В. Г. Пименов, Численные методы решения уравнения теплопроводности с запаздыванием, *Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки*, 2008, выпуск 2, 113–116

ВЕСТНИК УДМУРТСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

МАТЕМАТИКА 2008. Вып. 2

УДК 519.633

© *В. Г. Пименов*

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Для уравнения теплопроводности с эффектом запаздывания конструируются численные методы решения. Рассмотрены метод прямых и неявная сеточная схема с кусочно-постоянной интерполяцией. Приведена теорема о сходимости последнего метода.

Ключевые слова: уравнения в частных производных, запаздывание, численные методы, метод прямых, неявная схема.

Введение

В последнее время значительный интерес у исследователей вызывают уравнения в частных производных с эффектами запаздываний по временной составляющей. Математические аспекты таких объектов изучались, в частности, в монографии [1]. Гораздо меньше разработаны численные алгоритмы решения для подобных задач, можно отметить лишь работу [2], где с позиции присущего автору подхода к численному решению задач с запаздыванием как к непрерывному методу строится и исследуется аналог неявного метода трапеций.

В данной работе описываются алгоритмы метода прямых, которые сводятся к решению функционально-дифференциальных уравнений (ФДУ) большой размерности. Для систем ФДУ численные методы хорошо разработаны, в частности, с позиции подхода [3], основанном на идее разделения конечномерной и бесконечномерной фазовых составляющих и идее применения интерполяции с заданными свойствами дискретной предыстории модели. Однако при дискретизации по двум переменным возникают жесткие задачи [4], которые при использовании явных методов дают ограничение на временной шаг, частично проблема преодолевается применением специальных методов. В работе с позиции сеточных методов конструируется неявная схема с простейшим видом интерполяции дискретной предыстории модели – кусочно-постоянной интерполяции и исследуется её порядок сходимости.

§ 1. Постановка задачи и основные предположения

Рассмотрим уравнение теплопроводности вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t, u(x,t), u_t(x,\cdot)), \tag{1.1}$$

здесь $x \in [0, X]$ — пространственная и $t \in [0, T]$ — временная независимые переменные; $u(x,t)$ — искомая функция; $u_t(x,\cdot) = \{u(x,t+s), -\tau \leqslant s < 0\}$ — функция-предыстория искомой функции к моменту t; τ — величина запаздывания.

Пусть заданы начальные условия

$$u(x,t) = \varphi(x,t),\ x \in [0,X],\ t \in [-\tau, 0] \tag{1.2}$$

и граничные условия

$$u(0,t) = g_0(t),\ u(X,t) = g_1(t),\ t \in [0,T]. \tag{1.3}$$

Задача (1.1)—(1.3) представляет собой простейшую краевую задачу для уравнения теплопроводности с эффектом запаздывания общего вида. Будем предполагать, что функции φ, g_0, g_1 и функционал f таковы, что эта задача имеет единственное решение $u(x,t)$, понимаемое в классическом смысле. Отметим, что вопросы существования и единственности подобных задач рассматривались в [1].

Обозначим через $Q = Q[-\tau, 0)$ множество функций $u(s)$, кусочно непрерывных на $[-\tau, 0)$ с конечным числом точек разрыва первого рода, в точках разрыва непрерывных справа. Определим норму функций на Q соотношением $\|u(\cdot)\|_Q = \sup_{s\in[-\tau,0)} |u(s)|$. Дополнительно будем предполагать, что функционал $f(x,t,u,v(\cdot))$ определен на $[0,X]\times[0,T]\times R\times Q$ и липшицев по двум последним аргументам, то есть найдется такая константа L, что для всех $x \in [0,X]$, $t \in [0,T]$, $u^1 \in R$, $u^2 \in R$, $v^1(\cdot) \in Q$, $v^2(\cdot) \in Q$ выполняется

$$|f(x,t,u^1,v^1(\cdot)) - f(x,t,u^2,v^2(\cdot))| \leqslant L(|u^1 - u^2| + \|v^1(\cdot) - v^2(\cdot)\|_Q).$$

§ 2. Алгоритмы метода прямых

Разобьем отрезок изменения пространственной переменной $[0, X]$ на части с шагом $h = X/N$, введя точки $x_i = ih$, $i = 0, \ldots, N$.

Приближения функций $u(x_i, t)$ будем обозначать через $u^i(t)$, предыстории этих функций к моменту t обозначим $u^i_t(\cdot) = \{u^i(t+s), -\tau \leqslant s < 0\}$. Будем обозначать также $f^i(t, u^i(t), u^i_t(\cdot)) = f(x_i, t, u^i(t), u^i_t(\cdot))$.

Используя формулу аппроксимации по трем узлам на середину для второй производной по x при $i = 1, \ldots, N-1$, получаем систему функционально-дифференциальных уравнений

$$\dot{u}^i(t) = \frac{a^2}{h^2}(u^{l-1}(t) - 2u^i(t) + u^{i+1}(t)) + f^i(t, u^i(t), u^i_t(\cdot)) \tag{2.1}$$

с функциональными начальными условиями

$$u^i(t) = \varphi^i(t) = \varphi(x_i, t), \quad t \in [-\tau, 0]. \tag{2.2}$$

Задача (2.1)–(2.2) представляет собой задачу Коши для системы ФДУ, численные методы решения которой (основанные на дискретизации по времени) хорошо разработаны, см., например, работу [3].

Как показали тестовые примеры, возникающая проблема жесткости при применении явных методов, приводит к ограничению на шаг Δ дискретизации по времени, а слишком мелкий шаг по времени ведет к накоплению вычислительной погрешности, возникает неустойчивость метода. Этого можно избежать, решая задачу (2.1)–(2.2) специальными методами, предназначенными для решения жестких систем, например, методом Розенброка, относящимся к числу полуявных, или чисто неявными. Рассмотрим в качестве примера модификацию простейшего неявного метода Эйлера с кусочно-постоянной интерполяцией предыстории, что соответствует неявной сеточной схеме для численного решения задачи (1.1)–(1.3).

§ 3. Неявная сеточная схема

Разобьем отрезок изменения пространственной переменной $[0, X]$ на части с шагом $h = X/N$, введя точки $x_i = ih$, $i = 0, \ldots, N$, и разобьем отрезок изменения временной переменной $[0, T]$ на части с шагом $\Delta = T/M$, введя точки $t_j = j\Delta$, $j = 0, \ldots, M$. Будем считать, что величина $\tau/\Delta = K$ — целое число.

Приближения функций $u(x_i, t_j)$ в узлах будем обозначать через $u^{i,j}$. При всяком фиксированном $i = 0, \ldots, N$ введем дискретную предысторию к моменту t_j, $j = 0, \ldots, M$: $u^i_j = \{u^{i,k}, j - K \leqslant k \leqslant j\}$. Оператором интерполяции дискретной предыстории назовем отображение $I : u^i_j \to v^i(\cdot) \in Q$.

В дальнейшем будет использоваться только простейший способ интерполяции — кусочно-постоянная интерполяция:

$$v^i(t_j + s) = u^{i,k},\ t_k \leqslant t_j + s < t_{k+1}.$$

Неявной схемой с кусочно-постоянной интерполяцией назовем систему

$$\frac{u^{i,j+1} - u^{i,j}}{\Delta} = a^2 \frac{u^{l-1,j+1} - 2u^{i,j+1} + u^{i+1,j+1}}{h^2} + \\ + f(x_i, t_j, u^{i,j}, v^i_{t_j}(\cdot)),\ i = 1, \ldots, N-1,\ j = 0, \ldots, M-1, \quad (3.1)$$

с начальными условиями

$$u^{i,0} = \varphi(x_i, 0),\ i = 0, \ldots, N, \quad (3.2)$$

$$v^i(t) = \varphi(x_i, t),\ t < 0,\ i = 0, \ldots, N \quad (3.3)$$

и граничными условиями

$$u^{0,j} = g_0(t_j),\ u^{N,j} = g_1(t_j),\ j = 0, \ldots, M. \quad (3.4)$$

Система (3.1) при каждом фиксированном j представляет собой линейную трехдиагональную систему относительно $u^{i,j+1}$ с диагональным преобладанием, которая может быть эффективно решена методом прогонки.

Обозначим через $\varepsilon^{i,j}$ величину погрешности метода

$$\varepsilon^{i,j} = u(x_i, t_j) - u^{i,j}, \ i = 0, \ldots, N, \ j = 0, \ldots, M.$$

Будем говорить, что метод сходится, если $\varepsilon^{i,j} \to 0$ при $h \to 0$ и $\Delta \to 0$ для всех $i = 0, \ldots, N$ и $j = 0, \ldots, M$. Будем говорить, что метод сходится с порядком $h^p + \Delta^q$, если найдется такая константа C, что выполняется $|\varepsilon^{i,j}| \leqslant C(h^p + \Delta^q)$ для всех $i = 0, \ldots, N$ и $j = 0, \ldots, M$.

Теорема 1. *Метод* (3.1)–(3.4) *сходится с порядком* $h^2 + \Delta$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Wu J. Theory and Applications of Partial Functional Differential Equations. N.Y.: Springer-Verlag, 1996.
2. Tavernini L. Finite Difference Approximations for a Class of Semilinear Volterra Evolution Problems // SIAM J. Numer. Anal. 1977. Vol. 14, №. 5. P. 931–949.
3. Ким А. В., Пименов В. Г. i-гладкий анализ и численные методы решения функционально-дифференциальных уравнений. Москва; Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2004.
4. Хайрер Э., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жесткие и дифференциально-алгебраические задачи. М.: Мир, 1999.

Поступила в редакцию 11.02.08

V. G. Pimenov

Numerical methods of solution for heat equation with delay

Numerical methods of solution are designed for the equation of heat conductivity with effect of delay. The method of straight lines and the implicit scheme with piece-constant interpolation are considered. The theorem of convergence of the last method is presented.

Пименов Владимир Германович
Уральский государственный
университет
620083, Россия, г. Екатеринбург,
пр. Ленина, 51
E-mail: vladimir.pimenov@usu.ru