

$$E_{1\theta} = \frac{1}{r}\,\frac{\partial^2 (ru)}{\partial r \partial \theta}, \tag{2.6b}$$

$$E_{1\phi} = \frac{1}{r\sin\theta}\,\frac{\partial^2 (ru)}{\partial r \partial \phi}, \tag{2.6c}$$

$$H_{r1} = 0, \tag{2.7a}$$

$$H_{1\theta} = \frac{\kappa_1}{r\sin\theta}\,\frac{\partial (ru)}{\partial \phi}, \tag{2.7b}$$

$$H_{1\phi} = -\frac{\kappa_1}{r}\,\frac{\partial (ru)}{\partial \theta}, \tag{2.7c}$$

$$E_{r2} = 0, \tag{2.8a}$$

$$E_{2\theta} = -\frac{\kappa_2}{r\sin\theta}\,\frac{\partial (rv)}{\partial \phi}, \tag{2.8b}$$

$$E_{2\phi} = \frac{\kappa_2}{r}\,\frac{\partial (rv)}{\partial \theta}, \tag{2.8c}$$

$$H_{2r} = \frac{\partial^2 (rv)}{\partial r^2} + k^2 rv, \tag{2.9a}$$

$$H_{2\theta} = \frac{1}{r}\,\frac{\partial^2 (rv)}{\partial r \partial \theta}, \tag{2.9b}$$

$$H_{2\phi} = \frac{1}{r\sin\theta}\,\frac{\partial^2 (rv)}{\partial r \partial \phi}. \tag{2.9c}$$

Потенциалы u и v удовлетворяют волновому уравнению

$$\nabla^2 (u, v) + k^2 (u, v) = 0. \tag{2.10}$$

Решение задачи состоит в том, чтобы найти соответствующие первичному полю** диполя потенциалы u и v суммарных полей внутри и снаружи сферы. Эти потенциалы удовлетворяют дифференциальному уравнению (2.10) и граничным условиям. Граничные условия заключаются в том, чтобы тангенциальные

* Вывод соотношений (2.6) — (2.9) приведен у Франка и Мизеса (1937, стр. 892). Там же отмечена связь между потенциалами Дебая u и v и радиальными составляющими вектора Герца $\Pi_r = ru$ и $\Pi'_r = rv$. *А. В., Г. Ф.*

** Здесь и в дальнейшем под первичным полем подразумевается поле источника во вмещающей однородной среде. *А. В., Г. Ф.*

15 Заказ 860.

составляющие электрического и магнитного векторов были непрерывны на поверхности сферы. Индексы i и a используются для обозначения величин внутри или снаружи сферы. Граничные условия имеют вид:

$$E_{\theta a} = E_{\theta i}, \quad E_{\varphi a} = E_{\varphi i}, \quad H_{\theta a} = H_{\theta i}, \quad H_{\varphi a} = H_{\varphi i}, \quad (r = a) \qquad (2.11)$$

где a — радиус сферы.

Потенциалы Дебая для первичного поля диполя обозначим через $u_п$ и $v_п$, для вторичного поля снаружи сферы через u_a и v_a и суммарного поля внутри сферы через u_i и v_i. Из соотношений (2. 6), (2. 7), (2. 8) и (2. 9) видно, что условие (2. 11) выполняется, когда потенциалы удовлетворяют следующим равенствам при $r = a$:

$$\frac{\partial}{\partial r}(rZ_a + rZ_п) = \frac{\partial}{\partial r}(rZ_i), \qquad (2.12)$$

$$к_{ja}(rZ_a + rZ_п) = к_{ji} rZ_i, \qquad (2.13)$$

где $Z = u$ и $j = 1$ или $Z = v$ и $j = 2$.

Потенциалы $u_п$ и $v_п$ первичного поля выражаются в виде рядов, члены которых являются частными решениями волнового уравнения (2. 10). Потенциалы u_a, v_a, u_i, v_i будут выражаться аналогичными рядами, коэффициенты которых определяются таким образом, чтобы удовлетворялись условия (2. 12) и (2. 13).

Частные решения уравнения (2. 10) найдем обычным путем, положив

$$(u, v) = f_1(r) f_2(\theta) f_3(\varphi). \qquad (2.14)$$

Функции f_1, f_2 и f_3 при этом удовлетворяют дифференциальным уравнениям:

$$\frac{d^2(rf_1)}{dr^2} + \left[k^2 - \frac{n(n+1)}{r^2}\right] rf_1 = 0, \qquad (2.15)$$

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{df_2}{d\theta}\right) + \left[n(n+1) - \frac{\nu^2}{\sin^2\theta}\right] f_2 = 0, \qquad (2.16)$$

$$\frac{d^2 f_3}{d\varphi^2} + \nu^2 f_3 = 0. \qquad (2.17)$$

Решения этих уравнений хорошо известны. Постоянные n и ν выбираются целыми числами, чтобы обеспечить подходящее частное решение. Воспользуемся следующими решениями уравнения (2. 15):

$$rf_1 = \psi_n(kr) = \left(\frac{\pi kr}{2}\right)^{\frac{1}{2}} J_{n+\frac{1}{2}}(kr) =$$

$$= \pi^{\frac{1}{2}} \sum_{\gamma=0}^{\infty} (-1)^{\gamma} \frac{\left(\frac{kr}{2}\right)^{2\gamma+n+1}}{\Gamma(\gamma+1)\,\Gamma\left(\gamma+n+\frac{3}{2}\right)}, \qquad (2.18)$$

$$rf_1 = \zeta_n(kr) = \left(\frac{\pi kr}{2}\right)^{\frac{1}{2}} H^{(2)}_{n+\frac{1}{2}}(kr) =$$

$$= e^{i\pi(n+1)\frac{1}{2}} e^{-ikr}\Bigg[1 +$$

$$+ \sum_{\gamma=1}^{n}\left(\frac{-i}{2kr}\right)^{\gamma} \frac{(n-\gamma+1)(n-\gamma+2)\ldots(n+\gamma)}{\gamma!}\Bigg]^{*}, \qquad (2.19)$$

где $J_{n+\frac{1}{2}}(kr)$ обозначает функцию Бесселя первого рода порядка; $n + \frac{1}{2}$ и $H^{(2)}_{n+\frac{1}{2}}(kr)$ обозначает вторую функцию Ханкеля порядка $n + \frac{1}{2}$*. Функция $\psi_n(kr)$ стремится к нулю при $r = 0$, когда $n > -\frac{1}{2}$. Функция $\zeta(kr)$ становится бесконечной при $r = 0$ и стремится к нулю для величин аргумента, имеющих бесконечную отрицательную мнимую компоненту. Поэтому в качестве постоянной среды k выбирается такой корень уравнения (2. 5), у которого мнимая компонента отрицательна. Так как коэффициент $e^{i\omega t}$ входит в любое решение, то ясно, что $\zeta_n(kr)$ можно связать с расходящимися волнами. Для функции $\psi_n(x)$ существуют следующие рекуррентные соотношения:

$$(2n+1)\psi_n'(x) = (n+1)\psi_{n-1}(x) - n\psi_{n+1}(x),$$

$$(2n+1)\psi_n(x) = x[\psi_{n-1}(x) + \psi_{n+1}(x)]. \qquad (2.20)$$

Функция $\zeta_n(x)$ также удовлетворяет этим соотношениям.

Решениями уравнения (2. 16) являются присоединенные функции Лежандра

$$P_n^1(\cos\theta) = \sin^{\nu}\theta \frac{d^{\nu}P_n(\cos\theta)}{d(\cos\theta)^{\nu}}, \qquad (2.21)$$

где $P_n(\cos\theta)$ — зональная поверхностная гармоника порядка n.

Решения уравнения (2. 17) — тригонометрические функции $\sin\nu\varphi$ и $\cos\nu\varphi$. В рассматриваемом случае ν равняется 0 или 1.

Следует отметить, что в соответствии с (2. 21)

$$P_n^1(\cos\theta) = -\frac{dP_n(\cos\theta)}{d\theta}. \qquad (2.21a)$$

2. Азимутальный магнитный диполь. Пусть магнитный диполь единичного момента помещен в D (рис. 10) так, что ось его перпендикулярна OD, точка O — центр проводящей сферы радиуса a.

* Функции Ψ_n и ζ_n даются в обозначениях Дебая (1909). *А. В., Г. Ф.*

Возьмем в качестве оси Oz, от которой отсчитывается угол θ, направление OD и направим ось Ox, от которой отсчитывается угол ϕ параллельно оси диполя. Пусть $OD = b$. Координаты произвольной точки P равны r, θ и ϕ.

При помощи уравнений

$$\boldsymbol{E}_{\text{п}} = -\kappa_{2a} \operatorname{rot} \boldsymbol{\Pi}_{\text{п}}, \tag{2.22}$$

$$\boldsymbol{H}_{\text{п}} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \boldsymbol{\Pi}_{\text{п}} + k_a^2 \boldsymbol{\Pi}_{\text{п}}, \tag{2.23}$$

векторы $\boldsymbol{E}_{\text{п}}$ и $\boldsymbol{H}_{\text{п}}$ первичного поля можно вывести из выражения для вектора Герца*

$$\boldsymbol{\Pi}_{\text{п}} = \boldsymbol{n} \frac{e^{-ik_a R}}{R}, \tag{2.24}$$

где

$$R = (b^2 + r^2 - 2br\cos\theta)^{\frac{1}{2}} \tag{2.25}$$

и $\boldsymbol{n}$ — единичный вектор, имеющий направление оси диполя. Для функции $\frac{e^{-ik_a R}}{R}$ известны следующие разложения:

$$\frac{e^{-ik_a R}}{R} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \left[\zeta_n(k_a r) \cdot \frac{1}{r}\right] P_n(\cos\theta), \ (r > b) \tag{2.26}$$

$$\frac{e^{-ik_a R}}{R} = \sum_{n=0}^{\infty} d_n \left[\psi_n(k_a r) \cdot \frac{1}{r}\right] P_n(\cos\theta), \ (r < b) \tag{2.27}$$

где

$$c_n = -i(2n+1)\psi_n(k_a b)\frac{1}{k_a b}, \tag{2.28}$$

$$d_n = -i(2n+1)\zeta_n(k_a b)\frac{1}{k_a b}. \tag{2.29}$$

Пространственные компоненты вектора $\boldsymbol{\Pi}_{\text{п}} = (\Pi_{\text{п}r}, \Pi_{\text{п}\theta}, \Pi_{\text{п}\phi})$ получаются перемножением $\frac{e^{-ik_a R}}{R}$ на $\cos\phi \sin\theta$, $\cos\phi\cos\theta$ и $(-\sin\phi)$. При помощи ряда (2.27) и уравнения (2.22) находим компоненты $E_{r\text{п}}$ и $E_{\theta\text{п}}$ первичного электрического вектора $E_{\text{п}}$ в области $r < b$:

$$E_{r\text{п}} = -\kappa_{2a}\sin\phi \sum_{n=1}^{\infty} d_n \left[\psi_n \frac{1}{r^2}\right] P_n^1, \tag{2.30}$$

$$E_{\theta\text{п}} = -\kappa_{2a}\sin\phi \sum_{n=0}^{\infty} d_n \left[\psi_n \frac{1}{r^2} - k_a \psi_n' \frac{1}{r}\right] P_n. \tag{2.31}$$

* См. например, Франк и Мизес (1937), стр. 841—842. *А. В., Г. Ф.*

Для удобства записи аргументы $k_a r$ и $\cos\theta$ функций ψ_n и P_n пока опускаются. Формулы для компонент $E_{r\text{п}}$ и $E_{\theta\text{п}}$ используются затем для определения потенциалов Дебая $u_{\text{п}}$ и $v_{\text{п}}$ двух частных полей, через которые может быть выражено первичное поле. Компоненты двух частных первичных полей обозначаются через $E_{1r\text{п}}$, $E_{1\theta\text{п}}$ и т. д. и $E_{2r\text{п}}$, $E_{2\theta\text{п}}$ и т. д., причем

$$\left.\begin{aligned} E_{r\text{п}} &= E_{1r\text{п}} + E_{2r\text{п}}, \\ E_{\theta\text{п}} &= E_{1\theta\text{п}} + E_{2\theta\text{п}}, \end{aligned}\right\} \tag{2.32}$$

где $E_{2r\text{п}} = 0$ в соответствии с (2.8a). Поэтому

$$E_{1r\text{п}} = E_{r\text{п}}. \tag{2.33}$$

Отсюда $E_{1r\text{п}}$ определяется из формулы (2.30). Составляющая $E_{1r\text{п}}$ выражается также через потенциал $u_{\text{п}}$ при помощи (2.6a). Потенциал $u_{\text{п}}$ может быть представлен следующим рядом:

$$u_{\text{п}} = \sin\phi \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left[\psi_n \frac{1}{r}\right] P_n^1. \tag{2.34}$$

Вычисляя отсюда $E_{1r\text{п}}$ по формуле (2.6) и сравнивая коэффициенты результирующего выражения с коэффициентами ряда (2.30), найдем, что

$$a_n = -\kappa_{2a} d_n \frac{1}{n(n+1)}. \tag{2.35}$$

Отсюда

$$u_{\text{п}} = -\kappa_{2a}\sin\phi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n}{n(n+1)} \left[\psi_n \frac{1}{r}\right] P_n^1. \tag{2.36}$$

Потенциал $v_{\text{п}}$ может быть получен, если исследовать компоненту $E_{2\theta\text{п}}$ второго частного первичного поля. Из (2.32)

$$E_{2\theta\text{п}} = E_{\theta\text{п}} - E_{1\theta\text{п}}. \tag{2.37}$$

Компонента $E_{1\theta\text{п}}$ записывается при помощи формул (2.6b) и (2.36):

$$E_{1\theta\text{п}} = -\kappa_{2a}\sin\phi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k_a d_n \psi_n'}{n(n+1)r} \frac{dP_n^1}{d\theta}. \tag{2.38}$$

Вычитая это выражение из аналогичной формулы (2.31) для $E_{\theta\text{п}}$, получим:

$$E_{2\theta\text{п}} = \kappa_{2a}\sin\phi \left\{ d_0 \left(\frac{\psi_0}{r^2} - \frac{k_a \psi_0'}{r}\right) + \right.$$

$$\left. + \sum_{n=1}^{\infty} d_n \left[\left(\frac{\psi_n}{r^2} - \frac{k_a \psi_n'}{r}\right) P_n + \frac{k_a \psi_n'}{n(n+1)r} \frac{dP_n^1}{d\theta}\right]\right\}. \tag{2.39}$$

Согласно (2.8b)

$$E_{2\theta\text{п}} = -\frac{\text{к}_{2a}}{r\sin\theta}\frac{\partial r v_{\text{п}}}{\partial\phi}. \qquad (2.40)$$

Из уравнений (2.39) и (2.40) следует, что

$$v_{\text{п}} = \cos\phi\left\{d_0\left(\frac{\psi_0}{r^2} - \frac{k_a\psi_0'}{r}\right)\sin\theta + \right.$$

$$\left. + \sum_{n=1}^{\infty} d_n\left[\frac{\psi_n}{r^2}P_n + \frac{k_a\psi_n'}{n(n+1)r}\left(\frac{dP_n^1}{d\theta} - n(n+1)P_n\right)\right]\sin\theta\right\}. \qquad (2.41)$$

Постоянная интегрирования, функция от r и θ принимается равной нулю, так как для данной ориентировки диполя не могут появиться члены, независимые от ϕ. В этом можно также убедиться, вычислив $H_{2r\text{п}} = H_{r\text{п}}$ при помощи соотношения (2.23) и принимая во внимание (2.9a).

Можно существенно упростить равенство (2.41), используя последовательно: дифференциальное уравнение для P_n, рекуррентные формулы для P_n, определение d_n из (2.29) с последующим перегруппированием членов, первое из соотношений (2.20) для $\zeta_n(k_a b)$. В окончательном виде

$$v_{\text{п}} = -i\frac{1}{b}\cos\phi\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2n+1}{n(n+1)}\zeta_n'(k_a b)\psi_n(k_a r)\frac{1}{r}\right]\times$$

$$\times P_n^1(\cos\theta). \qquad (2.42)$$

Потенциалы $u_{\text{п}}$ и $v_{\text{п}}$ равенства (2.36) и (2.42) записываются далее в следующем виде:

$$u_{\text{п}} = \sin\phi\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\left[\psi_n(k_a r)\frac{1}{r}\right]P_n^1(\cos\theta), \qquad (2.43)$$

$$v_{\text{п}} = \cos\phi\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n\left[\psi_n(k_a r)\frac{1}{r}\right]P_n^1(\cos\theta), \qquad (2.44)$$

где

$$\alpha_n = i\,\text{к}_{2a}\frac{(2n+1)\zeta_n(k_a b)}{n(n+1)k_a b}, \qquad (2.45)$$

$$\beta_n = -i\frac{(2n+1)\zeta_n'(k_a b)}{n(n+1)b}. \qquad (2.46)$$

Представим потенциалы вторичного поля вне сферы и суммарного поля внутри сферы в виде рядов:

$$u_a = \sin\phi\sum_{n=1}^{\infty}a_{1n}\left[\zeta_n(k_a r)\frac{1}{r}\right]P_n^1(\cos\theta), \qquad (2.47)$$

$$u_i = \sin\phi\sum_{n=1}^{\infty}b_{1n}\left[\psi_n(k_i r)\frac{1}{r}\right]P_n^1(\cos\theta), \qquad (2.48)$$

$$v_a = \cos\phi\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n}\left[\zeta_n(k_a r)\frac{1}{r}\right]P_n^1(\cos\theta), \qquad (2.49)$$

$$v_i = \cos\phi\sum_{n=1}^{\infty}b_{2n}\left[\psi_n(k_i r)\frac{1}{r}\right]P_n^1(\cos\theta). \qquad (2.50)$$

В качестве постоянной k_i выбран корень уравнения (2.5) с отрицательной мнимой компонентой. Равным образом можно было бы выбрать и другой корень.

Из граничных условий (2.12) и (2.13) находим

$$a_{1n} = -\frac{k_i\text{к}_{1a}\psi_n(k_a a)\psi_n'(k_i a) - k_a\text{к}_{1i}\psi_n'(k_a a)\psi_n(k_i a)}{k_i\text{к}_{1a}\zeta_n(k_a a)\psi_n'(k_i a) - k_a\text{к}_{1i}\zeta_n'(k_a a)\psi_n(k_i a)}\alpha_n. \qquad (2.51)$$

Коэффициент b_{1n}, связанный с полем внутри сферы, можно получить аналогичным путем. В тех задачах, где необходимо вычисление этого коэффициента, значительного упрощения можно достигнуть, если использовать известное соотношение:

$$\zeta_n(k_a a)\psi_n'(k_a a) - \zeta_n'(k_a a)\psi_n(k_a a) = \text{const} = i. \qquad (2.52)$$

Коэффициенты a_{2n} и b_{2n} можно получить из выражений для a_{1n} и b_{1n} путем замены к_1 на к_2 и α_n на β_n.

Равенства (2.43), (2.44) и (2.47) — (2.50) определяют потенциалы, с помощью которых можно вычислить поле внутри и вне сферы. Ниже выводятся приближенные выражения для составляющих вторичного поля вне сферы в случае, когда радиус сферы мал. Первичное поле проще вычислить непосредственно, не применяя потенциалы u и v.

3. Радиальный диполь. Пусть диполь помещен в точку D (рис. 10) на расстоянии b от центра сферы и его ось параллельна OD. Первичное поле вычисляется при помощи вектора Герца

$$\boldsymbol{\Pi}_{\text{п}} = \boldsymbol{n}\frac{e^{-ik_a R}}{R}, \qquad (2.53)$$

где $\boldsymbol{n}$ единичный вектор, параллельный OD, и R определяется соотношением (2.25). Пространственные составляющие вектора $\Pi_{\text{п}} = (\Pi_{\text{п}r}, \Pi_{\text{п}\theta})$ находятся умножением $\frac{1}{R}e^{-ik_a R}$ на $\cos\theta$ и $(-\sin\theta)$. Компонента $\Pi_{\text{п}\phi}$ равна нулю.

Симметрия поля относительно оси OD предполагает следующий выбор потенциалов $u_{\text{п}}$ и $v_{\text{п}}$:

$$u_{\text{п}} = 0, \quad v_n = C\frac{e^{-ik_a R}}{R}. \qquad (2.54)$$

Можно показать, что все компоненты первичного поля, найденные при помощи вектора $\boldsymbol{\Pi}_{\text{п}}$ по соотношениям (2. 22), (2. 23), выводятся при этом выборе потенциалов из формул (2. 54) и (2. 6) — (2. 9), если C в равенстве (2. 54) положить равным $\frac{1}{b}$. Тогда в соответствии с (2. 27)

$$v_{\text{п}} = \frac{1}{b}\sum_{n=0}^{\infty} d_n \left[\psi_n(k_a r)\frac{1}{r}\right] P_n(\cos\theta), \tag{2. 55}$$

где d_n определяется соотношением (2. 29).

Чтобы найти вторичное поле вне сферы и суммарное поле внутри сферы, принимают:

$$v_a = \frac{1}{b}\sum_{n=1}^{\infty} e_n \left[\zeta_n(k_a r)\frac{1}{r}\right] P_n(\cos\theta), \tag{2. 56}$$

$$v_i = \frac{1}{b}\sum_{n=0}^{\infty} f_n \left[\psi_n(k_i r)\frac{1}{r}\right] P_n(\cos\theta), \tag{2. 57}$$

где e_n и f_n определяются из граничных условий (2. 12) и (2. 13)

$$e_n = -\frac{k_i \text{к}_{2a}\psi_n(k_a a)\psi_n'(k_i a) - k_a \text{к}_{2i}\psi_n'(k_a a)\psi_n(k_i a)}{k_i \text{к}_{2a}\zeta_n(k_a a)\psi_n'(k_i a) - k_a \text{к}_{2i}\zeta_n'(k_a a)\psi_n(k_i a)}\, d_n. \tag{2. 58}$$

Выражение для коэффициента f_n, которое можно получить аналогичным способом, здесь не выписано, так как этот коэффициент связан с полем внутри сферы.

4. Вторичное поле при $\frac{\mu_i}{\mu_a} = 1$. Из выведенных соотношений можно получить приближенные формулы для вторичного поля в случае, когда диполь находится вблизи сферы достаточно малого радиуса и высокой проводимости. Проводимость вмещающей среды низка.

Проводимость, диэлектрическая постоянная и магнитная проницаемость сферы обозначены σ_i, ε_i и μ_i и соответственные постоянные среды — σ_a, ε_a и μ_a. Примем $\mu_i = \mu_a = 1$.

Для сферы высокой проводимости, такой, что $\frac{\varepsilon_i\omega}{\sigma_i} \ll 1$, вследствие (2. 3) и (2. 5), имеют место приближенные равенства:

$$k_i = e^{-\frac{i\pi}{4}}(\sigma_i\omega)^{\frac{1}{2}}\frac{1}{c}, \quad \text{к}_{1i} = \frac{\sigma_i}{c}. \tag{2. 59}$$

Радиус сферы настолько мал, что $|k_a a| \ll 1$, где $k_a^2 = (\varepsilon_a\omega^2 - i\,\sigma_a\omega)\frac{1}{c^2}$. В дальнейшем принимается, что диполь и точка наблюдения настолько близко расположены от сферы, что соблюдаются следующие неравенства:

$$|k_a r| \ll 1, \quad |k_a b| \ll 1.$$

Азимутальный диполь. В случае азимутального магнитного диполя потенциал u_a первого частного вторичного поля, определяемый формулами (2. 47) и (2. 51), можно записать в следующем виде:

$$u_a = -i\left(\text{к}_{2a}\sin\varphi\cdot\frac{1}{k_a b r}\right)\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2n+1}{n(n+1)}\right] C_n \left[\frac{\psi_n(k_a a)}{\zeta_n(k_a a)}\right] \times$$
$$\times\, \zeta_n(k_a b)\,\zeta_n(k_a r)\,P_n^1(\cos\theta), \tag{2. 60}$$

где

$$C_n = \frac{\dfrac{k_i \text{к}_{1a}}{k_a \text{к}_{1i}}\left[\dfrac{\psi_n'(k_i a)}{\psi_n(k_i a)}\right] - \left[\dfrac{\psi_n'(k_a a)}{\psi_n(k_a a)}\right]}{\dfrac{k_i \text{к}_{1a}}{k_a \text{к}_{1i}}\left[\dfrac{\psi_n'(k_i a)}{\psi_n(k_i a)}\right] - \left[\dfrac{\zeta_n'(k_a a)}{\zeta_n(k_a a)}\right]}. \tag{2. 61}$$

Легко найти, что

$$\lim_{\sigma_i\to\infty}\left(\frac{k_i \text{к}_{1a}}{k_a \text{к}_{1i}}\right) = \lim_{\sigma_i\to\infty}\left[\frac{i\,\varepsilon_a\omega^2 + \sigma_a}{i\,\varepsilon_i\omega^2 + \sigma_i}\right]^{\frac{1}{2}} = 0.$$

Пользуясь асимптотической формулой * для $J_{n+\frac{1}{2}}(x)$ при больших значениях аргумента и принимая во внимание (2. 59), можно показать, что

$$\lim_{\sigma_i\to\infty}\left[\frac{\psi_n'(k_i a)}{\psi_n(k_i a)}\right] = i. \tag{2. 62}$$

Поэтому первые члены в числителе и знаменателе выражения C_n равны нулю в случае идеально проводящей сферы. Если проводимость сферы велика, но конечна, эти члены будут малы по сравнению с остальными, приближенное выражение для которых будет выведено ниже.

Для малых по абсолютной величине значений аргумента x, пренебрегая членами, содержащими x в степени $\geqslant 2$, можно получить следующие приближенные формулы из равенств (2. 18) и (2. 19):

$$\left.\begin{aligned}
\psi_n(x) &\approx \frac{x^{n+1}}{1\cdot 3\ldots(2n+1)},\\
\psi_n'(x) &\approx \frac{(n+1)\,x^n}{1\cdot 3\ldots(2n+1)},\\
\zeta_n(x) &\approx \frac{i\,(2n)!}{x^n 2^n n!},\\
\zeta_n'(x) &\approx \frac{i\,(2n)!}{x^{n+1}2^n(n-1)!}.
\end{aligned}\right\} \tag{2. 63}$$

* Формула точна, когда n — целое число.

Отсюда вторые члены числителя и знаменателя в выражении C_n приблизительно равны $\frac{n+1}{k_a a}$ и $-\frac{n}{k_a a}$. Именно с этими величинами следует сравнивать первые члены числителя и знаменателя в случае, когда проводимость сферы есть конечная величина.

Опустив первые члены в числителе и знаменателе выражения (2. 61), для C_n получим из (2. 60):

$$u_a = -i\left(\text{к}_{2a}\sin\phi\frac{1}{k_a br}\right)\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2n+1}{n(n+1)}\right]\times$$

$$\times\left[\frac{\psi_n'(k_a a)}{\zeta_n'(k_a a)}\right]\zeta_n(k_a b)\,\zeta_n(k_a r)\,P_n^1(\cos\theta). \qquad (2.64)$$

Пользуясь формулами (2. 63) и значениями присоединенных функций Лежандра $P_n^1(\cos\theta)$, выраженных при помощи тригонометрических функций, получим следующий приближенный ряд для u_a:

$$u_a = -\text{к}_{2a}\sin\phi\sin\theta\frac{a^3}{b^2r^2}\left[1+\frac{3a^2}{4br}\cos\theta+\right.$$

$$\left.+\frac{a^4}{6b^2r^2}(5\cos^2\theta-1)+\ldots\right]. \qquad (2.65)$$

Так как a меньше чем b и r, ряд (2. 65) сходится быстро.

Составляющие первого частного вторичного поля вычисляются по формулам (2. 6) и (2. 7). Можно показать, что в рассматриваемых нами случаях точную формулу для u_a в выражении для компонент поля можно заменить приближенным соотношением (2. 65), находя затем приближенные значения каждой из компонент. При вычислении составляющей E_{1ra} из (2. 65) следует иметь в виду, что величина $k_a^2 r u_a$ пренебрежимо мала в соответствии с допущением, что $|k_a r| \ll 1$. Тогда приближенные значения компонент первого частного вторичного поля азимутального магнитного диполя имеют вид:

$$E_{1ra} = -\text{к}_{2a}\sin\phi\sin\theta\frac{2a^3}{b^2r^3}\left[1+\frac{9a^2}{4br}\cos\theta+\right.$$

$$\left.+\frac{a^4}{b^2r^2}(5\cos^2\theta-1)+\ldots\right], \qquad (2.66)$$

$$E_{1\theta a} = \text{к}_{2a}\sin\phi\frac{a^3}{b^2r^3}\left[\cos\theta+\frac{3a^2}{2br}\cos 2\theta+\right.$$

$$\left.+\frac{a^4}{2b^2r^2}(15\cos^2\theta-11)\cos\theta+\ldots\right], \qquad (2.67)$$

$$E_{1\varphi a} = \text{к}_{2a}\cos\phi\frac{a^3}{b^2r^3}\left[1+\frac{3a^2}{2br}\cos\theta+\right.$$

$$\left.+\frac{a^4}{2b^2r^2}(5\cos^2\theta-1)+\ldots\right], \qquad (2.68)$$

$$H_{1ra} = 0, \qquad (2.69)$$

$$H_{1\theta a} = k_a^2\cos\phi\frac{a^2}{b^2r^2}\left[1+\frac{3a^2}{4br}\cos\theta+\right.$$

$$\left.+\frac{a^4}{6b^2r^2}(5\cos^2\theta-1)+\ldots\right], \qquad (2.70)$$

$$H_{1\varphi a} = -k_a^2\sin\phi\frac{a^3}{b^2r^2}\left[\cos\theta+\frac{3a^2}{4br}\cos 2\theta+\right.$$

$$\left.+\frac{a^4}{6b^2r^2}(15\cos^2\theta-11)\cos\theta+\ldots\right]. \qquad (2.71)$$

В соответствии с формулой (2. 49), в которой коэффициент a_{2n} можно получить из a_{1n} (2. 51), заменив к_1 на к_2 и α_n на β_n (2. 46), потенциал второго частного вторичного поля вне сферы записывается следующим образом:

$$v_a = \left(i\cos\phi\frac{1}{br}\right)\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2n+1}{n(n+1)}\right]D_n\left[\frac{\psi_n(k_a a)}{\zeta_n(k_a a)}\right]\times$$

$$\times\zeta_n'(k_a b)\,\zeta_n(k_a r)\,P_n^1(\cos\theta), \qquad (2.72)$$

где

$$D_n = \frac{1-\left[\frac{\psi_n'(k_a a)}{\psi_n(k_a a)}\right]\left[\frac{\psi_n(k_i a)}{\psi_n'(k_i a)}\right]\frac{k_a}{k_i}}{1-\left[\frac{\zeta_n'(k_a a)}{\zeta_n(k_a a)}\right]\left[\frac{\psi_n(k_i a)}{\psi_n'(k_i a)}\right]\frac{k_a}{k_i}}. \qquad (2.73)$$

Если принять, как и раньше, $k_a a$ малым по абсолютной величине, легко показать, что

$$\lim_{\sigma_i\to\infty} D_n = 1. \qquad (2.74)$$

Т. о., для идеально проводящей сферы коэффициент D_n в (2. 72) можно заменить единицей. Удовлетворительное приближение получается при этом и для сферы с конечной, но высокой проводимостью.

Подставляя $D_n = 1$ и пользуясь формулами (2. 63) для функций с малыми аргументами $k_a a$, $k_a b$ и $k_a r$, найдем из (2. 72), что

$$v_a = \cos\phi\sin\theta\frac{a^3}{2b^3r^2}\left[1+\frac{2a^2}{br}\cos\theta+\right.$$

$$\left.+\frac{3a^4}{4b^2r^2}(5\cos^2\theta-1)+\ldots\right]. \qquad (2.75)$$

Составляющие второго частного вторичного поля вычисляются по формулам (2. 8), (2. 9) и (2. 75). При вычислении $H_{2\theta a}$ следует иметь в виду, что величина $k_a^2 v_a$ пренебрежимо мала в соответствии с допущением, что $k_a r \ll 1$. Приближенные выражения для составляющих второго частного вторичного поля имеют вид

$$E_{2ra} = 0, \tag{2.76}$$

$$E_{2\theta a} = \kappa_{2a} \sin\phi \frac{a^3}{2b^3r^2}\left[1 + \frac{2a^2}{br}\cos\theta + \right.$$
$$\left. + \frac{3a^4}{4b^2r^2}(5\cos^2\theta - 1) + \ldots\right], \tag{2.77}$$

$$E_{2\phi a} = \kappa_{2a} \cos\phi \frac{a^3}{2b^3r^2}\left[\cos\theta + \frac{2a^2}{br}\cos 2\theta + \right.$$
$$\left. + \frac{3a^4}{4b^2r^2}(15\cos^2\theta - 11)\cos\theta + \ldots\right], \tag{2.78}$$

$$H_{2ra} = \cos\phi \sin\theta \frac{a^3}{b^3r^3}\left[1 + \frac{6a^2}{br}\cos\theta + \right.$$
$$\left. + \frac{9a^4}{2b^2r^2}(5\cos^2\theta - 1) + \ldots\right], \tag{2.79}$$

$$H_{2\theta a} = -\cos\phi \frac{a^3}{2b^3r^3}\left[\cos\theta + \frac{4a^2}{br}\cos 2\theta + \right.$$
$$\left. + \frac{9a^4}{4b^2r^2}(15\cos^2\theta - 11)\cos\theta + \ldots\right], \tag{2.80}$$

$$H_{2\phi a} = \sin\phi \frac{a^3}{2b^3r^3}\left[1 + \frac{4a^2}{br}\cos\theta + \right.$$
$$\left. + \frac{9a^2}{4b^2r^2}(5\cos^2\theta - 1) + \ldots\right]. \tag{2.81}$$

Составляющие вторичного поля вне сферы получатся путем объединения двух частных полей, определяемых равенствами (2.66) — (2.71) и (2.76) — (2.81). Так как принято, что $k_a a$, $k_a b$ и $k_a r$ малы, то компоненты $H_{1\theta a}$ и $H_{1\phi a}$ малы по сравнению с $H_{2\theta a}$ и $H_{2\phi a}$.

Радиальный диполь. Компоненты вторичного поля вычисляются при помощи потенциала v_a, так как $u_a = 0$. Из (2.56) и (2.58) следует, что

$$v_a = \frac{i}{k_a b^2 r}\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)D_n\left[\frac{\psi_n(k_a a)}{\zeta_n(k_a a)}\right]\zeta_n(k_a b)\,\zeta_n(k_a r)\,P_n(\cos\theta), \tag{2.82}$$

где D_n определяется соотношением (2.73). Как было показано выше, для идеально проводящей сферы D_n равно единице. Используя приближенные формулы (2.63) для функций ψ_n и ζ_n от малых аргументов и равенства (2.8) и (2.9), получим приближенные выражения для составляющих поля:

$$E_{2ra} = 0, \tag{2.83}$$

$$E_{2\theta a} = 0, \tag{2.84}$$

$$E_{2\phi a} = \kappa_{2a}\frac{a^3\sin\theta}{b^3r^2}\left[1 + \frac{3a^2}{br}\cos\theta + \right.$$
$$\left. + \frac{3a^4}{2b^2r^2}(5\cos^2\theta - 1) + \ldots\right], \tag{2.85}$$

$$H_{2ra} = -\frac{2a^3}{b^3r^3}\left[\cos\theta + \frac{3a^2}{2br}(3\cos^2\theta - 1) + \right.$$
$$\left. + \frac{3a^4}{b^2r^2}(5\cos^2\theta - 3)\cos\theta + \ldots\right], \tag{2.86}$$

$$H_{2\theta a} = -\frac{a^3\sin\theta}{b^3r^3}\left[1 + \frac{6a^2}{br}\cos\theta + \right.$$
$$\left. + \frac{9a^4}{2b^2r^2}(5\cos^2\theta - 1) + \ldots\right], \tag{2.87}$$

$$H_{2\phi a} = 0. \tag{2.88}$$

Выше были выведены приближенные формулы для составляющих вторичного поля проводящей сферы в присутствии азимутального и радиального магнитных диполей с единичным моментом, когда радиус сферы мал, а диполь и точка наблюдения достаточно близко расположены от сферы. Пользуясь этими результатами, можно вычислить компоненты вторичного поля для диполя, имеющего произвольные ориентацию и момент. Компоненты первичного поля могут быть вычислены непосредственно с помощью вектора Герца. Сумма первичного и вторичного полей дает нам реально существующее поле. Если допущения, при которых справедливы приближенные формулы, не удовлетворяются, то следует вернуться к точным формулам для потенциалов вторичного поля [(2.47), (2.49) и (2.56)].

5. Вторичное поле при $\frac{\mu_i}{\mu_a} \neq 1$*. Формулы Марча были развиты Уордом (1959), распространившим их на случай произвольного отношения проницаемостей. Уорд нашел, что для дипольного магнитного источника, ориентированного перпендикулярно радиусу сферы (рис. 10), составляющие вторичного магнитного поля вне сферы выражаются следующим образом:

$$H_{ra} = \cos\phi \sin\theta \frac{a^3}{b^3r^3}\left[-\frac{M}{4\pi}\right]\left[L_1 + 6L_2\frac{a^2}{br}\cos\theta + \right.$$
$$\left. + \frac{9}{2}L_3\frac{a^4}{b^2r^2}(5\cos^2\theta - 1) + \ldots\right], \tag{2.89}$$

$$H_{\theta a} = -\cos\phi \frac{a^3}{2b^3r^3}\left[-\frac{M}{4\pi}\right]\left[L_1\cos\theta + 4L_2\frac{a^2}{br}(2\cos^2\theta - 1) + \right.$$
$$\left. + \frac{9}{4}L_3\frac{a^4}{b^2r^2}(15\cos^2\theta - 11)\cos\theta + \ldots\right], \tag{2.90}$$

---

* Более точная оценка реальных условий, в которых проводятся наблюдения полей, показывает, что правильнее пользоваться формулами, получаемыми не в первом приближении, как у Марча, а во втором. При этом появляются дополнительные слагаемые, учитывающие роль эквивалентного электрического диполя в центре сферы. *Ред.*

** Здесь используется система единиц МКS.

$$H_{\varphi a} = \sin\varphi \frac{a^3}{2b^3r^3}\left[-\frac{M}{4\pi}\right]\left[L_1 + 4L_2\frac{a^2}{br}\cos\theta + \right.$$

$$\left. + \frac{9}{4}L_3\frac{a^4}{b^2r^2}(5\cos^2\theta - 1) + \ldots\right], \qquad (2.91)$$

где

$$L_n = \frac{1 - \frac{n+1}{k_i a}\frac{\mu_i}{\mu_a}\frac{\varphi_n(k_i a)}{\varphi_n'(k_i a)}}{1 - \frac{n}{k_i a}\frac{\mu_i}{\mu_a}\frac{\varphi_n(k_i a)}{\varphi_n'(k_i a)}}, \qquad (2.92)$$

$$\varphi_n(k_i a) = \left(\frac{(\pi k_i a)^{\frac{1}{2}}}{2}\right) J_{n+\frac{1}{2}}(k_i a), \quad k_i a = a(\sigma_i\mu_i\omega)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{i\pi}{2}}$$

и M — скалярный дипольный момент источника.

Члены бесконечного ряда в формулах для составляющих поля можно интерпретировать как магнитные мультиполи, расположенные в начале системы координат. В частности, первый член представляет собой эквивалентный дипольный момент сферы $\frac{\overline{M}}{4\pi}$, где

$$\overline{M} = -\frac{1}{2}\frac{M}{4\pi b^3}a^3L_1\cdot 4\pi = -\frac{H_{\text{п}}a^3}{2}L_1\cdot 4\pi \qquad (2.93)$$

и где

$$H_{\text{п}} = \frac{M}{4\pi b^3}$$

есть первичное поле удаленного от сферы дипольного источника в начале координат. Выражение (2. 93) соответствует дипольному моменту сферы в однородном поле, который, как было показано в § 1, определяется выражением:

$$\overline{M} = -\frac{3}{2}a^3H_{\text{п}}(\hat{M} + i\hat{N})4\pi. \qquad (2.94)$$

Следовательно, в формулах (2. 89), (2. 90) и (2. 91), когда $b \gg a$ и $r \gg a$, $L_1 = 3(\hat{M} + i\hat{N})$. При этом поле во всей области, занятой сферой, по существу однородно. Для практических расчетов необходимо, чтобы ряд быстро сходился. Это означает, что за исключением очень малых значений θ, отношение $\frac{a^2}{br}$ должно быть намного меньше единицы.

В первом приближении с помощью приемов, описанных в § 1, возможно однозначное определение электрических свойств, размера и глубины сферы не только в однородном поле, но и в поле диполя. В этом случае источник должен находиться на значительном расстоянии от проводящей сферы. Мультипольные члены более высокого порядка можно получить из формулы (2. 92): $L_2 = 3(\hat{M}_2 + i\hat{N}_2)$, $L_3 = 3(\hat{M}_3 + i\hat{N}_3)$ и $L_4 = 3(\hat{M}_4 + i\hat{N}_4)$. Значения функций L_1, L_2, L_3 и L_4 в зависимости от $|k_i a|$ при $\frac{\mu_i}{\mu_a} = 1$ построены на рис. 11, 12, 13*. Эти члены существенны в том случае, когда сфера находится вблизи дипольного источника. По характеру они близки к L_1. Сумма всех

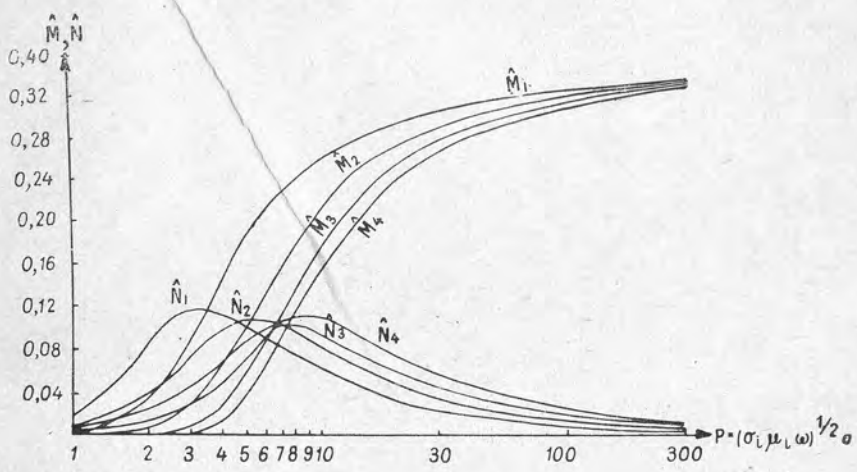


Рис. 11. Графики $\hat{M}$, $\hat{N}$ в зависимости от параметра $p=(\sigma_i\mu_i\omega)^{\frac{1}{2}}a$.

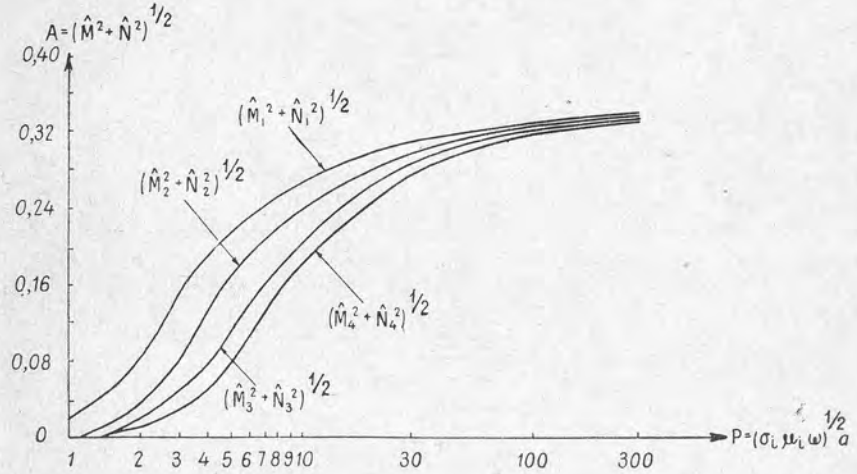


Рис. 12. Графики $A=(\hat{M}^2+\hat{N}^2)^{\frac{1}{2}}$ в зависимости от параметра $p=(\sigma_i\mu_i\omega)^{\frac{1}{2}}a$.

---

* Для удобства запишем: $L_1 = 3(\hat{M}_1 + i\hat{N}_1)$, где $\hat{M}_1 = \hat{M}$, $\hat{N}_1 = \hat{N}$.
А. В., Г. Ф.

мультипольных членов определяет вторичное поле сферы, фаза и модуль которого нелинейно зависят от безразмерного параметра $p = (\sigma_i \mu_i \omega)^{\frac{1}{2}} a$.

К сожалению, приведенный выше анализ не всегда применим в рудной геофизике. Сложные формы и непостоянство физических свойств рудных тел требуют очень громоздких и подчас невозможных математических расчетов. Уорд полагает, что любое рудное тело в поле диполя можно представить в виде ряда магнитных мультиполей. При этом не обязательно, чтобы центры мультиполей

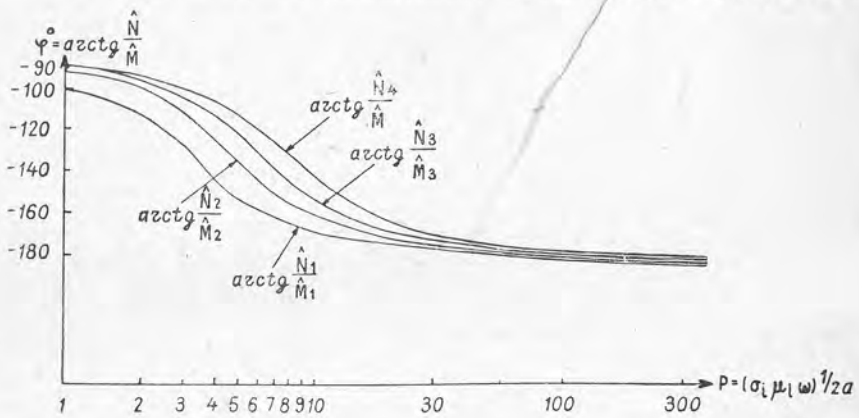


Рис. 13. Графики $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{\hat{N}}{\hat{M}}$ в зависимости от параметра $p = (\sigma_i \mu_i \omega)^{\frac{1}{2}} a$.

совпадали. Можно также считать, что по мере повышения частоты возмущающего источника любое рудное тело в конечном счете достигнет степени «насыщения» вихревыми токами. Нет оснований полагать, что частота насыщения будет значительно меняться в зависимости от изменения формы рудного тела при условии, что размер сохраняется примерно постоянным.

§ 3. Проводящая сфера в поле соленоидальной рамки (Уэйт, 1953е, 1960а)

1. Первичное поле соленоида на низких частотах. Рассмотрим поле соленоидальной рамки конечной длины, помещенной внутри однородной, изотропной, проводящей среды с электропроводностью σ, диэлектрической постоянной ε и магнитной проницаемостью μ (в системе MKS). Верхний и нижний концы рамки имеют координаты $z = A$ и $z = B$ в системе цилиндрических координат (ϱ, ϕ, z; рис. 14). Ток, текущий в изолированном проводе соленоида равен I ампер и меняется по закону $e^{i\omega t}$. Площадь соленоида

обозначается S, а его диаметр принят значительно меньшим всех прочих размеров. На каждый метр длины соленоида приходится N^* витков провода. Эквивалентный «магнитный ток» I^* течет главным образом по направлению оси Oz и зависит от тока в соленоиде следующим образом:*

$$I^* = i\mu\omega SIN^*.$$

Расстояние между точкой наблюдения P и какой-либо точкой соленоида обозначено через r. Примем, что $|kr| \ll 1$, где k — волновое число среды:

$$k = (i\sigma\mu\omega - \varepsilon\mu\omega^2)^{\frac{1}{2}} \approx (i\mu\sigma\omega)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.1)$$

В этом случае магнитное поле может быть получено при помощи магнитного потенциала Ψ следующим образом:

$$H_z = -\frac{\partial \Psi}{\partial z}, \quad (3.2)$$

$$H_\varrho = -\frac{\partial \Psi}{\partial \varrho}, \quad (3.3)$$

где

$$\Psi = I^*(4\pi i\mu\omega)^{-1}(r_1^{-1} - r_2^{-1}) \quad (3.4)$$

и

$$r_1 = [(z-A)^2 + \varrho^2]^{\frac{1}{2}},$$

$$r_2 = [(z-B)^2 + \varrho^2]^{\frac{1}{2}},$$

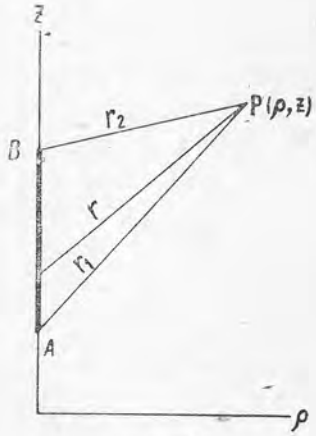


Рис. 14.

так как для достаточно низких частот $\left(\frac{\omega}{2\pi} < 500\ гц\right)$ в слабо проводящей среде ($\sigma < 0{,}01$ *мо/м*) можно рассчитать магнитное поле так, как если бы оно было вызвано двумя разноименными магнитными полюсами в точках A и B.

Когда расстояния r_1 и r_2 становятся значительно больше длины соленоида, потенциал Ψ выражается формулой:

$$\Psi \approx \frac{I^*(B-A)\varrho}{4\pi i\mu\omega r_0^3}, \quad (3.5)$$

где $r_0 \approx r_1 \approx r_2$. Соленоид эквивалентен в этом случае магнитному диполю.

Для многих скважинных модификаций электроразведки длина соленоида сравнима с другими существенными размерами, поэтому в общем случае не следует представлять соленоид магнитным диполем.

2. Вторичное поле проводящей сферы. Вторичное поле проводящей сферы в присутствии соленоида рассчитывается как вторичное

* Под «магнитным током» подразумевается ток фиктивных «магнитных зарядов» (см. Стрэттон, 1948, стр. 409). *А. В., Г. Ф.*

поле сферы в присутствии двух меняющихся во времени магнитных полюсов, что допустимо только для низких частот и относительно плохо проводящих сред. На электрические свойства сферы никаких ограничений не накладывается.

Магнитный полюс располагается в точке $z = l$ на полярной оси системы сферических координат, как показано на рис. 15. Центр сферического тела, радиуса a, с электропроводностью σ_1 и магнитной проницаемостью μ_1 находится в начале координат. Вмещающая среда характеризуется электрическими постоянными σ_2 и μ_2. По-прежнему токи смещения принимают пренебрежимо малыми. Из аксиальной симметрии очевидно, что электрическое поле существует только в направлении ϕ.

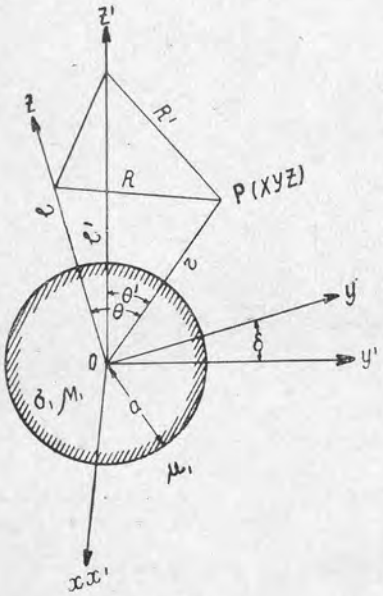


Рис. 15.

Для этого случая поле в произвольной точке может быть представлено при помощи скалярной функции ψ следующим образом (Щелкунов, 1943):

$$E_\phi = \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \tag{3.6}$$

$$H_r = -(i\mu\omega r^2 \sin\theta)^{-1} \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta \frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right), \tag{3.7}$$

$$H_\theta = (i\mu\omega r)^{-1}\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta\,\partial r} \tag{3.8}$$

и

$$E_\theta = H_\phi = H_r = 0,$$

где функция ψ удовлетворяет уравнению*

$$r^2\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right) - k^2r^2\psi = 0. \tag{3.9}$$

Для обозначения величин внутри и вне сферы к ним добавляются индексы *1* и *2*.

Решение уравнения (3. 9) может быть представлено комбинацией следующих функций:

$$\hat{I}_n(kr)\,P_n(\cos\theta),$$
$$\hat{K}_n(kr)\,P_n(\cos\theta), \tag{3.10}$$

где

$$\hat{I}_n(kr) = \left(\frac{\pi kr}{2}\right)^{\frac{1}{2}} J_{n+\frac{1}{2}}(kr)$$

* Функция ψ следующим образом связана с электрическим вектор-потенциалом A: $\psi = A_z$. *А. В., Г. Ф.*

и

$$\hat{K}_n(kr) = \left(\frac{2kr}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} K_{n+\frac{1}{2}}(kr).$$

Первичное поле в точке P вмещающей среды на расстоянии R от полюса выражается при помощи потенциала

$$\Psi_\text{п} = \frac{I^*}{4\pi i\mu\omega R}, \tag{3.11}$$

где I^* — «магнитный ток», текущий из полюса. Множитель R^{-1} может быть представлен суммой полиномов Лежандра. Приняв во внимание обозначения рис. 15, имеем:

$$\Psi_\text{п} = I^*(4\pi i\mu\omega l)^{-1}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{l}\right)^n P_n(\cos\theta). \tag{3.12}$$

Магнитный потенциал следующим образом зависит от скаляра ψ

$$\Psi_\text{п} = -(i\mu\omega)^{-1}\frac{\partial\psi_\text{п}}{\partial r}. \tag{3.13}$$

Функция $\psi_\text{п}$, характеризующая первичное поле полюса, равна

$$\psi_\text{п} = -\frac{I^*}{4\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{l}\right)^{n+1}(n+1)^{-1}P_n(\cos\theta). \tag{3.14}$$

Функции ψ_2 и ψ_1 соответственно вне и внутри сферы могут быть записаны:

$$\psi_2 = \sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n\frac{\hat{K}_n(k_2r)}{\hat{K}_n(k_2a)} - \frac{I^*r^{n+1}}{4\pi l^{n+1}(n+1)}\right]P_n(\cos\theta) \tag{3.15}$$

и

$$\psi_1 = \sum_{n=1}^{\infty}B_n\frac{\hat{I}_n(k_1r)}{\hat{I}_n(k_1a)}P_n(\cos\theta), \tag{3.16}$$

где

$$k_1 = (i\sigma_1\mu_1\omega)^{\frac{1}{2}} \text{ и } k_2 = (i\sigma_2\mu_2\omega)^{\frac{1}{2}}.$$

Так как $|kr|$ и $|ka|$ значительно меньше единицы, то справедливо равенство:

$$\frac{\hat{K}_n(kr)}{\hat{K}_n(ka)} \approx \left(\frac{a}{r}\right)^n, \tag{3.17}$$

которое можно подставить в (3. 15).

Граничные условия заключаются в непрерывности тангенциальных электрической и магнитной составляющих поля при $r = a$. Это в свою очередь приводит к условию непрерывности

для ψ и $\frac{1}{i\mu\psi}\frac{\partial\psi}{\partial r}$ при $r=a$. Отсюда можно прийти к двум равенствам, из которых определяются постоянные A_n и B_n.

Запишем выражения для ψ_2 и Ψ_2 вне сферы:

$$\psi_2 = \psi_{\text{п}} + \frac{I^*}{4\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{L_n}{n+1}\frac{a^{2n+1}}{l^{n+1}r^n}P_n(\cos\theta), \tag{3.18}$$

$$\Psi_2 = \Psi_{\text{п}} + \frac{I^*}{4\pi i\mu\omega}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}L_n\frac{a^{2n+1}}{l^{n+1}r^{n+1}}P_n(\cos\theta), \tag{3.19}$$

где

$$L_n = -\frac{(n+1)\mu_1\hat{I}_n(\alpha)-\mu_2\alpha\frac{\partial\hat{I}_n(\alpha)}{\partial\alpha}}{n\mu_1\hat{I}_n(\alpha)+\mu_2\alpha\frac{\partial\hat{I}_n(\alpha)}{\partial\alpha}} \tag{3.20}$$

и

$$\alpha = k_1 a.$$

Когда $\frac{a}{l}$ или $\frac{a}{r}$ значительно меньше единицы, ряды сходятся очень быстро и можно пренебречь всеми членами ряда кроме первого. Тогда

$$\Psi_2 \approx \Psi_{\text{п}} + \frac{I^* L_1 a^3\cos\theta}{8\pi i\mu\omega r^2 l^2}, \tag{3.21}$$

где

$$L_1 = -\frac{2\mu_1\hat{I}_1(\alpha)-\alpha\mu\frac{\partial\hat{I}_1(\alpha)}{\partial\alpha}}{\mu_1\hat{I}_1(\alpha)+\alpha\mu\frac{\partial\hat{I}_1(\alpha)}{\partial\alpha}}. \tag{3.22}$$

Магнитное поле вне сферы:

$$H_\varrho = H_{\text{п}\varrho} + \frac{I^* L_1 a^3}{8\pi i\mu\omega l^2 r^3}\left(\frac{3\varrho z}{r^2}\right),$$

$$H_z = H_{\text{п}z} + \frac{I^* L_1 a^3}{8\pi i\mu\omega l^2}\left(\frac{3z^2}{r^5}-\frac{1}{r^3}\right), \tag{3.23}$$

где

$$\varrho = (x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}. \tag{3.24}$$

Это уже рассмотренное в § 1 решение для сферы в однородном поле $H_{\text{п}} = I^*(4\pi i\mu\omega l^2)^{-1}$, направленном по оси Oz, где $H_{\text{п}}$ первичное поле в центре сферы.

Полученные результаты могут быть распространены на случай соленоида, имеющего длину L. Концы соленоида находятся на расстояниях l и l' от центра сферы, и он виден из центра сферы под углом δ.

Возьмем две системы координат (x, y, z) и (x', y', z'), у которых оси Ox и Ox' совпадают, а остальные оси сдвинуты относительно друг друга на угол δ при вращении системы (x', y', z') вокруг оси Ox, x' (см. рис. 15). Магнитное поле соленоида при $z \gg a$ может быть записано следующим образом в координатной системе (x, y, z):

$$H_z = -\frac{\partial\Psi}{\partial z} + \frac{\partial\Psi'}{\partial z}\cos\delta - \frac{\partial\Psi'}{\partial y}\sin\delta, \tag{3.25}$$

$$H_x = -\frac{\partial\Psi}{\partial x} + \frac{\partial\Psi}{\partial y}, \tag{3.26}$$

$$H_y = -\frac{\partial\Psi}{\partial y} + \frac{\partial\Psi'}{\partial y}\cos\delta - \frac{\partial\Psi'}{\partial z}\sin\delta, \tag{3.27}$$

где

$$\Psi = \frac{I^*}{4\pi i\mu\omega}\left[\frac{1}{R} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}L_n\frac{a^{2n+1}}{l^{n+1}r^{n+1}}P_n(\cos\theta)\right], \tag{3.28a}$$

$$\Psi' = \frac{I^*}{4\pi i\mu\omega}\left[\frac{1}{R'} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}L_n\frac{a^{2n+1}}{(l')^{n+1}r^{n+1}}P_n(\cos\theta')\right]. \tag{3.28b}$$

Эти формулы справедливы, когда $|k_2 r| \ll 1$. При этом проводимость внутри сферы σ_1 величина произвольная. Множитель L_n определяется равенством (3.20).

Когда длина соленоида L значительно меньше расстояний l и l', соленоид может быть апроксимирован магнитным диполем (рис. 16). Ось магнитного диполя для удобства направлена параллельно оси Oz. Координаты диполя $x = -x_0$, $y = 0$, $z = -z_0$. Для простоты здесь и в дальнейшем принимается $\frac{a}{l} \ll 1$ или $\frac{a}{R} \ll 1$. Следовательно, в разложении можно пренебречь всеми членами, начиная со второго. Тогда составляющие поля

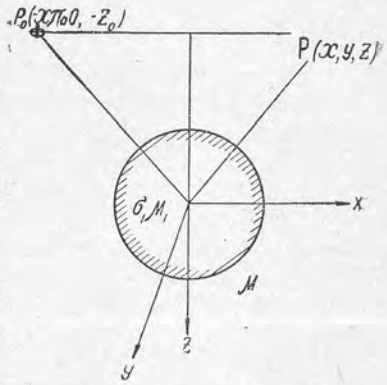


Рис. 16.

$$H_x = H_{\text{п}x} + \frac{1}{4\pi}\left[\frac{3x^2p^*}{r^5} - \frac{p^*}{r^3} + \frac{3xzq^*}{r^5}\right] \tag{3.29}$$

$$H_y = H_{\text{п}y} + \frac{1}{4\pi}\left[\frac{3xyp^*}{r^5} + \frac{3yzq^*}{r^5}\right], \tag{3.30}$$

$$H_z = H_{\text{п}z} + \frac{1}{4\pi}\left[\frac{3xzp^*}{r^5} + \frac{3z^2p^*}{r^5} - \frac{q^*}{r^3}\right], \tag{3.31}$$

где

$$p^* = -\frac{JS\,3z_0\,\varrho_0\,a^3 L_1}{8\pi\, r_0^5},$$

$$q^* = -\frac{JSa^3 L_1}{8\pi}\left(\frac{3z_0^2}{r_0^5} - \frac{1}{r_0^3}\right) \tag{3.32}$$

и J ампер-витки в соленоиде или рамке

$$J = N^* IL.$$

Пользуясь описанной выше методикой, можно вывести более общие формулы для случая, когда источник (магнитный диполь)

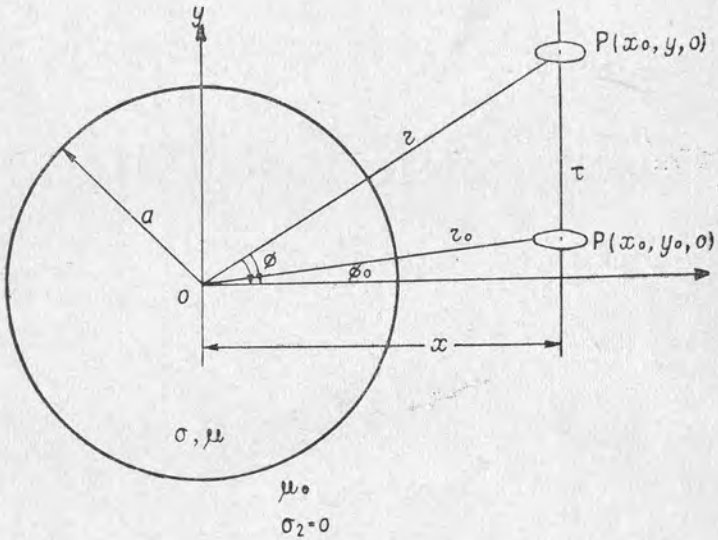


Рис. 17.

и приемник находятся в экваториальной области ($z = 0$, $z_0 = 0$) и ориентированы так, как показано на рис. 17. Вмещающая среда характеризуется постоянными $\sigma_2 = 0$, $\mu_2 = \mu_0 = 4\pi\, 10^{-7}\ \frac{гн}{м}$. Первичное поле имеет вид:

$$H_{y\text{п}} = -\frac{M}{4\pi\tau},$$

где

$$\tau = |y - y_0|, \tag{3.33}$$

а M — магнитный момент.

Вторичное поле записывается при $r \gg a$:

$$H_{y\,\text{в}} = \frac{M}{4\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\gamma\, m\,\frac{(n-m)!}{(n+m)!}\,\frac{n}{n+1}\,L_n\,[P_n^m(0)]^2\,V_{nm}\,\times$$
$$\times\,\frac{a^{2n+1}}{r_0^{n+1}\,r^{n+1}}, \tag{3.34}$$

где

$$V_{nm} = \frac{1}{rr_0}\,[(n+1)^2 \sin\phi_0 \sin\phi \cos m(\phi - \phi_0) +$$
$$+ m(n+1)\cos\phi_0 \cos\phi \sin m(\phi - \phi_0) -$$
$$- m(n+1)\cos\phi_0 \sin\phi \sin m(\phi - \phi_0) +$$
$$+ m^2 \cos\phi_0 \cos\phi \cos m(\phi - \phi_0)], \tag{3.35}$$
$$\gamma_m = 2, \quad (m = 0),$$
$$\gamma_m = 1 \quad (m \neq 0)^*.$$

Вещественная и мнимая части L_n в зависимости от параметра $p = (\mu\sigma\omega)^{\frac{1}{2}}\,a$ приведены на рис. 2 ($n = 1$) и 11 ($n = 1, 2, 3, 4$).

§ 4. Проводящий цилиндр в поле кабеля
(Уэйт, 1952с)

По бесконечно длинному кабелю, след которого на рис. 18 находится в точке O', протекает гармонически меняющийся во времени ток $Ie^{i\omega t}$. Кабель расположен параллельно оси проводящего цилиндра с центром в точке O. Радиус цилиндра равен a, его проводимость σ_1, диэлектрическая постоянная ε_1, магнитная проницаемость μ_1. Однородная вмещающая среда имеет проводимость σ_2, диэлектрическую постоянную ε_2 и магнитную проницаемость μ_2. Решение проводится в единицах системы MKS. В системе цилиндрических координат (ϱ, ϕ, z) ось Oz направлена по оси цилиндра. Плоскость xOz служит началом для отсчета полярного угла ϕ. Координаты ϱ_0, ϕ_0 определяют положение провода в O'.

Задача заключается в определении поля, создаваемого токонесущим кабелем в присутствии цилиндра, в произвольной внешней точке P (ϱ,ϕ). Электрическое поле в обеих средах имеет только z-компоненту. Первичное поле в точке P, обусловленное током в O', определяется выражением:

$$E_{\text{п}}(\bar{\varrho}) = -\frac{i\,\mu_2\omega}{2\pi}\,K_0(k_2\,\bar{\varrho}), \tag{4.1}$$

где k_2 — волновое число внешней среды

$$k_2^2 = i\,\sigma_2\mu_2\omega - \varepsilon_2\mu_2\omega^2,$$

$K_0(k_2\,\bar{\varrho})$ — функция Бесселя от мнимого аргумента (Ватсон, 1949, стр. 94).

---

* Эти формулы выводятся в работе Уэйта (1960а). *А. В., Г. Ф.*

Электрическое поле $E_2(\varrho,\phi)$ в области внешней по отношению к цилиндру имеет только z-компоненту и равно сумме первичного поля $E_п(\bar{\varrho})$ и вторичного поля $E_в(\varrho,\phi)$. Суммарное поле внутри цилиндра обозначим через $E_1(\varrho,\phi)$.

Рассматриваемые поля являются решениями двухмерного волнового уравнения

$$\varrho\frac{\partial}{\partial\varrho}\left(\varrho\frac{\partial E_i}{\partial\varrho}\right)+\left(\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}E_i\right)-k_i^2\varrho^2E_i=0, \qquad (4.2)$$

где i — индекс, обозначающий номер среды, равный *1* или *2*, и

$$k_i^2=i\sigma_i\mu_i\omega-\varepsilon_i\mu_i\omega^2.$$

Решения уравнения (4.2) можно представить в виде линейных комбинаций следующих функций:

$$I_n(k_i\varrho),\ \cos n(\phi-\phi_0),$$
$$K_n(k_i\varrho),\ \sin n(\phi-\phi_0),$$

где $I_n(k_i\varrho)$ и $K_n(k_i\varrho)$ функции Бесселя от мнимого аргумента. Решение, содержащее $\sin n(\phi-\phi_0)$, не удовлетворяет условиям симметрии поля относительно плоскости, проходящей через OO' и ось Oz. Во внешней по отношению к цилиндру области допустимо лишь решение, содержащее $K_n(k_i\varrho)$, так как оно дает расходящуюся волну. Внутри цилиндра пригодно лишь то решение, которое содержит $I_n(k_i\varrho)$, так как поле в центре цилиндра должно быть конечно для внешнего источника.

Общие решения для электрического поля снаружи и внутри цилиндра определяются следующими выражениями:

$$E_2=\sum_0^\infty A_nK_n(k_2\varrho)\cos n(\phi-\phi_0)+E_п,\quad(\varrho\geqslant a), \qquad (4.3)$$

$$E_1=\sum_0^\infty B_nI_n(k_1\varrho)\cos n(\phi-\phi_0),\quad(\varrho\leqslant a), \qquad (4.4)$$

где коэффициенты A_n и B_n вычисляются на основании граничных условий, когда $\varrho=a$. Тангенциальное магнитное поле связано с электрическим полем соотношением:

$$H_{\phi i}=\frac{1}{i\mu_i\omega}\frac{\partial E_i}{\partial\varrho}.$$

Тангенциальные электрическое и магнитные поля должны быть непрерывными на поверхности раздела при отсутствии поверхностных токов, следовательно,

$$\frac{1}{\mu_1}\frac{\partial E_1}{\partial\varrho}=\frac{1}{\mu_2}\frac{\partial E_2}{\partial\varrho}, \qquad (4.5)$$
$$E_1=E_2.\ (\varrho=a)$$

Для решения этих двух уравнений относительно A_n и B_n нужно выразить первичное поле $E_п$, обусловленное токонесущим кабелем в O', в системе с началом координат O (рис. 18). Применяя теорему сложения для бесселевых функций, приводимую у Ватсона (1949), стр. 394, получим, что

$$K_0(k_2\bar{\varrho})=\sum_{n=0}^\infty\gamma_nK_n(k_2\varrho_0)I_n(k_2\varrho)\cos n(\phi-\phi_0),\ (\varrho<\varrho_0), \qquad (4.6)$$

где

$$\gamma_n=1,\ \text{когда}\ n=0,$$

и

$$\gamma_n=2,\ \text{когда}\ n\geqslant1.$$

Используя формулу (4.6), получим для полей внутри и вне цилиндра:

$$E_2=-\frac{i\mu_2\omega I}{2\pi}\sum_{n=0}^\infty\gamma_nK_n(k_2\varrho_0)I_n(k_2\varrho)\times$$
$$\times\cos n(\phi-\phi_0)+\sum_{n=0}^\infty A_nK_n(k_2\varrho)\times$$
$$\times\cos n(\phi-\phi_0),\quad(\varrho_0>\varrho\geqslant a), \qquad (4.7)$$

$$E_1=\sum_{n=0}^\infty B_nI_n(k_2\varrho)\cos n(\phi-\phi_0),$$
$$(\varrho\leqslant a). \qquad (4.8)$$

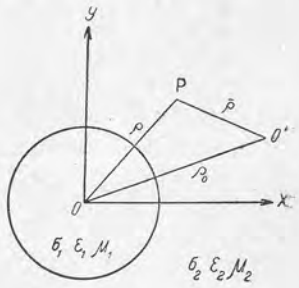


Рис. 18.

Из граничных условий получим два однородных линейных уравнения, связывающих A_n и B_n:

$$-\frac{i\mu_2\omega I}{2\pi}\gamma_nK_n(k_2\varrho_0)I_n(k_2a)+A_nK_n(k_2a)=B_nI_n(k_1a) \qquad (4.9)$$

и

$$-\frac{i\mu_2\omega I}{2\pi}\gamma_nK_n(k_2\varrho_0)I_n'(k_2a)\frac{k_2}{\mu_2}+A_nK_n'(k_2a)\frac{k_2}{\mu_2}=$$
$$=B_nI_n'(k_1a)\frac{k_1}{\mu_1},$$

где штрих над функциями Бесселя означает производную по аргументу. После подстановки A_n, вычисленного из системы (4.9), в равенство (4.7) получим следующую формулу для электрического поля во внешней по отношению к цилиндру области:

$$E_2=-\frac{i\mu_2\omega I}{2\pi}\sum_{n=0}^\infty\gamma_nC_n\frac{I_n(k_2a)K_n(k_2\varrho_0)K_n(k_2\varrho)}{K_n(k_2a)}\times$$
$$\times\cos n(\phi-\phi_0)+E_п, \qquad (4.10)$$

где

$$C_n=\frac{\dfrac{1}{\eta_2}\dfrac{I_n'(k_2a)}{I_n(k_2a)}-\dfrac{1}{\eta_1}\dfrac{I_n'(k_1a)}{I_n(k_1a)}}{-\dfrac{1}{\eta_2}\dfrac{K_n'(k_2a)}{K_n(k_2a)}+\dfrac{1}{\eta_1}\dfrac{I_n'(k_1a)}{I_n(k_1a)}}$$

и

$$\eta_1 = \left(\frac{i\,\mu_1\omega}{\sigma_1 + i\,\omega\varepsilon_1}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad \eta_2 = \left(\frac{i\,\mu_2\omega}{\sigma_2 + i\,\omega\varepsilon_2}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Здесь C_n играет роль коэффициента отражения, который определяет амплитуду и фазу вторичных цилиндрических волн порядка n, отраженных от поверхности цилиндра. Если проводимость цилиндра приближается к бесконечности, коэффициент C_n приближается к -1. В предельном случае, когда электрические свойства цилиндра не отличаются от свойства внешней среды, C_n приближается к нулю.

Приведенное выше строгое решение для E_2 справедливо при любых значениях проводимости, диэлектрической постоянной и магнитной проницаемости внутри и вне цилиндра. Применительно к геофизической разведке проводимость σ_2 вмещающей среды может быть очень небольшой. Если аргумент k_2a намного меньше единицы, то имеют место следующие приближенные формулы для бесселевых функций:

$$I_n(x) \approx \frac{x^n}{n!\,2^n}, \quad (n \geqslant 1)$$

$$K_n(x) \approx \frac{n-1!\,2^{n-1}}{x^n}, \quad (n \geqslant 1)$$

$$I_0(x) \approx 1, \; K_0(x) \approx -(\ln x + 0{,}116), \tag{4.11}$$

$$\frac{I_n'(x)}{I_n(x)} \approx \frac{n}{x}, \quad \frac{K_n'(x)}{K_n(x)} \approx -\frac{n}{x}, \; (n \geqslant 1),$$

где x — аргумент бесселевых функций.

В условиях плохой проводимости вмещающей среды выражение для электрического поля E_2 имеет вид:

$$E_2 = E_{\text{п}} - \frac{i\,\mu_2\omega\,I}{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty} C_n \frac{a^{2n}}{\varrho_0^n\,\varrho^n\,n}\cos n(\phi - \phi_0), \tag{4.12}$$

где

$$E_{\text{п}} = -\frac{i\,\mu_2\omega\,I}{2\pi}\,[\ln(k_2\bar{\varrho}) + 0{,}116],$$

а коэффициент отражения

$$C_n = \frac{\dfrac{\mu_1}{\mu_2} - k_1a\,\dfrac{I_n'(k_1a)}{I_n(k_1a)}}{\dfrac{\mu_1}{\mu_2} + k_1a\,\dfrac{I_n'(k_1a)}{I_n(k_1a)}}. \tag{4.13}$$

Используя рекуррентное соотношение для бесселевых функций (Ватсон, 1949, стр. 93), по которому

$$xI_n'(x) = xI_{n-1}(x) - nI_n(x),$$

можно записать выражение для C_n следующим образом:

$$C_n = \frac{(q+n)\,I_n(k_1a) - (k_1a)\,I_{n-1}(k_1a)}{(q-n)\,I_n(k_1a) + (k_1a)\,I_{n-1}(k_1a)}, \tag{4.14}$$

где $q = \dfrac{\mu_1}{\mu_2}$ — отношение магнитной проницаемости цилиндра к магнитной проницаемости вмещающей среды. Комплексный аргумент бесселевой функции упрощается, если пренебречь токами смещения в пределах цилиндра:

$$k_1a = [i\,\mu_1\omega\,(\sigma_1 + i\,\varepsilon_1\omega)]^{\frac{1}{2}}\,a \approx (i\,\mu_1\sigma_1\omega)^{\frac{1}{2}}\,a, \tag{4.15}$$

где $\sigma_1 \gg \varepsilon_1\omega$. Аргумент бесселевой функции пропорционален $i^{\frac{1}{2}}$. Имеются подробные таблицы таких функций.

Компоненты магнитного поля $H_{2\varrho}$ и $H_{2\phi}$ получаются из уравнений Максвелла:

$$H_{2\varrho} = -\frac{1}{i\,\mu_2\omega\varrho}\,\frac{\partial E_2}{\partial\phi} =$$

$$= \frac{I}{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty} C_n \frac{a^{2n}}{\varrho_0^n\varrho^{n+1}}\sin n(\phi - \phi_0) + H_{\text{п}\varrho}, \tag{4.16}$$

$$H_{2\phi} = \frac{1}{i\,\mu_2\omega}\,\frac{\partial E_2}{\partial\varrho} =$$

$$= \frac{I}{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty} C_n \frac{a^{2n}}{\varrho_0^n\varrho^{n+1}}\cos n(\phi - \phi_0) + H_{\text{п}\phi}, \tag{4.17}$$

где $H_{\text{п}\varrho}$ и $H_{\text{п}\phi}$ — пространственные компоненты первичного магнитного поля.

Когда отношение $\dfrac{a}{\varrho}$ или $\dfrac{a}{\varrho_0}$ гораздо меньше единицы, то с достаточной степенью точности в выражениях (4.16) и (4.17) можно ограничиться первым членом ряда. Тогда

$$H_{2\varrho} - H_{\text{п}\varrho} \approx \frac{I}{2\pi\varrho_0}\,C_1\,\frac{a^2}{\varrho^2}\sin(\phi - \phi_0), \tag{4.18}$$

$$H_{2\phi} - H_{\text{п}\phi} \approx \frac{1}{2\pi\varrho_0}\,C_1\,\frac{a^2}{\varrho^2}\cos(\phi - \phi_0), \tag{4.19}$$

где

$$C_1 = \frac{(q+1)\,I_1(i^{\frac{1}{2}}p) - i^{\frac{1}{2}}p\,I_0(i^{\frac{1}{2}}p)}{(q-1)\,I_1(i^{\frac{1}{2}}p) + i^{\frac{1}{2}}pI_0(i^{\frac{1}{2}}p)}. \tag{4.20}$$

и

$$p = (\sigma_1\mu_1\omega)^{\frac{1}{2}}\,a.$$

Величина C_1 имеет вещественную и мнимую часть и может быть записана следующим образом:

$$C_1 = -(\hat{M}_1 + i\hat{N}_1).$$

Кривые $\hat{M}_1$ и $\hat{N}_1$ в зависимости от p показаны на рис. 19. Вертикальная и горизонтальная компоненты H_2 связаны с $H_{2\varrho}$ и $H_{2\phi}$ простыми соотношениями:

$$H_{2x} = H_{2\varrho}\cos\phi + H_{2\phi}\sin\phi, \qquad (4.21)$$

$$H_{2y} = H_{2\varrho}\sin\phi - H_{2\phi}\cos\phi. \qquad (4.22)$$

В результате получены точные выражения для вторичного поля проводящего цилиндра, расположенного параллельно кабелю. Среда, вмещающая цилиндр и кабель, считается неограниченной

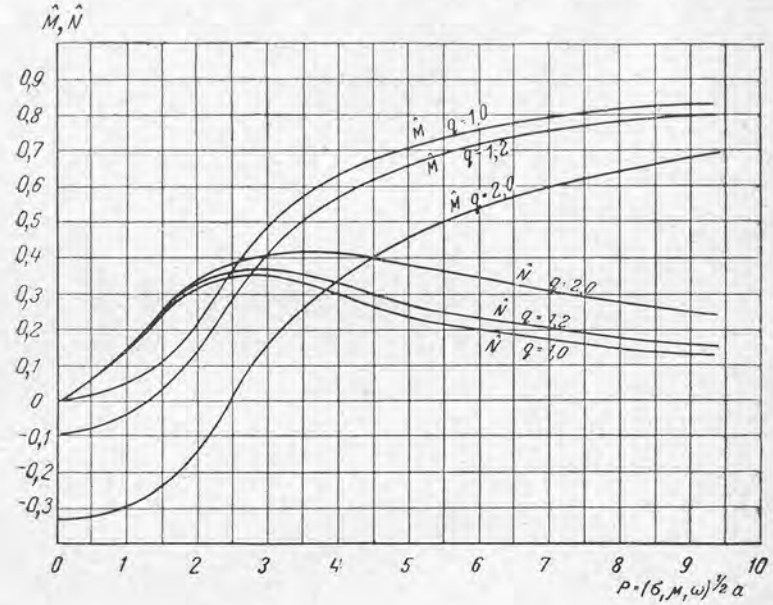


Рис. 19. Графики $\hat{M}_1$, $\hat{N}_1$ в зависимости от параметра $p=(\sigma_1\mu_1\omega)^{\frac{1}{2}}a$.

и однородной. Когда частоты настолько низки, что $|k_2a|$, $|k_2\varrho|$ и $|k_2\varrho_0|$ много меньше единицы, то внешняя среда в присутствии незаземленного токонесущего кабеля ведет себя как изолятор. С другой стороны, в параметр $|k_1a|$ входит проводимость цилиндра, которая может меняться в широких пределах от значений намного меньших единицы до значений значительно превосходящих единицу. Например, если проводимость вмещающих горных пород $\sigma_2 = 10^{-3}$ *мо/м*, то выделяя в них цилиндр радиусом в 10 *м*, получим для угловой частоты $\omega = 10^3$, что $|k_2a| \approx 10^{-2}$. Проводимость рудных зон σ_1 достигает 10^2 *мо/м* для массивных сульфидных руд, тогда $|k_1a| = p \approx 3$. Кривые $\hat{M}_1$ и $\hat{N}_1$ (рис. 19) вычислены с учетом введенных ранее ограничений. Когда $q=1$, вторичное магнитное поле обусловлено только токами, индуцированными в цилиндре. На низких частотах преобладает мнимая

составляющая $\hat{N}_1$. С ростом частоты и, следовательно, ростом p увеличивается вещественная составляющая вторичного поля, находящаяся в фазе с током в кабеле. На очень высоких частотах весь индуцированный ток течет по поверхности цилиндра и в структуре поля преобладает вещественная составляющая.

Когда магнитная проницаемость материала, из которого состоит цилиндр, больше, чем у вмещающей среды, кривые видоизменяются. Иногда избыточная проницаемость у массивных рудных тел достигает 20%, что соответствует $q = 1{,}2$. Вещественная и мнимая компоненты для этого случая также представлены на рис. 19. На очень низких частотах в составе вторичного поля преобладает компонента, находящаяся в противофазе с током в кабеле. В этом случае происходит концентрация магнитного потока в цилиндре, что приводит к возникновению вторичного магнитного поля, по знаку противоположному первичному магнитному полю. Действительно, для очень низких частот ($p \ll 1$)

$$C_1 = -\hat{M}_1 = \mu_1 - \frac{\mu_2}{\mu_1} + \mu_2, \quad \hat{N}_1 = 0.$$

Однако вихревые токи все же наводятся переменным первичным полем. Они создают добавочное поле, подчиняющееся закономерности, установленной для случая, когда $q = 1$. На рис. 19 приводятся также кривые для случая $q = 2$.

Когда $p \leqslant 2$, мнимая составляющая почти не зависит от магнитных свойств цилиндра и окружающей среды*.

§ 5. Проводящий цилиндр в присутствии магнитного диполя (Уэйт, 1960а)

В системе цилиндрических координат (ϱ, ϕ, z) цилиндр с проводимостью $\sigma_1 = \sigma$ и магнитной проницаемостью $\mu_1 = \mu$ располагается так, что его ось совпадает с осью $0z$ (рис. 20). Рассмотрим вначале поле магнитного заряда M^*. Вне цилиндра ($\varrho > a$) в непроводящей среде ($\sigma_2 = 0$, $\mu_2 = \mu_0$) поле потенциальное и является решением уравнения Лапласа. Внутри цилиндра поле является решением волнового уравнения и вычисляется при помощи векторов Герца Π^* и Π. В системе MKS

$$\boldsymbol{H} = (-k^2 + \operatorname{grad}\operatorname{div})\,\boldsymbol{\Pi}^* + \frac{k^2}{i\mu\omega}\operatorname{rot}\boldsymbol{\Pi}, \quad (\varrho < a) \qquad (5.1)$$

где

$$\boldsymbol{\Pi}^* = (0,\ 0,\ \Pi_z^*), \qquad (5.2)$$

---

* В общем случае H_2 содержит член, зависящий от $\frac{1}{\varrho}$, который получается при дифференцировании первого слагаемого под знаком суммы в (4.10) по ϱ. Этот член в зависимости от соотношения k_1 и k_2 может быть достаточно велик, и пренебрегать им, как это сделал Уэйт, вообще говоря нельзя. Физическая природа этого слагаемого поля связана с концентрацией в хорошо проводящем цилиндре токов, индуцированных в окружающей среде полем кабеля. *Ред.*

$$\Pi = (0,\ 0,\ \Pi_z) \tag{5.3}$$

и k — волновое число.

Решения волнового уравнения

$$(\nabla^2 - k^2)(\Pi, \Pi^*) = 0 \tag{5.4}$$

выражаются через функции

$$I_n(u\varrho)\, e^{-in\varphi} e^{-iz\lambda},$$

$$K_n(u\varrho)\, e^{-in\varphi} e^{-iz\lambda}, \tag{5.5}$$

где $u = \sqrt{k^2 + \lambda^2}$ и I_n, K_n функции Бесселя от мнимого аргумента (Ватсон, 1949).

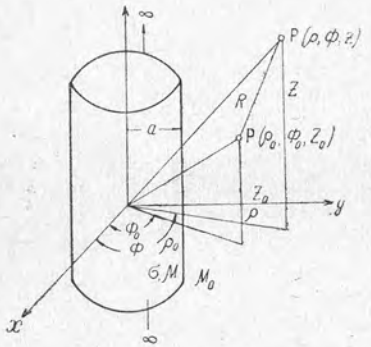


Рис. 20.

Вне цилиндра ($\varrho > a$)

$$\boldsymbol{H} = -\operatorname{grad} \Psi, \tag{5.6}$$

где $\Psi = \Psi_п + \Psi_в$ представляет собою сумму потенциалов первичного и вторичного полей, обусловленных магнитным зарядом M^* в точке $P(\varrho_0,\ \varphi_0,\ z_0)$. В произвольной точке $P(\varrho,\ \varphi,\ z)$ потенциал первичного поля

$$\Psi_п = \frac{M^*}{4\pi R}, \tag{5.7}$$

где R — расстояние между источником и приемником поля. Пользуясь формулой, приводимой у Ватсона (1949), запишем

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_0(\bar{\varrho}\lambda)\, e^{-i(z-z_0)\lambda}\, d\lambda, \tag{5.8}$$

где

$$R = \sqrt{\bar{\varrho}^2 + (z - z_0)^2} \tag{5.9}$$

и

$$\bar{\varrho} = [\varrho^2 - \varrho_0^2 - 2\varrho\varrho_0 \cos(\varphi - \varphi_0)]^{\frac{1}{2}}. \tag{5.10}$$

Применяя теорему сложения

$$K_0(\bar{\varrho}\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n K_n(\varrho_0\lambda)\, I_n(\varrho\lambda) \cos n(\varphi - \varphi_0), \quad (\varrho < \varrho_0), \tag{5.11}$$

$$\gamma_0 = 1,\ \gamma_m = 2, \quad (m = 1,\ 2,\ 3, \ldots),$$

имеем

$$\Psi_п = \frac{M^*}{4\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} K_n(\varrho_0\lambda) \times$$

$$\times [I_n(\varrho\lambda)\, e^{-i(z-z_0)\lambda}\, d\lambda]\, e^{-in(\varphi-\varphi_0)}. \tag{5.12}$$

Это равенство можно переписать:

$$\Psi_п = \Gamma I_n(\varrho\lambda), \tag{5.13}$$

где Γ — оператор вида

$$\frac{M^*}{4\pi^2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} K_n(\varrho_0\lambda)[\ .\ .\ .\ .\ .] \times$$

$$\times e^{-i(z-z_0)\lambda}\, d\lambda\, e^{-in(\varphi-\varphi_0)}. \tag{5.14}$$

Тогда для поля вне цилиндра ($\varrho \geqslant a$)

$$\Psi_в = \Gamma A_n(\lambda) K_n(\varrho\lambda), \tag{5.15}$$

$$\Psi = \Gamma [I_n(\varrho\lambda) + A_n(\lambda) K_n(\varrho\lambda)] \tag{5.16}$$

и для поля внутри цилиндра ($\varrho \leqslant a$)

$$\Pi_z^* = \Gamma a_n(\lambda) I_n(u\varrho), \tag{5.17}$$

$$\Pi_z = \Gamma b_n(\lambda) I_n(u\varrho). \tag{5.18}$$

Компоненты магнитного поля в области $\varrho \geqslant a$

$$H_\varrho = -\Gamma\lambda [I_n'(\varrho\lambda) + A_n(\lambda) K_n'(\varrho\lambda)],$$

$$H_\varphi = \Gamma \frac{in}{\varrho} [I_n(\varrho\lambda) + A_n(\lambda) K_n(\varrho\lambda)], \tag{5.19}$$

$$H_z = \Gamma i\lambda [I_n(\varrho\lambda) + A_n(\lambda) K_n(\varrho\lambda)]$$

и в области $\varrho \leqslant a$

$$H_\varrho = \Gamma\left[-i\lambda u a_n(\lambda) I_n'(u\varrho) - \frac{k^2 n}{\mu\omega\varrho} b_n(\lambda) I_n(u\varrho)\right],$$

$$H_\varphi = \Gamma\left[-\frac{\lambda n}{\varrho} a_n(\lambda) I_n(u\varrho) - \frac{k^2 u}{i\mu\omega} (b_n(\lambda) I_n'(u\varrho)\right], \tag{5.20}$$

$$H_z = \Gamma [-u^2 a_n(\lambda) I_n(u\varrho)].$$

Коэффициенты $a_n(\lambda)$, $b_n(\lambda)$ и $A_n(\lambda)$ определяются из граничных условий. Последние заключаются в непрерывности компонент μH_ϱ, H_φ и H_z при $\varrho = a$. Отсюда находим:

$$A_n(\lambda) = -\left[\frac{\check{I}_n(a\lambda) - \frac{\mu}{\mu_0}\left[\check{I}_n(ua) + \frac{n^2k^2}{u^4\lambda^2a^4}\,\frac{1}{\check{I}_n(ua)}\right]}{\check{K}_n(a\lambda) - \frac{\mu}{\mu_0}\left[\check{I}_n(ua) + \frac{n^2k^2}{u^4\lambda^2a^4}\,\frac{1}{\check{I}_n(ua)}\right]}\right] \frac{I_n(a\lambda)}{K_n(a\lambda)}, \tag{5.21}$$

где

$$\check{I}_n(u) = \frac{I_n'(u}{uI_n(u)}, \tag{5.22}$$

$$\check{K}_n(u) = \frac{K_n'(u)}{uK_n(u)}. \tag{5.23}$$

Полученные результаты можно использовать для вычисления компонент поля магнитного диполя. Если диполь с моментом M^*dl расположен в точке $P(\varrho_0, \phi_0, z_0)$ и ориентирован параллельно оси Oy, то

$$H_y = + dl \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y \, \partial y_0}. \qquad (5.24)$$

В плоскости $z = z_0 = 0$ для $x = x_0$ (рис. 21) первичное поле

$$H_{y\text{п}} = -\frac{M^* dl}{2\pi\tau^3}, \qquad (5.25)$$

где $\tau = y - y_0 > 0$. Принимая во внимание, что

$$\frac{\partial}{\partial y} = \sin\phi \frac{\partial}{\partial \varrho} + \cos\phi \frac{\partial}{\varrho \, \partial \phi}, \qquad (5.26)$$

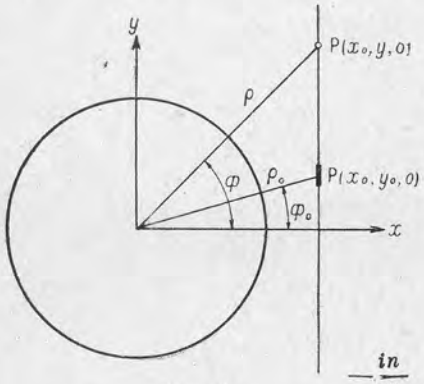


Рис. 21.

представим вторичное поле в виде:

$$H_{y\text{в}} = \frac{M^* dl}{4\pi^2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A_n(\lambda) \times \left[\lambda K_n'(\varrho\lambda) \sin\phi - \frac{in}{\varrho} K_n(\varrho\lambda) \cos\phi\right] \left[\lambda K_n'(\varrho_0\lambda) \sin\phi_0 + \frac{in}{\varrho_0} K_n(\lambda\varrho_0) \cos\phi_0\right] e^{-i(z-z_0)\lambda} d\lambda \, e^{-in(\phi-\phi_0)}, \qquad (5.27)$$

где $A_n(\lambda)$ определяется формулой (5.21).

Общее решение для бесконечно длинного цилиндра в присутствии магнитного диполя довольно сложно. Можно несколько упростить его, если воспользоваться некоторыми допущениями. Примем радиус a достаточно малым, чтобы на низких частотах $a\lambda \ll 1$ в той части области интегрирования, которая определяет основную часть интеграла. Таким образом

$$A_n(\lambda) \approx -\left[\frac{nqI_n(ka) - (ka) I_n'(ka)}{nqI_n(ka) + (ka) I_n'(ka)}\right] \frac{I_n(a\lambda)}{K_n(a\lambda)}, \qquad (5.28)$$

где $q = \frac{\mu}{\mu_0}$. В случае высокой проводимости цилиндра $|ka| \gg 1$

$$A_n(\lambda) \approx -\frac{I_n(a\lambda)}{k_n(a\lambda)}. \qquad (5.29)$$

Выражение в квадратных скобках в формуле (5.28) характеризует зависимость вторичного поля от частоты и является функцией только q и ka.

Вторичное поле $H_\text{в}$ для конечного ka на достаточно большом удалении от сферы можно представить в виде:

$$\frac{H_\text{в}}{[H_\text{в}]_{ka \to \infty}} \approx \sum_{n=1}^{\infty} C_n, (n = 1, 2, 3\ldots), \qquad (5.30)$$

где

$$C_n = -\left[\frac{nqI_n(i^{\frac{1}{2}} p) - i^{\frac{1}{2}} p I_n'(i^{\frac{1}{2}} p)}{nqI_n(i^{\frac{1}{2}} p) + i^{\frac{1}{2}} p I_n'(i^{\frac{1}{2}} p)}\right], \qquad (5.31)$$

$$p = (\sigma\mu\omega)^{\frac{1}{2}} a.$$

Множитель $\frac{I_n(a\lambda)}{K_n(a\lambda)}$ обусловливает быструю сходимость ряда (5.28) при увеличении n

$$\frac{I_n(a\lambda)}{K_n(a\lambda)} \approx \frac{(a\lambda)^{2n}}{(n!)(n-1)! \, 2^{2n-1}}, \quad (\lambda a) \ll 1. \qquad (5.32)$$

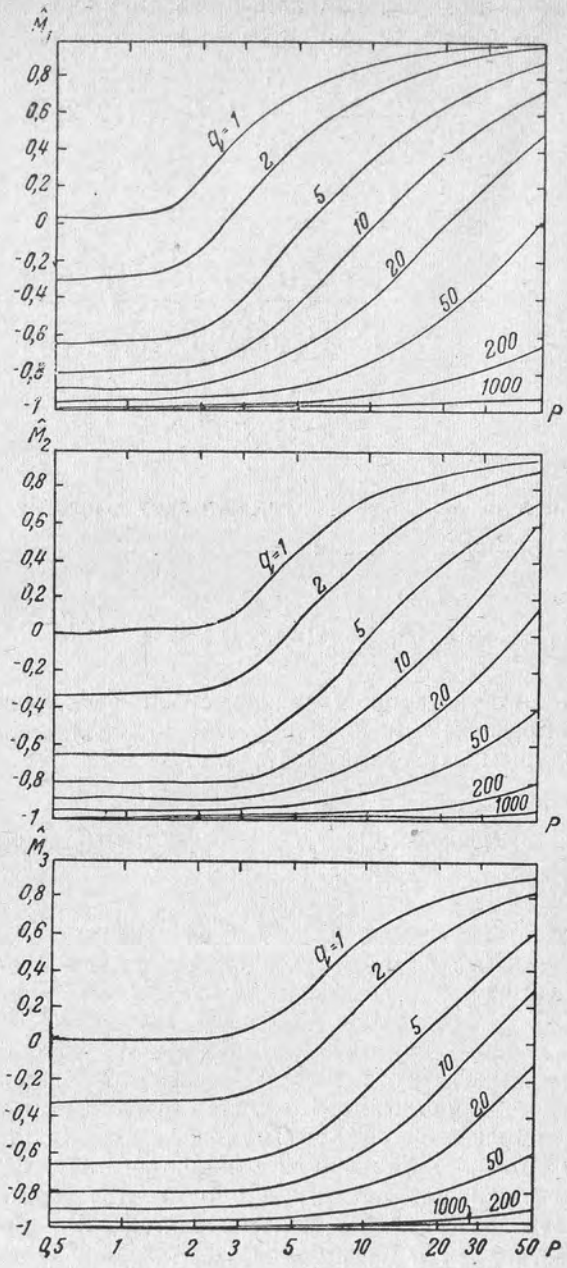
Если источник представляет собой бесконечный линейный ток I, определяемый координатами (ϱ_0, ϕ_0), то, как показано в предыдущем параграфе (4.16; 4.17):

$$H_{\varrho\text{в}} = -\frac{I}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} C_n \frac{a^{2n}}{\varrho_0^n \varrho^{n+1}} \sin n(\phi - \phi_0). \qquad (5.33)$$

$$H_{\phi\text{в}} = -\frac{I}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} C_n \frac{a^{2n}}{\varrho_0^n \varrho^{n+1}} \cos n(\phi - \phi_0). \qquad (5.34)$$

Точное решение двухмерной задачи весьма близко к выведенному выше приближенному решению трехмерной задачи. По-видимому, если a достаточно мало, то индуцированные токи направлены главным образом вдоль оси цилиндра даже для точечного источника. Поэтому частотная зависимость индуцированных токов в случае точечного источника описывается равным образом решением соответствующей двухмерной задачи.

Вещественная $\hat{M}$ и мнимая $\hat{N}$ части C_n в зависимости от параметра $p = (\sigma\mu\omega)^{\frac{1}{2}} a$ показаны на рис. 22. Величина C_1 весьма близка по форме к величине L_1 для сферы.



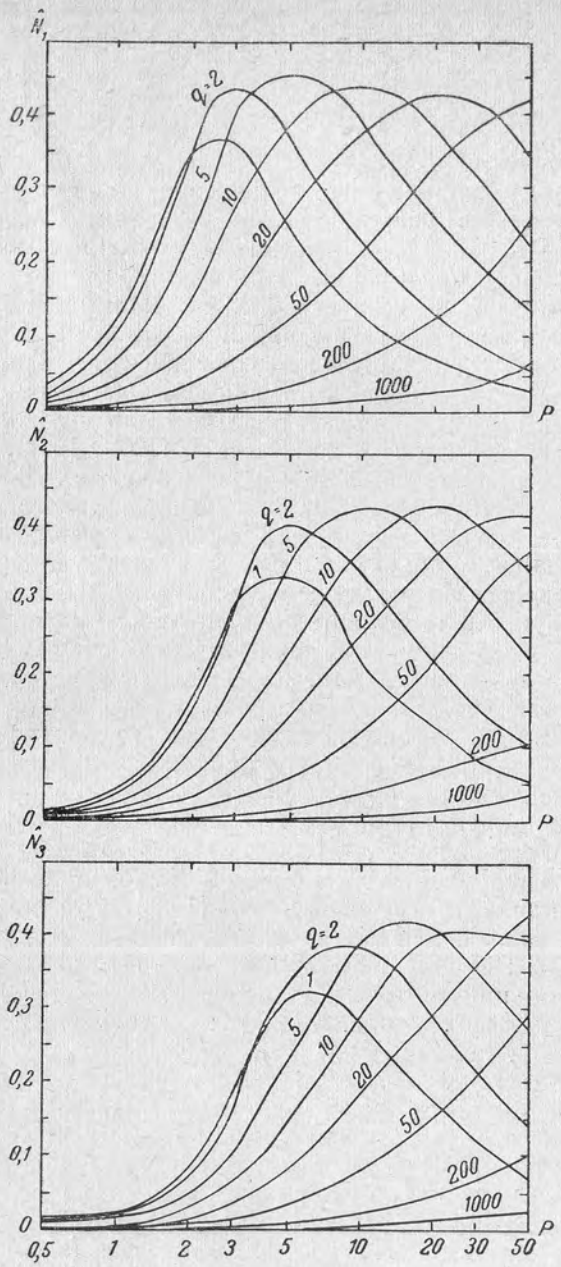


Рис. 22. Графики $\hat{M}$, $\hat{N}$ в зависимости от параметра $p = (\sigma\mu\omega)^{\frac{1}{2}} a$.

Глава VI

ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ ИНДУКЦИЯ В ТОНКОЙ ПЛАСТИНЕ

Рассматриваемый вопрос имеет важное значение для интерпретации данных съемки индукционными методами. Рудные тела жильной формы и зоны тектонических нарушений, выделяемые индукционной электроразведкой, часто можно в первом приближении заменить тонкой пластиной с высокой электропроводностью. Однако и в этом случае задача еще слишком сложна для того, чтобы можно было получить точное решение. Совершенно строгое решение удается получить лишь для очень тонкой полубесконечной идеально проводящей пластины или полуплоскости. Такого рода задача была решена Тессером (1953, 1954), использовавшим в своей работе метод Клеммова (Clemmow, 1950) и результаты Сеньора (Senior, 1953) для электрического диполя. Тессер приводит точные формулы в виде интегралов, которые затем вычисляются приближенно для случая идеально проводящей полуплоскости в присутствии магнитного диполя. Во втором приближении эти интегралы вычисляются Янковским (Jankowski, 1959). Тессер получил выражение для вещественной части поля, Янковский — для мнимой.

Более простое строгое решение для идеально проводящей полуплоскости в присутствии магнитного диполя получено Весли (Wesley, 1958) при помощи функции Грина. Результаты представлены им в виде точных формул, выраженных через элементарные функции. Комбинируя это решение с известной формулой для бесконечного пласта с конечной мощностью, Весли получил приближенное решение для полубесконечной тонкой пластины с конечными толщиной и проводимостью (1958). Это полученное искусственным путем решение является точным в двух предельных случаях: а) для идеально проводящей полуплоскости и б) когда источник и приемник поля находятся вблизи пластины, но удалены от ее края. Аналогичное более упрощенное решение приводится Уэйтом (1959).

Уэйт выводит также формулы для полуплоскости в случае ступенчатой формы возбуждающего поля (1957).

В связи с невозможностью получения точных формул даже для сравнительно простого случая полупластины конечной толщины особо важную роль приобретают модельные работы. Результаты по моделированию приводятся в работах Хедстрома, Паразниса (Hedstrom, Parasnis, 1958), Лундберга (1959) и Торнквиста (Tornkvist, 1958).

В СССР аналогичные вопросы рассматривали Вандакуров (1954), Дмитриев (1960, 1961), Никитина (1960), Векслер (1959), Светов (1960) и др.

§ 1. Метод решения двухмерных дифракционных задач (Клеммов, 1959)

Метод Клеммова заключается в представлении поля дифракции в виде углового спектра плоских волн, что приводит к замене единственного интегрального уравнения в методе, известном за рубежом, как метод Швингера (Schwinger) *, двумя парами интегральных уравнений. Для ряда двухмерных задач эти уравнения решаются при помощи теоремы вычетов Коши. Метод пригоден только в случае идеально проводящих тел **.

1. Угловой спектр плоских волн. Основные идеи, касающиеся использования угловых спектров плоских волн, излагаются во многих работах [Букер (Booker), Клеммов, 1950]. Однако следует рассмотреть еще некоторые особенности этого метода.

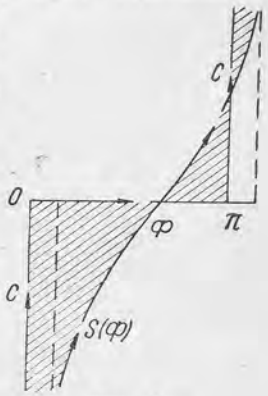


Рис. 1.

Когда электромагнитное поле не зависит от z, удобно ввести две системы координат — прямоугольные (x, y, z) и цилиндрические (ϱ, ϕ, z). Используется система единиц MKS. Через Y и Z обозначим соответственно внутренние адмитанс и импеданс*** непроводящей вмещающей среды. Временной множитель $e^{i\omega t}$ опускается.

Рассмотрим два основных случая поляризации: так называемые E-поляризация $\boldsymbol{E} = (0, 0, E_z)$ и H-поляризация $\boldsymbol{H} = (0, 0, H_z)$. В первом случае полное электрическое поле равно E_z, во втором — полное магнитное поле равно H_z.

Плоская волна $\boldsymbol{E}$ определяется выражением:

$$E_z = e^{-ik\varrho\cos(\phi-\alpha)} = e^{-ik(x\cos\alpha + y\sin\alpha)}, \tag{1.1}$$

где $k = \frac{2\pi}{\Lambda}$ волновое число непроводящей среды, α — угол между направлением распространения волны и осью Ox. В общем виде поле выражается при помощи соответствующего углового спектра:

$$E_z = \int_C P(\cos\alpha)\, e^{-ik\varrho\cos(\phi-\alpha)}\, d\alpha, \tag{1.2}$$

где путь интегрирования C показан на рис. 1. Выражение (1. 2) аналогично тому, которое использовано Букером и Клем-

* См. Карлсон и Хейнс (Carlson, Heins, 1947).

** См. также Сеньор (1959).

*** Если обозначить $Z' = i\,\omega\mu$ и $Y' = -i\,(\varepsilon\omega + i\,\sigma)$, то внутренний импеданс среды $Z = \left(\frac{Z'}{Y'}\right)^{\frac{1}{2}}$ и внутренний адмитанс среды $Y = \left(\frac{Y'}{Z'}\right)^{\frac{1}{2}}$. См. Стрэттон, 1948, стр. 251. *А. В., Г. Ф.*

мовым (1950), только у них переменная интегрирования не α, а $\cos\alpha$. На пути C $\cos\alpha$ принимает вещественные значения от ∞ до $-\infty$. Выражение (1. 2) описывает совокупность «расходящихся» плоских волн. В направлении распространения волн y увеличивается. Поле, распространяющееся в противоположном направлении, описывается выражением:

$$E_z = \int_C Q(\cos\alpha)\, e^{-ik\varrho\cos(\varphi+\alpha)}\, d\alpha. \tag{1.3}$$

Соответствующие соотношения для H_z могут быть получены из (1. 2) и (1. 3) простой заменой E_z на H_z.

Важную роль в теории дифракции играет поле, возбуждаемое поверхностными токами в проводящей плоскости. Если ради удобства выбрать за эту плоскость $y = 0$, то E-поляризованное поле подобного типа может быть записано:

$$E_z = \int_C P(\cos\alpha)\, e^{-ik\varrho\cos(\varphi\pm\alpha)}\, d\alpha, \tag{1.4}$$

$$H_x = \pm Y \int_C \sin\alpha\, P(\cos\alpha)\, e^{-ik\varrho\cos(\varphi\mp\alpha)} d\alpha, \tag{1.5}$$

$$H_y = -Y \int_C \cos\alpha\, P(\cos\alpha)\, e^{-ik\varrho\cos(\varphi\mp\alpha)} d\alpha, \tag{1.6}$$

где верхний знак соответствует $y > 0$ и нижний $y < 0$. Соответственно H-поляризованное поле будет:

$$H_z = \pm \int_C P(\cos\alpha)\, e^{-ik\varrho\cos(\varphi\mp\alpha)}\, d\alpha, \tag{1.7}$$

$$E_x = -Z \int_C \sin\alpha\, P(\cos\alpha)\, e^{-ik\varrho\cos(\varphi\mp\alpha)}\, d\alpha, \tag{1.8}$$

$$E_y = \pm Z \int_C \cos\alpha\, P(\cos\alpha)\, e^{-ik\varrho\cos(\varphi\mp\alpha)}\, d\alpha. \tag{1.9}$$

Две системы уравнений (1. 4), (1. 5), (1. 6) и (1. 7), (1. 8), (1. 9) являются исходными в рассматриваемой теории*. Значимость их в известной мере связана с единством их формы.

Что касается условий на бесконечности, то, как указывает Клеммов, «условия излучения» Зоммерфельда с одной стороны неудобны, а с другой, по-видимому, недостаточно хорошо обоснованы **. Так, на практике k обычно берут с малой отрицательной мнимой частью, которая может быть принята равной нулю в конце анализа. Это обычный прием Швингера. В методе Клеммова физи-

* Соотношения (1. 4) — (1. 9) вытекают из известных уравнений для плоской волны в непрерывной среде: $[\boldsymbol{nE}] = Z\boldsymbol{H}$; $\boldsymbol{E} = Z[\boldsymbol{Hn}]$, где $\boldsymbol{n}$ — единичный вектор (например, Стрэттон, 1948, стр. 252). *А. В., Г. Ф.*

** При этом Клеммов ссылается на работу Аткинсона (Atkinson, 1949). «Условия излучения» Зоммерфельда разбираются также у Франка и Мизеса (1937, стр. 845). *А. В., Г. Ф.*

ческие требования на бесконечности удовлетворяются автоматически, так как поле представлено совокупностью плоских волн, распространяющихся в соответствующих направлениях, и можно без каких-либо затруднений считать k повсюду вещественным.

Более того, в уравнениях (1. 4), (1. 5), (1. 6) учтено то обстоятельство, что рассматриваемое поле возбуждается поверхностными токами в плоскости $y = 0$ и при этом не вводится в явном виде плотность поверхностных токов, а лишь подчеркивается, что E_z повсюду непрерывно, а H_x может иметь разрыв при $y = 0$. То же можно сказать применительно к уравнениям (1. 7), (1. 8), (1. 9). Таким образом, в случае E-поляризованного поля угловой спектр $P(\cos\alpha)$ имеет один и тот же знак для $y > 0$ и $y < 0$, в то время как в случае H-поляризованного поля эти знаки различны. Возможность выразить все компоненты поля через единственную функцию углового спектра тесно связана с тем, что они в такой же мере могут быть выражены при помощи единственной функции плотности тока. Связь между этими двумя функциями становится очевидной, если рассмотреть поле при $y = 0$. Для E-поляризованного поля, пользуясь подстановкой $\cos\alpha = \lambda$, получим из (1. 4), 1. 5), (1. 6):

$$E_z = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(\lambda)}{\sqrt{(1-\lambda)^2}}\, e^{-ikx\lambda}\, d\lambda, \tag{1.10}$$

$$H_x = \pm Y \int_{-\infty}^{\infty} P(\lambda)\, e^{-ikx\lambda}\, d\lambda, \tag{1.11}$$

$$H_y = -Y \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda P(\lambda)}{\sqrt{1-\lambda^2}}\, e^{-ikx\lambda}\, d\lambda. \tag{1.12}$$

Плотность поверхностных токов в плоскости $y = 0$ направлена по оси Oz и измеряется разрывом H_x. Так, в точке $x = \xi$ плотность тока:

$$\dot{i}_z(\xi) = -2Y \int_{-\infty}^{\infty} P(\lambda)\, e^{-ik\xi\lambda}\, d\lambda. \tag{1.13}$$

Аналогичный результат для H-поляризованного поля можно получить из уравнений (1. 7), (1. 8), (1. 9). В этом случае разрыв претерпевает H_z, так что ток течет в направлении оси Ox. Справедливость представления поля при помощи выражений (1. 2) и (1. 3), а также обоснование выбора пути интегрирования C теперь очевидны. Поле с одной стороны произвольной бесконечной плоскости, создаваемое источниками, расположенными по другую сторону, определяется однозначно распределенными на плоскости поверхностными токами. При условии, что распределение тока может быть записано в виде интеграла Фурье, поле может быть выражено в форме углового спектра плоских волн.

Применение теоремы Фурье к (1. 13) дает:

$$P(\lambda) = -\frac{kZ}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} i_z(\xi)\, e^{ik\lambda\xi}\, d\xi. \qquad (1.14)$$

Формулы (1. 13) и (1. 14) равносильны утверждению, что полярная диаграмма есть результат преобразования Фурье, примененного к распределению токов в плоскости. Эта формула отличается от приведенной у Букера и Клеммова (1950) множителем 2, так как в настоящем случае поле существует по обе стороны плоскости $y = 0$.

Подставляя величину $P(\lambda)$ из (1. 14) в (1. 4), (1. 5) и (1. 6) и выполнив интегрирование по λ, придем к представлению поля в виде функции плотности тока.

Принципиальное различие между методами Клеммова и Швингера заключается в том, что в первом за основу принято поле плоской волны, а не поле, обусловленное элементом тока. Концепция полей, вызванных элементами тока, исходит непосредственно из принципа Гюйгенса и классической теории Кирхгофа. С другой стороны, сейчас известно, что выражение поля в виде спектра плоских волн более удобно в теории дифракции «черного» экрана (Букер и Клеммов, 1950). Клеммов показал, что этот способ выражения поля в равной мере эффективен и в строгой теории дифракции. Удобство использования того или другого метода зависит от конкретных задач, в такой же мере как, например, применение импульсов или гармонических волн в теории цепей. По-видимому, использование спектра плоских волн является предпочтительным, когда решается задача плоских волн, падающих на плоские пластины. В качестве примера полезно рассмотреть предельный случай, когда плоская волна падает на идеально проводящую бесконечную пластину. Рассеянное поле есть просто отраженная плоская волна. Однако если его выразить через функцию плотности тока в пластине, то поле имеет вид сложного интеграла с функцией Ганкеля в подынтегральном выражении.

Резюмируя сказанное, отметим, что основными результатами настоящего раздела являются уравнения (1. 4) — (1. 9). Все остальное служит объяснением полезности представления компонент поля в такой форме. Прежде чем применять эти формулы, рассмотрим общий метод расчета входящих в них интегралов.

2. Метод интегрирования. Вычисляемый интеграл в общем случае имеет вид:

$$\int_C P(\cos\alpha)\, e^{-ik\varrho\cos(\phi-\alpha)}\, d\alpha. \qquad (1.15)$$

Для расстояний, бóльших нескольких длин волн от источника, $k\varrho$ велико и обычная методика вычисления выражения (1. 15) сводится к способу быстрейшего спуска*. Соответствующая седловая точка для (1. 15) находится в $\alpha = \phi$. Путь быстрейшего спуска через любой вещественный угол ϕ обозначим $S(\phi)$. Он показан на рис. 1. Далее выберем

$$\tau = \sqrt{2}\, e^{-\frac{1}{4}i\pi} \sin\left(\frac{\alpha-\phi}{2}\right), \quad \cos(\alpha-\phi) = 1 - i\tau^2, \qquad (1.16)$$

где τ принимает вещественные значения от $-\infty$ до $+\infty$.

Путь C в (1. 15) может быть деформирован до $S(\phi)$, при условии, что будут учтены все особенности в заштрихованной площади рис. 1. Эти особенности, как это будет ясно в дальнейшем, приводят к выражениям в решении, соответствующим «геометрической оптике». Здесь они не рассматриваются. Если исключить эти особенности, то интеграл сводится к членам, связанным с дифракцией. Интеграл стремится к нулю, когда $r \to \infty$. Исключение составляют лишь особые области, такие как край заштрихованной площади. Пользуясь подстановкой (1. 16), получим:

$$\sqrt{2}\, e^{\frac{1}{4}i\pi} e^{-ik\varrho} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(\cos\alpha)}{\sqrt{1-\frac{1}{2}i\tau^2}}\, e^{-k\varrho\tau^2} d\tau. \qquad (1.17)$$

Как известно, асимптотическое разложение (1. 17) по обратным степеням $k\varrho$ может быть получено при помощи разложения $P(\cos\alpha)(1-\frac{1}{2}i\tau)^{-\frac{1}{2}}$ в степенной ряд по τ и почленного интегрирования. Главный член

$$\sqrt{2\pi}\, e^{\frac{1}{4}i\pi} P(\cos\alpha) \frac{e^{-ik\varrho}}{\sqrt{k\varrho}} \qquad (1.18)$$

представляет собой цилиндрическую волну, а $P(\cos\alpha)$ определяет полярную диаграмму волны. Однако в некоторых случаях эта методика не пригодна и $P(\cos\alpha)$ необходимо рассматривать строго как угловой спектр (Букер и Клеммов, 1950). Это бывает, когда $P(\cos\alpha)$ меняется недостаточно медленно в седловой точке или, более точно, когда радиус сходимости степенного ряда по τ для $P(\cos\alpha)$ становится столь малым, что он сравним с $(k\varrho)^{-1}$. В этом случае аргумент должен быть изменен так, как это показано Паули (Pauli, 1938) и Оттом (Ott, 1943) и более подробно Клеммовым (1950а). Для этого необходимо оставить под знаком интеграла в дополнение к экспоненциальному множителю ту часть подынтегрального выражения, из-за которой радиус сходимости мал.

Чтобы проиллюстрировать это развитие метода быстрейшего спуска, введем угловой спектр, имеющий фундаментальное значение в теории дифракции. Примем, что

$$P(\cos\alpha) = \frac{\sin\frac{1}{2}\alpha_0 \sin\frac{1}{2}\alpha}{\cos\alpha + \cos\alpha_0}. \qquad (1.19)$$

* О методе быстрейшего спуска см. также у Бреховских (1957). *А. В., Г. Ф.*

Это выражение можно записать в виде разности:

$$\frac{1}{4\cos\frac{1}{2}(\alpha+\alpha_0)}-\frac{1}{4\cos\frac{1}{2}(\alpha-\alpha_0)}, \tag{1.20}$$

Таким образом, приходим к интегралу*:

$$\frac{1}{4}\int\limits_{S(\phi)}\frac{e^{-ik\varrho\cos(\phi-\alpha)}}{\cos\frac{1}{2}(\alpha-\alpha_0)}d\alpha= \tag{1.21}$$

$$=\frac{1}{4}\int\limits_{S(0)}\frac{e^{-ik\varrho\cos\beta}}{\cos\frac{1}{2}(\beta-\alpha_0+\phi)}d\beta=$$

$$=\frac{1}{8}\int\limits_{S(0)}\left[\frac{1}{\cos\frac{1}{2}(\beta-\alpha_0+\phi)}+\frac{1}{\cos\frac{1}{2}(\beta+\alpha_0-\phi)}\right]e^{-ik\varrho\cos\beta}d\beta=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_{S(0)}\frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha_0-\phi)\cos\frac{1}{2}\beta}{\cos\beta+\cos(\alpha_0-\phi)}e^{-ik\varrho\cos\beta}d\beta. \tag{1.22}$$

Пользуясь подстановкой (1.16), когда $\alpha=\beta$, $\phi=0$, можно переписать выражение (1.22):

$$-\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{4}i\pi}e^{-ik\varrho}\varepsilon^*\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-k\varrho\tau^2}}{\tau^2+i\varepsilon^{*2}}d\tau, \tag{1.23}$$

где

$$\varepsilon^*=\sqrt{2}\cos\left(\frac{\phi-\alpha_0}{2}\right). \tag{1.24}$$

Можно показать, что (1.23) выражается при помощи комплексного интеграла Френеля (Отт, 1943)

$$F(a)=\int\limits_{a}^{\infty}e^{-i\tau^2}d\tau. \tag{1.25}$$

Тогда (1.23) имеет вид:

$$\mp\sqrt{\pi}\,e^{-\frac{1}{4}i\pi}e^{-ik\varrho}e^{ik\varrho\varepsilon^*}F(\pm\varepsilon^*\sqrt{k\varrho}), \tag{1.26}$$

где знак сверху соответствует $\frac{1}{4}\pi>\arg\varepsilon^*>-\frac{3}{2}\pi$ и знак снизу $\frac{1}{4}\pi<\arg\varepsilon^*<\frac{5}{4}\pi$. С помощью (1.24) и (1.26) выражение (1.21) примет вид:

$$\mp\sqrt{\pi}\,e^{-\frac{1}{4}i\pi}e^{ik\varrho\cos(\phi-\alpha_0)}F\left[\pm\sqrt{2k\varrho}\cos\left(\frac{\phi-\alpha_0}{2}\right)\right]. \tag{1.27}$$

* Символом $S(0)$ обозначен путь быстрейшего спуска в плоскости переменной $\beta=\phi-\alpha$. *А. В., Г. Ф.*

Приближенное вычисление (1.21) приводит к выражению подобному (1.18):

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,e^{\frac{1}{4}i\pi}\sec\left(\frac{\phi-\alpha_0}{2}\right)\frac{e^{-ik\varrho}}{\sqrt{k\varrho}}. \tag{1.28}$$

Аналогичный результат получается из (1.27), если использовать асимптотическое выражение

$$e^{ia^2}F(a)\sim\frac{1}{2ia}, \tag{1.29}$$

которое справедливо, когда $\frac{1}{4}\pi>\arg a>-\frac{3}{4}\pi$. С другой стороны, если $\phi-\alpha_0$ достаточно близко к π, то аргумент интеграла Френеля в (1.27) становится слишком мал для того, чтобы соотношение (1.29) было справедливым, даже когда $k\varrho$ очень велико. Иначе говоря, полюс углового спектра (1.19) слишком близок к седловой точке, чтобы можно было применять метод быстрейшего спуска.

Рассмотрим теперь угловой спектр в более общем виде

$$P(\cos\alpha)=\frac{\sin\frac{1}{2}\alpha_0\sin\frac{1}{2}\alpha}{\cos\alpha+\cos\alpha_0}Q(\cos\alpha), \tag{1.30}$$

где $Q(\cos\alpha)$ вблизи седловой точки меняется медленно. Как и раньше выражение (1.18) неприменимо при любой фиксированной величине $k\varrho$, когда сумма $\cos\alpha+\cos\alpha_0$ близка к нулю. Запишем (1.30) в виде $P_1(\cos\alpha)+P_2(\cos\alpha)$, где

$$P_1(\cos\alpha)=\frac{\sin\frac{1}{2}\alpha_0\sin\frac{1}{2}\alpha}{\cos\alpha+\cos\alpha_0}Q(-\cos\alpha_0), \tag{1.31}$$

$$P_2(\cos\alpha)=\frac{\sin\frac{1}{2}\alpha_0\sin\frac{1}{2}\alpha}{\cos\alpha+\cos\alpha_0}[Q(\cos\alpha)-Q(-\cos\alpha_0)]. \tag{1.32}$$

Тогда угловой спектр $P_1(\cos\alpha)$ сводится к уже вычисленному интегралу Френеля, а $P_2(\cos\alpha)$ может рассматриваться как полярная диаграмма, так как в (1.32) отсутствуют особенности вблизи седловой точки.

3. Два фундаментальных интегральных уравнения. Снимем на время ограничение, касающееся двухмерности задачи, и рассмотрим произвольную электромагнитную волну, падающую на систему бесконечно тонких, идеально проводящих, лежащих в одной плоскости пластин. Пусть в области D находятся проводящие участки плоскости, а T — непроводящие. Притом D и T

в отдельности или D и T вместе могут иметь бесконечную протяженность. Обозначим вектор падающего поля через $\boldsymbol{\Gamma}_{\text{п}}$ и соответствующий вектор вторичного или рассеянного поля, обусловленный токами, индуцированными в D, через $\boldsymbol{\Gamma}_{\text{р}}$. Полное поле имеет вид:

$$\boldsymbol{\Gamma} = \boldsymbol{\Gamma}_{\text{п}} + \boldsymbol{\Gamma}_{\text{р}}. \tag{1.33}$$

Вследствие симметрии рассеянного поля а) тангенциальная составляющая вектора $\boldsymbol{H}_{\text{р}}$ равна нулю в области T. Кроме того, б) в силу граничных условий на поверхности идеального проводника тангенциальная компонента вектора $\boldsymbol{E}_{\text{п}} + \boldsymbol{E}_{\text{р}}$ равна нулю в области D.

Если временно исключить условия, связанные с природой сингулярности на краях проводящих пластин *, то можно сказать, что решением задачи будет поле, удовлетворяющее условиям а) и б) и должным образом ведущее себя на бесконечности.

Возвращаясь к двухмерной задаче, выберем за дифракционную плоскость $y = 0$. В этом случае рассеянное поле может быть выражено в интегральной форме в соответствии с уравнениями (1. 4), (1. 5), (1. 6) или (1. 7), (1. 8), (1. 9) в зависимости от поляризации. Как показано выше, необходимым и достаточным условием для этого является распределение индукционных токов в плоскости $y = 0$, выражаемое интегралом Фурье типа (1. 13). Граничные условия а) и б) приводят к двум парам интегральных уравнений, на которых базируется рассматриваемая теория:

Для E-поляризованного поля

$$\int_{-\infty}^{\infty} P(\lambda)\, e^{-ikx\lambda}\, d\lambda = 0 \quad \text{в области } T, \tag{1.34}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(\lambda)}{\sqrt{1-\lambda^2}}\, e^{-ikx\lambda}\, d\lambda = -E_{z\,\text{п}} \quad \text{в области } D, \tag{1.35}$$

для H-поляризованного поля

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(\lambda)}{\sqrt{1-\lambda^2}}\, e^{-ikx\lambda}\, d\lambda = 0 \quad \text{в области } T, \tag{1.36}$$

$$Z\int_{-\infty}^{\infty} P(\lambda)\, e^{-ikx\lambda}\, d\lambda = E_{x\text{п}} \quad \text{в области } D. \tag{1.37}$$

Единственная неизвестная функция должна удовлетворять различным уравнениям для различных областей x.

---

* См. пункт 4 настоящего параграфа. *А. В., Г. Ф.*

То, что рассеянное поле генерируется поверхностными токами, индуцированными в D, очевидно из уравнения (1. 14), которое является общим решением уравнения (1. 34):

$$P(\lambda) = -\frac{kZ}{4\pi} \int_D i(\quad) e^{ik\lambda\xi}\, d\xi. \tag{1.38}$$

Такое решение получается при помощи преобразования Фурье, примененного к (1. 34). Подставив (1. 38) в (1. 35) и выполнив интегрирование по λ, имеем:

$$\frac{kZ}{4} \int_D i(\xi)\, H_0^{(2)}(k\,|x-\xi|)\, d\xi = E_{z\,\text{п}} \quad \text{в области } D. \tag{1.39}$$

На такого рода интегральном уравнении базируется метод Швингера. Аналогичным образом уравнения (1. 36) и (1. 37) могут быть заменены одним интегральным уравнением.

Вывод фундаментальных уравнений, которые даются здесь, соответствует случаю, когда проводник находится в одной плоскости. Для того, чтобы получить более общие формулы, необходимо воспользоваться суперпозицией рассеянных полей, создаваемых индукционными токами в проводниках, которые лежат в различных плоскостях. Можно показать, что определенные конфигурации этих проводников по-прежнему приводят к двойным интегральным уравнениям, аналогичным (1. 34), (1. 35) или (1. 36), (1. 37). В разбираемых задачах каждое уравнение может быть решено путем простого применения теоремы вычетов Коши (лемма Жордана).

4. Плоская волна, падающая на полубесконечную пластину. Это фундаментальная задача в теории дифракции. Впервые строгое решение для нее было получено Зоммерфельдом в 1896 г. Несмотря на обилие литературы, посвященной этой задаче, по-видимому, полезно рассмотреть ее, пользуясь изложенным выше методом, так как в этом случае получается простое решение и, кроме того, на основании его можно представить себе способ решения более сложных задач.

Пусть идеально проводящая полуплоскость имеет координаты $y = 0$, $x > 0$. Рассмотрим вначале случай E-поляризации, где падающая волна имеет вид:

$$E_{z\,\text{п}} = e^{ik\varrho\cos(\varphi-\alpha_0)}. \tag{1.40}$$

Для удобства предположим, что α_0 вещественно и $0 < \alpha_0 < \pi$. Тогда интегральные уравнения (1. 34) и (1. 35) имеют вид:

$$\int_{-\infty}^{\infty} P(\lambda)\, e^{-kx\lambda}\, d\lambda = 0, \quad (x < 0) \tag{1.41}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(\lambda)}{\sqrt{1-\lambda^2}}\, e^{-ikx\lambda}\, d\lambda = -e^{ikx\lambda_0}, \quad (x > 0), \tag{1.42}$$

где $\lambda_0 = \cos\alpha_0$, а путь интегрирования вдоль вещественной оси (рис. 2) обходит возможные точки ветвления $\lambda = \pm 1$, как и путь C. Путь интегрирования может быть замкнут полуокружностью с бесконечным радиусом сверху или снизу от вещественной оси, при условии, что $P(\lambda)$ возрастает на бесконечности как алгебраическая функция. Для удобства введем следующие обозначения. Функции, не имеющие особенностей и нулей в верхней комплексной полуплоскости λ и алгебраически возрастающие на бесконечности, обозначаются буквой U. Те же функции с аналогичными свойствами в нижней полуплоскости обозначаются буквой L.

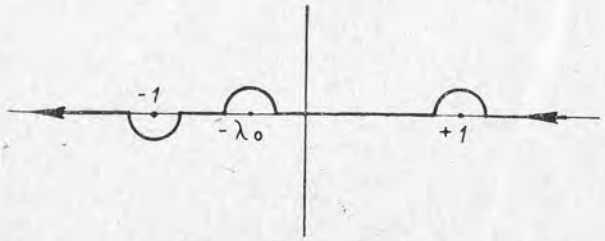


Рис. 2.

Тогда решение уравнения (1.41) есть

$$P(\lambda) = U(\lambda), \tag{1.43}$$

а решение уравнения (1.42)

$$\frac{P(\lambda)}{\sqrt{1-\lambda^2}} = \frac{1}{2\pi i}\,\frac{L(-\lambda_0)}{L(\lambda)}\,\frac{1}{\lambda+\lambda_0} \tag{1.44}$$

при условии, что путь интегрирования проходит над полюсом $\lambda = -\lambda_0$ (рис. 2).

Если исключить $P(\lambda)$ из (1.43), (1.44), то становится очевидным, что определение функций $U(\lambda)$ и $L(\lambda)$ зависит от выражения величины $\sqrt{1-\lambda^2}$ через произведение функций типа $U(\lambda)$ и $L(\lambda)$. В рассматриваемом тривиальном случае эти функции равны $\sqrt{1-\lambda}$ и $\sqrt{1+\lambda}$. Таким образом,

$$P(\lambda) = \frac{1}{2\pi i}\,\frac{\sqrt{1-\lambda_0}\sqrt{1-\lambda}}{\lambda+\lambda_0} \tag{1.45}$$

удовлетворяет уравнениям (1.43) и (1.44).

Полное решение получается из (1.4), (1.5), (1.6) с учетом (1.45). Выражение (1.45) аналогично (1.19). Отсюда рассеянное поле для $y > 0$:

$$E_{z\,\text{р}} = \frac{1}{i\pi}\int\limits_C \frac{\sin\frac{1}{2}\alpha_0 \sin\frac{1}{2}\alpha}{\cos\alpha + \cos\alpha_0}\, e^{-ik\varrho\cos(\phi-\alpha)}\, d\alpha. \tag{1.46}$$

Полное поле есть сумма (1.40) и (1.46). Для разделения рассеянного поля на поле «геометрической оптики» и «дифракционное» путь C в (1.46) деформируется до $S(\phi)$. Как видно из рис. 1, полюс $\alpha = \pi - \alpha_0$ захватывается в положительном смысле, если и только если $\pi - \alpha_0 > \phi$ и вычет есть отраженная волна геометрической оптики. Дифракционное поле описывается выражением (1.46), где путь интегрирования C заменен на $S(\phi)$. Пользуясь (1.20) и (1.27), можно записать:

$$E_{z\,\text{д}} = -\frac{e^{\frac{1}{4}i\pi}}{\sqrt{\pi}}\left\{e^{ik\varrho\cos(\phi-\alpha_0)}F\left[\sqrt{2k\varrho}\cos\left(\frac{\phi-\alpha_0}{2}\right)\right] \mp \right.$$
$$\left. \mp e^{ik\varrho\cos(\phi+\alpha_0)}F\left[\pm\sqrt{2k\varrho}\cos\left(\frac{\phi+\alpha_0}{2}\right)\right]\right\}, \tag{1.47}$$

где верхний знак соответствует $\phi + \alpha_0 < \pi$, а нижний $\phi + \alpha_0 > \pi$. Соотношение

$$F(a) + F(-a) = \sqrt{\pi}\, e^{-\frac{1}{4}i\pi} \tag{1.48}$$

позволяет представить полное поле в известной форме:

$$E_z = \frac{e^{\frac{1}{4}i\pi}}{\sqrt{\pi}}\left\{e^{ik\varrho\cos(\phi-\alpha_0)}F\left[-\sqrt{2k\varrho}\cos\left(\frac{\phi-\alpha_0}{2}\right)\right] - \right.$$
$$\left. - e^{ik\varrho\cos(\phi+\alpha_0)}F\left[-\sqrt{2k\varrho}\cos\left(\frac{\phi+\alpha_0}{2}\right)\right]\right\}. \tag{1.49}$$

Для $y < 0$ путь быстрейшего спуска есть $S(2\pi - \phi)$ и захват полюса $\alpha = \pi - \alpha_0$ приводит к знаку «минус» в падающей волне (1.40). Полное поле по-прежнему определяется соотношением (1.49).

Когда падающая волна имеет H-поляризацию, решение практически идентично приведенному выше. В этом случае угловой спектр

$$P(\cos\alpha) = \frac{i}{\pi}\,\frac{\cos\frac{1}{2}\alpha_0\cos\frac{1}{2}\alpha}{\cos\alpha + \cos\alpha_0} =$$
$$= \frac{i}{4\pi}\left[\frac{1}{\cos\frac{1}{2}(\alpha+\alpha_0)} + \frac{1}{\cos\frac{1}{2}(\alpha-\alpha_0)}\right], \tag{1.50}$$

а полное поле

$$H_z = \frac{e^{\frac{1}{4}i\pi}}{\sqrt{\pi}}\left\{e^{ik\varrho\cos(\phi-\alpha_0)}F\left[-\sqrt{2k\varrho}\cos\left(\frac{\phi-\alpha_0}{2}\right)\right] + \right.$$
$$\left. + e^{ik\varrho\cos(\phi+\alpha_0)}F\left[-\sqrt{2k\varrho}\cos\left(\frac{\phi+\alpha_0}{2}\right)\right]\right\}. \tag{1.51}$$

В заключение следует сделать несколько замечаний общего характера. Во-первых, интересно отметить, что угловой спектр

$P(\cos\alpha)$, определяемый из (1. 45) и (1. 50), остается неизменным при замене α на α_0. Это прямое следствие теоремы взаимности между источником и приемником поля.

Далее следует сказать несколько слов об однозначности решения. Предположим, что правая часть выражения (1. 45) была бы умножена на $f(\lambda)/f(-\lambda_0)$, где $f(\lambda)$ — произвольная алгебраическая функция, не имеющая особенностей на всей комплексной плоскости λ, за исключением бесконечности. Подобная операция привела бы к бесконечному множеству электромагнитных полей, удовлетворяющих уравнениям Максвелла и граничным условиям на полуплоскости $y = 0$, $x > 0$ и в бесконечности. Умножение в данном случае эквивалентно многократному дифференцированию. Различные «решения» имеют на краю полуплоскости особенности различных порядков, связанные с порядком $f(\lambda)$. Поэтому нужно использовать дополнительные физические условия для того, чтобы выделить правильное решение. Однако относительно этих условий еще нет единой точки зрения. По мнению Клеммова, из физических представлений необходимо, чтобы тангенциальная компонента $\boldsymbol{H}$ не имела бы особенностей более высокого порядка, чем $x^{-\frac{1}{2}}$, когда $x \to 0$ при подходе к краю полуплоскости. Это можно объяснить тем, что рассеянное поле должно выражаться через интеграл от индуцированных токов вдоль полуплоскости и поэтому этот интеграл должен сходиться. Имеется в виду, что $P(\lambda)$ должно стремится к нулю по крайней мере как $\lambda^{-\frac{1}{2}}$, когда $\lambda \to \infty$, и в соответствии с этим соотношения (1. 13) и (1. 14) совершенно строгие. Если воспользоваться принципом Бабине (Babinet), (Букер, 1946), то видно, что особенности тангенциальной составляющей $\boldsymbol{E}$ равным образом ограничены. Неоднозначность, по-видимому, возникает в случае H-поляризации, так как решение (1. 51) не имеет особенностей и на первый взгляд дальнейшее дифференцирование кажется допустимым. В этом случае только в E_x появится особенность порядка $x^{-\frac{3}{2}}$. Этот парадокс разрешен в следующем пункте настоящего параграфа при рассмотрении двухмерной задачи как предельного случая квазитрехмерной задачи. Здесь можно отметить, что рассматриваемый вопрос разрешается с помощью принципа взаимности, ибо необходимая симметрия $P(\cos\alpha)$ в α и α_0 соблюдается, когда $f(\lambda)$ — постоянная величина.

5. *Распространение метода на случай линейного источника и на случай квазитрехмерных задач.* Выше рассматривалась лишь плоская волна. Однако линейный источник с произвольной полярной диаграммой может быть представлен в виде углового спектра плоских волн. Соответствующее решение для этого источника можно найти путем интегрирования по α_0 вдоль пути C. Дифракционные члены представляются теперь в виде двойных

интегралов по α и α_0 вдоль кривых быстрейшего спуска $S(\phi)$ и $S(\phi_0)$. Полная симметрия в α и α_0 обусловлена принципом взаимности.

Как показывает практика, описываемый выше метод успешно может быть применен к линейным источникам (Клеммов, 1950 b). Однако формальное решение может быть также получено при помощи методики, совершенно аналогичной той, которая применялась для плоской падающей волны. В последнем случае весьма удобно использовать обычный интеграл Фурье вследствие наличия экспоненциальных функций. Для линейного источника последние должны быть заменены функциями Ганкеля. Вывод решения здесь не более труден, чем прежде, так как замыкание пути интегрирования вдоль вещественной оси бесконечными полуокружностями и в этом случае остается справедливым. Решение теперь имеет вид ординарного интеграла, содержащего функцию Ганкеля. Если функцию Ганкеля представить в виде интеграла Зоммерфельда, то решение принимает форму двойного интеграла, о котором говорилось выше.

Можно провести обобщение и в несколько ином плане. Пусть падающая плоская волна определена волновой функцией

$$e^{ik(x\cos\alpha\cos\beta + y\sin\alpha\cos\beta + z\sin\beta)}, \tag{1.52}$$

где угол β не равен нулю, так что задача уже не может считаться строго двухмерной. Из любого двухмерного решения волнового уравнения можно получить квазитрехмерное, заменив k на $k\cos\beta$ и при помощи умножения на $e^{ikz\sin\beta}$. Отсюда следует что решение для падающей волны (1. 52) могло бы быть получено из решения для случая $\beta = 0$. Эта методика достаточно проста для скалярных задач. Совершенно неочевидно, что она применима к электромагнитным волнам в общем случае, однако ею можно пользоваться, если дифракционные структуры двухмерны, так как тогда поле может быть выражено при помощи единственной скалярной волновой функции. Хотя эта методика хорошо известна (например, Стрэттон, 1948, гл. 6), ее применение к теории дифракции, по-видимому, еще не рассматривалось. Поэтому целесообразно кратко рассмотреть ее сущность в особенности в связи с вопросом однозначности решения.

Весьма существенно, что если $H_{z\,\text{п}} = 0$ (или $E_{z\,\text{п}} = 0$), то $H_{zp} = 0$ (или $E_{zp} = 0$). Когда $E_z = 0$, поле имеет вид:

$$\boldsymbol{E} = \frac{iZ}{k}\left(-\frac{\partial V}{\partial y},\ \frac{\partial V}{\partial x},\ 0\right), \tag{1.53}$$

$$\boldsymbol{H} = \left(\frac{i\sin\beta}{k}\frac{\partial V}{\partial x},\ \frac{i\sin\beta}{k}\frac{\partial V}{\partial y},\ \cos^2\beta\, V\right), \tag{1.54}$$

где V удовлетворяет волновому уравнению:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + k^2\cos^2\beta\, V = 0 \tag{1.55}$$

и z входит повсюду лишь через множитель $e^{ikz\sin\beta}$. Равенство $\beta = 0$ дает H-поляризацию в двухмерном случае, где $V = H_z$. Теперь возьмем двухмерное решение H_z, заменим в нем k на $k\cos\beta$ и умножим его на $e^{ikz\sin\beta}$. Новое значение V, подставленное в (1. 53) и (1. 54), определяет поле в квазитрехмерном случае.

Так как V не имеет особенностей на оси Oz и в равенства (1. 53) и (1. 54) входят лишь первые производные по x и y, ни одна из компонент поля не имеет особенностей большего порядка, нежели $r^{-\frac{1}{2}}$. Однако H_x будет иметь особенность порядка $r^{-\frac{1}{2}}$, так что решения, которые могут быть получены путем дальнейшего дифференцирования, недопустимы. Это раскрывает неоднозначность, о которой говорилось в пункте 4. Как это видно сейчас, неоднозначность связана с тем, что H_x стремится к нулю, когда $\beta = 0$.

С произвольно поляризованной падающей плоской волной можно оперировать, комбинируя соответствующим образом две основные поляризации, для которых соответственно $H_z = 0$ и $E_z = 0$. Так как любое поле может быть построено из плоских волн, то задача может быть решена для совершенно произвольного первичного поля.

§ 2. Метод решения задачи дифракции поля диполя на идеально проводящей полуплоскости

(Сеньор, 1953)

1. Метод анализа. Пусть бесконечно тонкая идеально проводящая пластина занимает полуплоскость $y = 0$, $x > 0$ в системе прямоугольных координат (x, y, z). Электрический диполь, перпендикулярный пластине, расположен в точке (x_0, y_0, z_0). Поле диполя в непроводящей среде выражается через вектор Герца следующим образом:

$$\boldsymbol{E} = \left(\frac{\partial^2 \Pi_y}{\partial x \partial y},\ \frac{\partial^2 \Pi_y}{\partial y^2} + k^2 \Pi_y,\ \frac{\partial \Pi_y}{\partial y \partial z}\right),$$
$$\boldsymbol{H} = ikY\left(-\frac{\partial \Pi_y}{\partial z},\ 0,\ \frac{\partial \Pi_y}{\partial x}\right), \tag{2. 1}$$

где $Y = \frac{1}{Z}$ — внутренний адмитанс непроводящей среды, $\Pi_y = \frac{e^{-ikR}}{kR}$, R — расстояние от диполя до точки наблюдения. Используется система единиц MKS. Временной множитель $e^{i\omega t}$ повсюду опущен.

Прежде всего разлагаем поле (2. 1) на плоские волны. Как известно

$$\frac{e^{-ikR}}{kR} =$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{-\pi}^{\pi} d\alpha \int_{-i\infty}^{\frac{1}{2}\pi} e^{ikR[\cos(\alpha-\vartheta)\cos\varphi\cos\beta - \sin\varphi\sin\beta]}\cos\beta\, d\beta, \tag{2. 2}$$

где R, ϑ и φ сферические координаты, в начале которых расположен диполь. Преобразуем выражение (2. 2) в такое, где интегрирование проходит вдоль путей «быстрейшего спуска». Так как

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ikR\cos(\alpha-\vartheta)\cos\varphi\cos\beta}\, d\alpha = J_0(kR\cos\varphi\cos\beta),$$

уравнение (2. 2) можно записать

$$\frac{e^{-ikR}}{kR} = -i\int_{-i\infty}^{\frac{1}{2}\pi} J_0(kR\cos\varphi\cos\beta)\, e^{-ikR\sin\varphi\sin\beta}\cos\beta\, d\beta =$$
$$= -\frac{i}{2}\int_{-i\infty}^{\frac{1}{2}\pi} [H_0^{(2)}(kR\cos\varphi\cos\beta) +$$
$$+ H_0^{(1)}(-kR\cos\varphi\cos\beta)]\, e^{-ikR\sin\varphi\sin\beta}\cos\beta\, d\beta =$$
$$= -\frac{i}{2}\int_{S\left(\frac{1}{2}\pi\right)} H_0^{(2)}(kR\cos\varphi\cos\beta) e^{-ikR\sin\varphi\sin\beta}\cos\beta\, d\beta,$$

где $S\left(\frac{1}{2}\pi\right)$ обозначает путь быстрейшего спуска, проходящий через $\frac{1}{2}\pi$. Представив функцию Ганкеля с помощью интеграла Зоммерфельда, найдем:

$$\frac{e^{-ikR}}{kR} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha=S\left(\frac{1}{2}\pi\right)}\int_{\beta=S\left(\frac{1}{2}\pi\right)} e^{-ikR[\cos(\alpha-\vartheta)\cos\varphi\cos\beta - \sin\varphi\sin\beta]} \times$$
$$\times \cos\beta\, d\alpha\, d\beta.$$

Таким образом интегралы приняли требуемую форму. В первоначальных координатах (x, y, z) имеем:

$$\frac{e^{-ikR}}{kR} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha=S\left(\frac{1}{2}\pi\right)}\int_{\beta=S\left(\frac{1}{2}\pi\right)} e^{ik(x\cos\alpha\cos\beta + y\sin\alpha\cos\beta - z\sin\beta)} \times$$
$$\times F(\alpha, \beta)\cos\beta\, d\alpha\, d\beta, \tag{2. 3}$$

где $F(\alpha, \beta) = e^{-ik(x_0\cos\alpha\cos\beta + y_0\sin\alpha\cos\beta - z_0\sin\beta)}$.

Допуская, что дифференцирование по x, y, z можно провести под знаком интеграла, получим следующие выражения для компонент поля диполя:

$$\boldsymbol{E} = \frac{k^2}{2\pi i} \int\limits_{\alpha=S\left(\frac{1}{2}\pi\right)} \int\limits_{\beta=S\left(\frac{1}{2}\pi\right)} (-\sin\alpha\cos\alpha\cos^2\beta,\ 1-\sin^2\alpha\cos^2\beta,$$
$$\sin\alpha\sin\beta\cos\beta)\cdot e^{ik(x\cos\alpha\cos\beta+y\sin\alpha\cdot\cos\beta-z\sin\beta)}\times$$
$$\times F(\alpha,\ \beta)\cos\beta\, d\alpha\, d\beta \qquad (2.4)$$

$$\boldsymbol{H} = \frac{k^2}{2\pi i} \int\limits_{\alpha=S\left(\frac{1}{2}\pi\right)} \int\limits_{\beta=S\left(\frac{1}{2}\pi\right)} (-Y\sin\beta,\ 0,\ -Y\cos\alpha\cos\beta)\times$$
$$\times e^{-ik(x\cos\alpha\cos\beta+y\sin\alpha\cos\beta-z\sin\beta)}\cdot F(\alpha,\ \beta)\cos\beta\, d\alpha\, d\beta.$$

Равенства (2. 4) представляют поле диполя в виде двойных интегралов от трехмерных плоских волн, дифракцию которых на проводящей пластине можно определить. Более удобно свести задачу дифракции к двухмерному случаю, где фигурируют двухмерные плоско поляризованные поля. Далее, любое решение двухмерного волнового уравнения сводится к решению трехмерного уравнения путем замены k на $k\cos\beta$ и умножения первого решения на $e^{-ikz\sin\beta}$. Пусть V есть такое трехмерное решение. Тогда электромагнитное поле может быть выведено, если взять V в качестве z-компоненты электрического или магнитного вектора Герца, у которого компоненты по осям Ox и Oy равны нулю. Таким путем получим два фундаментальных типа полей:

1) E-поляризованное, у которого $H_z = 0$:

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{E}_1 &= \left(\frac{i\sin\beta}{k}\frac{\partial V}{\partial x},\ \frac{i\sin\beta}{k}\frac{\partial V}{\partial y},\ -V\cos^2\beta\right), \\ \boldsymbol{H}_1 &= \frac{iY}{k}\left(-\frac{\partial V}{\partial y},\ \frac{\partial V}{\partial x},\ 0\right); \end{aligned}\right\} \qquad (2.5)$$

2) H-поляризованное, у которого $E_z = 0$:

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{E}_2 &= \frac{iZ}{k}\left(-\frac{\partial V}{\partial y},\ \frac{\partial V}{\partial x},\ 0\right), \\ \boldsymbol{H}_2 &= \left(-\frac{i\sin\beta}{k}\frac{\partial V}{\partial x},\ -\frac{i\sin\beta}{k}\frac{\partial V}{\partial y},\ V\cos^2\beta\right). \end{aligned}\right\} \qquad (2.6)$$

Рассмотрим такое решение волнового уравнения, которое соответствует двухмерному случаю, т. е. содержит множитель $e^{ik(x\cos\alpha+y\sin\alpha)}$. Когда плоская волна имеет вид $e^{ik(x\cos\alpha\cos\beta+y\sin\alpha\cos\beta-z\sin\beta)}$, то

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{E}_1 &= (-\cos\alpha\sin\beta\cos\beta,\ -\sin\alpha\sin\beta\cos\beta, \\ &\quad -\cos^2\beta)\cdot e^{ik(x\cos\alpha\cos\beta+y\sin\alpha\cos\beta-z\sin\beta)}, \\ \boldsymbol{H}_1 &= (Y\sin\alpha\cos\beta,\ -Y\cos\alpha\cos\beta,\ 0)\times \\ &\quad \times e^{ik(x\cos\alpha\cos\beta+y\sin\alpha\cos\beta-z\sin\beta)}, \end{aligned}\right\} \qquad (2.7)$$

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{E}_2 &= (Z\sin\alpha\cos\beta,\ -Z\cos\alpha\cos\beta,\ 0)\times \\ &\quad \times e^{ik(x\cos\alpha\cos\beta+y\sin\alpha\cos\beta-z\sin\beta)}, \\ \boldsymbol{H}_2 &= (\cos\alpha\sin\beta\cos\beta,\ \sin\alpha\sin\beta\cos\beta, \\ &\quad \cos^2\beta)\cdot e^{ik(x\cos\alpha\cos\beta+y\sin\alpha\cos\beta-z\sin\beta)}. \end{aligned}\right\} \qquad (2.8)$$

Если $\beta = 0$, эти выражения сводятся соответственно к E- и H-поляризованным двухмерным полям. Это наводит на мысль, что решения задачи дифракции для падающих плоских волн (2. 7) и (2. 8) могут быть выведены из аналогичных двухмерных решений, когда $\beta = 0$. Такое предположение оправдывается, если дифракционная структура двухмерна. Тогда в двухмерном решении для E_z заменим k на $k\cos\beta$ и умножим его на $e^{-ikz\sin\beta}$. Подставив это решение вместо V в уравнение (2. 5), получим решение задачи дифракции для падающей плоской волны (2. 7). Аналогично поступим и в случае H-поляризации.

Объединим поля (2. 7) и (2. 8) таким образом, чтобы суммарное магнитное поле не имело составляющей нормальной к пластине. Для этого выберем постоянные коэффициенты A^* и B^*, чтобы

$$H_y = A^* H_{1y} + B^* H_{2y} = 0.$$

Это равенство справедливо, если $A^* = \sin\alpha\sin\beta$, $B^* = Y\cos\alpha$ и результирующее поле:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E} &= [\sin\alpha\cos\alpha\cos^3\beta,\ -\cos\beta(1-\sin^2\alpha\cos^2\beta), - \\ &\quad -\sin\alpha\sin\beta\cos^2\beta]\cdot e^{ik(x\cos\alpha\cos\beta+y\sin\alpha\cos\beta-z\sin\beta)}, \\ \boldsymbol{H} &= [Y\sin\beta\cos\beta,\ 0,\ Y\cos\alpha\cos^2\beta]\times \\ &\quad \times e^{ik(x\cos\alpha\cos\beta+y\sin\alpha\cos\beta-z\sin\beta)}. \end{aligned} \qquad (2.9)$$

Если эти выражения умножить на $\left(\frac{ik^2}{2\pi}\right)F(\alpha,\ \beta)$ и проинтегрировать затем по α и β вдоль пути $S\left(\frac{1}{2}\pi\right)$, то получим поле вертикального электрического диполя:

$$(\boldsymbol{E},\ \boldsymbol{H}) = \frac{ik^2}{2\pi} \int\limits_{\alpha=S\left(\frac{1}{2}\pi\right)} \int\limits_{\beta=S\left(\frac{1}{2}\pi\right)} [\sin\alpha\sin\beta(E_1, H_1) +$$
$$+ Y\cos\alpha(E_2,\ H_2)]\, F(\alpha,\ \beta)\, d\alpha\, d\beta \qquad (2.10)$$

и в частности

$$E_y = \frac{ik^2}{2\pi} \int\limits_{\alpha=S\left(\frac{1}{2}\pi\right)} \int\limits_{\beta=S\left(\frac{1}{2}\pi\right)} [\sin\alpha\sin\beta\, E_{1y} +$$
$$+ Y\cos\alpha\, E_{2y}]\, F(\alpha,\ \beta)\, d\alpha\, d\beta. \qquad (2.11)$$

Это и есть требуемое разложение на плоские волны.

2. Дифракционное поле диполя. Равенство (2. 11) служит для того, чтобы свести задачу к квадратурам, при условии, что мы можем определить дифракционный эффект при падении на пластину волн (2. 7) и (2. 8). Для этого вернемся к двухмерным плоско поляризованным полям.

Рассмотрим E-поляризованную волну, падающую на пластину:

$$E_{z\,\text{п}} = e^{ik(x\cos\alpha + y\sin\beta)}.$$

Решение задачи дифракции для этого случая выводится в предыдущем параграфе:

$$E_z = E_{z\,\text{п}} - \frac{i}{\pi}\int\limits_C \frac{\sin\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}\gamma}{\cos\alpha+\cos\gamma}\times$$
$$\times e^{-ik(x\cos\gamma+|y|\sin\gamma)}\,d\gamma, \qquad (2.12)$$

где путь C показан на рис. 1. Распространение соотношения (2. 12) на случай квазитрехмерной задачи, как это показано выше, приводит к решению для падающей волны (2. 7). Совершенно аналогично из двухмерной H-поляризованной волны

$$H_{z\,\text{п}} = e^{ik(\cos\alpha + y\sin\alpha)},$$

для которой поле дифракции

$$H_z = H_{z\,\text{п}} + \frac{i}{\pi}\frac{y}{|y|}\int\limits_C \frac{\cos\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}\gamma}{\cos\alpha+\cos\gamma}\times$$
$$\times e^{-ik(x\cos\gamma+|y|\sin\gamma)}\,d\gamma, \qquad (2.13)$$

можно получить решение для падающей волны (2. 8)

Подставляя эти результаты в уравнение (2. 11), придем к следующему выражению для y-компоненты электрического поля диполя в присутствии проводящей пластины:

$$E_y = \frac{k^2}{2\pi i}\int\limits_{\alpha=S\left(\frac{1}{2}\pi\right)}\int\limits_{\beta=S\left(\frac{1}{2}\pi\right)} (1-\sin^2\alpha\cos^2\beta)\times$$
$$\times e^{ik(x\cos\alpha\cos\beta + y\sin\alpha\cos\beta - z\sin\beta)}\times$$
$$\times F(\alpha,\beta)\cos\beta\,d\alpha\,d\beta - \frac{k^2}{2\pi^2}\frac{y}{|y|}\int\limits_{\alpha=S\left(\frac{1}{2}\pi\right)}\int\limits_{\beta=S\left(\frac{1}{2}\pi\right)}\int\limits_{\gamma=C}\times$$
$$\times\left[\frac{\cos\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}\gamma\cos\alpha\cos\gamma - \sin\frac{1}{2}\alpha\sin\frac{1}{2}\gamma\sin\alpha\sin\gamma\sin^2\beta}{\cos\alpha+\cos\gamma}\right]\times$$
$$\times e^{-ik(x\cos\gamma\cos\beta+|y|\sin\gamma\cos\beta+z\sin\beta)}\times$$
$$\times F(\alpha,\beta)\cos\beta\,d\alpha\,d\beta\,d\gamma. \qquad (2.14)$$

Теперь проведем вычисление этих интегралов. Введем полярные координаты (ϱ, ϕ) так, что $x = \varrho\cos\phi$ и $y = \varrho\sin\phi$. Как и прежде, значок «о» указывает на координаты диполя. Считая, что можно дифференцировать под знаком интеграла, приводим двойной интеграл в (2. 14) к виду

$$-\left(\frac{\partial^2}{\partial y\,\partial y_0} - k^2\right)\frac{e^{-ikR}}{kR}. \qquad (2.15)$$

Тройной интеграл при этом равен

$$\frac{1}{2\pi^2}\int\limits_{\alpha=S\left(\frac{1}{2}\pi\right)}\int\limits_{\beta=S\left(\frac{1}{2}\pi\right)}\int\limits_{\gamma=C}\left[\frac{\sin\frac{1}{2}\alpha\sin\frac{1}{2}\gamma}{\cos\alpha+\cos\gamma}\frac{\partial^2}{\partial y\,\partial y_0} - \right.$$
$$\left. -\left(\frac{\cos\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}\gamma\cos\alpha\cos\gamma - \sin\frac{1}{2}\alpha\sin\frac{1}{2}\gamma\sin\alpha\cdot\sin\gamma}{\cos\alpha+\cos\gamma}\right)\frac{k^2 y}{|y|}\right]\times$$
$$\times e^{-ik(x\cos\gamma\cos\beta+|y|\sin\gamma\cos\beta+z\sin\beta)}\times$$
$$\times F(\alpha,\beta)\cos\beta\,d\alpha\,d\beta\,d\gamma. \qquad (2.16)$$

Для выделения поля геометрической оптики и дифракционного поля путь C нужно деформировать в путь быстрейшего спуска. Для области $y > 0$ седловая точка $\gamma = \phi$ и для $y < 0$ $\gamma = 2\pi - \phi$. Можно показать, что полюс $\gamma = \pi - \alpha$ захватывается в положительном смысле, когда $\pi - \alpha$ лежит справа от $S(\phi)$, $(y > 0)$ или справа от $S(2\pi - \phi)$, $(y < 0)$. Так как α лежит на $S\left(\frac{1}{2}\pi\right)$, вычет обусловливает следующую часть поля геометрической оптики:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial y\,\partial y_0} + k^2\right)\frac{e^{-ikR_1}}{kR_1},\quad \left(\phi < \frac{1}{2}\pi\right),$$
$$\left(\frac{\partial^2}{\partial y\,\partial y_0} - k^2\right)\frac{e^{-ikR}}{kR},\quad \left(\phi > \frac{3}{2}\pi\right), \qquad (2.17)$$

где R_1 — расстояние от мнимого дипольного источника, отраженного в плоскости $y = 0$.

Рассмотрим далее тройной интеграл в (2. 16), где теперь путь интегрирования γ есть $S(\phi)$ или $S(2\pi - \phi)$, когда $y > 0$ или $y < 0$ соответственно. Подынтегральное выражение, рассматриваемое как функция от α, обладает полюсом $\alpha = \pi - \gamma$, для которого вычет равен

$$\left.\begin{aligned}&\frac{1}{2\pi i}\left(\frac{\partial^2}{\partial y\,\partial y_0} + k^2\right)\frac{e^{-ikR_1}}{kR_1},\quad (y>0)\\ &\frac{1}{2\pi i}\left(\frac{\partial^2}{\partial y\,\partial y_0} - k^2\right)\frac{e^{-ikR}}{kR}.\quad (y<0)\end{aligned}\right\} \qquad (2.18)$$

Деформация пути интегрирования, при которой он проходит через седловую точку $\alpha = \phi_0$ приводит к тому, что этот полюс необходимо принять в расчет; полюс должен быть учтен в положительном смысле, когда

$$\frac{1}{2}\pi < \phi < \pi - \phi_0$$

или

$$\pi + \phi_0 < \phi < \frac{3}{2}\pi,$$

и в отрицательном, когда

$$\pi - \phi_0 < \phi < \frac{1}{2}\pi$$

или

$$\frac{3}{2}\pi < \phi < \pi + \phi_0.$$

Вычеты в этих случаях дают дополнительные члены в выражении для поля геометрической оптики, которое, наконец, принимает вид:

$$-\left(\frac{\partial^2}{\partial y\,\partial y_0} - k^2\right)\frac{e^{-ikR}}{kR} + \left(\frac{\partial^2}{\partial y\,\partial y_0} + k^2\right)\frac{e^{-ikR_1}}{kR_1},$$

$$(0 < \phi < \pi - \phi_0) \qquad (2.19)$$

$$-\left(\frac{\partial^2}{\partial y\,\partial y_0} - k^2\right)\frac{e^{-ikR}}{kR}, \quad (\pi - \phi_0 < \phi < \pi + \phi_0)$$

и 0, $(\pi + \phi_0 < \phi < 2\pi)$.

Оставшийся интеграл представляет дифракционное поле. Обозначая его через $E_{y\,д}$, имеем после некоторого упрощения:

$$E_{y\,д} = -\frac{k^2}{8\pi^2}\int\limits_{\alpha=S(0)}\int\limits_{\beta=S\left(\frac{1}{2}\pi\right)}\int\limits_{\gamma=S(0)}\left[\frac{\cos(\alpha+\gamma+\phi+\phi_0)}{\cos\frac{1}{2}(\alpha+\gamma+\phi+\phi_0)} + \right.$$

$$\left. + \frac{\cos(\alpha-\gamma-\phi+\phi_0)}{\cos\frac{1}{2}(\alpha-\gamma-\phi+\phi_0)}\right] \times$$

$$\times e^{-ik[\varrho\cos\gamma\cos\beta + \varrho_0\cos\alpha\cos\beta + (z-z_0)\sin\beta]}\cos\beta\, d\alpha\, d\beta\, d\gamma +$$

$$+ \frac{1}{8\pi^2}\frac{\partial^2}{\partial y\,\partial y_0}\int\limits_{\alpha=S(0)}\int\limits_{\beta=S\left(\frac{1}{2}\pi\right)}\int\limits_{\gamma=S(0)}\left[\sec\frac{1}{2}(\alpha+\gamma+\phi+\phi_0) - \right.$$

$$\left. - \sec\frac{1}{2}(\alpha-\gamma-\phi+\phi_0)\right] \times$$

$$\times e^{-ik[\varrho\cos\gamma\cos\beta + \varrho_0\cos\alpha\cos\beta + (z-z_0)\sin\beta]}\cos\beta\, d\alpha\, d\beta\, d\gamma$$

или

$$E_{y\,д} = \frac{k}{2\pi i}[A(\phi_0) + A(-\phi_0)] +$$

$$+ \frac{1}{2\pi ki}\left[\frac{\partial^2}{\partial y\,\partial y_0} - k^2\right]B(\phi_0) - \frac{1}{2\pi ki}\left[\frac{\partial^2}{\partial y\,\partial y_0} + k^2\right]B(-\phi_0), \quad (2.20)$$

где

$$A(\phi_0) = \frac{k}{2\pi i}\int\limits_{\alpha=S(0)}\int\limits_{\beta=S\left(\frac{1}{2}\pi\right)}\int\limits_{\gamma=S(0)}\cos\frac{1}{2}(\alpha+\gamma+\phi-\phi_0) \times$$

$$\times e^{-ik[\varrho\cos\gamma\cos\beta + \varrho_0\cos\alpha\cos\beta + (z-z_0)\sin\beta]}\cos\beta\, d\alpha\, d\beta\, d\gamma$$

и

$$B(\phi_0) = \frac{k}{2\pi i}\int\limits_{\alpha=S(0)}\int\limits_{\beta=S\left(\frac{1}{2}\pi\right)}\int\limits_{\gamma=S(0)}\sec\frac{1}{2}(\alpha+\gamma+\phi-\phi_0) \times$$

$$\times e^{-ik[\varrho\cos\gamma\cos\beta + \varrho_0\cos\alpha\cos\beta + (z-z_0)\sin\beta]}\cos\beta\, d\alpha\, d\beta\, d\gamma.$$

3. Упрощение решения. Преобразуем интегралы $A(\phi_0)$ и $B(\phi_0)$. Произведем замену переменной $(\alpha, \beta, \gamma) \to (\alpha, \beta, \delta)$, где $\delta = \gamma + \alpha$. Чтобы определить путь интегрирования, проходимый вдоль δ, выберем некоторое фиксированное значение α. Так как переменной γ соответствует путь $S(0)$, то и δ также соответствует аналогичный путь, сдвинутый на величину α. И этот путь может быть снова сдвинут в первоначальное положение. То же относится к каждому значению α на $S(0)$. Следовательно,

$$A(\phi_0) = \frac{k}{2\pi i}\int\limits_{\alpha=S(0)}\int\limits_{\beta=S\left(\frac{1}{2}\pi\right)}\int\limits_{\delta=S(0)}\cos\frac{1}{2}(\delta+\phi-\phi_0) \times$$

$$\times e^{-ik[\varrho\cos(\delta-\alpha)\cos\beta + \varrho_0\cos\alpha\cos\beta + (z-z_0)\sin\beta]} \times \cos\beta\, d\alpha\, d\beta\, d\delta.$$

Теперь может быть выполнено интегрирование по α и β, что приводит к

$$A(\phi_0) = \int\limits_{S(0)}\frac{e^{-ik\sqrt{\varrho^2+\varrho_0^2+(z-z_0)^2+2\varrho\varrho_0\cos\delta}}}{\sqrt{\varrho^2+\varrho_0^2+(z-z_0)^2+2\varrho\varrho_0\cos\delta}} \times$$

$$\times \cos\frac{1}{2}\delta\cos\frac{1}{2}(\phi-\phi_0)\, d\delta. \qquad (2.21)$$

Точно так же получим:

$$B(\phi_0) = \int\limits_{S(0)}\frac{e^{-ik\sqrt{\varrho^2+\varrho_0^2+(z-z_0)^2+2\varrho\varrho_2\cos\delta}}}{\sqrt{\varrho^2+\varrho_0^2+(z-z_0)^2+2\varrho\varrho_0\cos\delta}} \times$$

$$\times \frac{\cos\frac{1}{2}\delta\cos\frac{1}{2}(\phi-\phi_0)}{\cos\delta+\cos(\phi-\phi_0)}\, d\delta. \qquad (2.22)$$

Дальнейшее упрощение $A(\phi_0)$ и $B(\phi_0)$ возможно, если воспользоваться результатами Макдональда (1915). Так как

$$\frac{e^{-iu}}{u} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^{c-\infty i} e^{\frac{\xi}{2} - \frac{u^2}{2\xi}} \frac{1}{\xi^{\frac{3}{2}}} d\xi, \tag{2.23}$$

где c есть вещественная положительная величина, можно записать:

$$A(\phi_0) = \frac{k}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{S(0)} \int\limits_0^{c-\infty i} e^{\left[\frac{\xi}{2} - \frac{k^2}{2\xi}\left\{\varrho^2 + \varrho_0^2 + (z-z_0)^2 + 2\varrho\varrho_0 \cdot \cos\delta\right\}\right]} \times$$

$$\times \cos\frac{1}{2}\delta \cos\frac{1}{2}(\phi - \phi_0) \cdot \frac{1}{\xi^{\frac{3}{2}}} d\delta\, d\xi. \tag{2.24}$$

Произведем интегрирование по δ. Пользуясь подстановкой

$$\tau = \sqrt{2}\, e^{-\frac{1}{4} i\pi} \sin\frac{1}{2}\delta, \tag{2.25}$$

имеем:

$$\int\limits_{S(0)} e^{-\frac{k^2}{\xi}\varrho\varrho_0 \cos\delta} \cos\frac{1}{2}\delta\, d\delta = \sqrt{2}\, e^{\frac{1}{4} i\pi} \times$$

$$\times e^{-\frac{k^2}{\xi}\varrho\varrho_0} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\frac{k^2}{\xi}\varrho\varrho_0\tau^2} d\tau = \frac{i}{k}\sqrt{\frac{2\pi\xi}{\varrho\varrho_0}}\, e^{-\frac{k^2}{\xi}\varrho\varrho_0}.$$

Отсюда

$$A(\phi_0) = i\cos\frac{1}{2}(\phi - \phi_0) \int\limits_0^{c-\infty i} e^{\left[\frac{\xi}{2} - \frac{k^2}{2\xi}\left\{(\varrho+\varrho_0)^2 + (z-z_0)^2\right\}\right]} \frac{d\xi}{\xi\sqrt{\varrho\varrho_0}} =$$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{\varrho\varrho_0}} \cos\frac{1}{2}(\phi - \phi_0)\, H_0^{(2)}(kR^*), \tag{2.26}$$

где $R^{*2} = (\varrho + \varrho_0)^2 + (z - z_0)^2$.
По аналогии можно записать:

$$B(\phi_0) = \frac{k}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{S(0)} \int\limits_0^{c-\infty i} e^{\left[\frac{\xi}{2} - \frac{k^2}{2\xi}\left\{\varrho^2 + \varrho_0^2 + (z-z_0)^2 + 2\varrho\varrho_0 \cos\delta\right\}\right]} \times$$

$$\times \frac{\cos\frac{1}{2}\delta \cos\frac{1}{2}(\phi - \phi_0)}{\cos\delta + \cos(\phi - \phi_0)} \frac{1}{\xi^{\frac{3}{2}}} d\delta\, d\xi. \tag{2.27}$$

Подстановка (2.25) дает:

$$\int\limits_{S(0)} e^{-\frac{k^2}{\xi}\varrho\varrho_0 \cos\delta} \frac{\cos\frac{1}{2}\delta \cos\frac{1}{2}(\phi - \phi_0)}{\cos\delta + \cos(\phi - \phi_0)} d\delta = -e^{-\frac{1}{4} i\pi} e^{-\frac{k^2}{\xi}\varrho\varrho_0} \varepsilon^* \times$$

$$\times \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\frac{k^2}{\xi}\varrho\varrho_0\tau^2}}{\tau^2 + i\varepsilon^{*2}} d\tau = \pm i\sqrt{\frac{2\pi}{\xi}}\, e^{\frac{k^2}{\xi}\varrho\varrho_0 \cos(\phi - \phi_0)} \int\limits_{\pm\varepsilon^*\sqrt{2\varrho\varrho}}^{\infty} e^{-\frac{\lambda^2}{2\xi}} d\lambda,$$

где $\varepsilon^* = \sqrt{2}\cos\frac{1}{2}(\phi - \phi_0)$ и верхний или нижний знак выбирается в зависимости от того, выполняется ли неравенство $-\frac{1}{2}\pi < \arg\varepsilon^* < \frac{1}{2}\pi$ или $\frac{1}{2}\pi < \arg\varepsilon^* < \frac{3}{2}\pi$. Подставляя это выражение в (2.27), получим:

$$B(\phi_0) = \pm ik \int\limits_{\pm\varepsilon^*\sqrt{2\varrho\varrho_0}}^{\infty} \int\limits_0^{c-\infty i} e^{\left[\frac{1}{2}\xi - \frac{1}{2\xi}(k^2R^2 + \lambda^2)\right]} \frac{1}{\xi^2} d\lambda\, d\xi =$$

$$= \pm \pi k \int\limits_{\pm\varepsilon^*\sqrt{2\varrho\varrho_0}}^{\infty} \frac{H_1^{(2)}(\sqrt{k^2R^2 + \lambda^2})}{\sqrt{k^2R^2 + \lambda^2}} d\lambda =$$

$$= \pm \pi k \int\limits_{\pm\eta_R}^{\infty} H_1^{(2)}(kR \operatorname{ch}\eta)\, d\eta, \tag{2.28}$$

где $\eta_R = \operatorname{arsh}\left[\frac{2\sqrt{\varrho\varrho_0}}{R}\cos\frac{1}{2}(\phi - \phi_0)\right]$.
Знак «плюс» соответствует $\phi < \pi - \phi_0$ и знак минус $\phi > \pi + \phi$. Точно так же

$$B(-\phi_0) = \pm \pi k \int\limits_{\pm\eta_{R_1}}^{\infty} H_1^{(2)}(kR_1 \operatorname{ch}\eta)\, d\eta, \tag{2.29}$$

где $\eta_{R_1} = \operatorname{arsh}\left[2\frac{\sqrt{\varrho\varrho_0}}{R_1}\cos\frac{1}{2}(\phi + \phi_0)\right]$ и знак плюс соответствует $\phi < \pi - \phi_0$, а знак минус $\phi > \pi - \phi_0$.

Подставим полученные результаты в равенство (2.20). Так как

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} H_1^{(2)}(ku \operatorname{ch}\eta)\, d\eta = \frac{2i}{k}\frac{e^{-iku}}{u},$$

то удобно объединить выражения $B(\phi_0)$ и $B(-\phi_0)$ с (2.19). Тогда полное поле примет вид:

$$E_y = -\frac{ik}{\sqrt{\varrho\varrho_0}} \cos\frac{1}{2}\phi \cos\frac{1}{2}\phi_0 H_0^{(2)}(kR^*) +$$
$$+\frac{i}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial y \partial y_0} - k^2\right) \int\limits_{-\eta_R}^{\infty} H_1^{(2)}(kR \operatorname{ch}\eta)\, d\eta -$$
$$-\frac{i}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial y \partial y_0} + k^2\right) \int\limits_{\eta_{R_1}}^{\infty} H_1^{(2)}(kR_1 \operatorname{ch}\eta)\, d\eta. \qquad (2.30)$$

Интересно сравнить это решение с тем, которое было бы получено при использовании единственной компоненты вектора Герца. Для скалярной задачи решение, нормальная производная которого на пластине равна нулю, дается Макдональдом (1915):

$$U = -\frac{i}{2} \int\limits_{-\eta_R}^{\infty} H_1^{(2)}(kR \operatorname{ch}\eta)\, d\eta - \frac{i}{2} \int\limits_{-\eta_{R_1}}^{\infty} H_1^{(2)}(kR_1 \operatorname{ch}\eta)\, d\eta.$$

Предположим, что U представляет собой вектор Герца для решения векторной задачи. Приравнивая U составляющей Π_y, находим:

$$E_y = -\frac{i}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + k^2\right) \int\limits_{-\eta_R}^{\infty} H_1^{(2)}(kR \operatorname{ch}\eta)\, d\eta - \frac{i}{2} \times$$
$$\times \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + k^2\right) \int\limits_{-\eta_{R_1}}^{\infty} H_1^{(2)}(kR_1 \operatorname{ch}\eta)\, d\eta. \qquad (2.31)$$

Решение (2.31) удовлетворяет всем требуемым граничным условиям, кроме условия на краю пластины. При этом в (2.31) имеет место особенность вида $\varrho^{-\frac{3}{2}}$. Последнее обстоятельство вынуждает отвергнуть выражение (2,31) в качестве возможного решения физической (векторной) задачи *.

Очевидно, что полученное решение (2.30) должно удовлетворять граничным условиям, так как оно представляет собой двойной интеграл плоских волн, каждая из которых должным образом ведет себя на краю пластины. Это может показаться несколько неправдоподобным, если принять во внимание двойное дифференцирование, применяемое в решении. Поэтому целесообразно вывести краевую особенность. Для удобства используется приближенная форма решения для коротких волн ($kR^* >> 1$), т. е. источник должен быть удален от края на расстояние, большее чем

* Сеньор (1953) находит также приближенное значение E_y для случая коротких волн ($kR^* >> 1$), которое здесь не приводится. *А. В., Г. Ф.*

длина волны. Кроме того, примем $z = z_0$, что приводит к $R^* = \varrho + \varrho_0$. Для малых ϱ имеем

$$R \approx \varrho_0 - \varrho\cos(\phi - \phi_0),\ R_1 \approx \varrho_0 - \varrho\cos(\phi + \phi_0).$$

Выполнив требуемое дифференцирование и оставив лишь члены с наиболее высокими степенями $\frac{1}{\varrho}$, получим:

$$E_y \approx k^2 \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, e^{-\frac{1}{4}i\pi} \left(\frac{e^{-ik\varrho}}{\sqrt{k\varrho}} \cos\frac{1}{2}\phi\right)\left(\frac{e^{-ik\varrho_0}}{\sqrt{k\varrho_0}} \cos\frac{1}{2}\phi_0\right) \times$$
$$\times \left[\cos\phi_0 + \frac{i}{2k\varrho_0}(2 - 3\cos\phi_0)\right]. \qquad (2.32)$$

Таким образом, краевая особенность имеет вид $\varrho^{-\frac{1}{2}}$, что соответствует принятому условию для физического поля. Интересно отметить зависимость этой особенности от направления, по которому точка наблюдения приближается к краю. В частности, если $\varrho \to 0$ в направлении $\phi = \pi$, то E_y остается конечной величиной. Это нетрудно объяснить, так как возникновение особенности можно связать со вторичным линейным источником вдоль края пластины. Угловой спектр источника есть переменная величина, причем $\phi = \pi$ — направление нулевой интенсивности.

Более того, это явление не ограничивается дифракцией сферической волны. Та же картина имеет место при дифракции плоской и цилиндрической волн.

Наконец, следует отметить, что по описанной выше методике, можно получить и другие компоненты поля. Таким образом, полное поле имеет вид:

$$E_x = \frac{ik}{\sqrt{\varrho\varrho_0}} \sin\frac{1}{2}\phi \cos\frac{1}{2}\phi_0 H_0^{(2)}(kR^*) +$$
$$+\frac{i}{2}\frac{\partial^2 R}{\partial x \partial y_0} - \frac{i}{2}\frac{\partial^2 I_{R_1}}{\partial x \partial y_0},$$
$$E_y = -\frac{ik}{\sqrt{\varrho\varrho_0}} \cos\frac{1}{2}\phi \cos\frac{1}{2}\phi_0 H_0^{(2)}(kR^*) +$$
$$+\frac{i}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial y \partial y_0} - k^2\right) I_R - \frac{i}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial y \partial y_0} + k^2\right) I_{R_1},$$
$$E_z = \frac{i}{2}\frac{\partial^2 I_R}{\partial z \partial y_0} - \frac{i}{2}\frac{\partial^2 I_{R_1}}{\partial z \partial y_0},$$
$$H_x = \frac{kY(z - z_0)}{R^* \sqrt{\varrho\varrho_0}} \cos\frac{1}{2}\phi \cos\frac{1}{2}\phi_0 H_1^{(2)}(kR^*) +$$
$$+\frac{kY}{2}\frac{\partial I_R}{\partial z_0} + \frac{kY}{2}\frac{\partial I_{R_1}}{\partial z_0},$$
$$H_y = \frac{kY(z - z_0)}{R^* \sqrt{\varrho\varrho_0}} \sin\frac{1}{2}\phi \cos\frac{1}{2}\phi_0 H_1^{(2)}(kR^*),$$
$$H_z = -\frac{kY}{2}\frac{\partial I_R}{\partial x_0} - \frac{kY}{2}\frac{\partial I_{R_1}}{\partial x_0},$$

где

$$I_R = \int\limits_{-\eta_R}^{\infty} H_1^{(2)}(kR\,\mathrm{ch}\,\eta)\,d\eta \text{ и } I_{R_1} = \int\limits_{-\eta_{R_1}}^{\infty} H_1^{(2)}(kR_1\,\mathrm{ch}\,\eta)\,d\eta.$$

Следует отметить, что

$$H_y \neq 0.$$

§ 3. Идеально проводящая полуплоскость в присутствии магнитного диполя. Решение Тессера

(Тессер, 1953, 1954; Янковский, 1959)

1. Общие формулы. В настоящем параграфе рассматривается задача дифракции поля магнитного диполя на идеально проводящей полуплоскости $y = 0$, $x > 0$. Решение аналогичной задачи

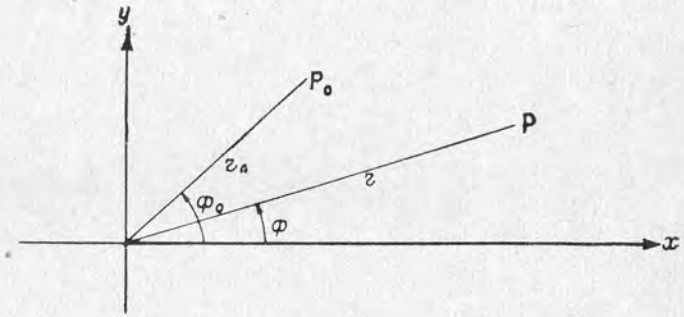


Рис. 3.

в случае электрического диполя получено Сеньором (§ 2 настоящей главы). При помощи метода Сеньора получены следующие исходные формулы для вертикального магнитного диполя (параллельного оси Oy, рис. 3):

$$H_y^{(y)} = \left(\frac{\partial^2}{\partial y \partial y_0} - k^2\right)\frac{e^{-ikR}}{R} +$$

$$+ \frac{k}{2\pi^2} \int\limits_{\alpha=S\left(\frac{\pi}{2}\right)} \int\limits_{\beta=S\left(\frac{\pi}{2}\right)} \int\limits_{\gamma=C} \left[\frac{y}{|y|}\,\frac{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}{\cos\alpha+\cos\gamma}\,\frac{\partial^2}{\partial y \partial y_0} + \right.$$

$$\left. + k^2\,\frac{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\gamma}{2}\sin\alpha\sin\gamma - \sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\cos\alpha\cos\gamma}{\cos\alpha+\cos\gamma}\right] \times$$

$$\times\, e^{-ik(x\cos\gamma\cos\beta + |y|\sin\gamma\cos\beta + z\sin\beta)} \cdot F(\alpha,\ \beta)\,d\alpha\,d\beta\,d\gamma, \quad (3.1)$$

$$H_x^{(y)} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y_0}\,\frac{e^{-ikR}}{R} +$$

$$+ \frac{k}{2\pi^2} \int\limits_{\alpha=S\left(\frac{\pi}{2}\right)} \int\limits_{\beta=S\left(\frac{\pi}{2}\right)} \int\limits_{\gamma=C} \left[\frac{y}{|y|}\,\frac{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}{\cos\alpha+\cos\gamma}\,\frac{\partial^2}{\partial x \partial y_0} + \right.$$

$$\left. + \frac{y}{|y|}\,k^2\,\frac{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\gamma}{2}\sin\alpha\cos\gamma + \sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\sin\alpha\sin\gamma}{\cos\alpha+\cos\gamma}\right] \times$$

$$\times\, e^{-ik(x\cos\gamma\cos\beta + |y|\sin\gamma\cos\beta + z\sin\beta)} \cdot F(\alpha,\ \beta)\,d\alpha\,d\beta\,d\gamma \quad (3.2)$$

и для горизонтального магнитного диполя (параллельного оси Ox)

$$H_x^{(x)} = \left(\frac{\partial^2}{\partial x \partial x_0} - k^2\right)\frac{e^{-ikR}}{R} +$$

$$+ \frac{k}{2\pi^2} \int\limits_{\alpha=S\left(\frac{\pi}{2}\right)} \int\limits_{\beta=S\left(\frac{\pi}{2}\right)} \int\limits_{\gamma=C} \left[\frac{y}{|y|}\,\frac{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}{\cos\alpha+\cos\gamma}\,\frac{\partial^2}{\partial x \partial x_0} + \right.$$

$$\left. + \frac{y}{|y|}\,k^2\,\frac{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\gamma}{2}\cos\alpha\cos\gamma - \sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\sin\alpha\sin\gamma}{\cos\alpha+\cos\gamma}\right] \times$$

$$\times\, e^{-ik(x\cos\gamma\cos\beta + |y|\sin\gamma\cos\beta + z\sin\beta)} \cdot F(\alpha,\ \beta)\,d\alpha\,d\beta\,d\gamma, \quad (3.3)$$

$$H_y^{(x)} = \frac{\partial^2}{\partial y \partial x_0}\,\frac{e^{-ikR}}{R} +$$

$$+ \frac{k}{2\pi^2} \int\limits_{\alpha=S\left(\frac{\pi}{2}\right)} \int\limits_{\beta=S\left(\frac{\pi}{2}\right)} \int\limits_{\gamma=C} \left[\frac{y}{|y|}\,\frac{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}{\cos\alpha+\cos\gamma}\,\frac{\partial^2}{\partial y \partial x_0} + \right.$$

$$\left. + k^2\,\frac{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\gamma}{2}\cos\alpha\sin\gamma + \sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\sin\alpha\sin\gamma}{\cos\alpha+\cos\gamma}\right] \times$$

$$\times\, e^{-ik(x\cos\gamma\cos\beta + |y|\sin\gamma\cos\beta + z\sin\beta)} \cdot F(\alpha,\ \beta)\,d\alpha\,d\beta\,d\gamma, \quad (3.4)$$

где $F(\alpha,\ \beta) = e^{-ik(x_0\cos\alpha\cos\beta + y_0\sin\alpha\cos\beta - z_0\sin\beta)}$, углы α, β, γ характеризуют направления распространения плоских волн, на которые раскладывается поле $\boldsymbol{H}$ (α, γ — угол между направлением распространения волны и плоскостью $y = 0$, β — угол между направлением распространения волны и плоскостью $z = 0$), k — волновое число непроводящей среды, R — расстояние между диполем и точкой наблюдения, $(x,\ y,\ z)$ — координаты точки наблюдения, $(x_0,\ y_0,\ z_0)$ — координаты диполя, $S\left(\frac{\pi}{2}\right)$ — путь быстрейшего спуска, проходящий через угол $\frac{\pi}{2}$, C — путь интегрирования, показанный на рис. 1.

Первые члены приведенных формул относятся к полю в непроводящей среде.

Теперь деформируем пути интегрирования: путь C на путь быстрейшего спуска через седловую точку $\gamma = \phi$ для $y > 0$ и $\gamma = 2\pi - \phi$ для $y < 0$ (см. рис. 1), путь $\alpha = S\left(\frac{\pi}{2}\right)$ так, чтобы

он проходил через седловую точку $\alpha = \phi_0$. Выражения для магнитного поля теперь разделяются на две части: 1) дифракционное поле, связанное с тройными интегралами, где пути интегрирования $\alpha = S(\phi_0)$, $\beta = S\left(\frac{\pi}{2}\right)$, $\gamma = S(\phi)$ или $\gamma = S(2\pi - \phi)$, 2) поле геометрической оптики (поле в непроводящей среде и члены, связанные с полюсами, захваченными при деформации путей интегрирования).

Поле геометрической оптики имеет следующий вид для составляющей $H_y^{(y)}$ вертикального диполя:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial y \partial y_0} - k^2\right)\frac{e^{-ikR}}{R} + \left(\frac{\partial^2}{\partial y \partial y_0} + k^2\right)\frac{e^{-ikR_1}}{R_1}, \quad (0 < \phi < \pi - \phi_0),$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial y \partial y_0} - k^2\right)\frac{e^{ikR}}{R}, \quad (\pi - \phi_0 < \phi < \pi + \phi_0),$$

$$0, \quad (\pi + \phi_0 < \phi < 2\pi),$$

для составляющей $H_x^{(y)}$:

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y_0}\frac{e^{-ikR}}{R} + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y_0}\frac{e^{-ikR_1}}{R_1}, \quad (0 < \phi < \pi - \phi_0),$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y_0}\frac{e^{-ikR}}{R}, \quad (\pi - \phi_0 < \phi < \pi + \phi_0),$$

$$0, \quad (\pi + \phi_0 < \phi < 2\pi),$$

для составляющей $H_x^{(x)}$ горизонтального диполя:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x \partial x_0} - k^2\right)\frac{e^{-ikR}}{R} + \left(\frac{\partial^2}{\partial x \partial x_0} - k^2\right)\frac{e^{-ikR_1}}{R_1}, \quad (0 < \phi < \pi - \phi_0),$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x \partial x_0} - k^2\right)\frac{e^{-ikR}}{R}, \quad (\pi - \phi_0 < \phi < \pi + \phi_0),$$

$$0, \quad (\pi + \phi_0 < \phi < 2\pi),$$

и для составляющей $H_y^{(x)}$:

$$\frac{\partial^2}{\partial y \partial x_0}\frac{e^{-ikR}}{R} + \frac{\partial^2}{\partial y \partial x_0}\frac{e^{-ikR_1}}{R_1}, \quad (0 < \phi < \pi - \phi_0),$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y \partial x_0}\frac{e^{-ikR}}{R}, \quad (\pi - \phi_0 < \phi < \pi + \phi_0),$$

$$0, \quad (\pi + \phi_0 < \phi < 2\pi),$$

где R_1 расстояние от изображения диполя до точки наблюдения.

Вычисление тройных интегралов дифракционного поля проведено подобно тому, как это сделано в предыдущем параграфе. В окончательном виде дифракционное поле можно соединить с

членами геометрической оптики в одну формулу. Тогда составляющие вертикального диполя:

$$H_y^{(y)} = \frac{ik^2}{\sqrt{\varrho\varrho_0}} \sin\frac{\phi}{2} \sin\frac{\phi_0}{2} H_0^{(2)}(kR^*) +$$

$$+ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial y \partial y_0} - k^2\right)\left(\frac{e^{-ikR}}{R} + \frac{k}{i}\int_0^{kb} \frac{H_0^{(2)}(\sqrt{k^2R^2 + \lambda^2})}{\sqrt{k^2R^2 + \lambda^2}}\, d\lambda\right) +$$

$$+ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial y \partial y_0} + k^2\right) \times$$

$$\times \left(\frac{e^{-ikR_1}}{R_1} + \frac{k}{i}\int_0^{kb_1} \frac{H_1^{(2)}(\sqrt{k^2R_1^2 + \lambda^2})}{\sqrt{k^2R_1^2 + \lambda^2}}\, d\lambda\right), \qquad (3.5)$$

$$H_x^{(y)} = \frac{ik^2}{\sqrt{\varrho\varrho_0}} \sin\frac{\phi}{2} \cos\frac{\phi_0}{2} H_0^{(2)}(kR^*) +$$

$$+ \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x \partial y_0}\left(\frac{e^{-ikR}}{R} + \frac{k}{i}\int_0^{kb} \frac{H_1^{(2)}(\sqrt{k^2R^2 + \lambda^2})}{\sqrt{k^2R^2 + \lambda^2}}\, d\lambda\right) +$$

$$+ \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x \partial y_0}\left(\frac{e^{-ikR_1}}{R_1} + \frac{k}{i}\int_0^{kb_1} \frac{H_1^{(2)}(\sqrt{k^2R_1^2 + \lambda^2})}{\sqrt{k^2R_1^2 + \lambda}}\, d\lambda\right); \qquad (3.6)$$

составляющие горизонтального диполя:

$$H_x^{(x)} = \frac{ik^2}{\sqrt{\varrho\varrho_0}} \cos\frac{\phi}{2} \cos\frac{\phi_0}{2} H_0^{(2)}(kR^*) +$$

$$+ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial x \partial x_0} - k^2\right)\left(\frac{e^{-ikR}}{R} + \frac{k}{i}\int_0^{kb} \frac{H_1^{(2)}(\sqrt{k^2R^2 + \lambda^2})}{\sqrt{k^2R^2 + \lambda^2}}\, d\lambda\right) +$$

$$+ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial x \partial x_0} - k^2\right)\left(\frac{e^{-ikR_1}}{R_1} + \frac{k}{i}\int_0^{kb_1} \frac{H_1^{(2)}(\sqrt{k^2R_1^2 + \lambda^2})}{\sqrt{k^2R_1^2 + \lambda^2}}\, d\lambda\right), \qquad (3.7)$$

$$H_y^{(x)} = -\frac{ik^2}{\sqrt{\varrho\varrho_0}} \cos\frac{\phi}{2} \sin\frac{\phi_0}{2} H_0^{(2)}(kR^*) +$$

$$+ \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial y \partial x_0}\left(\frac{e^{-ikR}}{R} + \frac{k}{i}\int_0^{kb} \frac{H_1^{(2)}(\sqrt{k^2R^2 + \lambda^2})}{\sqrt{k^2R^2 + \lambda^2}}\, d\lambda\right) +$$

$$+ \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial y \partial x_0}\left(\frac{e^{-ikR_1}}{R_1} + \frac{k}{i}\int_0^{kb_1} \frac{H_1^{(2)}(\sqrt{k^2R_1^2 + \lambda^2})}{\sqrt{k^2R_1^2 + \lambda^2}}\, d\lambda\right), \qquad (3.8)$$

где $b = 2\sqrt{\varrho\varrho_0}\cos\frac{1}{2}(\phi - \phi_0)$, $b_1 = 2\sqrt{\varrho\varrho_0}\cos\frac{1}{2}(\phi + \phi_0)$ $R^{*2} = (\varrho + \varrho_0)^2 + (z - z_0)^2$, а ϱ_0 и ϱ — соответственно расстояния до диполя и точки наблюдения от края полуплоскости; $H_0^{(2)}$, $H_1^{(2)}$ — функции Ганкеля.

2. Приближенные формулы для случая длинных волн. Используются две системы координат: система (x, y, z), связанная с проводящей полуплоскостью, где ось Oz направлена вдоль ее края, и система XYZ, где ось OZ перпендикулярна поверхности, вдоль которой проводятся наблюдения (рис. 4). В соответствии с таким определением H_x, например, есть составляющая маг-

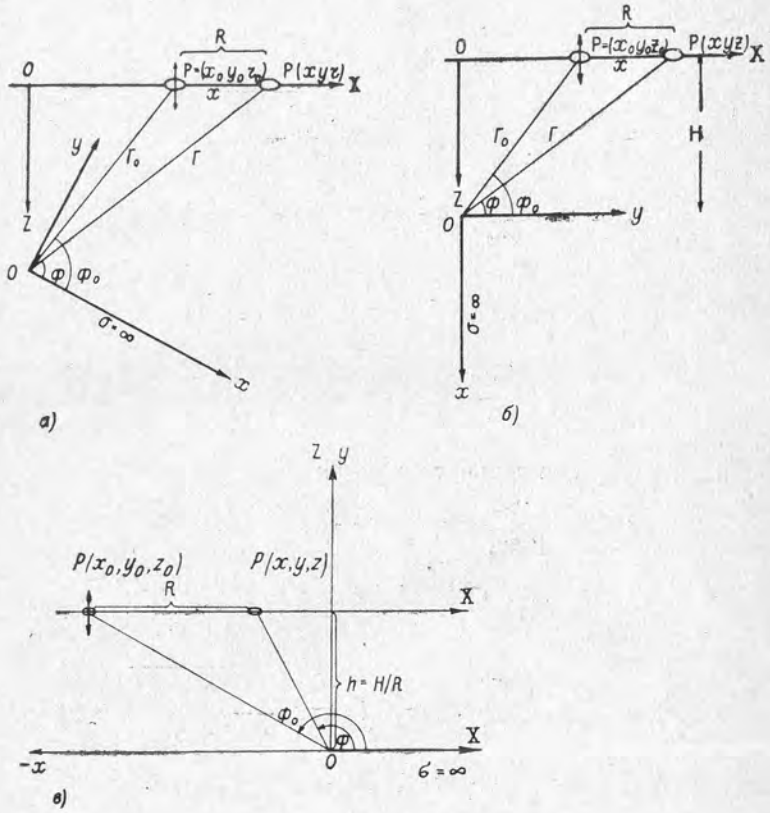


Рис. 4.

нитного поля в системе (x, y, z) и H_x — в системе (X, Y, Z). Общая задача произвольно наклоненной к оси OZ полуплоскости сводится к вычислению полей H_x и H_y двух магнитных диполей, параллельных оси Ox и оси Oy. Из этих элементов легко получить магнитное поле диполя произвольно ориентированного в плоскости xy, например поле $H_Z^{(Z)}$ диполя параллельного оси OZ. В случае, когда полуплоскость расположена перпендикулярно линии наблюдений, поле $H_Z^{(Z)}$ диполя параллельного оси OZ будет таким же, как поле $H_x^{(x)}$ диполя параллельного оси Ox (рис. 4б).

Точное выражение для составляющей $H_x^{(x)}$ диполя параллельного оси Ox (3. 7) можно предствить в безразмерной форме, если разделить его на величину первичного поля:

$$H_{x\,\text{п}}^{(x)} = \left(\frac{\partial^2}{\partial x \partial x_0} - k^2\right)\frac{e^{-ikR}}{R}. \tag{3. 9}$$

Введем следующие безразмерные величины

$$\frac{\varrho}{R} = \varrho^*, \quad \frac{\varrho_0}{R} = \varrho_0, \quad \frac{R_1}{R} = \nu, \quad kx = \xi, \; kx_0 = \xi_0,$$

$$kR = \eta, \quad kR^* = \eta\frac{R^*}{R}. \tag{3. 10}$$

С их помощью можно следующим образом переписать (3. 7), приняв во внимание первичное поле* (3. 9):

$$\frac{H_x}{H_{x\,\text{п}}} = \frac{1}{\left(\frac{\partial^2}{\partial\xi\,\partial\xi_0} - 1\right)\frac{e^{-i\eta}}{\eta}}\left[\frac{i}{\eta\sqrt{\varrho^*\varrho_0^*}}\cos\frac{\phi}{2}\cos\frac{\phi_0}{2}H_0^{(2)}\left(\eta\frac{R^*}{R}\right) + \right.$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial\xi\,\partial\xi_0} - 1\right)\left(\frac{e^{-i\eta}}{\eta} + \frac{1}{i}\int_0^{\eta b^*}\frac{H_1^{(2)}\left(\sqrt{\eta^2+\lambda^2}\right)}{\sqrt{\eta^2+\lambda^2}}\,d\lambda\right) +$$

$$\left. + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial\xi\,\partial\xi_0} - 1\right)\left(\frac{e^{-i\eta\nu}}{\eta\nu} + \frac{1}{i}\int_0^{\eta b_1^*}\frac{H_1^{(2)}\left(\sqrt{\eta^2\nu^2+\lambda^2}\right)}{\sqrt{\eta^2\nu^2+\lambda^2}}\,d\lambda\right)\right], \tag{3. 11}$$

где

$$b^* = 2\sqrt{\varrho^*\varrho_0^*}\cos\frac{\phi-\phi_0}{2}, \quad b_1^* = 2\sqrt{\varrho^*\varrho_0^*}\cos\frac{\phi+\phi_0}{2}. \tag{3. 12}$$

Задача сводится к вычислению интегралов в формуле (3. 11). Так как рассматривается приближение для длинных волн ($\eta \ll 1$), то верхний предел обоих интегралов есть малая величина. Аргумент функций Ганкеля также невелик, хотя он и не равен нулю. Это позволяет разложить функцию $H_1^{(2)}$ в ряд в окрестности нуля**. Несложное интегрирование приводит к следующему выра-

---

* Индекс, указывающий направление магнитного диполя, здесь и ниже опускается. *А. В., Г. Ф.*

** Разложение имеет следующий вид: $H_1^{(2)}(z) = \frac{z}{2} - \frac{z^3}{16} + \ldots - \frac{2i}{\pi}\left(\frac{z}{2} - \frac{z^3}{16} + \ldots\right)\left(\ln\frac{z}{2} + c\right) + \frac{2i}{\pi}\frac{1}{z}$, где c — постоянная Эйлера. *А. В., Г. Ф.*

жению, в котором опущены члены, содержащие η в степени большей, чем два:

$$\int_0^{\eta b^*} \frac{H_1^{(2)} \sqrt{\eta^2+\lambda^2}}{\sqrt{\eta^2+\lambda^2}}\, d\lambda \approx \frac{2i}{\pi\eta} \operatorname{arctg}\left(2\sqrt{\varrho^*\varrho_0^*}\cos\frac{\phi-\phi_0}{2}\right) -$$

$$-\frac{i\eta}{\pi}\operatorname{arctg}\left(2\sqrt{\varrho^*\varrho_0^*}\cos\frac{\phi-\phi_0}{2}\right)+$$

$$+2\eta\sqrt{\varrho^*\varrho_0^*}\cos\frac{\phi-\phi_0}{2}\left[\frac{1}{2}+\frac{3i}{2\pi}-c\frac{i}{\pi}-\frac{i}{\pi}\times\right.$$

$$\left.\times\ln\left(\frac{\eta}{2}\sqrt{1+4\varrho^*\varrho_0^*\cos^2\frac{\phi-\phi_0}{2}}\right)\right]. \qquad (3.13)$$

Аналогичное приближение для второго интеграла получается, если заменить $\cos\frac{\phi-\phi_0}{2}$ на $\cos\frac{\phi+\phi_0}{2}$, η на $\eta\nu$ и $\sqrt{\varrho^*\varrho_0^*}$ на $\frac{1}{\nu}\sqrt{\varrho^*\varrho_0^*}$. Первый член, стоящий в правой части формулы (3. 13), связан с особенностью разложения функции $H_1^{(2)}$ в нуле. Это единственный член в выражении для дифракционного поля, не зависящий от η (то есть от k) и характеризующий точное решение для стационарного поля*.

После замены величины $H_0^{(2)}$ первыми членами ее разложения**, получим следующую приближенную формулу:

$$\frac{H_x}{H_{x\text{п}}}\approx\frac{1}{\left(\frac{\partial^2}{\partial\xi\,\partial\xi_0}-1\right)\frac{e^{-i\eta}}{\eta}}\left\{\frac{i}{\eta\sqrt{\varrho^*\varrho_0^*}}\cos\frac{\phi}{2}\cos\frac{\phi_0}{2}\times\right.$$

$$\times\left[1-\frac{2i}{\pi}\left(c+\ln\frac{\eta R^*}{2R}\right)\right]+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial\xi\,\partial\xi_0}-1\right)\times$$

$$\times\left[\frac{e^{-i\eta}}{\eta}+\frac{2}{\pi\eta}\operatorname{arctg}\left(2\sqrt{\varrho^*\varrho_0^*}\cos\frac{\phi-\phi_0}{2}\right)-\right.$$

$$-\frac{\eta}{\pi}\operatorname{arctg}\left(2\sqrt{\varrho^*\varrho_0^*}\cos\frac{\phi-\phi_0}{2}\right)+2\eta\sqrt{\varrho^*\varrho_0^*}\cos\frac{\phi-\phi_0}{2}\times$$

$$\left.\times\left(-\frac{i}{\pi}+\frac{3}{2\pi}-c\frac{1}{\pi}\ln\frac{\eta}{2}\sqrt{1+4\varrho^*\varrho_0^*\cos^2\frac{\phi-\phi_0}{2}}\right)\right]+$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial\xi\,\partial\xi_0}-1\right)\left[\frac{e^{-i\eta\nu}}{\eta\nu}+\frac{2}{\pi\eta\nu}\operatorname{arctg}\left(\frac{2\sqrt{\varrho^*\varrho_0^*}}{\nu}\cos\frac{\phi+\phi_0}{2}\right)-\right.$$

$$-\frac{\eta\nu}{\pi}\operatorname{arctg}\left(2\frac{\sqrt{\varrho^*\varrho_0^*}}{\nu}\cos\frac{\phi+\phi_0}{2}\right)+$$

---

* Под стационарным в данном случае подразумевается поле, не зависящее от волнового числа k, т. е. поле с очень длинной волной (см. например, стр. 293). *Ред.*

** $H_0^2(z)=1-\frac{z^2}{4}+\ldots-\frac{2i}{\pi}\left(1-\frac{z^2}{4}+\ldots\right)\left(\ln\frac{z}{2}+c\right)-\frac{z^2}{2\pi}i+\ldots$

$$+2\eta\sqrt{\varrho^*\varrho_0^*}\cos\frac{\phi+\phi_0}{2}\left(-\frac{i}{\pi}+\frac{3}{2\pi}-c\frac{1}{\pi}\ln\frac{\eta\nu}{2}\times\right.$$

$$\left.\left.\times\sqrt{1+4\frac{\varrho^*\varrho_0^*}{\nu^2}\cos^2\frac{\phi+\phi_0}{2}}\right)\right]\right\}. \qquad (3.14)$$

Таким образом, метод приближенного вычисления заключается в разложении поля по положительным степеням η, то есть k. При этом точность вычисления зависит от числа членов в рядах для функций $H_1^{(2)}$ и $H_0^{(2)}$. Для очень длинных волн главную роль играет поле, не зависящее от k (стационарное), к нему относятся подчеркнутые члены в формуле (3. 14). Аналогичным способом могут быть получены составляющие H_y диполя параллельного оси Ox и составляющие H_x, H_y диполя параллельного оси Oy.

Рассмотрим формулы для H_x применительно к вертикальной полуплоскости. Взаимное положение полуплоскости и рамок (источника и приемника поля) показано на рис. 4б. Исследуется поле $H_x \equiv H_Z$ вдоль оси Ox, находящейся на расстоянии $H = hR$ над краем полуплоскости. Расстояние между рамками R остается постоянным. Из составляющей H_Z выделим вещественную часть поля ReH_Z, находящуюся в фазе с колебаниями диполя, и мнимую ImH_Z, сдвинутую по фазе на $\frac{\pi}{2}$. Для случая дифракции поля на идеальном проводнике в области длинных волн фазовый сдвиг и мнимая составляющая ImH_Z очень малы, что обусловлено бесконечной проводимостью экрана ($\sigma = \infty$), но в непосредственной близости от края полуплоскости ImH_Z быстро устремляется к бесконечности, что связано с особенностью вида $\frac{1}{\sqrt{\varrho^*\varrho_0^*}}$. Кривые ImH_Z над полуплоскостью по своему характеру аналогичны кривым ReH_Z. В ряде случаев можно упростить задачу и ограничиться исследованием только стационарного поля, дающего первое приближение для ReH_Z. Из выражения (3. 14) легко получается стационарная часть поля $\frac{H_Z}{H_{Z\text{п}}}$:

$$Re\frac{H_Z}{H_{Z\text{п}}}\approx\left(\frac{H_Z}{H_{Z\text{п}}}\right)_{\text{ст}}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2\nu^3}+\frac{1}{\pi}\left\{\operatorname{arctg}\left(2\sqrt{\varrho^*\varrho_0^*}\cos\frac{\phi-\phi_0}{2}\right)+\right.$$

$$+\frac{1}{\nu^3}\operatorname{arctg}\left(2\sqrt{\varrho^*\varrho_0^*}\,\frac{1}{\nu}\cos\frac{\phi+\phi_0}{2}\right)+$$

$$+\frac{1}{1+4\varrho^*\varrho_0^*\cos^2\frac{\phi-\phi_0}{2}}\left[2\sqrt{\varrho^*\varrho_0^*}\cos\frac{\phi-\phi_0}{2}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2\sqrt{\varrho^*\varrho_0^*}}\cos\frac{\phi-\phi_0}{2}-\frac{4\varrho^*\varrho_0^*\cos\frac{\phi-\phi_0}{2}\cos^2\frac{\phi+\phi_0}{2}}{1+4\varrho^*\varrho_0^*\cos^2\frac{\phi-\phi_0}{2}}\right]+$$

$$+\frac{1}{1+4\varrho^*\varrho_0^*\frac{1}{\nu^2}\cos^2\frac{\phi+\phi_0}{2}}\left[2\sqrt{\varrho^*\varrho_0^*}\,\frac{1}{\nu^4}\cos\frac{\phi+\phi_0}{2}+\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{2\sqrt{\varrho^*\varrho_0^*}}\,\frac{1}{\nu^2}\cos\frac{\phi+\phi_0}{2}-\frac{4\varrho^*\varrho_0^*\frac{1}{\nu^4}\cos\frac{\phi+\phi_0}{2}\cos^2\frac{\phi-\phi_0}{2}}{1+4\varrho^*\varrho_0^*\frac{1}{\nu^2}\cos^2\frac{\phi+\phi_0}{2}}\right]\right\}. \quad (3.15)$$

В выражении (3.15) возникает неопределенность в окрестностях симметричной относительно полуплоскости точки $\varrho^* = \varrho_0^*$, $\phi = 2\pi - \phi_0$, для которой расстояние ν от точки наблюдения до отраженного диполя равно нулю. Чтобы избавиться от фиктивной особенности в формуле (3.15), введем разложение в ряд для арктангенса вблизи этой точки:

$$\operatorname{arctg}\left(2\sqrt{\varrho^*\varrho_0^*}\,\frac{1}{\nu}\cos\frac{\phi+\phi_0}{2}\right)\approx\frac{\pi}{2}-\frac{\nu}{2\sqrt{\varrho^*\varrho_0^*}\cos\frac{\phi+\phi_0}{2}}+$$

$$+\frac{\nu^3}{24\sqrt{(\varrho^*\varrho_0^*)^3}\cos^3\frac{\phi+\phi_0}{2}}. \quad (3.16)$$

Подставляя разложение (3.16) в (3.15) и полагая $\nu = 0$, получим приближенную формулу, пригодную для вычисления поля в окрестностях симметричной точки ($\varrho^* = \varrho_0^*$, $\phi = 2\pi - \phi_0$):

$$Re\frac{H_Z}{H_{Z\,\text{п}}}\approx\left(\frac{H_Z}{H_{Z\,\text{п}}}\right)_{\text{ст}}\approx\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\left\{\operatorname{arctg}\left(2\sqrt{\varrho^*\varrho_0^*}\cos\frac{\phi-\phi_0}{2}\right)+\right.$$

$$+\frac{1}{1+4\varrho^*\varrho_0^*\cos\frac{\phi-\phi_0}{2}}\left[2\sqrt{\varrho^*\varrho_0^*}\cos\frac{\phi-\phi_0}{2}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2\sqrt{\varrho^*\varrho_0^*}}\cos\frac{\phi-\phi_0}{2}-\frac{4\varrho^*\varrho_0^*\cos\frac{\phi-\phi_0}{2}\cos^2\frac{\phi+\phi_0}{2}}{1+4\varrho^*\varrho_0^*\cos^2\frac{\phi-\phi_0}{2}}\right]+$$

$$\left.+\frac{1}{4\sqrt{(\varrho^*\varrho_0^*)^3}\cos\frac{\phi+\phi_0}{2}}\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{6\cos^2\frac{\phi+\phi_0}{2}}-\frac{\cos^2\frac{\phi-\phi_0}{2}}{\cos^2\frac{\phi+\phi_0}{2}}\right]\right\}. \quad (3.17)$$

По формуле (3.17) вычислены значения поля по профилю, проходящему над проводящей полуплоскостью на различных высотах (рис. 5). Вдоль горизонтальной оси отложены относительные расстояния от центра системы рамок $\overline{X} = \frac{X}{R}$ до плоскости $\overline{X} = 0$, содержащей проводник. Кривые симметричны относительно полуплоскости, т. е. они не изменяются при смене мест генераторной и приемной рамок. Когда рамки проходят над проводником $\phi = \frac{\pi}{2}$ или $\phi_0 = \frac{\pi}{2}$, что соответствует точкам кривой с абсциссами $\overline{X} = 0{,}5$ или $\overline{X} = -0{,}5$. При $h = 0$ кривая

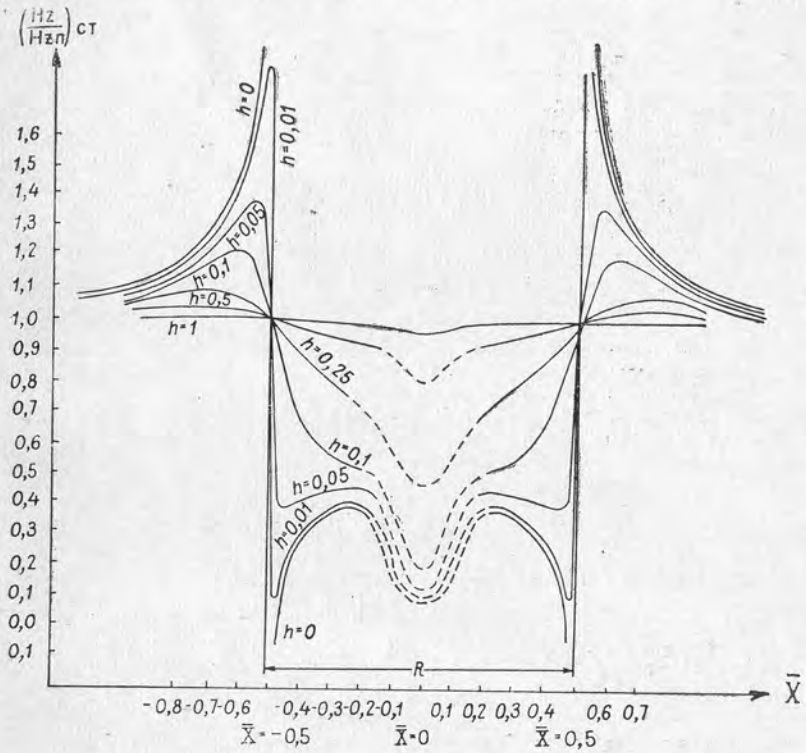


Рис. 5. Графики $\left(\frac{H_Z}{H_{Z\,\text{п}}}\right)_{\text{ст}}$ вдоль профиля, проходящего над вертикальной идеально проводящей полуплоскостью.

имеет особенность на краю проводника. В случае $h = 0{,}01$ кривая очень близка к кривой $h = 0$. Минимумы и максимумы, получающиеся при прохождении одной из рамок над полуплоскостью, быстро уменьшаются с ростом высоты. Для $h = 0{,}5$ ($H = 0{,}5R$) отклонение ReH_Z от первичного поля $H_{Z\,\text{п}}$ мало. При бо́льших глубинах обнаружение проводника достаточно сложно и при $h = 1$ почти невозможно. Точно над полуплоскостью ($\overline{X} = 0{,}5$ или $\overline{X} = -0{,}5$) $Re\frac{H_Z}{H_{Z\,\text{п}}} = 1$, когда $h \neq 0$. Если $h = 0$, получается неопределенность.

Вычислим теперь мнимую часть поля $Im\frac{H_Z}{H_{Z\,п}}$. После ряда преобразований получим из (3. 14)

$$Im\frac{H_Z}{H_{Z\,п}} = Im\,\eta^2\Big[-\frac{1}{4}-\frac{1}{4\nu}-\frac{1}{2\pi}\operatorname{arctg} b^* - \frac{1}{2\pi\nu}\operatorname{arctg} b_1^* +$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{H_Z}{H_{Z\,п}}\right)_{ст}+\frac{2}{\pi}\left(\ln\frac{\varrho+\varrho_0^*}{2}+c\right)+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\,\frac{(1+2b^{*2})\cos\phi\cos\phi_0-(1+b^{*2})\,b^{*2}}{(1+b^{*2})\,b^{*3}}+$$

$$+\left(\frac{c}{2\pi}-\frac{3}{4\pi}\ln b^*\right)\left(\frac{\cos\phi\cos\phi_0}{b^{*3}}-\frac{1}{b^*}\right)+$$

$$+\frac{\cos\phi\cos\phi_0}{\pi}\left(\frac{b^*}{8\,(\varrho^*+\varrho_0^*)}-\frac{1}{b^*}\right)+$$

$$+\frac{1}{2\pi\nu}\,\frac{(1+2b_1^{*2})\cos\phi\cos\phi_0-(1+b_1^{*2})\,b_1^{*2}}{(1+b_1^{*2})\,b_1^{*3}}+$$

$$+\left(\frac{c}{2\pi\nu}-\frac{3}{4\pi\nu}+\frac{1}{\nu}\ln(\varrho^*+\varrho_0^*)\right)\left(\frac{\cos\phi\cos\phi_0}{b_1^{*3}}-\frac{1}{b_1^*}\right)+$$

$$+\frac{\cos\phi\cos\phi_0}{\pi}\left(\frac{\nu\,b_1^*}{8\,(\varrho^*+\varrho_0^*)}-\frac{1}{\nu\,b_1^*}\right)\Big]+$$

$$+Im\,\eta^2\ln\left(-\frac{Im\,\eta^2}{2}\right)\Big[\frac{\cos\phi\cos\phi_0}{2\sqrt{\varrho^*\varrho_0^*}}+$$

$$+\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\cos\phi\cos\phi_0}{b^*}-\frac{1}{b^*}\right)+\frac{1}{4\pi\nu}\left(\frac{\cos\phi\cos\phi_0}{b_1^{*3}}-\frac{1}{b_1^*}\right)\Big]. \qquad (3.\,18)$$

Обозначим член в первой квадратной скобке через $A(\overline{X},\,h)$, а во второй — через $B(\overline{X},\,h)$. Тогда

$$Im\frac{H_Z}{H_{Z\,п}} \approx Im\,\eta^2\,A(\overline{X},\,h)+$$

$$+Im\,\eta^2\ln\left(-\frac{1}{2}\,Im\,\eta^2\right)B(\overline{X},\,h). \qquad (3.\,19)$$

Проанализируем полученную формулу. Найдем сначала асимптотическую величину $Im\frac{H_Z}{H_{Z\,п}}$. Для $\overline{X}\to\infty$, $A(\overline{X},\,h)\to 0$ и $B(\overline{X},\,h)\to 0$. Следовательно, $\lim Im\frac{H_Z}{H_{Z\,п}}=0$, что соответствует общим представлениям о рассматриваемых процессах. В точке $\overline{X}=0$ (расстояние до изображения равно нулю) в формуле (3. 18) имеется неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$. Однако, разлагая как и прежде

$\operatorname{arctg} b_1^*$ в ряд вблизи нуля и рассматривая затем предельное соотношение, получим:

$$A(0,\,h)=-\frac{1}{4}-\frac{1}{2\pi}\operatorname{arctg} b^*+$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{H_Z}{H_{Z\,п}}\right)_{ст}+\frac{2}{\pi}\left(\ln\frac{\varrho^*+\varrho_0^*}{2}+c\right)+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\,\frac{(1+2b^{*2})\cos\phi\cos\phi_0-(1+b^{*2})\,b^{*2}}{(1+b^{*2})b^{*3}}-$$

$$-\left(\frac{3}{4\pi}+\frac{c}{2\pi}+\ln b^*\right)\left(\frac{\cos\phi\cos\phi_0}{b^{*3}}-\frac{1}{b^*}\right)+$$

$$+\frac{\cos\phi\cos\phi_0}{\pi}\left(\frac{1}{b^*}-\frac{b^*}{8\,(\varrho^*+\varrho_0^*)}\right)-\frac{1}{2\pi\,(\varrho^*+\varrho_0^*)}+$$

$$+\left(\frac{3}{4\pi}-\frac{c}{2\pi}-\ln\frac{\varrho^*+\varrho_0^*}{2\pi}\right)\frac{1}{\varrho^*\varrho_0^*}-\frac{\cos\phi\cos\phi_0}{8\pi\,(\varrho^*+\varrho_0^*)},$$

$$B(0,\,h)=\frac{\cos\phi\cos\phi_0}{\sqrt{\varrho^*\varrho_0^*}}+$$

$$+\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\cos\phi\cos\phi_0}{b^{*3}}-\frac{1}{b^*}\right)-\frac{1}{4\pi}\,\frac{1}{(\varrho^*+\varrho_0^*)}, \qquad (3.\,20)$$

где

$$\phi=\pi-\operatorname{arctg}0{,}5\,h,$$

$$\phi_0=\pi+\operatorname{arctg}0{,}5\,h,$$

$$\varrho^*=\varrho_0^*=\sqrt{h^2+0{,}25}. \qquad (3.\,21)$$

На рис. 6*а*, *б* показаны графики $A(\overline{X},\,h)$ и $B(\overline{X},\,h)$ для параметров $h=0{,}1$ и $h=0{,}05$. Чтобы получить кривую $Im\frac{H_Z}{H_{Z\,п}}$ для заданного h, нужно умножить в соответствии с формулой (3. 19) ординаты кривой $A(\overline{X},\,h)$ на $Im\,\eta^2$, а ординаты кривой $B(\overline{X},h)$ на $Im\,\eta^2\left(-\frac{Im\,\eta^2}{2}\right)$ и сложить их.

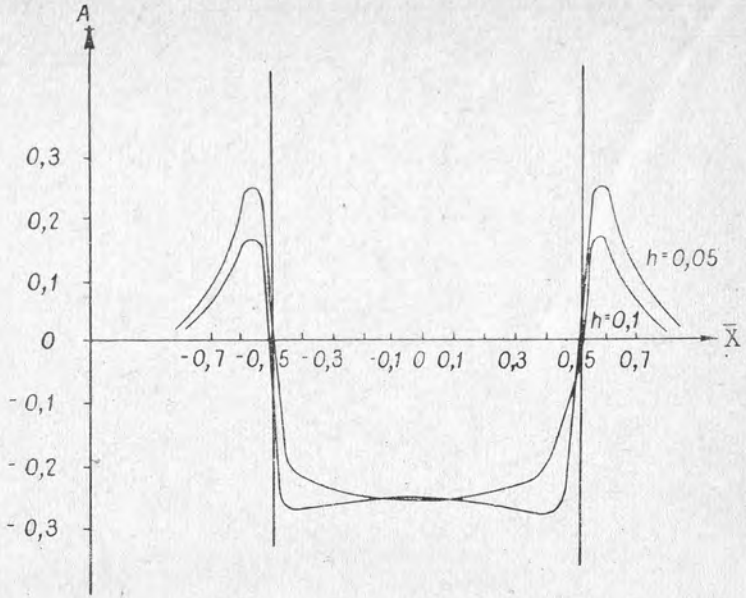
Рассмотрим формулы для $H_y\equiv H_Z$ применительно к вертикальному диполю и горизонтальной полуплоскости (см. рис. 4*в*). При этом для простоты ограничимся лишь стационарной частью поля.

Из (3. 5) после ряда преобразований получим:

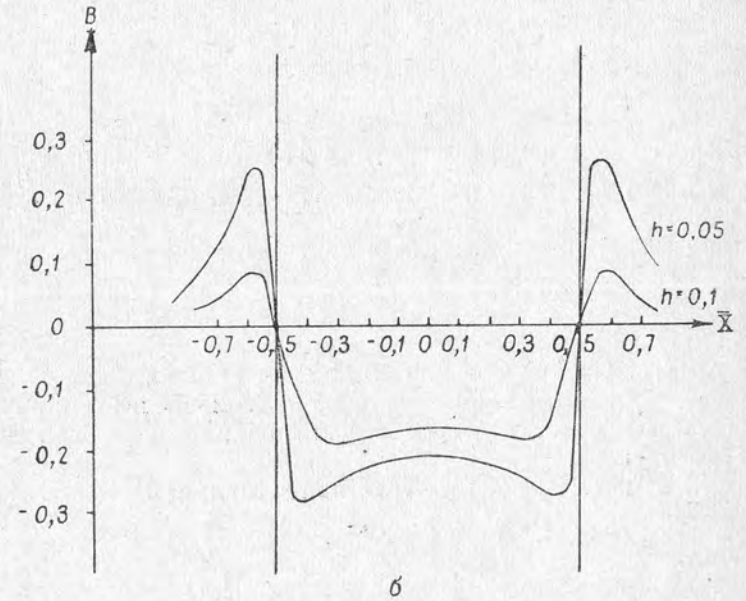
$$\left(\frac{H_y}{H_{y\,п}}\right)_{ст}=\frac{R^3}{2}\,\frac{\partial^2}{\partial y\partial y_0}\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R_1}+\right.$$

$$+\frac{2}{\pi R}\operatorname{arctg}\left(\frac{2\sqrt{\varrho\varrho_0}}{R}\cos\frac{\phi-\phi_0}{2}\right)+$$

$$\left.+\frac{2}{\pi R_1}\operatorname{arctg}\left(\frac{2\sqrt{\varrho\varrho_0}}{R_1}\cos\frac{\phi+\phi_0}{2}\right)\right]. \qquad (3.\,22)$$



а



б

Рис. 6. Графики *а* и *б* вдоль профиля, проходящего над вертикальной идеально проводящей полуплоскостью.

Выполнив дифференцирование, получим, принимая во внимание обозначения (3. 10)

$$\left(\frac{H_y}{H_{y\,\text{п}}}\right)_{\text{ст}} \equiv \left(\frac{H_Z}{H_{Z\,\text{п}}}\right)_{\text{ст}} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\nu^3} + \frac{12h^2}{\nu^5}\right) +$$

$$+ \frac{1}{\pi}\left\{ \operatorname{arctg}\left(2\sqrt{\varrho^*\varrho_0^*}\cos\frac{\vartheta-\vartheta_0}{2}\right) + \right.$$

$$+ \frac{1}{1+4\varrho^*\varrho_0^*\cos\frac{\vartheta-\vartheta_0}{2}}\left[2\sqrt{\varrho^*\varrho_0^*}\times\right.$$

$$\times\cos\frac{\vartheta-\vartheta_0}{2} + \frac{1}{2\sqrt{\varrho^*\varrho_0^*}}\cos\frac{\vartheta-\vartheta_0}{2} +$$

$$\left. + \frac{4\sqrt{\varrho^*\varrho_0^*}\cos\frac{\vartheta-\vartheta_0}{2}\sin^2\frac{\vartheta-\vartheta_0}{2}}{1+4\varrho^*\varrho_0^*\cos^2\frac{\vartheta-\vartheta_0}{2}}\right] -$$

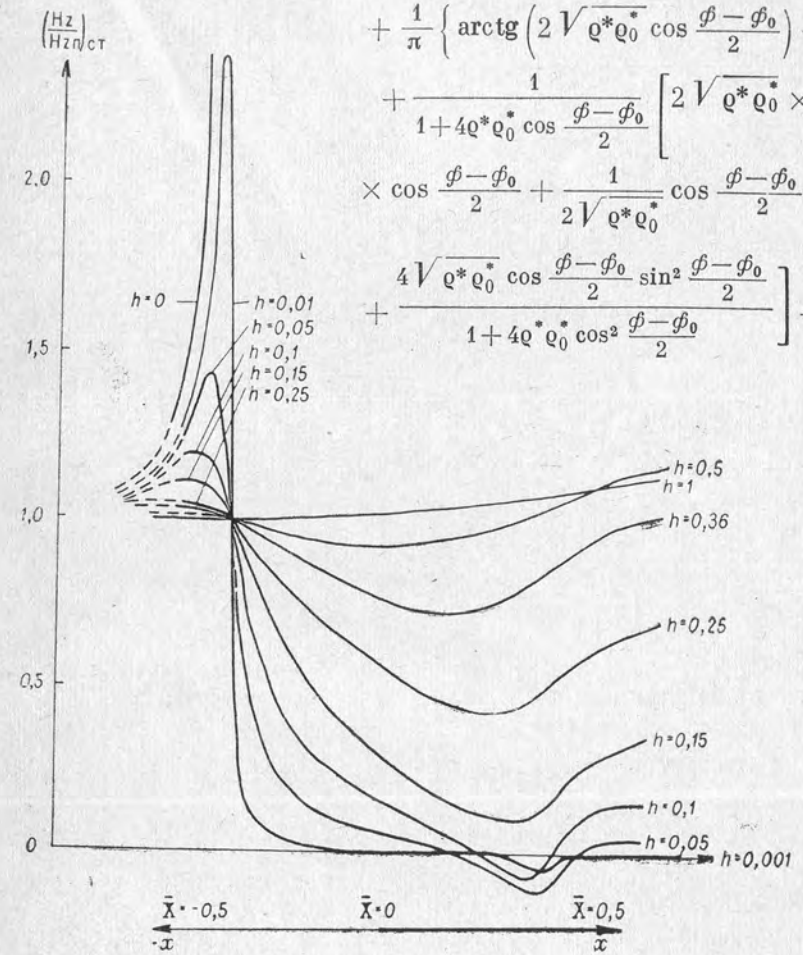


Рис. 7. Графики $\left(\frac{H_Z}{H_{Z\,\text{п}}}\right)_{\text{ст}}$ вдоль профиля, проходящего над горизонтальной идеально проводящей полуплоскостью.

$$-\left(\frac{1}{\nu^3} - \frac{12h^2}{\nu^5}\right)\operatorname{arctg}\left(\frac{2\sqrt{\varrho^*\varrho_0^*}}{\nu}\cos\frac{\vartheta+\vartheta_0}{2}\right) +$$

$$+ \frac{1}{1+4\varrho^*\varrho_0^*\frac{1}{\nu^2}\cos^2\frac{\vartheta+\vartheta_0}{2}}\left[-2\sqrt{\varrho^*\varrho_0^*}\,\frac{1}{\nu}\cos\frac{\vartheta+\vartheta_0}{2}\left(\frac{1}{\nu^3} - \frac{12h^2}{\nu^5}\right) -\right.$$

$$-\frac{1}{2\sqrt{\varrho^*\varrho_0^*}}\frac{1}{\nu^2}\cos\frac{\phi+\phi_0}{2}-\frac{4h(\varrho^*-\varrho_0^*)}{\sqrt{\varrho^*\varrho_0^*}\,\nu^4}\sin\frac{\phi-\phi_0}{2}+$$

$$+\frac{2\sqrt{\varrho^*\varrho_0^*}}{\nu}\cos\frac{\phi+\phi_0}{2}\left(\frac{8h^2}{\nu^5}\right)+\frac{1}{1+4\varrho^*\varrho_0^*\frac{1}{\nu^2}\cos^2\frac{\phi+\phi_0}{2}}\times$$

$$\times\left(-8\sqrt{(\varrho^*\varrho_0^*)^3}\cos^3\frac{\phi+\phi_0}{2}\frac{1}{\nu^3}\left(\frac{8h^2}{\nu^5}\right)+\right.$$

$$+4\varrho^*\varrho_0^*\frac{1}{\nu^2}\cos^2\frac{\phi+\phi_0}{2}\frac{4h(\varrho_0^*-\varrho^*)}{\sqrt{\varrho^*\varrho_0^*}\,\nu^4}\sin\frac{\phi-\phi_0}{2}+$$

$$\left.\left.+4\sqrt{\varrho^*\varrho_0^*}\cos\frac{\phi+\phi_0}{2}\frac{1}{\nu^4}\sin^2\frac{\phi-\phi_0}{2}\right)\right]\Bigg\}. \qquad (3.23)$$

Формула (3. 23) остается неизменной, если поменять местами источник и приемник поля. Когда $h=0$,

$$\left(\frac{H_Z}{H_{Z\,\text{п}}}\right)_{\text{ст}}=\frac{2}{\pi}\left(\operatorname{arctg}2\sqrt{\varrho^*\varrho_0^*}+\frac{1}{2\sqrt{\varrho^*\varrho_0^*}}\right). \qquad (3.24)$$

Асимптотические формулы имеют вид:

$$\left(\frac{H_Z}{H_{Z\,\text{п}}}\right)_{\text{ст}}=1,\quad(\overline{X}=-\infty),$$
$$\left(\frac{H_Z}{H_{Z\,\text{п}}}\right)_{\text{ст}}=1-\frac{1}{\nu^3}+\frac{12h^2}{\nu^5},\ (\overline{X}=\infty). \qquad (3.25)$$

На рис. 7 приводятся кривые поля вдоль профиля, проходящего над полуплоскостью, для различных высот h.

§ 4. Идеально проводящая полуплоскость в присутствии магнитного диполя

(решение Весли, 1958)

В системе цилиндрических координат полуплоскость располагается так, как это показано на рис. 8. Ось Oz направлена горизонтально вдоль верхнего края полуплоскости. Угол ϕ меняется от $-\frac{\pi}{2}$ до $3\frac{\pi}{2}$. Радиальное расстояние от края (ось Oz) обозначается через ϱ. Ось Ox прямоугольной системы координат горизонтальна и перпендикулярна полуплоскости, ось Oy вертикальна.

Уравнения Максвелла для поля в непроводящей среде в системе единиц MKS имеют вид (Стрэттон, 1948):

$$\nabla\times\boldsymbol{E}-i\omega\mu_0\boldsymbol{H}=0,\quad\nabla\boldsymbol{H}=0,$$
$$\nabla\times\boldsymbol{H}+i\omega\varepsilon_0\boldsymbol{E}=\boldsymbol{i},\quad\nabla\boldsymbol{E}=0, \qquad (4.1)$$

где использованы обычные обозначения. Временной множитель $e^{i\omega t}$ опускается. Для рассматриваемых низких частот можно считать $\omega\varepsilon_0\boldsymbol{E}=0$. Тогда уравнения Максвелла (4. 1) сведутся к

$$\nabla\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{i},\quad\nabla\boldsymbol{H}=0. \qquad (4.2)$$

Распределение тока $\boldsymbol{i}$ для данного магнитного диполя описывается уравнением:

$$\boldsymbol{i}=\nabla\times\boldsymbol{M}\,\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0), \qquad (4.3)$$

где $\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)$ — дельта функция Дирака, $\boldsymbol{r}$ радиус-вектор, проведенный из начала координат в точку наблюдения, а $\boldsymbol{r}_0$ —

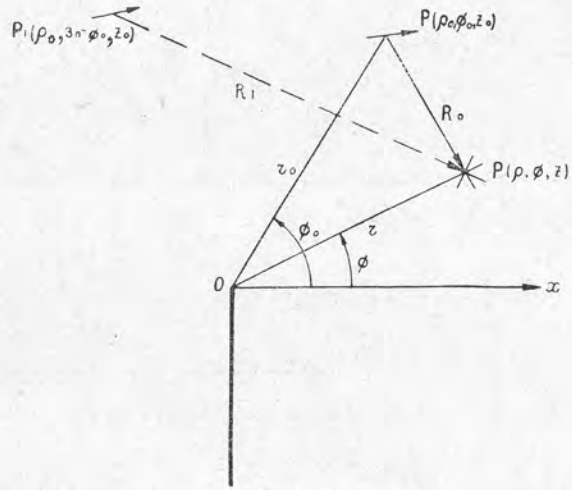


Рис. 8.

в точку расположения дипольного источника и $\boldsymbol{M}$ — магнитный момент диполя. Подставляя (4. 3) в первое уравнение системы (4. 2), получим:

$$\boldsymbol{H}=\boldsymbol{M}\,\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)-\nabla\Phi, \qquad (4.4)$$

где Φ — скалярный магнитный потенциал, который в соответствии с (4. 2) удовлетворяет уравнению Пуассона:

$$\nabla^2\Phi=\nabla\,\boldsymbol{M}\,\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0). \qquad (4.5)$$

Граничное условие (Стрэттон, 1948, стр. 49), заключающееся в непрерывности нормальной к полуплоскости составляющей магнитной индукции, а также равенство нулю магнитного поля внутри идеального проводника, приводят к следующему условию, вытекающему из уравнения (4. 4):

$$\frac{\partial\Phi}{\partial n}=0,\qquad\left(\phi=-\frac{\pi}{2},\ \frac{3}{2}\pi\right), \qquad (4.6)$$

где производная по n означает производную по нормали к по-

верхности полуплоскости. Задача состоит теперь в решении уравнений (4. 5) и (4. 6).

Введем функцию Грина, определяемую следующими выражениями:

$$\nabla^2 G = -4\pi\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'),$$

$$\frac{\partial G}{\partial n} = 0, \quad \left(\phi = -\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right). \tag{4. 7}$$

При решении уравнений (4. 5) и (4. 6) воспользуемся теоремой Грина для Φ и G (Морс и Фешбах, 1960):

$$\int (G\nabla^2\Phi - \Phi\nabla^2 G)\,dV' = \int\left(G\frac{\partial\Phi}{\partial n} - \Phi\frac{\partial G}{\partial n}\right)dS' = 0, \tag{4. 8}$$

где использованы граничные условия (4. 6) и (4. 7). Заменив $\nabla^2\Phi$ и $\nabla^2 G$ правыми частями уравнений (4. 5) и (4. 7), получим:

$$\int [G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')\nabla'\boldsymbol{M}\,\delta(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}_0) + 4\pi\Phi(\boldsymbol{r}')\,\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')]\,dV' = 0. \tag{4. 9}$$

Первый интеграл в уравнении (4. 9) может быть вычислен:

$$\int G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')\nabla'\boldsymbol{M}\,\delta(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}_0)\,dV' = -\nabla^\circ\boldsymbol{M}\int G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')\,\delta(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}_0)\,dV' = -\nabla^\circ\boldsymbol{M}G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_0), \tag{4. 10}$$

где индекс «ноль» обозначает дифференцирование по координатам источника. Вычисляя второй интеграл в уравнении (4. 9) и пользуясь уравнением (4. 10), получим:

$$\Phi(\boldsymbol{r}) = \nabla^\circ\boldsymbol{M}G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_0)\frac{1}{4\pi}. \tag{4. 11}$$

Из уравнения (4. 4), опуская случай, когда источник находится в точке наблюдения, найдем искомое магнитное поле:

$$\boldsymbol{H} = -\nabla\left[\nabla^\circ\boldsymbol{M}G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_0)\frac{1}{4\pi}\right]. \tag{4. 12}$$

Функция Грина*, удовлетворяющая уравнениям (4. 7), может быть записана в конечной форме в виде суммы двух членов, один из которых относится к дипольному источнику, другой к мнимому источнику:

$$G = G_0 + G_1, \tag{4. 13}$$

где

$$G_0 = \left(\pi + 2\,\mathrm{arctg}\,\frac{b_0}{R_0}\right)\frac{1}{2\pi R_0},$$

$$G_1 = \left(\pi + 2\,\mathrm{arctg}\,\frac{b_1}{R_1}\right)\frac{1}{2\pi R_1} \tag{4. 14}$$

* Функция Грина, равная нулю на поверхности $\phi = -\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi$, имеет вид $G = G_0 - G_1$.

и где для арктангенса всегда соблюдаются условия

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant \mathrm{arctg}\,\frac{b_0}{R_0} \leqslant \frac{\pi}{2}, \quad -\frac{\pi}{2} \leqslant \mathrm{arctg}\,\frac{b_1}{R_1} \leqslant \frac{\pi}{2}, \tag{4. 15}$$

причем

$$\left.\begin{aligned} b_0 &= 2\sqrt{\varrho\varrho_0}\cos\frac{1}{2}(\phi-\phi_0),\\ b_1 &= 2\sqrt{\varrho\varrho_0}\cos\frac{1}{2}(\phi+\phi_0-3\pi),\\ R_0^2 &= \varrho^2+\varrho_0^2-2\varrho\varrho_0\cos(\phi-\phi_0)+(z-z_0)^2,\\ R_1^2 &= \varrho^2+\varrho_0^2-2\varrho\varrho_0\cos(\phi+\phi_0-3\pi)+(z-z_0)^2. \end{aligned}\right\} \tag{4. 16}$$

Равенства (4. 13) — (4. 16) можно получить путем прямых вычислений, однако проще показать, что они удовлетворяют всем необходимым требованиям*.

Можно проверить путем подстановки, что G_0 и G_1, каждое в отдельности, а следовательно, и G удовлетворяют уравнению Лапласа. Граничные условия в (4. 7) выполняются, так как

$$G_0 = G_0\left(\cos\frac{1}{2}(\phi-\phi_0)\right),$$

$$G_1 = G_0\left(\cos\frac{1}{2}(\phi+\phi_0-3\pi)\right) \tag{4. 17}$$

и

$$\pm\frac{\partial G}{\partial n} = \frac{\partial G}{\partial\phi} = -\frac{1}{2}\left[\sin\frac{1}{2}(\phi-\phi_0) + \sin\frac{1}{2}(\phi+\phi_0-3\pi)\right]G_0' = 0,$$

$$\left(\phi = -\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right). \tag{4. 18}$$

Чтобы убедиться в том, что G удовлетворяет неоднородному уравнению в системе (4. 7), достаточно показать, что вблизи источника G меняется как $\frac{1}{R_0}$. Так как в этом случае согласно (4. 16) $b_0 \approx 2\varrho$, а $R_0 \approx 0$, находим из первого уравнения системы (4. 14), что $G_0 \approx \frac{1}{R_0}$, когда $R_0 \to 0$. Так как R_1 остается конечным, то G действительно меняется как $\frac{1}{R_0}$ вблизи источника. Наконец, следует отметить, что необходимые условия для G выполняются также, когда R_0, а следовательно, и R_1

* Аналогичные результаты получены Уэйтом (1957) для частного случая неустановившегося поля диполя, магнитный момент которого меняется во времени по закону ступенчатой функции, (см. § 7 настоящей главы) *А. В., Г. Ф.*

стремятся к бесконечности. Из формул (4.14) имеем в этом случае: $G_0 \approx \frac{1}{2R_0}$ и $G_1 \approx \frac{1}{2R_1}$. Так как $R_1 \approx R_0$, то $G \approx \approx \frac{1}{2R_0} + \frac{1}{2R_1} \approx \frac{1}{R_0}$, что и требовалось показать.

Интересно отметить, что функция мнимого источника G_1 (4.14) остается конечной даже тогда, когда этот источник и точка наблюдения пространственно совпадают. Это объясняется тем, что изображение источника действительно находится в точке $\phi = 3\pi - \phi_0$ и поэтому его нет в реальном пространстве, где $-\frac{\pi}{2} \leqslant \phi \leqslant \frac{3}{2}\pi$*.

Для того чтобы вывести выражение для магнитного потенциала, запишем его в виде суммы двух членов, соответствующих согласно формулам (4.11) и (4.13) источнику поля и его изображению:

$$\Phi = \Phi_0 + \Phi_1, \tag{4.19}$$

где

$$\Phi_0 = \nabla^\circ \boldsymbol{M} G_0 \frac{1}{4\pi}, \quad \Phi_1 = \nabla^\circ \boldsymbol{M} G_1 \frac{1}{4\pi}. \tag{4.20}$$

Подставляя выражения для G_0 и G_1 из (4.14), (4.15) и (4.16) в (4.20), получим:

$$\Phi_0 = \left[\pi + 2\,\mathrm{arctg}\,\frac{b_0}{R_0} + 2\,\frac{b_0 R_0}{R^{*2}}\right] \boldsymbol{M}\,\nabla^\circ\left(\frac{1}{8\pi^2 R_0}\right) + \frac{1}{4\pi^2 R^{*2}} \boldsymbol{M}\,\nabla^\circ b_0,$$

$$\Phi_1 = \left[\pi + 2\,\mathrm{arctg}\,\frac{b_1}{R_1} + 2\,\frac{b_1 R_1}{R^{*2}}\right] \boldsymbol{M}\,\nabla^\circ\left(\frac{1}{8\pi^2 R_1}\right) + \frac{1}{4\pi^2 R^{*2}} \boldsymbol{M}\,\nabla^\circ b_1, \tag{4.21}$$

где

$$R^{*2} = (\varrho + \varrho_0)^2 + (z - z_0)^2 = R_0^2 + b_0^2 = R_1^2 + b_1^2. \tag{4.22}$$

Производные в формулах (4.21) могут быть вычислены. В декартовых координатах имеем

$$\left.\begin{aligned} \nabla^\circ b_0 &= (h_0 \boldsymbol{e}_x - b_0 \boldsymbol{e}_y)\frac{1}{2\varrho_0}, \\ \nabla^\circ b_1 &= (h_1 \boldsymbol{e}_x - b_1 \boldsymbol{e}_y)\frac{1}{2\varrho_0}, \end{aligned}\right\} \tag{4.23}$$

* Фиктивный источник находится во второй части пространства Римана (см. например, Франк и Мизес, 1937, стр. 851). Этой части риманова пространства соответствуют углы $\frac{3}{2}\pi < \phi \leqslant \frac{7}{2}\pi$. Точка наблюдения всегда остается в первой части риманова пространства, соответствующего реальному физическому пространству, ограниченному углами $-\frac{\pi}{2} < \phi \leqslant \frac{3}{2}\pi$. *Ред.*

где $\boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{e}_y$ — единичные векторы, b_0 и b_1 определены равенствами (4.16) и

$$\left.\begin{aligned} h_0 &= 2\sqrt{\varrho\varrho_0}\,\cos\frac{1}{2}(\phi + \phi_0), \\ h_1 &= 2\sqrt{\varrho\varrho_0}\,\cos\frac{1}{2}(\phi_0 - \phi - 3\pi), \end{aligned}\right\} \tag{4.24}$$

$$\left.\begin{aligned} \nabla^\circ\left(\frac{1}{R_0}\right) &= \frac{\boldsymbol{R}_0}{R_0^3}, \\ \nabla^\circ\left(\frac{1}{R_1}\right) &= \frac{\boldsymbol{R}_1}{R_1^3} - 2(x + x_0)\,\boldsymbol{e}_x \frac{1}{R_1^3}. \end{aligned}\right\} \tag{4.25}$$

$$\left.\begin{aligned} R_0^2 &= (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2, \\ R_1^2 &= (x + x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2. \end{aligned}\right\} \tag{4.26}$$

Исходя из уравнений (4.4) и (4.19), можно, исключив случай, когда источник и приемник поля совпадают, представить магнитное поле в виде суммы двух членов, соответствующих источнику и его изображению:

$$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}_0 + \boldsymbol{H}_1, \tag{4.27}$$

где

$$\boldsymbol{H}_0 = -\nabla\Phi_0, \quad \boldsymbol{H}_1 = -\nabla\Phi_1. \tag{4.28}$$

Подставляя выражения (4.21) — (4.25) в (4.28), получим:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{H}_0 = {} & [3\boldsymbol{M}\boldsymbol{R}_0\boldsymbol{R}_0 - \boldsymbol{M}R_0^2]\left[\pi + 2\,\mathrm{arctg}\,\frac{b_0}{R_0} + 2\,\frac{b_0 R_0}{R^{*2}}\right]\frac{1}{8\pi^2 R_0^5} + \\ & + \boldsymbol{R}_0\boldsymbol{M}\,[b_0\boldsymbol{R}_0 + R_0^2\,\nabla^\circ b_0]\,\frac{1}{2\pi^2 R_0^2 R^{*4}} - \boldsymbol{M}\,[\boldsymbol{R}_0 - b_0\nabla^\circ b_0]\times \\ & \times\nabla\, b_0\,\frac{1}{2\pi^2 R^{*4}} - \nabla\,[\boldsymbol{M}\,\nabla^\circ b_0]\,\frac{1}{4\pi^2 R^{*2}}, \end{aligned} \tag{4.29}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{H}_1 = {} & [3\,(\boldsymbol{M}\boldsymbol{R}_1 - 2\,(x + x_0)\,M_x)\,\boldsymbol{R}_1 - \boldsymbol{M}R_1^2 + 2M_x R_1^2 \boldsymbol{e}_x]\times \\ & \times\left[\pi + 2\,\mathrm{arctg}\,\frac{b_1}{R_1} + 2\,\frac{b_1 R_1}{R^{*2}}\right]\frac{1}{8\pi^2 R_1^5} + \\ & + \boldsymbol{R}_1\boldsymbol{M}\,[b_1\,(\boldsymbol{R}_1 - 2\,(x + x_0)\,\boldsymbol{e}_x) + R_1^2\,\nabla^\circ b_1]\times \\ & \times\frac{1}{2\pi^2 R_1^2 R^{*4}} - \boldsymbol{M}\,[R_1 - 2\,(x + x_0)\,\boldsymbol{e}_x - b_1\,\nabla^\circ b_1]\times \\ & \times\nabla\, b_1\,\frac{1}{2\pi^2 R^{*4}} - \nabla\,[\boldsymbol{M}\,\nabla^\circ b_1]\,\frac{1}{4\pi^2 R^{*2}}, \end{aligned} \tag{4.30}$$

где $\boldsymbol{R}_0$ и $\boldsymbol{R}_1$ определяются равенствами (4.16) или (4.26) (см. рис. 8), b_0 и b_1 — равенствами (4.16), $\nabla^\circ b_0$ и $\nabla^\circ b_1$ —

равенствами (4. 23) и (4. 24), арктангенсы ограничены диапазоном от $-\frac{\pi}{2}$ до $+\frac{\pi}{2}$, R^{*2} определяется формулой (4. 22),

$$\left.\begin{aligned} \nabla b_0 &= (h_0 e_x - b_1 e_y)\frac{1}{2\varrho}, \\ \nabla b_1 &= -(h_1 e_x + b_0 e_y)\frac{1}{2\varrho}, \end{aligned}\right\} \tag{4. 31}$$

где h_0 и h_1 записаны в (4. 24) и где

$$\begin{aligned} \nabla[\boldsymbol{M}\nabla^\circ b_0] &= [-h_1 e_z \times \boldsymbol{M} + b_0(M_x e_x + M_y e_y)]\frac{1}{4\varrho\varrho_0}, \\ \nabla[\boldsymbol{M}\nabla^\circ b_1] &= [h_0 e_z \times (\boldsymbol{M} - 2M_x e_x) + b_1(-M_x e_x + M_y e_y)]\frac{1}{\varrho\varrho_0}. \end{aligned} \tag{4. 32}$$

Таким образом, оказывается, что решение задачи для идеально проводящей полуплоскости в присутствии магнитного диполя на низких частотах может быть найдено совершенно строго в виде простого конечного выражения [формулы (4. 29) — (4. 32)].

§ 5. Полубесконечная пластина с конечными проводимостью и толщиной в присутствии магнитного диполя

(Весли, 1958)

Настоящий параграф является продолжением предыдущего. В нем рассматривается полубесконечная пластина с конечными проводимостью и толщиной в поле магнитного низкочастотного диполя. Координатная система показана на рис. 8. Обозначения такие же, как в § 4.

Искомое приближенное решение находится путем объединения двух точных решений. Оно имеет форму функции Грина, которая сводится к точному решению для тонкой идеально проводящей полубесконечной пластины (при условии, что $\sigma d \to \infty$, а $d \to 0$, где d — толщина, σ — проводимость пластины). Эта функция сводится также к точному решению для случая бесконечного пласта конечной проводимости и конечной мощности, когда источник и приемник поля находятся вблизи пластины и достаточно удалены от ее края.

Решение для бесконечного пласта в поле низкочастотного магнитного диполя выводится в главе III § 2.

Приближенные значения магнитных компонент поля в форме, пригодной для вычисления, здесь не приводятся из-за их громоздкости, а также потому, что их легко получить путем простого дифференцирования функций Грина G_0^* и G_1^* [см. (5. 22)].

1. Бесконечный пласт в присутствии магнитного диполя. Выпишем интересующие нас решения. Координаты выбраны следующим образом: ось Ox перпендикулярна пласту, ось OY $(Y = y - y_0)$ вертикальна и совпадает с плоскостью пласта и ось OZ $(Z = z - z_0)$ горизонтальна и совпадает с плоскостью пласта. Пласт (конечной проводимости σ и мощности d определяется координатами $x = -\frac{d}{2}$ и $x = +\frac{d}{2}$. Дипольный источник находится

на оси x в точке $x = x_0$, где $x_0 \geqslant \frac{d}{2}$. Цилиндрические координаты ϱ', φ', x связаны с прямоугольными равенствами:

$$\varrho' = \sqrt{Y^2 + Z^2}, \qquad \varphi' = \operatorname{arctg}\frac{Z}{Y}. \tag{5. 1}$$

При использовании вектора Герца $\boldsymbol{\Pi}$, уравнения Максвелла (Стрэттон, 1948, стр. 40) приводятся к виду:

$$\begin{aligned} \nabla\nabla\boldsymbol{\Pi} - \nabla\times\nabla\times\boldsymbol{\Pi} + k^2\boldsymbol{\Pi} &= -\boldsymbol{M}\delta(\boldsymbol{R}_0), \\ \boldsymbol{H} &= k^2\boldsymbol{\Pi} + \nabla\nabla\boldsymbol{\Pi}, \\ \boldsymbol{E} &= i\omega\mu\nabla\times\boldsymbol{\Pi}, \end{aligned} \tag{5. 2}$$

где волновое число k дается соотношением:

$$k^2 = i\omega\mu\sigma + \omega^2\mu\varepsilon. \tag{5. 3}$$

Три рассматриваемые области обозначены индексами: *1* — пласт $\left(-\frac{d}{2} \leqslant x \leqslant +\frac{d}{2}\right)$, *2* — область, содержащая источник $\left(x \geqslant \frac{d}{2}\right)$ и *3* — область по другую сторону пласта $\left(x \leqslant -\frac{d}{2}\right)$. Пренебрегая членами, имеющими порядок ω^2 в области *1*, в пласте, выберем $k_1 = k$ и $\sigma_1 = \sigma$ и $\mu_1 = \mu_0$. В областях *2* и *3*, в непроводящей среде, имеем $k_2 = k_3 = 0$, $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$, $\mu_2 = \mu_3 = \mu_0$ и $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \varepsilon_0$. Волновое число для пласта тогда

$$k^2 = i\omega\mu_0\sigma. \tag{5. 4}$$

В силу аксиальной симметрии относительно оси Ox следует рассмотреть только магнитные диполи в направлении x и y. Решение в общем виде будет соответствующей линейной комбинацией этих двух случаев.

Интегральное решение для x-диполя. Из уравнений (5. 2) и соответствующих граничных условий (Стрэттон, 1948, стр. 42) получим решение в интегральной форме:

$$\Pi_{1xx} = 2\frac{M_x}{4\pi}\int_0^\infty J_0(\varrho'\lambda)\, e^{-\lambda\left(x_0 - \frac{d}{2}\right)}\left[\lambda \operatorname{sh} u\left(x + \frac{d}{2}\right) + u \operatorname{ch} u\left(x + \frac{d}{2}\right)\right]\frac{1}{K^*}\lambda\, d\lambda,$$

$$\Pi_{2xx} = \frac{M_x}{4\pi}\int_0^\infty J_0(\varrho'\lambda)\left[e^{-|x - x_0|} + k^2 \operatorname{sh}(ud) e^{-\lambda(x + x_0 - d)}\frac{1}{K^*}\right] d\lambda. \tag{5. 5}$$

$$\Pi_{3xx} = 2\frac{M_x}{4\pi}\int_0^\infty J_0(\varrho'\lambda)\, u e^{\lambda(x - x_0 + d)}\frac{1}{K^*}\lambda\, d\lambda,$$

где

$$K^* = (2\lambda^2 - k^2)\operatorname{sh} ud + 2\lambda u \operatorname{ch} ud, \tag{5. 6}$$

$$u = \sqrt{\lambda^2 - k^2}. \tag{5. 7}$$

Причем, $\arg u$ выбран равным нулю для $\lambda \Rightarrow \infty$ и аргументу ik для $\lambda = 0$. Первый значок x в (5. 5) означает направление дипольного источника, второй — компоненту вектора $\mathbf{\Pi}$. В нашем случае достаточно, чтобы граничным условиям удовлетворяла только x-компонента.

Интегральное решение для y-диполя. Так как в этом случае аксиальная симметрия относительно оси Ox отсутствует, требуется определить две (Π_{yx} и Π_{yy}) компоненты вектора Герца. Так же как в предыдущем случае получим:

$$\left.\begin{aligned}
\Pi_{1yx} &= 2\frac{M_y}{4\pi}\cos\phi'\frac{\partial}{\partial\varrho'}\int_0^\infty J_0(\varrho'\lambda)e^{-\lambda\left(x_0-\frac{d}{2}\right)}\times\\
&\times\left[u\operatorname{ch}u\left(x+\frac{d}{2}\right)+\lambda\operatorname{sh}u\left(x+\frac{d}{2}\right)\right]\frac{1}{K^*}d\lambda,\\
\Pi_{2yx} &= 2\frac{M_y}{4\pi}\cos\phi'\frac{\partial}{\partial\varrho'}\int_0^\infty J_0(\varrho'\lambda)e^{-\lambda\left(x+x_0-\frac{d}{2}\right)}\times\\
&\times[u\operatorname{ch}ud+\lambda\operatorname{sh}ud]\frac{d\lambda}{K^*},\\
\Pi_{3yx} &= 2\frac{M_y}{4\pi}\cos\phi'\frac{\partial}{\partial\varrho'}\int_0^\infty uJ_0(\varrho'\lambda)e^{\lambda(x-x_0+d)}\frac{1}{K^*}d\lambda,\\
\Pi_{2yy} &= \frac{M_y}{4\pi}\left(\frac{1}{R_0}+\frac{1}{R'}\right).
\end{aligned}\right\}\quad(5.8)$$

Все остальные компоненты равны нулю, R_0 — как и раньше, расстояние от источника до точки наблюдения и R' — расстояние от изображения источника (как бы зеркально отраженного передней плоскостью пластины, $x = \frac{d}{2}$) до точки наблюдения:

$$R'^2 = (x + x_0 - d)^2 + Y^2 + Z^2. \quad (5.9)$$

Функция Грина для пласта. Для того чтобы получить приближенное решение задачи для тонкой полубесконечной пластины, необходимо выразить решение в непроводящей среде по обе стороны пласта в форме функции Грина (G_S). Из уравнений (5. 2), приравнивая $k = 0$, так как $k_2 = k_3 = 0$, находим G_S:

$$\mathbf{H} = \nabla\nabla\mathbf{\Pi} = -\nabla\nabla^\circ\mathbf{M}G_S\frac{1}{4\pi}. \quad (5.10)$$

Таким образом соответствующее решение уравнения Лапласа, которое симметрично в координатах источника и приемника:

$$G_S = \frac{1}{R_0} - v(x-x_0)I_0 + v(x+x_0)I_1, \quad (5.11)$$

где

$$\left.\begin{aligned}
I_0 &= \int_0^\infty J_0(\varrho'\lambda)A_0(\lambda)e^{-\lambda|x-x_0|}d\lambda,\\
I_1 &= \int_0^\infty J_0(\varrho'\lambda)A_1(\lambda)e^{-\lambda|x+x_0|}d\lambda,
\end{aligned}\right\}\quad(5.12)$$

$$\left.\begin{aligned}
A_0 &= 1 - 2\lambda u e^{ud}\frac{1}{K^*},\\
A_1 &= -k^2\operatorname{sh}ud e^{\lambda d}\frac{1}{K^*},
\end{aligned}\right\}\quad(5.13)$$

и где K^* определяется формулой (5. 6). Функция $v(x - x_0)$ равна единице, когда источник и приемник поля находятся по разные стороны пласта, и равна нулю, когда они располагаются по одну сторону; и наоборот, $v(x + x_0)$ равна единице во втором случае и нулю в первом. Если принять $d \to 0$, то можно записать:

$$\left.\begin{aligned}
v(x-x_0) &\equiv \frac{1}{2}\left|\frac{x}{|x|}-\frac{x_0}{|x_0|}\right|,\\
v(x+x_0) &\equiv \frac{1}{2}\left|\frac{x}{|x|}+\frac{x_0}{|x_0|}\right|.
\end{aligned}\right\}\quad(5.14)$$

Следует отметить, что решение (5. 11) в равной мере справедливо, когда источник расположен в отрицательной части оси x, $\left(x_0 \leqslant -\frac{d}{2}\right)$ и когда он находится в положительной части оси x — $\left(x_0 \geqslant \frac{d}{2}\right)$.

Формулы (5. 11) — (5. 13) можно проверить. Принимая во внимание, что $K^* \to 2\lambda^2 e^{\lambda d}$ для $\sigma \to 0$, $k \to 0$, а также, используя интеграл Липшица (Ватсон, 1949, стр. 420):

$$\int_0^\infty J_0(\varrho'\lambda)e^{-\lambda|x-x_0|}d\lambda = \frac{1}{R_0}, \quad (5.15)$$

получим функцию Грина в непроводящей среде: $G_S = \frac{1}{R_0}$. Когда $\sigma \to \infty$, получим точное решение:

$$G_S = \frac{1}{R_0} + v(x+x_0)\frac{1}{R'}, \quad (5.16)$$

где R' — расстояние от мнимого источника (как бы отраженного ближайшей к источнику поверхностью пласта) до точки наблюдения, см. (5. 9).

Приближенное вычисление интегралов. Таким образом получено точное решение для магнитного поля по обе стороны пласта в виде единственной скалярной функции Грина (5. 11). Однако это простое точное решение нельзя рассматривать как окончательное, так как вычисление интегралов

представляет собой сложную задачу. Ниже разбираются два случая, когда k велико и k мало, то есть $\omega\sigma$ велико и $\omega\sigma$ мало.

Приближенное вычисление интегралов I_0 и I_1 для больших k. Для больших k главная часть рассматриваемых интегралов находится в области $\lambda < |k|$. Поэтому можно разложить A_0 и A_1 в степенные ряды по λ и, подставив их в I_0 и I_1 и интегрируя почленно, получить приближенное решение этих интегралов. Разлагая A_0 и A_1 (5. 13, 5. 6 и 5. 7) в степенные ряды по λ и принимая во внимание $\arg u$, с точностью до третьего члена находим выражения для A_0 и A_1.

$$\left.\begin{aligned} A_0 &\approx 1 + 2\frac{\lambda}{k}\operatorname{cosec} kd + \\ &+ 2\left(\frac{\lambda}{k}\right)^2 \operatorname{cosec} kd\,[2\operatorname{ctg} kd + kd], \\ A_1 &\approx 1 + \frac{\lambda}{k}[2\operatorname{ctg} kd + kd] + \\ &+ \left(\frac{\lambda}{k}\right)^2 \left[4\operatorname{ctg}^2 kd + 2kd\operatorname{ctg} kd + 2 + \frac{(kd)^2}{2}\right]. \end{aligned}\right\} \quad (5.17)$$

Подставляя (5. 17) в (5. 12) и интегрируя с помощью (5. 15), получим искомые приближенные интегралы с точностью до первых трех членов:

$$\begin{aligned} I_0 &\approx \frac{1}{R} - \frac{2\operatorname{cosec} kd}{k}\,\frac{\partial}{\partial|x-x_0|}\frac{1}{R_0} + \\ &+ \frac{2\operatorname{cosec} kd}{k^2}[2\operatorname{ctg} kd + kd]\frac{\partial^2}{\partial|x-x_0|^2}\,\frac{1}{R_0}, \\ I_1 &\approx \frac{1}{R_1} - \frac{2\operatorname{ctg} kd + kd}{k}\,\frac{\partial}{\partial|x+x_0|}\frac{1}{R_1} + \\ &+ \frac{1}{2k^2}[4 + 8\operatorname{ctg}^2 kd + 4kd\operatorname{ctg} kd + (kd)^2]\frac{\partial^2}{\partial|x+x_0|^2}\cdot\frac{1}{R_1}, \end{aligned} \quad (5.18)$$

где R_0 и R_1 — расстояния от точки наблюдения до реального и мнимого источников (см. предыдущий параграф).

Приближенные вычисления интегралов I_0 и I_1 для малых k. Для малых k главная часть интегралов находится вблизи перевальной точки $u = 0$, что можно более детально исследовать в комплексной плоскости v, определяемой уравнением $\lambda = k\sin v$. Таким образом, разлагаем A_0 и A_1 в степенные ряды по u, подставляем их в интегралы и интегрируем почленно. Разлагая A_0 и A_1 (5. 13, 5. 6 и 5. 7) в степенные ряды по u, приходим с точностью до второго члена к выражениям:

$$\left.\begin{aligned} A_0 &\approx \left[1 - \frac{2e^{kd}}{2+kd}\right] + \frac{u^2 kde^{kd}}{k^2(2+kd)^2}\left[1 + kd + \frac{(kd)^2}{3}\right], \\ A_1 &\approx -\frac{kde^{kd}}{2+kd} + \frac{u^2 kde^{kd}}{k^2(2+kd)^2}\times \\ &\times\left[1 + kd + \frac{5}{6}(kd)^2 + \frac{1}{3}(kd)^3\right]. \end{aligned}\right\} \quad (5.19)$$

В действительности имеет место разложение по u^2, а не по u. Подставляя (5. 19) в (5. 12) и интегрируя в соответствии с (5. 15), получим искомые приближения с точностью до двух первых членов:

$$\left.\begin{aligned} I_0 &\approx \left[1 - \frac{2e^{kd}}{2+kd}\right]\frac{1}{R_0} + \frac{kde^{kd}}{(2+kd)^2}\times \\ &\times\left[1 + kd + \frac{1}{3}(kd)^2\right]\left[\frac{\partial^2}{k^2\partial|x-x_0|^2} - 1\right]\frac{1}{R_0}; \\ I_1 &\approx -\frac{kde^{kd}}{2+kd}\,\frac{1}{R_1} + \frac{kde^{kd}}{(2+kd)^2}\times \\ &\times\left[1 + kd + \frac{5}{6}(kd)^2 + \frac{1}{3}(kd)^3\right]\left[\frac{\partial^2}{k^2\partial|x+x_0|^2} - 1\right]\frac{1}{R_1}. \end{aligned}\right\} \quad (5.20)$$

Требования, предъявляемые к решению задачи для тонкой полубесконечной пластины. Достаточно хорошее приближение для вторичного поля полубесконечной пластины конечной проводимости и конечной мощности в присутствии низкочастотного дипольного источника можно получить, удовлетворяя следующим требованиям.

1. Решение должно быть представлено в форме функции Грина в соответствии с уравнением (5. 10); оно должно удовлетворять уравнению Лапласа и обладать симметрией относительно координат источника и приемника, а также соответственным образом вести себя, когда приемник находится вблизи источника.

2. Когда проводимость допустимо считать бесконечной, а мощность стремящейся к нулю, так что $d\sqrt{\frac{1}{2}\omega\mu_0\sigma} \to \infty$, решение должно сводится к точному решению в форме функции Грина, полученному для случая идеально проводящей полуплоскости (§ 4 настоящей главы).

3. Когда источник и приемник поля находятся вблизи пластины, но достаточно далеко от ее края, решение должно выражаться приближенно при помощи функции Грина для бесконечного пласта, (5. 11) и (5. 18) или (5. 11) и (5. 20).

4. Когда проводимость конечна, а мощность равна нулю, решение должно сводиться к функции Грина для непроводящей среды.

5. Когда мощность конечна, а проводимость стремится к нулю, решение должно сводиться к функции Грина для непроводящей среды.

Сравнение решений для бесконечного пласта и полуплоскости. Если записать точное решение для идеально проводящей полубесконечной пластины

с исчезающе малой мощностью (полуплоскости) в поле низкочастотного диполя в виде функции Грина (§ 4)

$$G_h = \frac{1}{R_0} - \frac{G_0^*}{R_0} + \frac{G_1^*}{R_1}, \tag{5.21}$$

$$2\pi G_0^* = \pi - 2\,\mathrm{arctg}\,\frac{b_0}{R_0},$$
$$2\pi G_1^* = \pi + 2\,\mathrm{arctg}\,\frac{b_1}{R_1}, \tag{5.22}$$

где как и прежде

$$b_0 = 2\sqrt{\varrho\varrho_0}\cos\frac{1}{2}(\phi - \phi_0),$$
$$b_1 = 2\sqrt{\varrho\varrho_0}\cos\frac{1}{2}(\phi + \phi_0 - 3\pi), \tag{5.23}$$

то оказывается, что когда источник и приемник поля находятся вблизи полуплоскости и удалены от ее края

$$G_0^* = v(x - x_0), \quad (d = 0),$$
$$G_1^* = v(x + x_0), \ (d = 0), \tag{5.24}$$

где $v(x - x_0)$ и $v(x + x_0)$ определены в (5. 14). Подставляя (5. 24) в (5. 21) и сравнивая полученный результат с решением для пласта (5. 11) и (5. 18) для случая $\sigma \to \infty$, на основании имеющегося сходства попытаемся найти приближение для тонкой пластины, используя следующую подстановку:

$$v(x - x_0)\frac{1}{R_0} = \frac{G_0^*}{R_0},$$
$$v(x + x_0)\frac{1}{R_1} = \frac{G_1^*}{R_1} \tag{5.25}$$

в приближенных соотношениях (5. 11) и (5. 18) или (5. 20) для пласта.

Очевидно, что оставлять производные по $|x - x_0|$ и $|x + x_0|$ в уравнениях (5. 18) и (5. 20) не следует, так как $\frac{G_0^*}{R_0}$ и $\frac{G_1^*}{R_1}$ являются функциями не $|x - x_0|$ и $|x + x_0|$, а x и x_0 в отдельности. При условии соблюдения симметрии между координатами источника и приемника, что необходимо для любой функции Грина, можно произвести соответствующую замену этих производных. Таким образом, n-я производная равна:

$$v(x - x_0)\frac{\partial^n}{\partial|x - x_0|^n}\frac{1}{R_0} = \frac{1}{2^n}\left(\frac{x - x_0}{|x - x_0|}\right)^n\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x_0}\right)^n\frac{G_0^*}{R_0},$$

$$v(x + x_0)\frac{\partial^n}{\partial|x + x_0|^n}\frac{1}{R_1} = \frac{1}{2^n}\left(\frac{x + x_0}{|x + x_0|}\right)^n\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x_0}\right)^n\frac{G_1^*}{R_1}, \tag{5.26}$$

где операторы справа идентичны операторам слева, и где сделана подстановка (5. 25).

2. Решение задачи для тонкой полубесконечной пластины. Приближенное решение для полубесконечной пластины конечной проводимости и конечной мощности в присутствии магнитного диполя получено при помощи подстановки (5. 26) в (5. 11) и (5. 18) или (5. 20). Функция Грина для тонкой пластины

$$G_{\text{тп}} = \frac{1}{R_1} - Q_0 + Q_1, \tag{5.27}$$

где для больших k имеем с точностью до третьего члена:

$$Q_0 \approx \left\{1 - \frac{\mathrm{cosec}\,kd}{k}\,\frac{x - x_0}{|x - x_0|}\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x_0}\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{\mathrm{cosec}\,kd}{2k^2}\,[2\,\mathrm{ctg}\,kd + kd]\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x_0}\right)^2\right\}\frac{G_0^*}{R_0}, \tag{5.28}$$
$$Q_1 \approx \left\{1 - \frac{2\,\mathrm{ctg}\,kd + kd}{2k}\,\frac{x + x_0}{|x + x_0|}\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x_0}\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{8k^2}\,[4 + 8\,\mathrm{ctg}^2\,kd + 4\,kd\,\mathrm{ctg}\,kd + (kd)^2]\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x_0}\right)^2\right\}\frac{G_1^*}{R_1};$$

для малых k с точностью до второго члена:

$$Q_0 \approx \left\{\left[1 - \frac{2e^{kd}}{2 + kd}\right] - \frac{kde^{kd}}{(2 + kd)^2}\left[1 + kd + \frac{1}{3}(kd)^2\right] \times \right.$$
$$\left. \times \left[1 - \frac{1}{4k^2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x_0}\right)^2\right]\right\}\frac{G_0^*}{R_0},$$
$$Q_1 \approx -\frac{kde^{kd}}{2 + kd}\left\{1 + \frac{1 + kd + \frac{5}{6}(kd)^2 + \frac{1}{3}(kd)^3}{2 + kd} \times \right. \tag{5.29}$$
$$\left. \times \left[1 - \frac{1}{4k^2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x_0}\right)^2\right]\right\}\frac{G_1^*}{R_1},$$

где G_0^* и G_1^* даны в (5. 22) и k — волновое число, определяемое равенством (5. 4). Магнитное поле может быть получено путем подстановки $G_{\text{тп}}$ (5. 27) вместо G_S в (5. 10).

Так как k — комплексная величина и при измерении можно легко отделить вещественную составляющую магнитного поля

$Re\boldsymbol{H}$ от мнимой составляющей $Im\boldsymbol{H}$, полезно выделить вещественную часть функции Грина, ReG, и мнимую часть ImG. Введя безразмерную толщину

$$d^* = \frac{d}{\delta} = d\sqrt{\omega\mu_0\sigma\frac{1}{2}}, \qquad (5.30)$$

где δ — толщина скин-слоя, имеем:

$$kd = (1+i)\,d^*. \qquad 5.31)$$

Рассмотрим далее два случая, когда d^* очень велико и когда d^* очень мало.

Вещественную часть функции Грина для больших значений d^* можно записать с помощью подстановки (5. 31) в (5. 27) и (5. 28):

$$ReG_{\text{тп}} \approx \frac{1}{R_0} - \frac{G_0^*}{R_0} + \frac{G_1^*}{R_1} - \frac{1}{2}d\left(1-\frac{1}{d^*}\right)\frac{x+x_0}{|x+x_0|}\times$$
$$\times\left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial x_0}\right)\frac{G_1^*}{R_1} + \frac{1}{8}d^2\left(1-\frac{2}{d^*}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial x_0}\right)^2\frac{G_1^*}{R_1}. \qquad (5.32)$$

Мнимую часть функции Грина для больших d^* можно выделить из уравнения, которое приводит к (5. 32):

$$ImG_{\text{тп}} = \frac{d}{2d^*}\left\{\frac{x+x_0}{|x+x_0|} - \frac{1}{2}d\left(1-\frac{1}{d^*}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial x_0}\right)\right\}\times$$
$$\times\left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial x_0}\right)\frac{G_1^*}{R_1}. \qquad (5.33)$$

Вещественную часть функции Грина для очень малых d^* можно записать следующим образом.

Подставим (5. 31) в (5. 27) и (5. 29). Разлагая коэффициенты по степеням d^* и выделяя вещественную часть из результирующего выражения для функции Грина с точностью до d^{*3}, имеем:

$$ReG_{\text{тп}} \approx \frac{1}{R_0} + \frac{1}{2}d^*\left(1-\frac{d^{*2}}{6}\right)\frac{G_0^*}{R_0} - \frac{1}{2}d^*\left(1-\frac{d^{*2}}{2}\right)\frac{G_1^*}{R_1}, \qquad (5.34)$$

где оставлен только первый член. Для $d^* \to 0$ второй и последующие члены разложения должны быть опущены, поскольку они становятся бесконечно малыми.

Мнимую часть функции Грина для очень малых d^* можно выделить из уравнения, приводящего к (5. 34):

$$ImG_{\text{тп}} \approx \frac{1}{2}d^*\left(1+d^*+\frac{1}{6}d^{*2}\right)\frac{G_0^*}{R_0} -$$
$$-\frac{1}{2}d^*\left(1+d^*+\frac{1}{2}d^{*2}\right)\frac{G_1^*}{R_1}. \qquad (5.35)$$

Можно легко убедиться в том, что найденное решение, формулы (5. 27) и (5. 28) или (5. 29), или полученные для них приближения, формулы (5. 32), (5. 33), (5. 34) и (5. 35), удовлетворяют тем

условиям, которые перечислены в требованиях, предъявляемых к решению задачи для тонкой полубесконечной пластины. Следует отметить, что когда проводимость стремится к бесконечности, безразмерная толщина также становится бесконечной и равенство (5. 32), еще содержащее d^*, сводится к решению задачи для пласта (5. 16), где R' разложено по степеням d (источник и приемник поля находятся вблизи пластины, но удалены от ее края). Вследствие высокой проводимости рудных тел практически наиболее важную роль играют формулы (5. 32) и (5. 33).

Приведенное в этом параграфе приближенное решение может быть использовано только при некоторых положениях источника и приемника относительно пластины (см. окончание § 6).

§ 6. Полубесконечная пластина с малой толщиной и большой проводимостью в присутствии магнитного диполя (Уэйт, 1959)

Так же как и в предыдущем параграфе, решение для тонкой полубесконечной пластины в присутствии диполя составляется из комбинации соответствующих решений для идеально проводя-

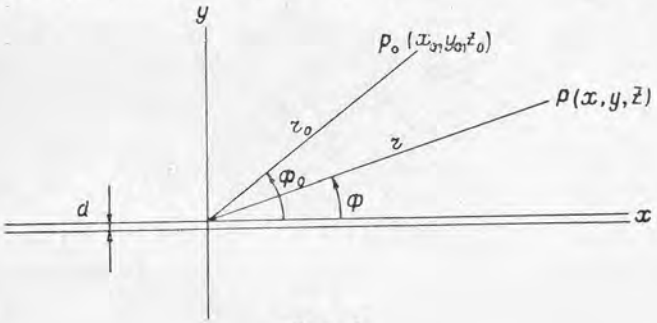


Рис. 9.

щей полуплоскости и неограниченного пласта с конечными мощностью и проводимостью. На этот раз используется более простая форма решения для пласта, когда мощность d мала и проводимость σ велика, но σd является конечной величиной (рис. 9). Источник, представляющий собой магнитный заряд, расположен в точке $P_0(x_0, y_0, z_0)$, а приемник находится в точке $P(x, y, z)$. Исходя из формул, приведенных в главе III § 2, п. 4, результирующий скалярный магнитный потенциал в P, обозначаемый Ψ, равен

$$\Psi = G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_0)M^*,$$

где M^* — магнитный заряд, и

$$4\pi G_S(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_0) = \frac{1}{R} + \int_0^\infty \frac{i\hat{p}}{\lambda+i\hat{p}} J_0(\lambda\bar{\varrho})\, e^{-\lambda(y+y_0)}\, d\lambda, \qquad (6.1)$$

где $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{r}_0$ — векторные расстояния от начала координат до точек P и P_0 соответственно, $\hat{p} = \frac{1}{2}\sigma\mu\omega d$

и

$$\bar{\varrho} = [(x - x_0]^2 + (z - z_0)^2]^{\frac{1}{2}}.$$

Как и прежде используется система единиц MKS. Там же показано, что в асимптотическом виде

$$4\pi G_S(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_0) \approx \frac{1}{R} + \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{i\hat{p}}\right)^n \frac{\partial^n}{\partial Y^n}\left[\frac{1}{R_1}\right] = \frac{1}{R} + \frac{1}{R_1} + S, \qquad (6.\ 2)$$

где

$$S \approx \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{i\hat{p}}\right)^n \frac{\partial^n}{\partial Y^n}\left[\frac{1}{R_1}\right],$$

$$Y = y + y_0.$$

$$R = [\bar{\varrho}^2 + (y - y_0)^2]^{\frac{1}{2}},$$

$$R_1 = [\bar{\varrho}^2 + (y + y_0)^2]^{\frac{1}{2}}.$$

Можно нестрогим способом проверить этот ряд, если формально разложить подынтегральное выражение в (6. 1) в условно сходящийся ряд по степеням $\left(\frac{\lambda}{\hat{p}}\right)$ и затем проинтегрировать полученный ряд почленно. Ответ совпадает с тем, который получен ранее.

Перейдем далее к задаче об идеально проводящей полуплоскости (см. рис. 3). Функция Грина (см. § 4 настоящей главы), или магнитный потенциал единичного магнитного заряда, равна:

$$4\pi G_h(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_0) = \frac{1}{R} + \frac{1}{R_1} - T,$$

где

$$T = \frac{1}{R}\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{b}{R}\right] + \frac{1}{R_1}\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{b_1}{R_1}\right],$$

$$b = 2\sqrt{\varrho\varrho_0}\cos\frac{1}{2}(\phi - \phi_0),$$

$$b_1 = 2\sqrt{\varrho\varrho_0}\cos\frac{1}{2}(\phi + \phi_0).$$

В этом случае приближенное «составное» решение для полубесконечной неидеально проводящей тонкой пластины

$$4\pi G_{\text{тп}}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_0) = \frac{1}{R} + \frac{1}{R_1} + S - T,$$

где S рассматривается как поправка за счет конечной проводимости, а T — как дифракционный эффект. Заметим, что при ϱ и ϱ_0, стремящихся к бесконечности, T стремится к нулю (случай бесконечной пластины). В предыдущих формулах P и P_0 ограничены пределами первого квадранта. Если P и P_0 расположены симметрично по обе стороны полуплоскости так, что P_0 находится в первом квадранте, а P в четвертом, то можно записать для тонкого бесконечного пласта:

$$4\pi G_S(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_0) = \frac{1}{R} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(i\hat{p})^n}\frac{\partial^n}{\partial Y^n}\left[\frac{1}{R}\right] = \frac{1}{R} - \frac{1}{R} - \bar{S} = -\bar{S},$$

где

$$\bar{S} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(i\hat{p})^n}\frac{\partial^n}{\partial Y^n}\left[\frac{1}{R}\right],$$

$$Y = y_0 - y$$

и для идеально проводящей полуплоскости

$$4\pi G_h(r, r_0) = \frac{1}{R} - \frac{1}{R} + \bar{T} = \bar{T},$$

где

$$\bar{T} = \frac{1}{R}\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{b}{R}\right] + \frac{1}{R_1}\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{b_1}{R_1}\right].$$

Тогда приближенное составное решение

$$4\pi G_{\text{тп}}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_0) = \bar{T} - \bar{S}.$$

Поле может быть просто найдено по формуле

$$\boldsymbol{H} = -\operatorname{grad}\Phi = \left(-\frac{\partial\Phi}{\partial x}, -\frac{\partial\Phi}{\partial y}, -\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right),$$

где для диполя, ориентированного в направлении Ox,

$$\Phi = -\frac{\partial}{\partial x_0}G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_0),$$

для диполя, ориентированного в направлении Oy,

$$\Phi = -\frac{\partial}{\partial y_0}G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_0)$$

и для диполя, ориентированного в направлении Oz,

$$\Phi = -\frac{\partial}{\partial z_0}G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_0).$$

При выполнении этих операций следует иметь в виду, что

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \cos\phi\frac{\partial f}{\partial\varrho} - \frac{\sin\phi}{\varrho}\frac{\partial f}{\partial\phi},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \sin\phi\frac{\partial f}{\partial\varrho} + \frac{\cos\phi}{\varrho}\frac{\partial f}{\partial\phi},$$

где f есть функция от (x, y, z) или (ϱ, ϕ, z). То же самое относится к координатам (x_0, y_0, z_0) и (ϱ_0, ϕ_0, z_0).

Резюмируя, можно сказать, что когда P и P_0 расположены в первом кварданте, вдали от края, поле состоит из

1) первичного поля, $\left(\frac{1}{R}\right)$,

2) поля мнимого источника, $\left(\frac{1}{R_1}\right)$,

3) поправки за счет конечного $\hat{p}$, (S),

4) поправки за счет дифракции на кромке пластины $(-T)$.

Когда P_0 находится в первом квадранте, а P — в четвертом, вдали от края, поле состоит из

1) поля, которое проникает сквозь пластину в силу конечной величины $\hat{p}$, $(-\bar{S})$,

2) дифракционного поля, (T).

Рассматриваемые приближенные решения справедливы лишь тогда, когда одна или обе поправки малы. Эти решения непригодны, когда P_0 и P находятся во втором и третьем квардантах, так как в этом случае краевой эффект слишком велик. Поэтому составной тип решения справедлив, если только P и P_0 находятся в первом и четвертом квадрантах и удалены от края.

§ 7. Идеально проводящая полуплоскость в поле импульсного точечного источника (Уэйт, 1957)

Для гармонических колебаний скалярный магнитный потенциал $\Psi_п(i\omega)$ в непроводящей среде на расстоянии R от источника, представляющего собой магнитный заряд $M^*(i\omega)$, равен:

$$\Psi_п(i\omega) = \frac{M^*(i\omega)}{4\pi R} e^{-i\omega\frac{R}{c}}, \tag{7.1}$$

где c — скорость света. Если заряд изменяется во времени как $m^*u(t)$, где $u(t)$ единичная ступенчатая функция, то потенциал равен

$$\psi_п(t) = \frac{m^*}{4\pi R} u\left(t - \frac{R}{c}\right), \tag{7.2}$$

то есть ступенчатой функции, запаздывающей на $\frac{R}{c}$ сек. В приведенном выше примере $\Psi_п(i\omega)$ — результат преобразования Фурье от $\psi_п(t)$. Обе величины связаны следующими известными соотношениями:

$$\Psi_п(i\omega) = \int_0^\infty \psi_п(t) e^{-i\omega t} dt \tag{7.3}$$

или

$$\psi_п(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_0(i\omega) e^{i\omega t} d\omega. \tag{7.4}$$

В равенстве (7. 3) для обеспечения сходимости можно положить ω имеющим малую отрицательную мнимую часть.

Идеально проводящая полуплоскость определяется в системе цилиндрических координат (ϱ, ϕ, z) углом $\phi = 0$ (см. рис. 3). Источник расположен в точке P_0 с координатами (ϱ_0, ϕ_0, z_0), а приемник в точке $P(\varrho, \phi, z)$. Задача состоит в вычислении $\psi(t)$ в точке P, когда источник с магнитным зарядом $m^*u(t)$ находится в P_0. Соответствующее преобразование для $\psi(t)$

$$\Psi(i\omega) = \int_0^\infty \psi(t) e^{-i\omega t} dt \tag{7.5}$$

является решением задачи дифракции для гармонических колебаний (см. § 4 настоящей главы). Как показано у Вандакурова (1954),

$$\Psi(i\omega) = \frac{m^*}{4\pi^2 c}\left\{\int_{-b}^{\infty} \frac{K_1\left[\frac{i\omega}{c}(R^2+\xi^2)^{\frac{1}{2}}\right] d\xi}{(R^2+\xi^2)^{\frac{1}{2}}} + \right.$$
$$\left. + \int_{-b_1}^{\infty} \frac{K_1\left[\frac{i\omega}{c}(R_1^2+\xi)^{\frac{1}{2}}\right] d\xi}{(R_1^2+\xi^2)^{\frac{1}{2}}}\right\}, \tag{7.6}$$

где K_1 — функция Бесселя от мнимого аргумента и

$$R = [\varrho^2 + \varrho_0^2 - 2\varrho\varrho_0 \cos(\phi - \phi_0) + (z - z_0)^2]^{\frac{1}{2}},$$
$$R_1 = [\varrho^2 + \varrho_0^2 - 2\varrho\varrho_0 \cos(\phi + \phi_0) + (z - z_0)^2]^{\frac{1}{2}},$$
$$b = 2(\varrho\varrho_0)^{\frac{1}{2}} \cos\frac{1}{2}(\phi - \phi_0),$$
$$b_1 = 2(\varrho\varrho_0)^{\frac{1}{2}} \cos\frac{1}{2}(\phi + \phi_0).$$

Если b (или b_1) положительно, то удобно разбить интегралы на две части следующим образом:

$$\int_{-b}^{\infty} d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} d\xi - \int_{-\infty}^{-b} d\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi - \int_{b}^{\infty} d\xi.$$

Интеграл с пределами $+\infty$ и $-\infty$ известен (Кэмпбелл и Фостер, 1950):

$$\frac{1}{2\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{K_1\left[\frac{i\omega}{c}(R^2+\xi^2)\right]^{\frac{1}{2}} d\xi}{(R^2+\xi^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{e^{-i\omega\frac{R}{c}}}{4\pi R}. \tag{7.7}$$

Если как b, так и b_1 принимаются положительными, то

$$\frac{\Psi(i\omega)}{m^*} = \frac{1}{4\pi}\left[\frac{e^{-i\omega\frac{R}{c}}}{R} + \frac{e^{-i\omega\frac{R_1}{c}}}{R_1}\right] -$$

$$-\frac{1}{4\pi^2 c}\left\{\int_b^\infty \frac{K_1\left[\frac{i\omega}{c}(R^2+\xi^2)^{\frac{1}{2}}\right]d\xi}{(R^2+\xi^2)^{\frac{1}{2}}} + \right.$$

$$\left. + \int_{b_1}^\infty \frac{K_1\left[\frac{i\omega}{c}(R_1^2+\xi^2)^{\frac{1}{2}}\right]d\xi}{(R_1^2+\xi^2)^{\frac{1}{2}}}\right\}. \qquad (7.8)$$

Тогда решение для неустановившихся процессов имеет вид:

$$\psi(t) = \frac{m^*}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Psi(i\omega)\,e^{i\omega t}\,d\omega. \qquad (7.9)$$

Интегрирование по ω может быть выполнено при помощи известных соотношений (Кэмпбелл, Фостер, 1950):

$$\psi(t) = \frac{m^*}{4\pi}\left[\frac{u\left(t-\frac{R}{c}\right)}{R} + \frac{u\left(t-\frac{R_1}{c}\right)}{R_1}\right] -$$

$$-\frac{m^*}{4\pi^2}\left\{t\int_b^\infty \frac{u\left[t-\frac{(R^2+\xi^2)^{\frac{1}{2}}}{c}\right]}{(R^2+\xi^2)\left[t^2-(R^2+\xi^2)\frac{1}{c^2}\right]^{\frac{1}{2}}}\,d\xi + \right.$$

$$\left. + t\int_{b_1}^\infty \frac{u\left[t-\frac{(R_1^2+\xi^2)^{\frac{1}{2}}}{c}\right]}{(R_1^2+\xi^2)\left[t^2-(R_1^2+\xi^2)\frac{1}{c^2}\right]^{\frac{1}{2}}}\,d\xi\right\}. \qquad (7.10)$$

Далее, подынтегральные выражения обращаются в нуль для $\xi > [(ct)^2 - R^2]^{\frac{1}{2}}$ в первом интеграле и для $\xi > [(ct)^2 - R_1^2]^{\frac{1}{2}}$

во втором. Теперь интегралы могут быть легко вычислены, например:

$$t\int_b^\infty = ct\int_b^{[(ct)^2-R^2]^{\frac{1}{2}}} \frac{d\xi}{(R^2+\xi^2)[(ct)^2-R^2-\xi^2]^{\frac{1}{2}}}\,u\left[t-\frac{(R^2+\xi^2)^{\frac{1}{2}}}{c}\right] =$$

$$= \frac{1}{R}\left[\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{bct}{R[(ct)^2-R^2-b^2]^{\frac{1}{2}}}\right]u\left[t-\frac{(R^2+b^2)^{\frac{1}{2}}}{c}\right], \qquad (7.11)$$

Аналогичное выражение может быть получено для второго интеграла $t\int_{b_1}^\infty$. Отсюда скалярный потенциал $\psi(t)$ в точке P

$$\frac{\psi(t)}{m^*} = \frac{1}{4\pi}\left[\frac{u\left(t-\frac{R}{c}\right)}{R} + \frac{u\left(t-\frac{R_1}{c}\right)}{R_1}\right] - \frac{1}{8\pi R}\times$$

$$\times\left[1 - \frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{bct}{R[(ct)^2-R^{*2}]^{\frac{1}{2}}}\right]u\left(t-\frac{R^*}{c}\right) +$$

$$+\frac{1}{8\pi R_1}\left[1 - \frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{b_1 ct}{R_1[(ct)^2-R^{*2}]}\right]u\left(t-\frac{R^*}{c}\right), \qquad (7.12)$$

где $R^{*2} = R^2 + b^2 = R_1^2 + b_1^2 = (\varrho+\varrho_0)^2 + (z-z_0)^2$. Приведенные выше соотношения справедливы, когда b и b_1 положительны. То есть, $|\phi - \phi_0| < \pi$ и $|\phi + \phi_0| < \pi$. Первое условие требует, чтобы прямая линия PP_0 не пересекала экрана. Второе условие наклдывает аналогичное ограничение на мнимый или отраженный экраном источник. Таким образом P и P_0 должны находиться по одну сторону полуплоскости и располагаться таким образом, чтобы по крайней мере одна из этих точек была в области положительных x.

Перейдем к физическому истолкованию формулы (7.12). Первый член представляет собой первичное поле — ступень, запаздывающую на $\frac{R}{c}$ сек. и имеющую сферический фронт. Второй член — геометрическое отражение первичного импульса сферической волны от полуплоскости. Следующие два члена соответствуют сигналу, отраженному от края полуплоскости. Они равны нулю для промежутка времени меньшего, чем $\frac{R^*}{c}$, где R^* — в простейшем случае $z = z_0$ расстояние от P_0 до края и от края до P. При $t = \frac{R^*}{c}$ арктангенсы равны $\frac{\pi}{2}$ и амплитуды этих

импульсов равны нулю. При бо́льших t выражения для $\psi(t)$ приближаются к стационарной величине:

$$\frac{(t)}{m^*} = \frac{1}{8\pi}\left[\frac{1}{R} + \frac{1}{R_1}\right] + \frac{1}{4\pi^2}\left[\frac{1}{R}\operatorname{arctg}\frac{b}{R} + \frac{1}{R_1}\operatorname{arctg}\frac{b_1}{R_1}\right], \qquad (7.13)$$

что справедливо для $t > \frac{R}{c}$, $t > \frac{R_1}{c}$ и $t > \frac{R^*}{c}$.

В случае, когда $|\phi - \phi_0| < \pi$ и $|\phi + \phi_0| > \pi$ формула (7.12) принимает иной вид:

$$\frac{\psi(t)}{m^*} = \frac{1}{4\pi R}u\left(t - \frac{R}{c}\right) - \frac{1}{8\pi R}\left[1 - \frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{bct}{R\,[(ct)^2 - R^{*2}]^{\frac{1}{2}}}\right] \times$$

$$\times\, u\left(t - \frac{R^*}{c}\right) + \frac{1}{8\pi R_1}\left[1 - \frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{(-b_1)\,ct}{R_1\,[(ct)^2 - R^{*2}]^{\frac{1}{2}}}\right] \times$$

$$\times\, u\left(t - \frac{R^*}{c}\right), \qquad (7.14)$$

где b и $(-b_1)$ — положительные величины. В этом случае отсутствует импульс сферической волны, отраженной от полуплоскости. Это не удивительно, так как точка зеркального отражения находится за пределами полуплоскости.

Если $|\phi - \phi_0| > \pi$ и $|\phi + \phi_0| > \pi$, то

$$\frac{\psi(t)}{m^*} = \frac{1}{8\pi R}\left[1 - \frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{(-b)\,ct}{R\,[(ct)^2 - R^{*2}]^{\frac{1}{2}}}\right] u\left(t - \frac{R^*}{c}\right) +$$

$$+ \frac{1}{8\pi R_1}\left[1 - \frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{(-b_1)\,ct}{R_1\,[(ct)^2 - R^{*2}]^{\frac{1}{2}}}\right] u\left(t - \frac{R^*}{c}\right), \qquad (7.15)$$

где теперь $(-b)$ и $(-b_1)$ положительны. В последнем случае сигнал отсутствует до момента $t = \frac{R^*}{c}$, то есть до тех пор пока импульс из точки P_0 не придет, обогнув кромку полуплоскости, в точку P. Полуплоскость располагается между приемником и источником.

В рассматриваемых трех случаях (7.12), (7.14), (7.15) стационарная форма решения одна и та же. Она определяется формулой (7.13) для $t \to \infty$.

Поле H вычисляется так, как это показано в предыдущем параграфе.

§ 8. Моделирование поля рамки в присутствии тонких проводящих пластин

(Хедстром, Паразнис, 1958; Торнквист, 1958; Лундберг, 1959)

1. Условия подобия и размерность величин. Если пренебречь токами смещения, то уравнения Максвелла для среды с удельным сопротивлением ϱ и проницаемостью μ могут быть записаны следующим образом:

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{H} = \frac{1}{\varrho}\boldsymbol{E}, \quad \operatorname{div}\boldsymbol{H} = 0,$$

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{E} = -\mu\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} \quad \operatorname{div}\boldsymbol{E} = 0.$$

Пользуясь обычным приемом, берем rot от первого уравнения и, подставив вместо rot $\boldsymbol{E}$ его значение, получаем уравнение $\nabla^2\boldsymbol{H} = \frac{\mu}{\varrho}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}$. Анализ этого уравнения показывает, что если все линейные размеры увеличить в несколько раз, то электромагнитное поле не изменится, если величина $\frac{\varrho}{\mu\nu}$ (ν — частота) будет увеличена при этом в то же число раз, взятое в квадрате *. В разбираемых модельных работах одним из таких линейных размеров является мощность пластообразного проводящего тела d. Следовательно, для сохранения подобия при прочих равных условиях должна быть постоянной величина $\gamma = \frac{\varrho}{\mu\nu d^2}$.

Величина ϱ в электромагнитной системе единиц измеряется в *см*$^2\cdot$сек$^{-1}$, μ величина безразмерная и принимается равной единице. Следовательно, $\gamma = \frac{\varrho}{\mu\nu d^2}$ является безразмерной величиной. Тонкую проводящую пластину можно охарактеризовать параметром $\frac{\varrho}{\nu d}$. Поскольку эта величина имеет размерность длины в первой степени, то после изменения масштаба «новую» величину $\frac{\varrho}{\nu d}$ можно получить из соответствующего «старого» параметра, умножая его на коэффициент масштаба. Для удобства ϱ выражается в *омсм*, а d — в метрах. Величина $10^3\frac{\varrho}{\nu d}$ обозначается через λ и измеряется в *омсм·сек/м*.

2. Установки для моделирования. В качестве генераторных и приемных рамок использовались небольшие катушки с обмотками из тонкой медной проволоки. Расстояние между рамками чаще всего равнялось 60—200 *мм*. Измерения проводились на частотах 500, 800 и 1500 *гц*. Вещественная и мнимая составляющие поля измерялись в процентах амплитуды первичного поля с помощью компенсационного устройства. Здесь уместно

* См. Бурсиан (1936), часть II. *А. В., Г. Ф.*

напомнить, что смещение фазы на 1° вблизи нуля соответствует появлению сдвинутой по фазе на 90° составляющей, равной 1,75% амплитуды первичного поля. Составляющие поля измерялись с точностью $\pm 0{,}1\%$ первичного поля.

В качестве моделей естественных проводников (рудные тела, наносы) использовались пластины Cu, Al, Zn и Pb различной толщины. В таблице показан переход от моделей к естественным проводникам. Масштаб моделирования 1/1730, частота одинакова в обоих случаях.

Толщина и материал модели	Удельное сопротивление, *ом · см*	Удельное сопротивление, *ом · см* / Мощность рудного тела, *м*	Примечания
1 *мм* Cu	$1{,}7\times10^{-6}$	2,95	Моделируются пластообразные рудные тела
1 *мм* Al	$2{,}9\times10^{-6}$	5,03	
1 *мм* Zn	$6{,}0\times10^{-6}$	10,4	
1 *мм* Pb	21×10^{-6}	36,5	
0,009 *мм* Al	$2{,}9\times10^{-6}$	560	Моделируются наносы

3. Модельные работы с вертикальными проводниками. Вначале рассматривается вертикальное пластообразное рудное тело, бесконечное по простиранию и падению. При этом система приемная рамка — генераторная рамка перемещается вдоль линии, направленной вкрест простирания. Аномалии от проводника для пяти различных систем рамок показаны на рис. 10. Эффективная глубина до верхней кромки тела $\frac{a}{\tau}$, где a — расстояние по вертикали между центром линии, соединяющей рамки, и верхней кромкой рудного тела, а τ — разнос рамок, равна во всех случаях 0,4. Модель рудного тела представляет собой алюминиевую пластину толщиной 3 *мм*. Относительные величины сигналов показаны на рисунке. В случае *4* рамки установлены таким образом, что нормальное первичное поле в точке приема горизонтально. Следует отметить, что случай *5* — это комбинация установок *1* и *2* с той разницей, что первичные напряжения в двух генераторных рамках отличаются по фазе на 90°.

При этом получается вращающееся поле с плоскостью поляризации, перпендикулярной плоскости рисунка. За исключением случая *4*, электромагнитное поле, принимаемое приемником, имеет один минимум с двумя примыкающими боковыми максимумами для обеих составляющих. Минимум наблюдается, когда центр системы источник — приемник находится почти точно над рудным телом.

В установке *4* составляющие поля имеют простые максимумы. Зависимость положения максимумов от взаимного положения

системы рамок и рудного тела более сложная. В случае *1* и *5* кривые симметричны. Наличие боковых максимумов в случаях *1*, *3* и *5* имеет практическое значение, так как весь переход от максимума до минимума, обозначенный на рисунке через S, может

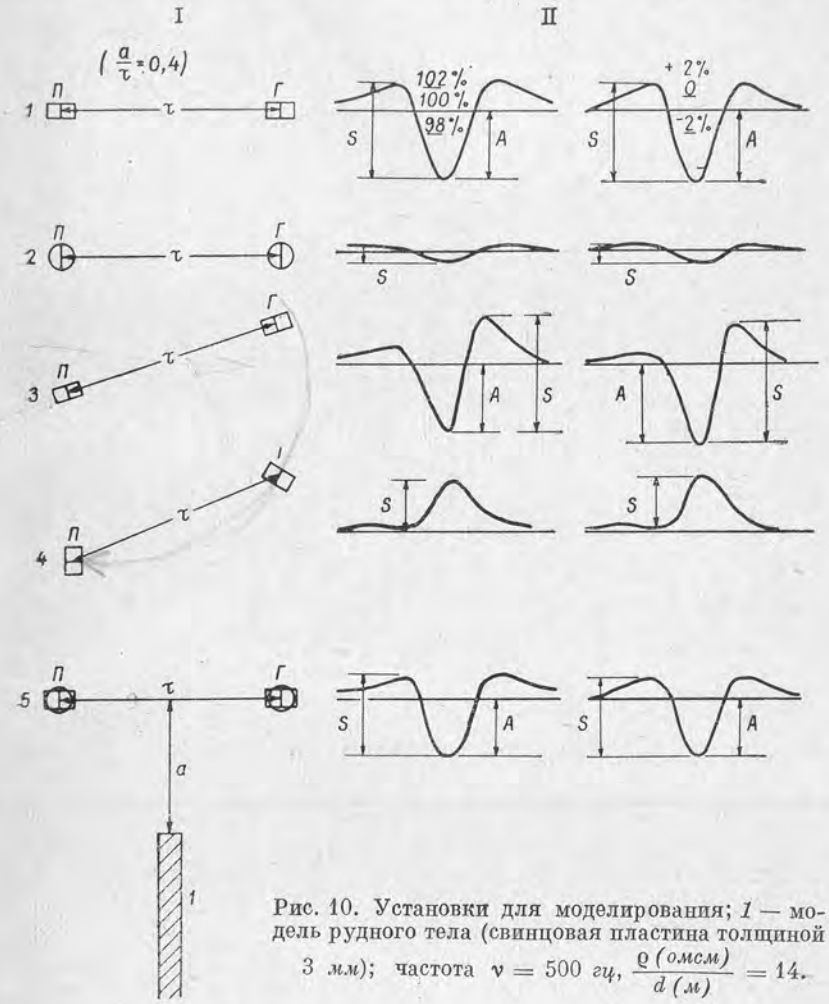


Рис. 10. Установки для моделирования; *1* — модель рудного тела (свинцовая пластина толщиной 3 *мм*); частота $\nu = 500$ *гц*, $\frac{\varrho\ (ом см)}{d\ (м)} = 14$.

быть принят за меру аномалии от рудного тела. Рассмотрим практическое применение всех пяти установок рамок. Первая установка почти всегда применяется при наземной электромагнитной съемке. Вторая установка обычно не применяется в поле из-за малой величины аномалии от вертикального рудного тела. Третья установка используется в аэросъемке, при этом источник устанавливается на самолете, а приемник буксируется сзади

на длинном кабеле. Эта система была проверена раньше в Канаде и Швеции компанией АБЕМ, до того как на ее основе была создана установка для двух самолетов (случай *5*). Установка *4* соответствует методу аэросъемки, применяемому в Канаде. Для краткости этот метод в дальнейшем называется канадским методом.*

В настоящем параграфе более или менее подробно разбирается только один, наиболее показательный, первый случай.

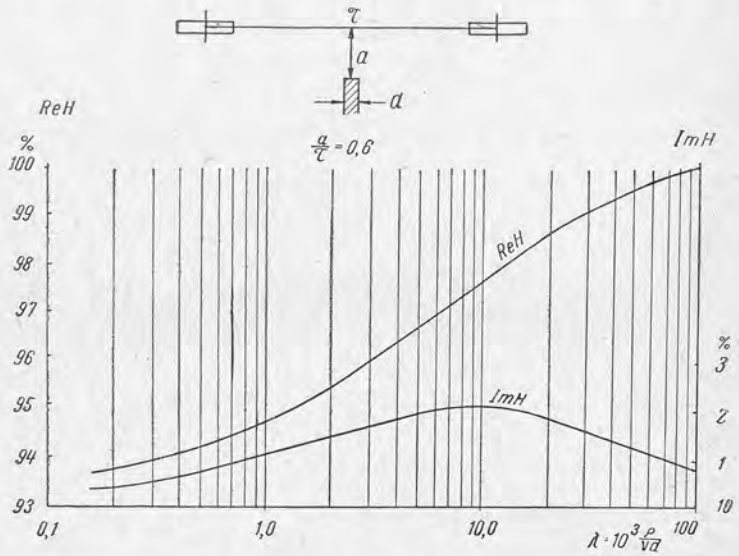


Рис. 11. Графики *ReH* и *ImH* в зависимости от $10^3\frac{\varrho}{\nu d}$ для вертикальной пластины.

Изменение аномальных значений составляющих поля над проводниками в зависимости от их удельного сопротивления и толщины показано на рис. 11. Вещественная составляющая поля непрерывно увеличивается с увеличением параметра λ и приближается к 100% для $\lambda \to \infty$. Мнимая составляющая имеет экстремальное значение при определенном λ и стремится к нулю при $\lambda \to \infty$. Очевидно, что одному значению мнимой составляющей могут соответствовать два проводника с различными λ, в то время как каждому значению вещественной составляющей соответствует лишь один проводник при условии, что отношение $\frac{a}{\tau}$ сохраняется неизменным. Форма кривых, показанных на рис. 11,

* В отечественной литературе методы аэросъемки с установками *4* и *5* получили название «метода индукции» и «метода вращающегося магнитного поля». *А. В.* и *Г. Ф.*

имеет совершенно общий характер и не ограничивается рассмотренной системой рамок. Удобно изображать результаты моделирования в виде векторной диаграммы, показанной на рис. 12. Здесь точки на осях абсцисс и ординат представляют соответственно вещественную и мнимую составляющие поля вблизи приемной рамки, когда центр системы рамок находится над проводником. Прямая линия, проведенная от начала горизонтальной оси * до какой-либо точки на любой кривой, представляет собой

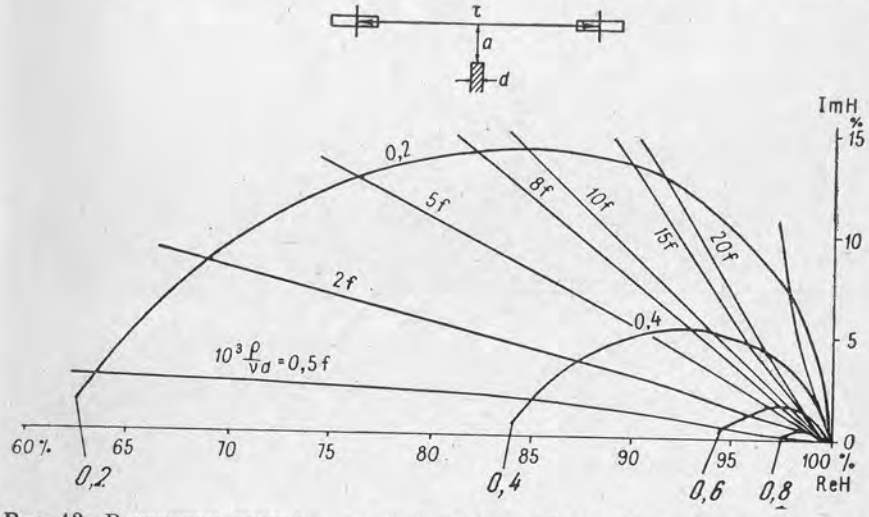


Рис. 12. Векторная диаграмма для вертикальной пластины. Параметр кривых $\frac{a}{\tau}$, $f = \frac{\tau(м)}{100}$.

вектор полного поля, а линия, проведенная туда же из точки 100%, — вектор вторичного поля.

Диаграмма столь наглядна, что не требует особых пояснений. Если аномалия получена над вертикальным пластообразным проводником с помощью системы рамок, показанной здесь, то можно определить глубину и отношение удельного сопротивления к толщине проводника, так как известны разнос рамок τ и, следовательно, коэффициент, обозначаемый на диаграмме через f и равный $\frac{\tau(м)}{100}$, а также частота. Из этой диаграммы невозможно определить отдельно величины ϱ и d. Рассматриваемая диаграмма пригодна лишь для достаточно тонких пластин.

На рис. 13 показана зависимость составляющих суммарного поля от расстояния между проводником и плоскостью рамок. Сначала уменьшение поля происходит очень медленно, а затем довольно быстро. Пунктирные линии показывают наклон, кото-

* Точка 0% находится за чертежом. *Ред.*

рый имела бы кривая, если бы она уменьшалась обратно пропорционально первой, второй, третьей и шестой степени $\frac{a}{\tau}$. Форма кривых на рис. 13 существенно одинакова для любого из 5 случаев, указанных на рис. 10. Исходя из диаграммы (рис. 13), можно сделать несколько важных выводов, особенно в отношении аэрометодов. При большой рабочей высоте, скажем $\frac{a}{\tau} = 0{,}8$, незначительное увеличение высоты приводит к уменьшению аномалии обратно пропорционально пятой степени $\frac{a}{\tau}$. В канадском методе именно такая рабочая высота поддерживается постоянно над неровной местностью или при значительном движении воздуха. С другой стороны, если рабочая высота составляет 0,3—0,4 $\frac{a}{\tau}$ как в двухсамолетном методе АБЕМ, аномалия уменьшается лишь обратно второй степени $\frac{a}{\tau}$ и возможное изменение высоты не влияет так резко на величину аномалии. Например, измерения канадским методом при разносе рамок 150 *м* и высоте 120 *м*, то есть $\frac{a}{\tau} = 0{,}8$, дают максимальную фазовую аномалию 0,6°. Увеличение высоты

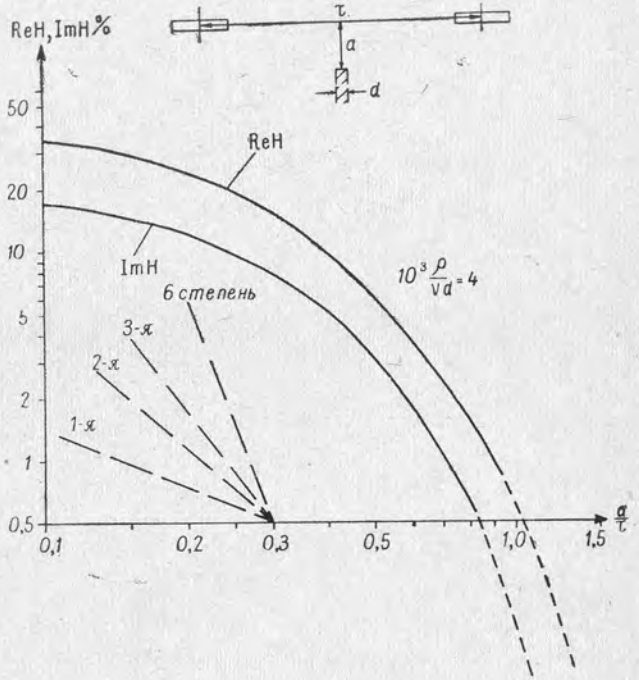


Рис. 13. Графики *ReH* и *ImH* в зависимости от $\frac{a}{\tau}$.

на 30 *м*, вызывающее увеличение $\frac{a}{\tau}$ до 1, 0, уменьшает аномалию до 0,25°, то есть обратно пропорционально степени 4,5. При разносе 120 *м* увеличение высоты на 30 *м* дает уменьшение аномалии от 0,38° до 0,13°, приблизительно пропорционально степени 5. При съемках двухсамолетным методом АБЕМ при разносе

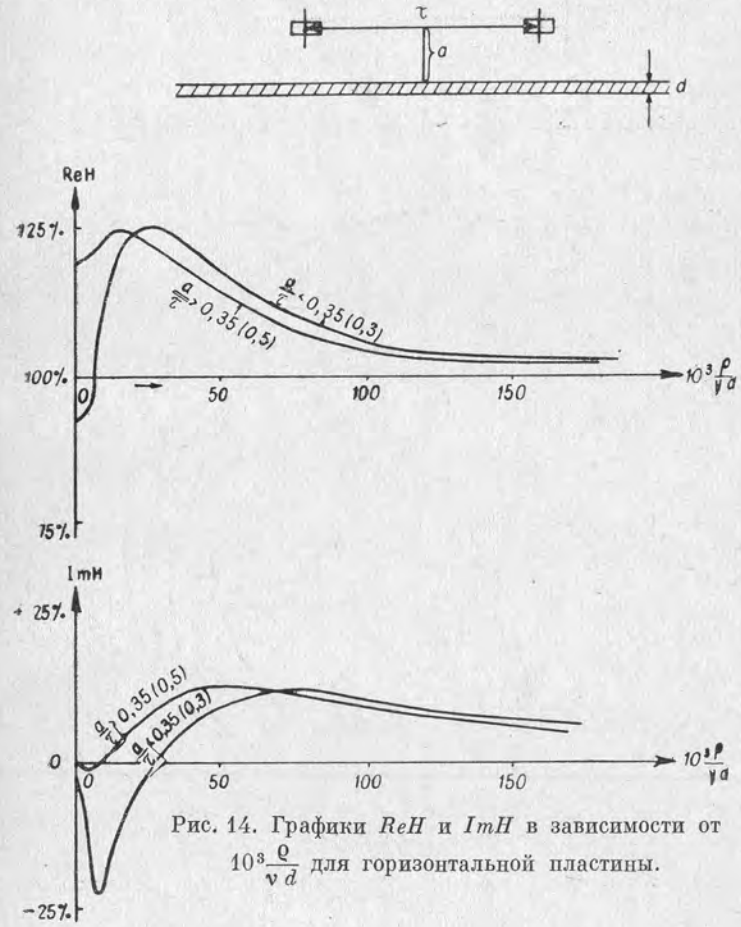


Рис. 14. Графики *ReH* и *ImH* в зависимости от $10^3 \frac{\rho}{\nu d}$ для горизонтальной пластины.

рамок 250 *м* и высоте 100 *м* увеличение высоты на 30 *м* уменьшает аномалию от 12,5 до 7,7% для вещественной составляющей и от 7,7 до 4,7% для мнимой составляющей *. В этом случае аномалия уменьшается пропорционально второй степени высоты.

4. Модельные работы с горизонтальными проводниками. Моделирование больших горизонтальных пластов имеет особое

* Шауб (1961) показал, что подобного рода сопоставления не дают четкого представления о действительном изменении аномалий с высотой для конечных тел. *Ред.*

значение при изучении влияния наносов. Моделирование проводилось с той же системой рамок, находящихся в одной горизонтальной плоскости. Вещественная и мнимая составляющие поля, принимаемые рамкой, измерялись над центром пластины в процентах к нормальному полю, то есть полю при отсутствии проводника.

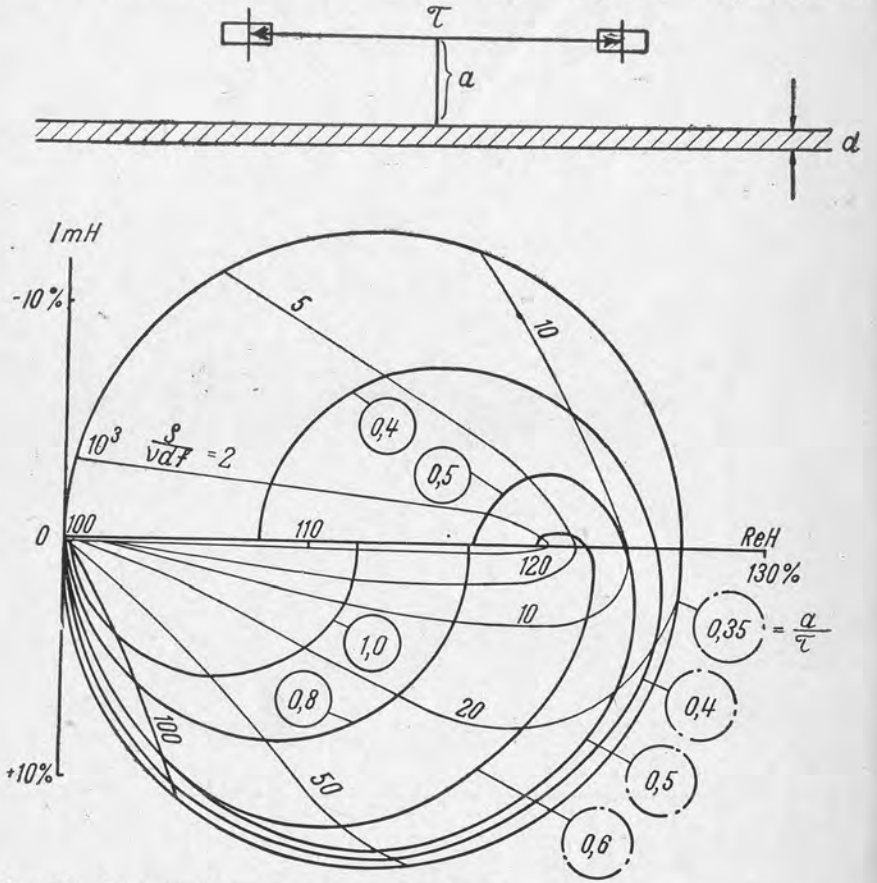


Рис. 15. Векторная диаграмма для горизонтальной пластины; параметр кривых $\frac{a}{\tau}$, $f = \frac{\tau\,(м)}{100}$.

Зависимость составляющих поля от λ показана на рис. 14. Следует отметить разницу в кривых для $\frac{a}{\tau} < 0{,}35$ и $\frac{a}{\tau} > 0{,}35$. При $\frac{a}{\tau} = 0{,}35$ кривая вещественной составляющей начинается со значения 100%, а мнимая от 0%.

Векторная диаграмма для случая горизонтальных проводников имеет довольно сложный вид, особенно когда $\frac{a}{\tau} < 0{,}35$.

Диаграмма для $\frac{a}{\tau} > 0{,}35$ показана на рис. 15. Так же как и в случае с вертикальными проводниками, если даны составляющие поля, в присутствии горизонтальных проводников, можно сразу же определить глубину и отношение удельного сопротивления к мощности.

Вопрос, вызывающий значительный интерес при аэросъемке, — это соотношение величин аномалий от наносов и от рудного тела. Интересно сравнить в этом отношении метод вращающегося

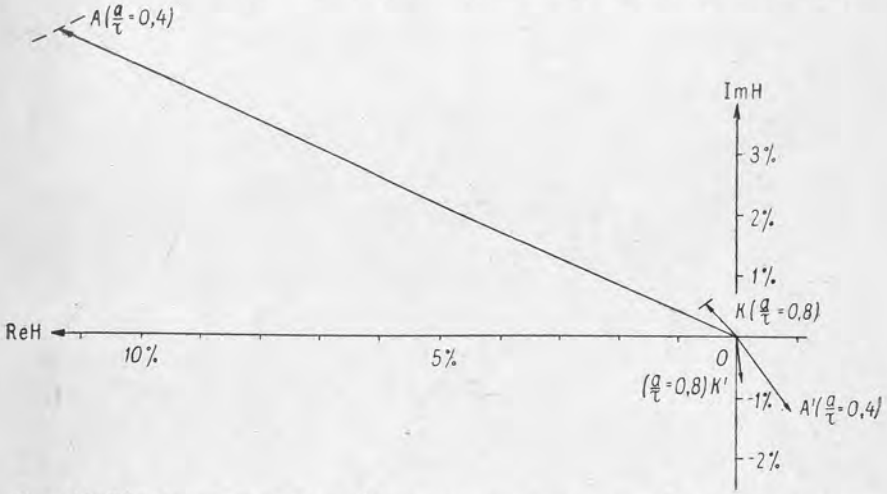


Рис. 16. Векторная диаграмма. Векторы вторичного поля, обусловленные рудным телом, обозначим через A (метод АБЕМ) и K («канадский метод»), векторы вторичного поля, обусловленные наносами, — через A' (метод АБЕМ) и K' («канадский метод»).

поля АБЕМ и канадский односамолетный метод (случаи *5* и *4* на рис. 10). Эффективная высота полета $\frac{a}{\tau}$ равна обычно в первом случае 0,3—0,4, а во втором — около 0,8 или больше. Рассмотрим следующую векторную диаграмму (рис. 16). Здесь векторы вторичного поля, вызываемого рудным телом $\left(\frac{\varrho}{d} = 10\ ом см/м\right)$ и наносами $\left(\frac{\varrho}{d} = 500\ ом см/м\right)$ вычерчиваются в соответствующих квадрантах. В канадском методе амплитуды аномальных векторов от наносов и от рудного тела почти одинаковы. В то же время в методе АБЕМ вторичный вектор от рудного тела более, чем в 8 раз больше вектора от наносов даже при сравнительно большом отношении $\frac{a}{\tau}$ (0,4).

Во время съемки с рассматриваемой системой источник — приемник в наносах индуцируется э. д. с. Хотя это не очевидно,

можно предположить, что в случае, когда наносы находятся в электрическом контакте с рудным телом, последнее будет накоротко замыкать наводимую э. д. с., и получаемое в результате

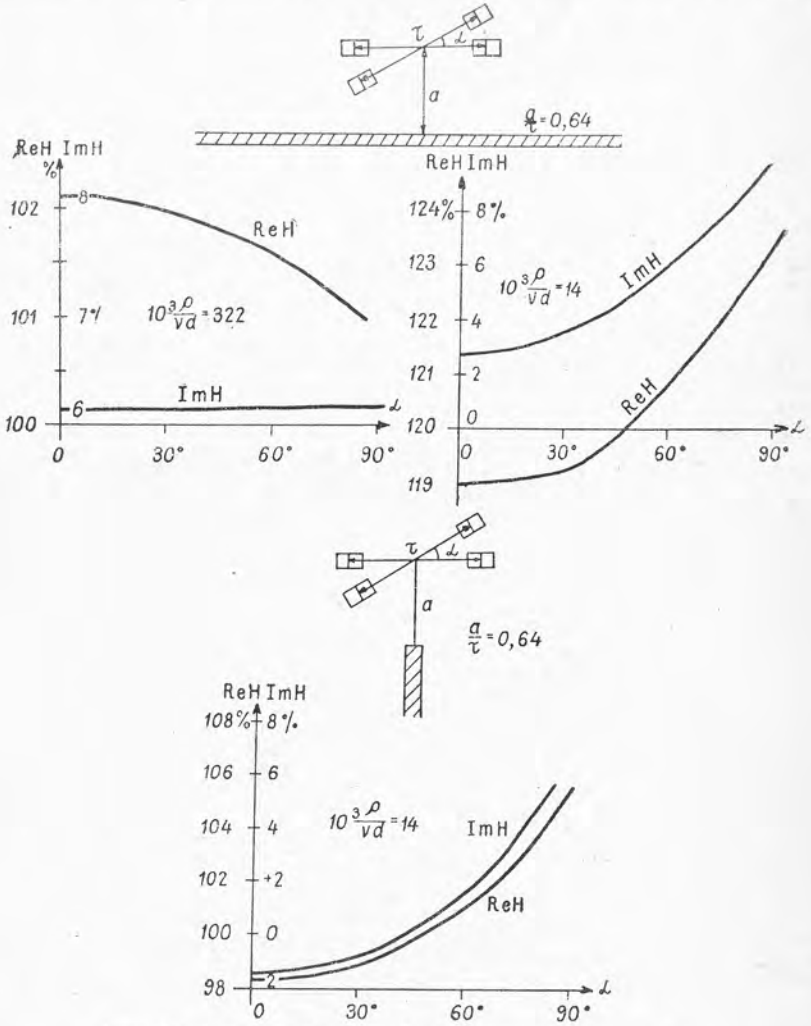


Рис. 17. Графики *ReH* и *ImH* в зависимости от α.

распределение электрического тока может изменить размеры и даже характер аномалии. Чтобы детально изучить возможность такого явления, были проведены эксперименты с различными типами контактов между моделью рудного тела и моделью наносов. Были исследованы различные комбинации руд и наносов с разными отношениями удельного сопротивления к мощности.

Проведенные работы свидетельствуют о том, что контакт между рудой и наносами не вызывает значительного изменения аномалии, полученной над системой из рудного тела и наносов. Максимальный эффект в случае электрического контакта определялся увеличением мнимой составляющей на 0,4% для $\frac{a}{\tau} = 0{,}8$, что соответствует увеличению по фазе на 0,23°. Следует ожидать, что этот эффект значительно ярче выражается для длинных проводников.

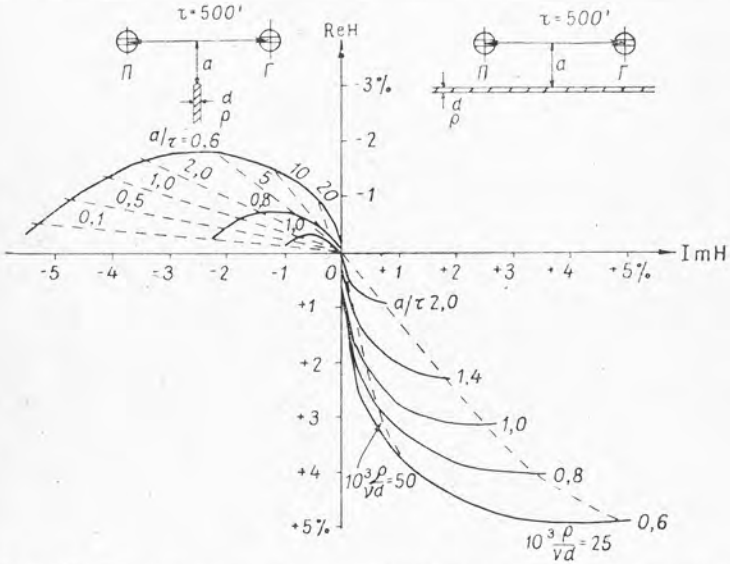


Рис. 18. Векторная диаграмма для метода вращающегося поля.

В связи с аэросъемкой определенный интерес представляет изучение зависимости составляющих поля от наклона плоскости генераторная рамка — приемная рамка к горизонту при неизменном расстоянии между приемной и генераторной рамками (рис. 17). Средняя точка на линии, соединяющей передатчик и приемник, находится на постоянной высоте, а плоскость рамок поворачивается на различные углы α по отношению к горизонтальной плоскости. Вещественная составляющая над горизонтальным проводником при $\lambda = 322$ *омсм·сек/м* остается неизменной в пределах 1% нормального поля, а мнимая составляющая — в пределах около 0,4% при изменении угла от 0 до 90°. На нижней части рисунка показаны результаты аналогичного эксперимента с вертикальным проводником при $\lambda = 14$. Для $\alpha = 45°$ составляющие увеличиваются менее чем на 1% и для $\alpha = 60°$ в пределах 2%.

Торнквист (1958) приводит векторную диаграмму (рис. 18), аналогичную той, которая показана на рис. 12 и 15, но для уста-

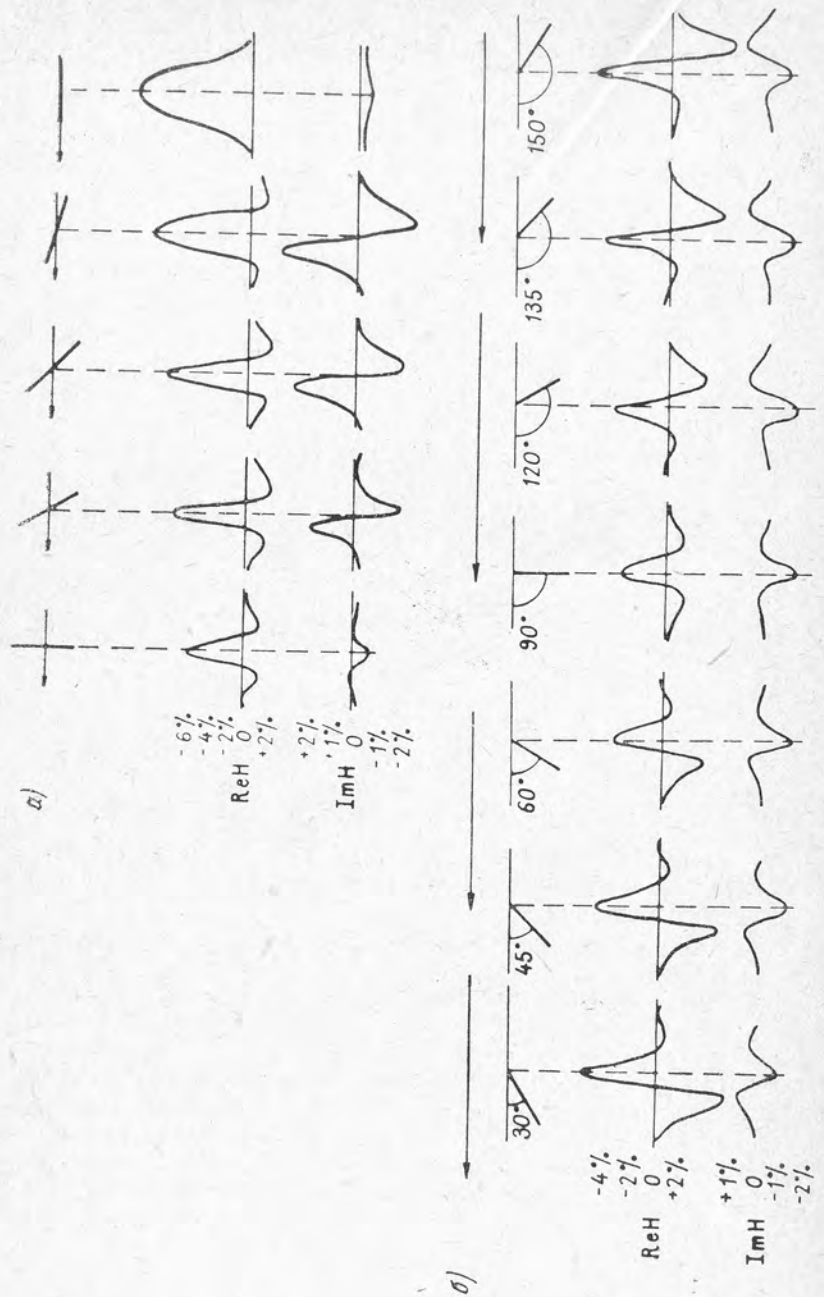


Рис. 19. Графики *ReH* и *ImH*:

а — в зависимости от угла между линией наблюдения и пластиной; *б* — в зависимости от угла падения пластины.

новки вращающегося поля (*5*, рис. 10). Лундберг (1959) приводит зависимость вещественной и мнимой составляющих аномального поля для этой же установки от угла, под которым пластина пересекается профилем измерений (рис. 19а), от угла падения пластины (рис. 19б), от расстояния между профилем и краем пла-

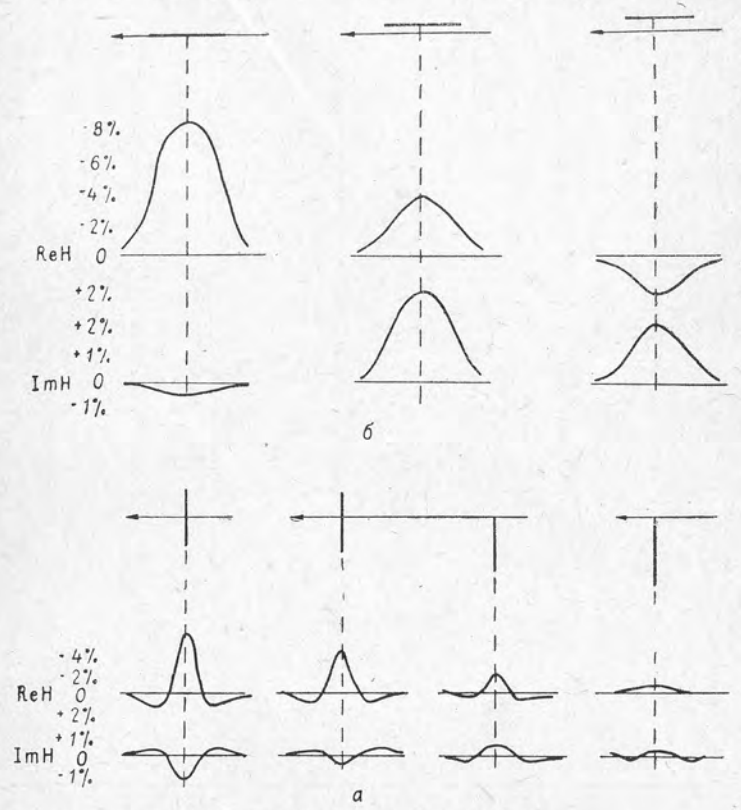


Рис. 20. Графики *ReH* и *ImH*:

а — в зависимости от расстояния между линией наблюдения и краем пластины; *б* — в зависимости от расстояния между линией наблюдения и пластиной.

стины (рис. 20а) и между профилем и пластиной, когда они параллельны *.

В заключение интересно сравнить результаты аэросъемки и модельных работ (рис. 21, 22). Халькопиритовое рудное тело, показанное на рис. 21 в плане и разрезе, довольно хорошо изучено. Рудная минерализация наблюдается вблизи поверхности, однако сплошная руда начинается на глубине около 100 *м* от

* За исключением нескольких диаграмм Торнквиста и Лундберга, все материалы взяты из работы Хедстрома и Паразниса (1958). *А. В., Г. Ф.*

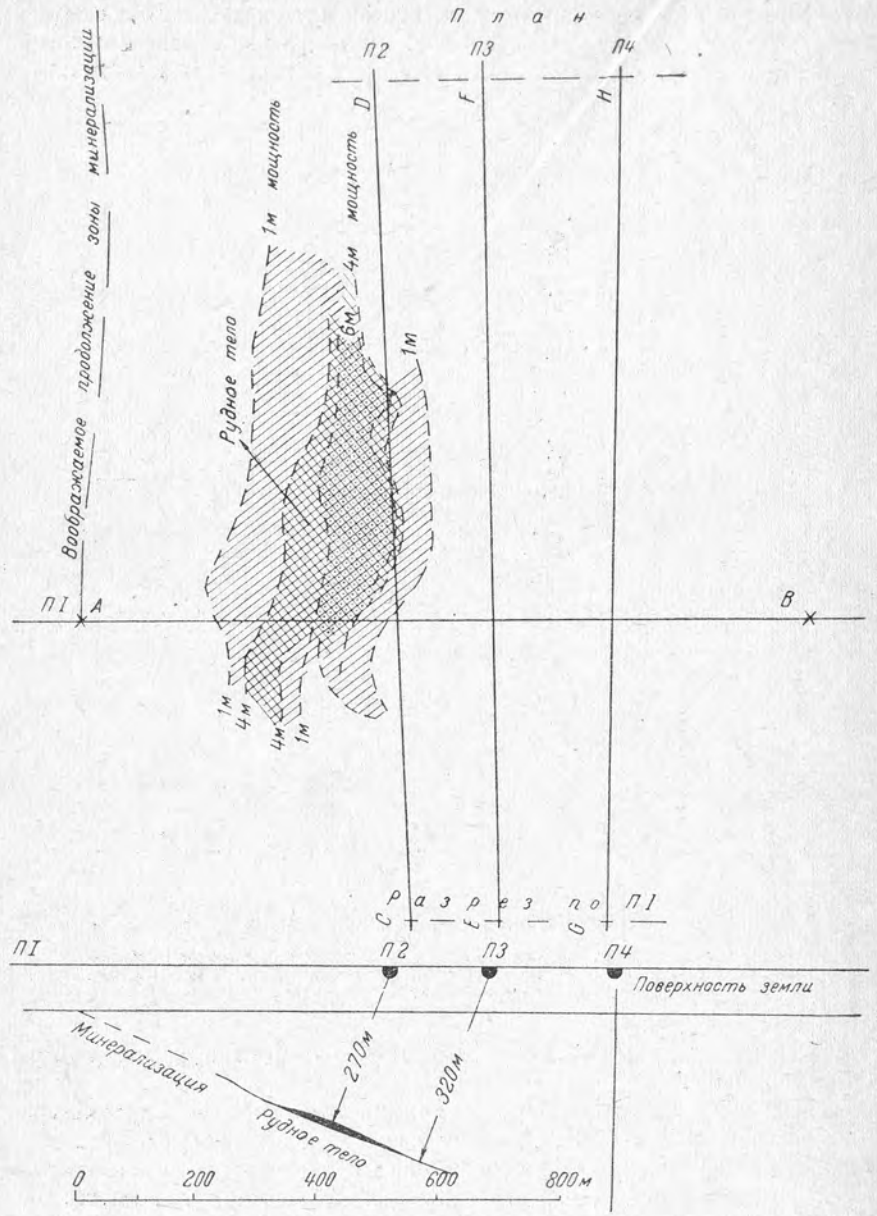


Рис. 21. Линии наблюдения над рудной зоной.

поверхности земли (около 180 *м* ниже уровня полета самолета с источником). Самая мощная часть рудного тела находится на глубине около 190 *м* от поверхности земли (около 270 *м* от уровня

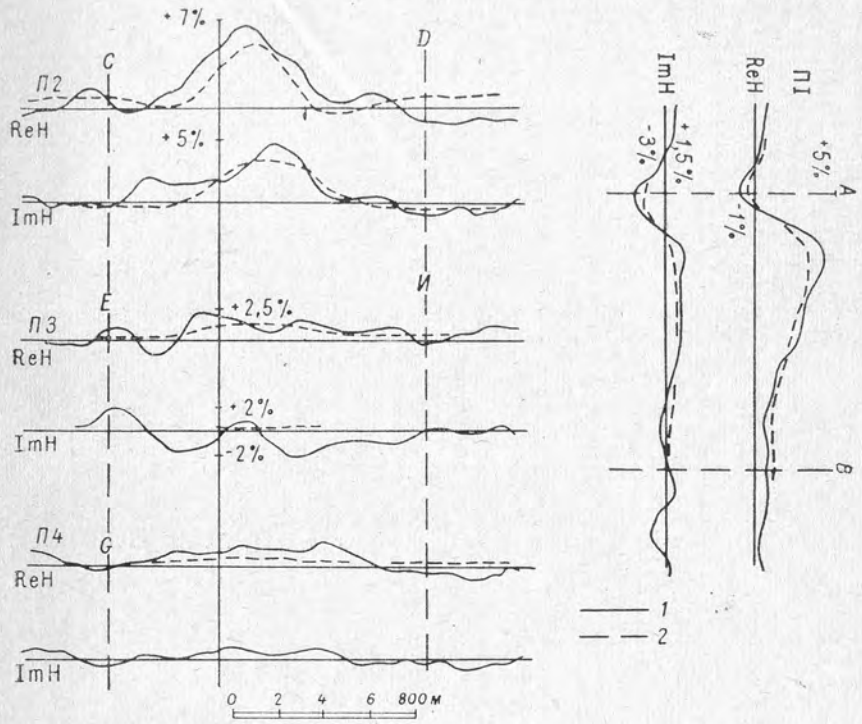


Рис. 22. Графики *ReH* и *ImH* над рудной зоной:
1 — полевые графики; *2* — графики над моделью.

самолета с источником). Установлено, что руда имеет удельное сопротивление в пределах 10 *омсм* и мощность от 1 до 6 *м*. Для соответствующей лабораторной модели были использованы цинковые пластины 1—6 *мм* и исследования проводились в масштабе 1/1730. Результаты полевых и модельных работ хорошо согласуются (рис. 22).

ЛИТЕРАТУРА

* Ashour A. A. The induction of electric currents in a uniform circular disk. Quart. j. mech. a. appl. math., v. 3, pt I., 1950, 119.

Atkinson F. V. On Sommerfeld's «Radiation condition». Phil. Mag., v. 40, 1949, 645.

Belluigi A. Coupling of a vertical coil with a homogeneous Earth. Geophys., v. 14, No 4, 1949, 501.

* Belluigi A. The electromagnetic field due to induced currents in a conducting slab of finite dimensions. Geophys., v. 16, No 4, 1950, 687.

Belluigi A. La funzione dello strato electricamente conduttivo sottile. Geofisica pura e applicata, v. 32, 1955, 71.

Belluigi A. Campo generato da un cavo percorso da corrente alternato disteso su un terreno con interstrato. Geofisica pura e applicata, v. 32, 1955a, 85.

Belluigi A. Electromagnetic fields by a cable (carrying an alternating current) placed on a ground with an interstratum. Annali di Geofisica, v. 9, No 3, 1956, 349.

Bhattacharyya B. K. Electromagnetic induction in a two-layer earth. J. geophys. res., v. 60, No 3, 1955, 279.

Bhattacharyya B. K. Field on earth's surface due to a transient electromagnetic disturbance. J. technology, v. 1, 1956, 151.

Bhattacharyya B. K. Propagation of an electric pulse through a homogeneous and isotropic medium. Geophys., v. 22, No 4, 1957, 905.

Bhattacharyya B. K. Electromagnetic fields of a transient magnetic dipole on the earth's surface. Geophys., v. 24, No 1, 1959, 80.

Booker H. G. Slot aerials and their relation to complementary wire aerials (Babinet's principle). J. instn. electr. enqrs., v. 93, pt 3A, 1946, 620.

Booker H. G., Clemmow P. C. The concept of an angular spectrum of plane waves and its relation to that of polar diagram and aperture distribution. Proc. instn. elect. engrs., v. 97, pt 3, No 45, 1950, 11.

Booker H. G., Clemmow P. C. A relation between the Sommerfeld theory of radio propagation over a flat earth and theory of difraction at a straight edge. Proc. instn. electr. engrs., v. 97, pt 3, No 45, 1950a, 18.

* Boud D., Roberts B. C. Model experiments and survey results from a wing-tip-mounted electromagnetic prospecting system. Geophys. Prospect., v. 9, No 3, 1961.

Brillouin L. The scattering cross section of spheres for electromagnetic waves. J. appl. phys., v. 20, No 11, 1949, 1110.

Buchheim W. Beiträge zur Theorie der geoelektrischen Aufschlussmethoden. Freiberger Forschungshefte. Reihe C, H. 6, 1952.

Carlson J. F., Heins A. E. The reflection of an electromagnetic plane wave by an infinite set of plates, I. Quart. appl. math., v. 4, 1947, 413.

Carson J. R. Wave propagation in overhead wires with ground return. Bell. syst. tech. jour., v. 5, 1926, 539.

* Звездочкой отмечена дополнительная литература, не использованная в обзоре.

Campbell G., Foster R. M. Fourier integrals for practical application. D. Van Nostrand Co., New York, 1950.

Chapman S., Bartels J. Geomagnetism. Oxford, 1940.

Clemmow P. C. A method for the exact solution of a class of two dimensional diffraction problems. Proc. roy. soc., ser. A, v. 205, 1950, 286.

Clemmow P. C. Some extensions to the method of integration by steepest descents. Quart. j. mech. a. appl. math., v. 3, pt 2, 1950a, 241.

Clemmow P. C. A note on the diffraction of a cylindrical wave by a perfectly conducting half-plane. Quart. j. mech. appl. math., v. 3, p. 3, 1950b, 377.

* Coleman B. L. Propagation of electromagnetic disturbances along a thin wire in a horizontaly stratified medium. Phil. mag., v. 47, No 314, 1950.

Debye P. Der Lichtdruck auf Kugeln von beliebigem Material. Ann. d. phys., Bd 30, 1909, 57.

* Duesterhoeft W. C. Propagation effects in induction logging. Geophys., v. 26, No 2, 1961, 192.

Dobrin M. B. Introduction to geophysical prospecting. McGraw Hill Book Co., New York, Toronto, London, 1960.

* Douloff A. A. The response of a disk in a dipolé field. Geophys., v. 26, No 4, 1961, 452.

Evans H. P. A two dimensional boundary value problem for the transmisson of alternating currents through a semi-infinite heterogeneous conducting medium. Phys. rev., ser. 2, v. 36, No 10, 1930.

Eve A. S., Keys D. A. Applied geophysics in the search for minerals. Cambridge University Press, 1954.

Fock V. A. Zur Berechnung des elektromagnetischen Wechselstromfeldes bei ebener Begrenzung. Ann. d. Phys., Bd 17, H. 4, 1933.

Foster R. M. Mutual impedance of grounded wires lying on the surface of the earth. Bell. syst. tech. j., v. 10, No 3, 1931, 408.

Fritsch V. Grundzüge der angewandten Geoelektrik. Wien, 1949.

Gordon A. N. The field induced by an oscilating magnetic dipole outside a semi-infinite conductor. Quart. j. mech. a. appl. math., v. 4, pt I, 1951, 106.

Gordon A. N. Electromagnetic induction in a uniform semi-infinite conductor. Quart. j. mech. a. appl. math., v. 4, pt I, 1951a, 116.

Graf A. Theoretische Grundlagen der Ringsendemethode. Beitr. z. angew. Geophys., Bd 4, 1934.

* Graf A. Über die Möglichkeit der Aufsuchung von Grund und Salz wasserhorizonten vermittels induktiver geoelektrischer. Gerl. Beitr. z. Geophys., Bd 64, H. I, 1954.

Gray M. Mutual impedance of long grounded wires when the conductivity of the earth varies exponentially with depth. J. gener. appl. phys., v. 4, N 2, 1933.

Gray M. Grounded wires lying on the surface of the earth when conductivity varies exponentially with depth. J. gener. appl. phys., v. 5, No 1, 1934.

Gupta J. N. Electromagnetic induction in a layered earth. Proc. 45th Indian Sci. Congress Assoc., sect. 3, 1958, 59.

Hedstrom E. H., Parasnis D. S. Some model experiments relating to electromagnetic prospecting with special reference to airborne work. Geophys. prospec., v. 6, No 4, 1958, 323.

Hedstrom E. H., Parasnis D. S. Reply to comments by N. R. Paterson. Geophys. prospect. v. 7, No 4, 1959, 448.

Heiland C. A. Geophysical exploration. New York, Prentice Hall, Inc., 1946.

Heins A. E. The excitation of a perfectly conducting half-plane by a dipole field. Trans. IRE, v. AP-4, No 3, 1955, 294.

Hladík J. Základy geoelektrického. Prieskumu, Bratislava, SVTL, 1956.

J a n k o w s k i J. The difraction problem on the conducting half-plane in geophysical research. Acta geophys. polon., v. 7, No I, 1959, 34.
J a k o s k y J. J. Exploration Geophysics. Los Angelos, Trija publishing Co., 1950.
* K e r t z W. Leitungsfähiger Zylinder im transversalen magnetischen Wechselfeld. Gerlands Beitr. z. Geophysik, Bd 69, H. 1, 1960.
K ö n i g s b e r g e r I. G. Elektrische Vertikalsondierung von der Erdoberfläche aus mit der Zentralinduktionsmethode. Beitr. z. angew. Geophys., Bd 7, 1939, 112.
K ö n i g s b e r g e r I. G. Zur Messung der elektrischen Leitfähigkeit der Erde durch Induktion. Phys. Z., Bd 31, 1930, 487.
L a n g e r R. E. An inverse problem in differential equations. Bull. Amer. math. soc., v. 39, 1933, 184.
L a n g e r R. E. On determination of earth conductivity from observed surface potentials. Bull. Amer. math. soc., v. 42, 1936.
L o e b I. Impédances et matrices caractéristiques en prospection électromagnétique. Geophys. prospect., v. 7, No 1, 1959, 77.
L u n d b e r g H. High resolution of anomalies from airborne two-plane EM method. Canad. min. j., v. 80, No 4, 1959, 101.
M a c d o n a l d H. M. A class of diffraction problems. Proc. Lond. math. soc., Ser. 2, v. 14, pt I, 1915, 410.
M a r c h H. W. The field of a magnetic dipole in the presence of a conducting sphere. Geophys., v. 18, No 3, 1953, 671.
M c G l a c h l a n N. W. Bessel functions for engineers. Oxford, 1955.
M i e G. Beiträge zur Optik trüber Medien, speziell kolloidaler Metallösungen. Ann. d. Phys., Bd. 25, Nr 3, 1908, 377.
* N e d i I. C. Radiation resistance of a verfical magnetic dipole over an inhomogeneous earth. Geophys., v. 26. No 5, 1961, 635.
N i e s s e n K. F. Über das Feld einer vertikalen Halbwellenantenne in beliebiger Höhe oberhalb einer ebenen Erde beliebiger Konstanten. Ann. d. Phys., Bd 31, 1938, 522.
N u n i e r W. Messung der elektrischen Leitfähigkeit der Erde in verschiedenen Tiefen durch die von einem Kreisstrom induzierten Ströme. Gerl. Beitr. z. Geophys., Bd 3, 1933, 370.
O n o d e r a S. The kernel function in the multiple-layer resistivity problem. J. geophys. res., v. 65, No 11, 1960, 3787.
O t t H. Die Sattelpunktsmethode in der Umgebun eines Pols mit Anwendungen auf die Wellenoptik und Akustik. Ann. d. Phys. Bd 43, 1943, 393.
Ö v e r h o l t K. I. Note on the impedance of a grounded wire. Geophys. rospect., v. 8, No 3, 1960, 470.
P a t e r s o n N. R. Comments on paper entitled «Some model experiments relating to electro-magnetic prospecting with special reference to airborne work» by E. H. Hedstrom and D. S. Parasnis. Geophys. prospect., v. 7, No 4, 1959, 436.
* P a t e r s o n N. R. Experimental and field data for the dual-frequency phase-shift metod of airborne electromagnetic prospecting. Geophys., v. 26, No 5, 1961. 601.
P a u l i W. On asymptotic series for functions in the theory of diffraction of light. Phys. rev., v. 54, No 11, 1938, 924.
P é t r V. Переходное поле вертикального магнитного диполя в неоднородном полупространстве. Práce geofys. ùstavu českosl. akad. věd., č. 72—98, 1958, 401.
P i e r c e A. T. A short table of integrals, Boston, Ginn and Co., 1929.
P r i c e A. T. Electromagnetic induction in a semi-infinite conductor with a plane boundary. Quart. j. mech. a. appl. math., v. 3, pt 4. 1950, 386.
R o t h é E., R o r t é J. P. Prospection géophysique, t. II. Canthiervillars, imprimeur-éditeur, Paris, 1952.

* R o u x A. T. A review of airborne electromagnetic systems; some factors affecting the choice of system and the interpretation. Trans. and proc. of the Geolog. soc. of South Africa, v. 62, 1959, 203.
* R o w l a n d s G. The method of images and the solution of certain partial differential equations. Appl. sci. Res., Sec. B, v. 8, No 1, 1959.
* С а в и ц к и й Г. Магнитное поле магнитного диполя, находящегося на поверхности земли. Acta geophys. Polon., v. 2, Nr 2, 1954, 97.
S c h e l k u n o f f S. A. Electromagnetic waves. D. Van Nostrand Co. Inc., New York, 1943.
S e n i o r T. B. A. Diffraction by a semi-infinite metallic sheet. Proc. Roy. soc., Ser. A, v. 213, No 1115, 1952, 436.
S e n i o r T. B. A. The diffraction of a dipole field by a perfectly conducting half-plane. Quart. j. mech. a. appl. math., v. 4, pt I, 1953, 101.
S e n i o r T. B. A. Diffraction by an imperfectly conducting half-plane at oblique incidence. Appl. sci. res., Sec. B, v. 8, No 1, 1959.
S e n i o r T. B. A. Scalar diffraction by a prolate spheroid at low frequencies. Canad. j. phys., v. 38, No 12, 1960, 1632.
S l i c h t e r L. B. An inverse boundary value problem in electrodynamics. J. gener. a. appl. phys., v. 4, 1933, 411.
S l i c h t e r L. B. The interpretation of the resistivity prospecting method for horisontal structures. J. gener. a. appl. phys., v. 4, No 9, 1933a, 307.
S l i c h t e r L. B. An electromagnetic interpretation problem in geophysics. Geophys., v. 16, No 3, 1951, 431.
S l i c h t e r L. B., K n o p o f f L. Field of an alternating magnetic dipole on the surface of a layered earth. Geophys. v. 24, No 4, 1959, 77.
S o m m e r f e l d A. Über die Ausbreitung der Wellen in der drahtlosen Telegraphie. Ann. d. Phys., Bd 81, 1926, 1135.
S t e f a n e s c u S. S. Théorie du plan conducteur pour l'émetteur alternatif de longueur finie. Beitr. z. angew. Geophys., Bd 4, 1934, 165.
S t e f a n e s c u S. S. Sur la mesure des résistivités apparentes par la methode de la spire circulaire. Beitr. z. angew. Geophys., Bd 5, 1936, 182.
S t e f a n e s c u S. S. Sur les fondements theoriques de la prospection electromagnetique par courant alternatif a trés basse frequence. Beitr. z. angew. Geophys., Bd 6, H. I, 1936a.
S t e f a n e s c u S. S. Études theoriques sur la prospection electrique du sous-sol. Institute geological al României, studu tehnice si economice, Geofisica, seria D, No 1, 1947.
S t e f a n e s c u S. S. Das elektromagnetische Normalfeld des waagerechten Niederfrequenzdipols. Gerlands Beitr. z. Geophys., Bd 61, H. 3, 1950, 195.
S t e v e n s o n A. F. Solution of electromagnetic scattering problems as power series in the ratio (dimension of scatterer)/(wave length). J. appl. phys., v. 24, No 9, 1953, 1134.
S t e v e n s o n A. F. Electromagnetic scattering by an ellipsoid in the third approximation. J. appl. phys., v. 24, No 9, 1953a, 1143.
S u n d e E. D. Earth conduction effect in transmisson lines. D. Van Nostrand Co., 1949.
T e с с е р Р. Дифракция на проводящей полуплоскости в проблемах индукционного метода. Acta geophys. Polon., v. 1, Nr 3, 4, 1953, 197.
T e i s s e y r e R. The conducting half-plane problem in geophysical exploration (I). Acta geophys. Polon., v. 2, No 3, 1954, 140.
T e i s s e y r e R. The conducting half-plane problem in geophysical exploration (II). Acta geophys. Polon., v. 2, No 4, 1954, 169.
T e i s s e y r e R. The general problem of a conducting wedge. Acta geophys. Polon., v. 6, No 3, 1958, 205.
T ö r n q v i s t G. Some practical results of airborne electromagnetic prospecting in Sweden. Geophys. prospect., v. 6, No 2, 1958, 112.
W a i t J. R. The magnetic dipole over the horisontally stratified earth. Canad. j. phys., v. 29, No 6, 1951, 577.

W a i t J. R. Transient electromagnetic in a conducting medium. Geophys., v. 16, No 2, 1951a, 213.
W a i t J. R. A conducting sphere in a time varying magnetic field. Geophys., v. 16, No 4, 1951b, 666.
W a i t J. R. The electric fields of a long current-carrying wire on a stratified earth. J. geophys. res., v. 57, No 4, 1952, 48.
W a i t J. R. Current-carrying wire loops in a simple inhomogeneous region. J. appl. phys., v. 23, 1952a, 497.
W a i t J. R. The magnetic dipole antenna immersed in a conducting medium. Proc. inst. radio eng., v. 40, 1952b, 1244.
W a i t J. R. The cylindrical ore body in the presence of a cable carrying an oscillating current. Geophys., v. 18, No 2, 1952c, 378.
W a i t J. R. Mutual inductance on a two-layer earth. Canad. j. phys., v. 30, No 4, 1952d, 450.
W a i t J. R. Induction by a horisontal oscillating magnetic dipole over a conducting homogeneous earth. Trans. Amer. geophys. union, v. 34, No 2, 1953, 185.
W a i t J. R. Induction in a conducting sheet by a small current-carrying loop. Appl. sci. res., sect. B, v. 3, No 3, 1953a, 230.
W a i t J. R. The fields of a line source of current over a stratified conductor. Appl. sci. res., sect. B, v. 3, No 4,5 1953b, 279.
W a i t J. R. A transient magnetic dipole source in a dissipative medium. J. appl. phys., v. 24, No 3, 1953c, 341.
W a i t J. R. Radiation resistance of a small circular loop in the presence of a conducting ground. J. appl. phys., v. 24, No 5, 1953d, 646.
W a i t J. R. A conducting permeable sphere in the presence of a coil carrying an oscillating current. Canad. j. phys., v. 31, 1953e, 670.
W a i t J. R. Mutual coupling of wire loops lying an a homogeneous ground. Geophys., v. 19, No 2, 1954, 290.
W a i t J. R. Mutual electromagnetic coupling of loops over a homogeneous ground. Geophys., v. 20, No 3, 1955, 630.
W a i t J. R. Mutual electromagnetic coupling of loops over a homogeneous ground — an additional note. Geophys., v. 21, No 2, 1956, 479.
* W a i t J. R. Shielding of a transient electromagnetic dipole field by a conductive sheet. Canad. j. phys., v. 34, No 8, 1956a, 890.
W a i t J. R. Diffraction of a spherical wave pulse by a half-plane screen. Canad. j. phys., v. 35, 1957, 693.
W a i t J. R. Induction by an oscillating magnetic dipole over a two layer ground. Appl. sci. res., sect. B, v. 7, No 3, 1958, 73.
W a i t J. R. On the electromagnetic response of an imperfectly conducting thin dyke. Geophys., v. 24, No 1, 1959, 167.
W a i t J. R. Propagation of electromagnetic pulses in a homogeneous conducting earth. Appl. sci. res., sect. B, v. 8, No 3, 1960, 213.
W a i t J. R. Some solution for electromagnetic problems involving spheroidal, spherical and cylindrical bodies. U. S. natl. bur. stand. j. res., v. 64B, No 1, 1960a, 15.
W a i t J. R., C a m p b e l l L. L. The fields of an oscillating magnetic dipole immersed in a semi-infinite conducting medium. J. geophys. res., v. 58, No 2, 1952, 167.
* W a i t J. R., M u r p h y A. Influence of a ridge on the low-frequency ground wave. J. res. natl. bur. stand., v. 58, No 1, 1957, 1.
W a r d S. H. Unique determination of conductivity, susceptibility, size and depth in multifrequency electromagnetic exploration. Geophys., v. 24, No 3, 1959, 531.
* W a r d S. H. The electromagnetic response of magnetic iron ore deposit. Geophys. prospect. v. 9, No 2, 1961, 14.
W e s l e y J. P. Response of dyke to oscillating dipole. Geophys., v. 23, 1958, 128.
W e s l e y J. P. Response of thin dyke to oscillating dipole. Geophys. v. 23, No 1, 1958, 134.

W o l f A. The impedance of a grounded wire. Geophys., v. 7, No 1-4, 1942, 414.
Y o s h i z u m i E., T a n i g u c h i K., K i y o n o T. Vertical sounding by central induction method. Mem. fac. enging. Kyoto univ., v. 21, No 2, 1959, 154.
Y o s t W. J. The interpretation of electromagnetic reflection data in geophysical exploration. Part I, general theory. Geophys., v. 17, No 1, 1952, 89.

* * *

Б е з р у к И. А., К а м е н е ц к и й Ф. М. К вопросу об интерпретации данных многочастотной индуктивной электроразведки для районов с низкоомными покровными отложениями. Изв. высш. учеб. завед., Геология и разведка, № 10, 1960.
Б е л к и н а М. Г. Дифракция электромагнитных волн на диске. В сб. «Дифракция электромагнитных волн на некоторых телах вращения». Изд. «Советское радио», М., 1957.
Б е р д и ч е в с к и й М. Н. Электрическая разведка методом теллурических токов. Гостоптехиздат, 1960.
Б р е х о в с к и х Л. М. Волны в слоистых средах. Изд. АН СССР, 1957.
Б р о н ш т е й н Н. Н., С е м е н д я е в К. А. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. Гостехиздат, 1957.
Б у д а к Б. М., С а м а р с к и й А. А., Т и х о н о в А. Н. Сборник задач по математической физике. Гостехиздат, 1956.
Б у р с и а н В. Р. Нормальное поле прямолинейного бесконечно длинного кабеля. Гос. научно-техн. горно-геол. нефт. изд., 1934.
Б у р с и а н В. Р. Теория электромагнитных полей, применяемых в электроразведке. Часть I. Постоянные поля. Гостехтеоретиздат, 1933.
Б у р с и а н В. Р. Теория электромагнитных полей, применяемых в электроразведке. Часть II. Переменные поля. Изд. ЛГУ, 1936.
В а н д а к у р о в Ю. В. Дифракция электромагнитных волн, испускаемых произвольно ориентированным электрическим или магнитным диполем на идеально проводящей полуплоскости. Журнал экспериментальной и теоретической физики, вып. 26, 1954.
В а н ь я н Л. Л. К теории дипольных электромагнитных зондирований. Прикладная геофизика, вып. 16, Гостоптехиздат, 1957.
В а н ь я н Л. Л. Некоторые вопросы теории частотных зондирований горизонтальных напластований. Прикладная геофизика, вып. 23, Гостоптехиздат, 1959.
В а н ь я н Л. Л. Элементы теории становления электромагнитного поля. Прикладная геофизика, вып. 25, Гостоптехиздат, 1960.
В а н ь я н Л. Л. Магнитное поле в дальней зоне диполя. Геология и геофизика, № 5, 1960.
В а н ь я н Л. Л., Г а с а н е н к о Л. Б., Ш о л п о Г. П. Асимптотическое представление электромагнитного поля низкочастотного диполя. В сб. «Вопросы геофизики». Уч. зап. ЛГУ, № 286, сер. физ. и геол. наук, вып. 12, 1960.
В а н ь я н Л. Л., Т е р е х и н Е. И., Ш т и м м е р А. И. Методика расчета волновых кривых частотного зондирования. Прикладная геофизика, вып. 30, Гостоптехиздат, 1961.
В а н ь я н Л. Л., К а у ф м а н А. А., Т е р е х и н Е. И. Расчет фазовых кривых частотного зондирования способом трансформации. Прикладная геофизика, вып. 30, Гостоптехиздат, 1961.
В а т с о н Г. Н. Теория бесселевых функций. Часть I, II, ИЛ, 1949.
В е к с л е р В. И. Аномалия в переменном магнитном поле от проводящей плоской полосы и круглого диска. Труды ЦНИГРИ, вып. 34, 1959.
Г а с а н е н к о Л. Б. К вопросу о связи между компонентами электромагнитного поля вертикального гармонического магнитного диполя над горизонтально-слоистой структурой. В сб. «Вопросы геофизики». Уч. зап. ЛГУ, № 249, сер. физ. и геол. наук, вып. 10, 1958.

Гасаненко Л. Б. Нормальное поле вертикального гармонического низкочастотного магнитного диполя. В сб. «Вопросы геофизики». Уч. зап. ЛГУ, № 249, сер. физ. и геол. наук, вып. 10, 1958.

Гасаненко Л. Б. Поле вертикального гармонического магнитного диполя на поверхности многослойной структуры. В сб. «Вопросы геофизики». Уч. зап. ЛГУ, № 278, сер. физ. и геол. наук, вып. 11, 1959.

Гасаненко Л. Б. Моделирование низкочастотных электромагнитных полей на геоструктурах. В сб. «Вопросы геофизики». Уч. зап. ЛГУ, № 278, сер. физ. и геол. наук, вып. 11, 1959.

Гасаненко Л. Б. Интерпретационные параметры электромагнитного поля. В сб. «Вопросы геофизики». Уч. зап. ЛГУ, № 286, сер. физ. и геол. наук, вып. 12, 1960.

Гасаненко Л. Б., Молонков Г. В. Электромагнитное поле горизонтального магнитного диполя над горизонтально-слоистой структурой. В сб. «Вопросы геофизики». Уч. зап. ЛГУ, № 249, сер. физ. и геол. наук, вып. 10, 1958.

Гасаненко Л. Б., Шолпо Г. П. К вопросу о вычислении электромагнитного поля вертикального низкочастотного магнитного диполя на поверхности двухслойной структуры. В сб. «Вопросы геофизики». Уч. зап. ЛГУ, № 278, сер. физ. и геол. наук, вып. 11, 1959.

Гасаненко Л. Б., Шолпо Г. П. К теории электромагнитных зондирований. В сб. «Вопросы геофизики». Уч. зап. ЛГУ, № 286, сер. физ. и геол. наук, вып. 12, 1960.

Гельфанд И. С. Электромагнитное поле горизонтальной рамки в слоистой среде. В сб. статей по геофизич. методам разведки, Свердл. горный ин-т, Госгеолтехиздат, 1955.

Гельфанд И. С. Электромагнитное поле кабеля в слоистой среде. В сб. статей по геофизич. методам разведки, Свердл. горн. ин-т, Госгеолтехиздат, 1955.

Гельфанд И. С. Электромагнитное поле наклонной рамки в слоистой среде. В сб. «Вопросы развед. геофиз.». Труды Свердл. горн. ин-та, вып. 30, Госгеолтехиздат, 1957.

Гельфанд И. С. Электромагнитное поле рамки и кабеля над двухслойной средой со слабо проводящим основанием. В сб. «Вопросы развед. геофиз.», Труды Свердл. горн. ин-та, вып. 34, Госгеолтехиздат, 1959.

Гринберг Г. А. Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений. Изд. АН СССР, 1948.

Дмитриев В. И. Влияние неоднородностей земли на поле прямолинейного бесконечно длинного кабеля. Изв. АН СССР, сер. геофиз., № 4, 1959.

Дмитриев В. И. Решение основной задачи теории индукционного метода электроразведки. Изв. АН СССР, сер. геофиз., № 8, 1960.

Дмитриев В. И. Экранирующее влияние наносов на аномальное поле. Изв. АН СССР, сер. геофиз. № 1, 1961.

Дьяконов Б. П. Дифракция электромагнитных волн на круглом цилиндре в однородном полупространстве. Изв. АН СССР, сер. геофиз., № 9, 1959.

Дьяконов Б. П. Дифракция электромагнитных волн на шаре, расположенном в полупространстве. Изв. АН СССР, сер. геофиз., № 11, 1959.

Дьяконов Б. П. Влияние поверхности Земли на электромагнитное поле цилиндрической неоднородности. Изв. АН СССР, сер. геофиз., № 5, 1960.

Дьяконов Б. П. Асимптотическое выражение для электромагнитных полей цилиндрической неоднородности. Изв. АН СССР, сер. геофиз., № 7, 1960.

Заборовский А. И. Электроразведка. Гостоптехиздат, 1943.

Заборовский А. И. Переменные электромагнитные поля в электроразведке. Изд. МГУ, 1960.

Зоммерфельд А. Дифференциальные уравнения в частных производных физики. ИЛ, 1950.

Каден Г. Электромагнитные экраны. Госэнергоиздат, 1957.

Кальварская В. П. Сравнительный анализ однокатушечной и двухкатушечной систем в каротаже магнитной восприимчивости и электропроводности. Прикладная геофизика., вып. 30, Гостоптехиздат, 1961.

Каменецкий Ф. М., Кауфман А. А., Якубовский Ю. В. О выборе оптимальной частоты при индуктивных методах электроразведки. Изв. АН СССР, сер. геофиз., № 2, 1957.

Каменецкий Ф. М., Кауфман А. А., Якубовский Ю. В. Об индуктивных методах рудной электроразведки. Тр. МГРИ, т. 36, Развед. геофиз., 1959.

Каменецкий Ф. М., Коваленко В. Ф. Оценка длительности импульса первичного поля при возбуждении нестационарных вихревых токов с целью поисков хорошо проводящих руд. Изв. высш. учеб. завед. Геология и разведка, № 6, 1960.

Кауфман А. А. Об амплитудных и фазовых характеристиках полей, применяемых в низкочастотной электроразведке. Там же.

Кауфман А. А. Три способа возбуждения поля в низкочастотной электроразведке рудных месторождений. Геология и геофизика, № 5, 1961.

Козулин Ю. Н. Поле вертикального магнитного диполя над двухслойной средой. Вычисление функций T_μ (ϱ, z). Уч. зап. ЛГУ, № 210, сер. физ. наук, вып. 9, 1956.

Козулин Ю. Н. К теории частотного электромагнитного зондирования многослойных структур. Изв. АН СССР, сер. геофиз., № 8, 1960.

Краев А. П. Гармонический электромагнитный метод исследования слоистого массива. ДАН СССР, т. 31, № 7, 1941.

Краев А. П. Основы геоэлектрики. Часть I. Гостехтеоретиздат, 1951.

Кудрявцев Ю. И. Некоторые вопросы теории индукционного каротажа. Прикладная геофизика, вып. 28, Гостоптехиздат, 1960.

Кузнецов В. Н. Электромагнитное поле контактного провода электрифицированных железных дорог, работающих на переменном токе. В сб. «Проблемы передачи информации». Изд. АН СССР, вып. 2, 1959.

Кулешов В. Н. Теория кабелей связи. Связьиздат, 1950.

Лепешинский Ю. К. Электроразведка переменным током, Геолразведиздат, 1933.

Мизюк Л. Я., Котюк А. Ф. Методы аэроэлектроразведки. Геология и геофизика, № 6, 1961.

Михайлов И. Г. Электромагнитное поле наклонной рамки. Журнал экспериментальной и теоретической физики, т. 4, вып. 4, 1934.

Молочнов Г. В. Вертикальный магнитный диполь на поверхности горизонтальной слоистой структуры. В сб. «Геофиз. методы разв.», Госгеолиздат, 1955.

Молочнов Г. В. Экспериментальное исследование электромагнитного поля в неоднородных средах. В сб. «Вопросы геофиз.», Уч. зап. ЛГУ, № 249, вып. 10, сер. физ. и геол. наук, 1958.

Молочнов Г. В. Частотное электромагнитное зондирование на модели. В сб. «Вопросы геофиз.», Уч. зап. ЛГУ, № 278, сер. физ. и геол. наук, вып. 11, 1959.

Молочнов Г. В. О возможности осуществления направленного электромагнитного зондирования. Изв. АН СССР, сер. геофиз., № 6, 1961.

Молочнов Г. В., Балобаев В. Г. Проводящее тело в электромагнитном поле вертикального магнитного диполя. В сб. «Вопросы геофиз.», Уч. зап. ЛГУ, № 249, сер. физ. и геол. наук, вып. 10, 1958.

Молочнов Г. В., Матвеева Э. Г., Осокина Г. Н. Электромагнитное поле вертикального магнитного диполя над двухслойной структурой с границей в виде уступа. В сб. «Вопросы геофиз.», Уч. зап. ЛГУ, № 286, сер. физ. и геол. наук, вып. 12, 1960.

Морс Ф. М., Фешбах Г. Методы теоретической физики. ИЛ, 1960.

Никитина В. Н. Об аномалиях переменных электромагнитных полей над цилиндрическими неоднородностями. Труды Геофиз. ин-та АН СССР, № 32, 1956.

Никитина В. Н. Расчеты переменного электромагнитного поля над наклонным пластом. Изв. АН СССР, сер. геофиз., № 3, 1960.

Никитина В. Н. Общее решение осесимметрической задачи теории индукционного каротажа. Изв. АН СССР, сер. геофиз., № 4, 1960.

Никитина В. Н. К дифракции на полуплоскости в поглощающих средах. Изв. АН СССР, сер. геофиз., № 10, 1960.

Овчинников И. К. Возмущение низкочастотного магнитного поля идеально проводящим эллипсоидом. Труды Свердл. горн. ин-та, вып. 30, 1957.

Павинский П. П., Козулин Ю. Н. Поле вертикального магнитного диполя над двухслойной средой. Уч. зап. ЛГУ, № 210, вып. 9, 1956.

Пистолькорс А. А. К теории провода у границы раздела двух сред. ДАН СССР, т. 86, № 5, 1952.

Пистолькорс А. А. К теории провода, параллельного плоской границе раздела двух сред. Радиотехника, т. 8, № 3, 1953.

Петровский А. А. Теория возвратного метода. Изв. ин-та прикл. геофиз., вып. 4, 1926.

Петровский А. А. Специальный курс электричества для разведчиков-геофизиков. Часть IV, Глав. ред. энерг. лит., Л. — М., 1935.

Светов Б. С. Некоторые результаты модельных исследований по индуктивному методу. Изв. АН СССР, сер. геофиз., № 1, 1960.

Светов Б. С. О способах интерпретации аномалий индуктивного метода разведки. В сб. «Геофиз. разведка», серия обмена произв. опытом, Гостоптехиздат № 1, 1961.

Семенов А. А., Карпеев Г. А. Исследование возможностей измерения сопротивления излучения антенн для целей электрокартирования. Информ. сб. ВИТР, № 3, 1957.

Семенов В. С. Электромагнитное поле низкочастотного вертикального магнитного диполя, расположенного на поверхности проводящего магнитного полупространства. Изв. высш. уч. завед., физ., № 2, 1961.

Семенов В. С. Электромагнитное поле низкочастотного вертикального магнитного диполя, расположенного над поверхностью проводящего магнитного полупространства. Изв. высш. уч. завед., физ., № 3, 1961а.

Скугаревская О. А. О конечной стадии процесса становления электрического тока в слое, лежащем на идеально проводящем основании. Изв. АН СССР, сер. геофиз., № 6, 1951.

Скугаревская О. А. О начальной стадии процесса становления электрического тока в слое, лежащем на идеально проводящем основании. Изв. АН СССР, сер. геофиз., № 6, 1951.

Соколов А. А. Дельта-функция и ее применение к решению некоторых математических задач геофизики. Труды Горно-геол. ин-та, вып. 10, изд-во УФ АН СССР, 1946.

Стрэттон Дж. А. Теория электромагнетизма. Гостехтеоретиздат, 1948.

Тамм И. Е. Основы теории электричества. Гостехиздат, 1956.

Тархов А. Г. Геофизическая разведка методом индукции. Госгеолтехиздат, 1954.

Тихонов А. Н. О становлении электрического тока в однородном проводящем полупространстве. Изв. АН СССР, сер. географ. и геофиз., № 10, 1946.

Тихонов А. Н. О становлении электрического тока в неоднородной слоистой среде. Изв. АН СССР, сер. географ. и геофиз., т. 14, № 3, 1950.

Тихонов А. Н. Об асимптотическом поведении интегралов, содержащих бесселевы функции. ДАН СССР, т. 125, № 5, 1959.

Тихонов А. Н. О распространении переменного электромагнитного поля в слоистой анизотропной среде. ДАН СССР, т. 126, № 5, 1959.

Тихонов А. Н., Дмитриев В. И. К вопросу о влиянии помех в индукционном методе аэроэлектроразведки. Изв. АН СССР, сер. геофиз., № 6, 1959.

Тихонов А. Н., Мухина Г. В. Определение переменного электрического поля в слоистой среде. Изв. АН СССР, сер. географ. и геофиз., т. 14, № 2, 1950.

Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. Гостехтеоретиздат, 1951.

Тихонов А. Н., Скугаревская О. А. О становлении электрического тока в неоднородной слоистой среде. Изв. АН СССР, сер. географ. и геофиз., т. 14, № 4, 1950.

Тихонов А. Н., Скугаревская О. А. О становлении электрического тока в неоднородной слоистой среде. Изв. АН СССР, сер. геофиз., № 6, 1951.

Тихонов А. Н., Скугаревская О. А. Об интерпретации процесса становления электромагнитного поля в слоистых средах. Изв. АН СССР, сер. геофиз., № 3, 1958.

Тихонов А. Н., Скугаревская О. А. Асимптотическое поведение процесса становления электромагнитного поля. Изв. АН СССР, сер. геофиз., № 6, 1959.

Тихонов А. Н., Четаев Д. Н. О возможности использования сопротивления излучения антенны для электрокартирования. Изв. АН СССР, сер. геофиз., № 3, 1956.

Тихонов А. Н., Шахсуваров Д. Н. О применении электромагнитных полей радиостанций для геофизической разведки. Труды Геофиз. ин-та АН СССР, № 9, 1954.

Тихонов А. Н., Шахсуваров Д. Н. Метод расчета электромагнитных полей, возбуждаемых переменным током в слоистых средах. Изв. АН СССР, сер. геофиз., № 3, 1956.

Тихонов А. Н., Шахсуваров Д. Н. Электромагнитное поле диполя в дальней зоне. Изв. АН СССР, сер. геофиз., № 7, 1959.

Тихонов А. Н., Шахсуваров Д. Н. О неравномерности асимптотики электромагнитных полей, возбуждаемых диполем переменного тока в слоистой среде. Изв. АН СССР, сер. геофиз., № 1, 1961.

Фок В. А. Поле плоской волны вблизи поверхности проводящего тела. Изв. АН СССР, сер. геофиз., т. 10, № 2, 1946.

Фок В. А., Бурсиан В. Р. Электромагнитное поле переменного тока в цепи с двумя заземлениями. Журнал Русского физ.-хим. общества. Часть физ., т. 58, вып. 2, 1926.

Франк Ф., Мизес Р. Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики. Часть II, ОНТИ, 1937.

Четаев Д. Н. О возвратном методе электроразведки. Изв. АН СССР, сер. геофиз., № 2, 1956.

Четаев Д. Н. Теория зондирования импульсами включения постоянного тока в незаземленную петлю. Изв. АН СССР, сер. геофиз., № 5, 1956.

Четаев Д. Н. К расчету неустановившихся электромагнитных полей в неоднородных средах. Труды Геофиз. ин-та АН СССР, № 32, 1956.

Шаубю. Б. О применении метода вращающегося магнитного поля для электрокартирования. Известия АН СССР, сер. геофиз., № 10, 1960.

Шаубю. Б. О направленном приеме вторичных сигналов в электроразведке методом вращающегося магнитного поля. Изв. АН СССР, сер. геофиз., № 11, 1960а.

Шаубю. Б. Некоторые вопросы аэроэлектроразведки методом вращающегося магнитного поля. Прикл. геофиз., вып. 29, Гостоптехиздат, 1961.

Шахсуваров Д. Н. Методика интерпретации результатов наблюдений электромагнитного поля при дипольном зондировании. Изв. АН СССР, сер. геофиз., № 5, 1956.

Шахсуваров Д. Н., Рыбакова Е. В. О применимости представлений дальней зоны при частотных электромагнитных зондированиях. Изв. АН, сер. геофиз., № 11, 1960.

Шейнманн С. М. Об установлении электромагнитных полей в Земле. Прикладная геофизика, № 3, Гостоптехиздат, 1947.

Шейнманн С. М., Франтов Г. С. Магнитный диполь над двухслойной средой (о геологическом картировании с помощью аэроэлектрораз-

ведки). В сб. «Новое в методике и технике геол-разв.». Труды ВИТР, вып. 1, 1958.

Шерман Д. С. Электромагнитное поле от наклонной рамки. Журнал экспериментальной и теоретической физики. Т. 2, вып. 2, 1932.

Эненштейн Б. С. К методике интерпретации кривых электромагнитных зондирований. Изв. АН СССР, сер. геофиз., № 12, 1957.

Якубовский Ю. В., Кауфман А. А., Коваленко В. Ф. О возможностях метода становления при поисках хорошо проводящих рудных тел. Изв. высш. уч. завед., Геология и разв., № 3, 1960, 119.

Якубовский Ю. В., Ляхов Л. Л. Электроразведка. Госгеолтехиздат, 1956.

Янке Е., Эмде Ф. Таблицы функций с формулами и кривыми. Гостехтеоретиздат, 1949.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Стр.

Введение 3

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

ОДНОРОДНОЕ ПОЛУПРОСТРАНСТВО И ГОРИЗОНТАЛЬНО-СЛОИСТЫЕ СРЕДЫ

Глава I

Электромагнитная индукция в полубесконечном проводнике с плоской границей

§ 1. Основные уравнения поля, граничные условия, принцип построения решения 5
§ 2. Решения первого типа 9
§ 3. Решения второго типа 11
§ 4. Свободное затухание токов в проводящей среде 13
§ 5. Разные типы первичных полей 16
1. Периодическое первичное поле . . . . . —
2. Случай, когда постоянная λ равняется нулю 17
3. Апериодическое первичное поле 19
§ 6. Плоская проводящая среда как граничный случай проводящей сферы 21

Глава II

Магнитный диполь и однородное полупространство

§ 1. Вертикальный диполь 24
1. Вертикальное магнитное поле и тангенциальное электрическое поле на границе двух сред . . . . . —
2. Радиальное и вертикальное магнитное поле на границе воздух — земля 27
3. Вертикальное магнитное поле на поверхности среды и в среде 31
4. Сопротивление излучения небольшой круглой рамки 32
§ 2. Горизонтальный диполь 40
1. Вертикальное магнитное поле . . . . . —
2. Горизонтальное магнитное поле 42
3. Поле диполя, погруженного в проводящее полупространство 43
§ 3. Круглая горизонтальная рамка (петля) 52
1. Вертикальное магнитное поле в ближней зоне около рамки —
2. Вертикальное магнитное поле в центре круговой рамки (петли). Определение электропроводности полупространства 55

Стр.
§ 4. Взаимный импеданс рамок 61
1. Рамки на земле 62
2. Рамки в воздухе 65
§ 5. Неустановившееся поле вертикального магнитного диполя . . . 72
1. Случай, когда пренебрегают токами смещения и временем распространения поля в воздухе 73
2. Случай, когда учитываются токи смещения и время распространения поля в воздухе 75

Глава III

Магнитный диполь и горизонтально-слоистые среды

§ 1. Вертикальный диполь. Решение Бхаттачарии 89
1. Общее решение для двухслойной среды . . . . . —
2. Два слоя с небольшой разницей в сопротивлении 95
3. Проводящий слой на основании-изоляторе 96
4. Потенциал вторичного поля для трехслойной среды 98
§ 2. Вертикальный диполь. Решение Уэйта 99
1. Общее решение для двухслойной среды . . . . . —
2. Случай, когда верхний слой имеет небольшую электропроводность 102
3. Случай, когда слой и основание незначительно отличаются по электропроводности 104
4. Тонкий проводящий пласт 105
§ 3. Вертикальное магнитное поле в центре петли 110
1. Круглая петля над двухслойной и трехслойной средой . . . —
2. Интерпретация 111
3. Вычисление кажущейся электропроводности в случае прямоугольной петли 114
§ 4. Вертикальный магнитный диполь. Случай, когда электрические свойства верхнего слоя изменяются в зависимости от глубины по произвольному закону 118
1. Общее решение . . . . . —
2. Вычисление функций $\mu(z)$, $\sigma(z)$, $\varepsilon(z)$ 126
§ 5. Вертикальный диполь. Решение Слихтера и Кнопова 134
§ 6. Горизонтальный магнитный диполь над тонким проводящим пластом 146
§ 7. Импеданс рамок 148
1. Взаимный импеданс между рамками над двухслойной средой —
2. Взаимный импеданс между рамками над тонким пластом . . 153
3. Самоимпеданс рамки 154
§ 8. Неустановившееся поле вертикального магнитного диполя . . . 155
1. Тонкий пласт . . . . . —
2. Двухслойная среда. Электропроводность основания близка к электропроводности вышележащего слоя 158
3. Взаимный импеданс рамки и горизонтального провода малой длины 166
4. Взаимный импеданс двух рамок 167

Глава IV

Бесконечно длинный кабель и горизонтально-слоистые среды

§ 1. Однородное полупространство 172
1. Вертикальное и горизонтальное магнитное поле . . . . . —
2. Распределение вторичного тока 178
3. Апериодический линейный ток, текущий параллельно поверхности раздела 179

Стр.
§ 2. Двухслойная среда 180
1. Подстилающая среда обладает свойствами идеального проводника 180
2. Слой и основание имеют конечные сопротивления 184
§ 3. Трехслойная среда 191
§ 4. Решение для М-слойной среды 199
1. Общее решение . . . . . —
2. Однородное полупространство как частный случай слоистой среды 202
3. Тонкий пласт 205
4. Произвольное число слоев и частный случай — двухслойная среда 207

ЧАСТЬ ВТОРАЯ

ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ ИНДУКЦИЯ В ПРОВОДЯЩИХ ТЕЛАХ ПРОСТОЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ФОРМЫ

Глава V

Электромагнитная индукция в телах вращения

§ 1. Проводящая сфера в однородном поле 212
1. Вертикальная и радиальная составляющие поля . . . . . —
2. Определение глубины, магнитной проницаемости, радиуса и проводимости сферы 219
§ 2. Проводящая сфера в присутствии магнитного диполя 223
1. Общее решение 224
2. Азимутальный магнитный диполь 227
3. Радиальный диполь 231
4. Вторичное поле при $\frac{\mu_i}{\mu_a} = 1$ 232
5. Вторичное поле при $\frac{\mu_i}{\mu_a} \neq 1$ 237
§ 3. Проводящая сфера в поле соленоидальной рамки 240
1. Первичное поле соленоида на низких частотах . . . . . —
2. Вторичное поле проводящей сферы 241
§ 4. Проводящий цилиндр в поле кабеля 247
§ 5. Проводящий цилиндр в присутствии магнитного диполя 253

Глава VI

Электромагнитная индукция в тонкой пластине

§ 1. Метод решения двухмерных дифракционных задач 261
1. Угловой спектр плоских волн . . . . . —
2. Метод интегрирования 264
3. Два фундаментальных интегральных уравнения 267
4. Плоская волна, падающая на полубесконечную пластину . . 269
5. Распространение метода на случай линейного источника и на случай квазитрехмерных задач 272
§ 2. Метод решения задачи дифракции поля диполя на идеально проводящей полуплоскости 274
1. Метод анализа . . . . . —
2. Дифракционное поле диполя 278
3. Упрощение решения 281
§ 3. Идеально проводящая полуплоскость в присутствии магнитного диполя. Решение Тессера 286
1. Общие формулы . . . . . —
2. Приближенные формулы для случая длинных волн 290

Стр.

§ 4. Идеально проводящая полуплоскость в присутствии магнитного диполя. Решение Весли 300

§ 5. Полубесконечная пластина с конечными проводимостью и толщиной в присутствии магнитного диполя 306
1. Бесконечный пласт в присутствии магнитного диполя . . . —
2. Решение задачи для тонкой полубесконечной пластины . . . 313

§ 6. Полубесконечная пластина с малой толщиной и большой проводимостью в присутствии магнитного диполя 315

§ 7. Идеально проводящая полуплоскость в поле импульсного точечного источника 318

§ 8. Моделирование поля рамки в присутствии тонких проводящих пластин 323
1. Условия подобия и размерность величин . . . . . —
2. Установки для моделирования . . . . . —
3. Модельные работы с вертикальными проводниками 324
4. Модельные работы с горизонтальными проводниками 329

Литература 338

Александр Борисович Великин и *Григорий Сергеевич Франтов*

Электромагнитные поля, применяемые в индукционных методах электроразведки

Научный редактор *С. М. Шейнманн* Ведущий редактор *Г. М. Рас*
Технический редактор *И. М. Сафронова*
Корректоры: *Г. Г. Полонская* и *Н. Л. Демиденко*

Сдано в набор 23/IX 1961 г. Подписано к печати 18/IV 1962 г.
Формат бумаги 60×90 1/16. Печ. л. 22. Усл. л. 22. Уч.-изд. л 22,28. Тираж 2300
Индекс 11—5—4. М-00583.

Гостоптехиздат. Ленинградское отделение. Ленинград, ул. Ломоносова, 22.
Издательский № 150. Заказ № 860.
Типография «Красный Печатник». Ленинград, Московский проспект, 91.
Цена 1 р. 26 к.

ОПЕЧАТКИ И ИСПРАВЛЕНИЯ

Страница	Строка	Напечатано	Должно быть
14	ф-ла (4. 10)	$\frac{\partial P}{\partial y} \cdot \frac{\lambda^2 P}{\nu}$	$\frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\lambda^2 P}{\nu}$
33	5 сн.	а радиус рамки	a — радиус рамки,
68	1 сн.	$\frac{i\,\mu_0 \omega\, IdS}{4\pi}$.	$M = \frac{i\,\mu_0 \omega\, IdS}{4\pi}$.
81	15 сн.	$\frac{1}{nb_1} Z_1$	$\frac{1}{nb_1} [Z_1$
91	ф-ла (1. 20)	$[A * e^{z\lambda} + B * e^{-z\lambda}]$	$[Ae^{z\lambda} + Be^{-z\lambda}]$
104	6 св.	$e^{-k_1 \varrho}]$	$e^{-k_1 \varrho}] =$
159	5 св.	$d\lambda +$	$d\lambda] +$
180	13 св.	$e^{-\frac{v^{*2}}{4}}$	$e^{-\frac{v^2}{4}}$
220	ф-лы (1. 25) и (1. 26)	H_0	$H_п$
221	ф-лы (1. 28) и (1. 29)	H_0	$H_п$
318	1 сн.	ψ_0	$\psi_п$

Заказ 860.