

Μαθηματικά Γυμνασίου με Python

Δημήτρης Νικολός

7 Ιουλίου 2020

Κεφάλαιο 1

Ανάλογα ποσά - Αντιστρόφως ανάλογα ποσά

Ασκηση 1.0.1 Να σχεδιάσεις ένα ορθοκανονικό σύστημα ημιαξόνων, με μονάδα το 1 cm και να τοποθετήσεις τα σημεία $A(2,3)$, $B(3,2)$, $\Gamma(4,5)$, $\Delta(5,5)$, $E(1,4)$, $Z(7,3)$, $H(7,2)$, $\Theta(6,2)$, $I(6,0)$, $K(0,5)$. Τι παρατηρείς για τα σημεία I και K ; Πού βρίσκονται αυτά; Μπορείς να γενικεύσεις τις παρατηρήσεις σου για τα σημεία που έχουν τετμημένη ή τεταγμένη το μηδέν;

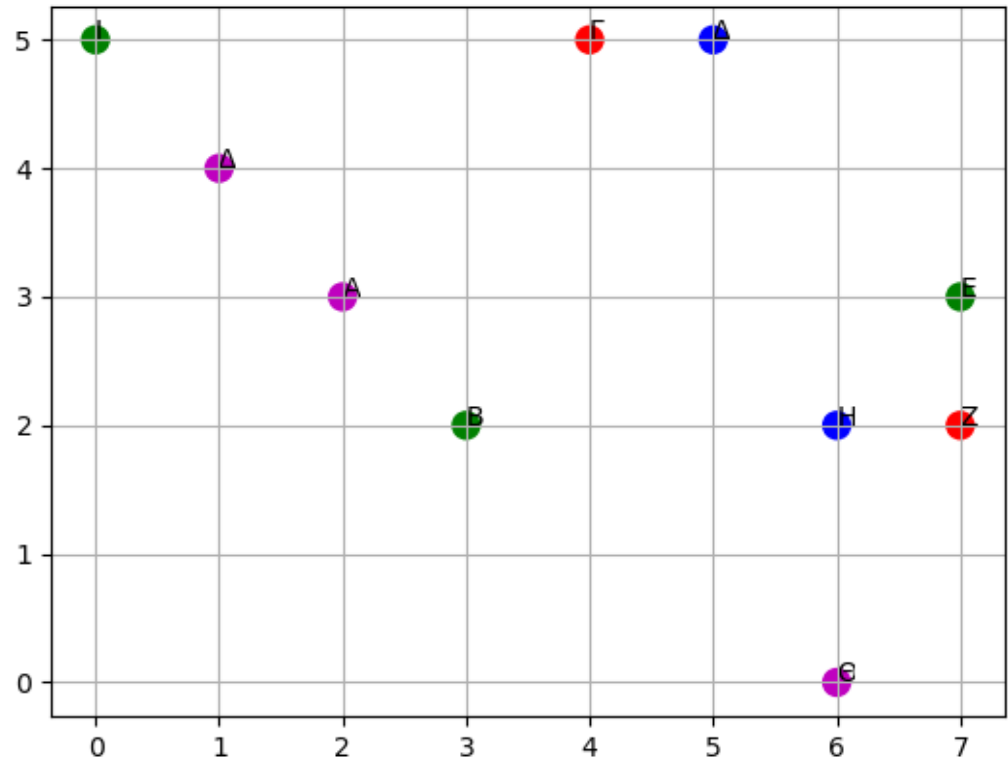
```
import matplotlib.pyplot as plt

plt.clf()
points = [(2,3), (3,2), (4,5), (5,5), (1,4), (7,3), (7,2), (6,2), (6,0), (0,5)]
pointName = ['A', 'B', 'Γ', 'Δ', 'Δ', 'Ε', 'Ζ', 'Η', 'Θ', 'Ι', 'Κ']
x = [p[0] for p in points]
y = [p[1] for p in points]
color=['m', 'g', 'r', 'b']
plt.grid()
plt.scatter(x,y, s=100, marker='o', c=color)
for (i,p) in enumerate(points):
    plt.annotate(pointName[i], (p[0], p[1]))

plt.show()
```

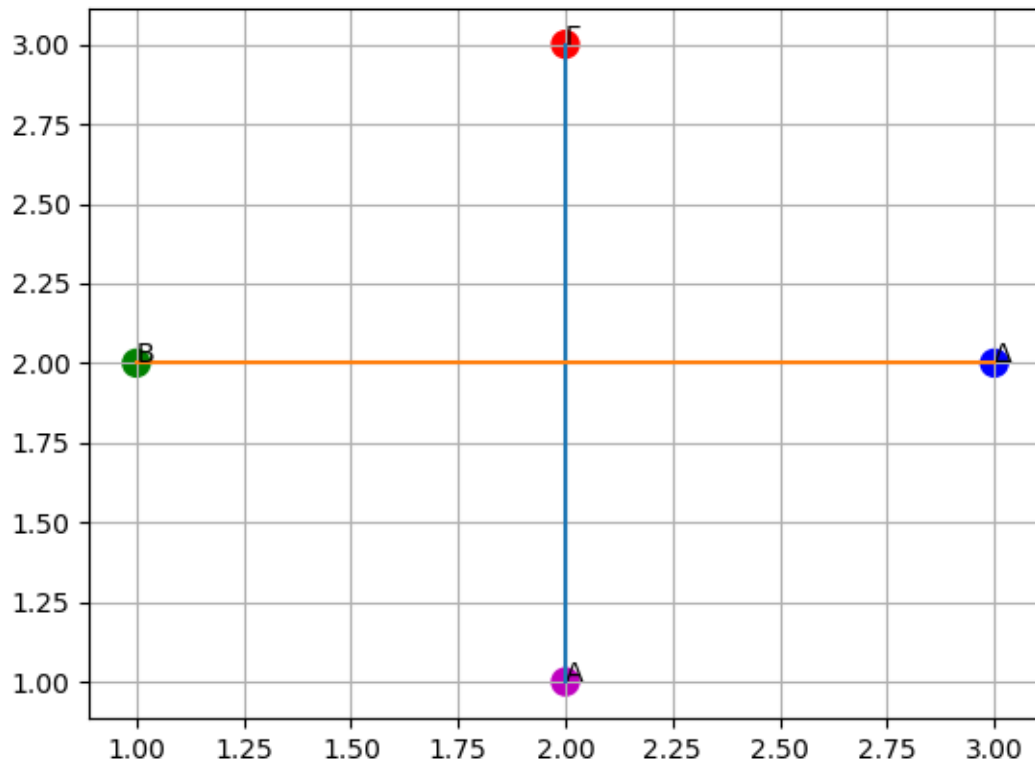
Ασκηση 1.0.2 (Ασκηση 2 του βιβλίου, Σελ. 89) Σε ορθοκανονικό σύστημα ημιαξόνων να τοποθετήσεις τα σημεία $A(2,1)$, $B(1,2)$, $\Gamma(2,3)$ και $\Delta(3,2)$. Τι σχήμα είναι το $AB\Gamma\Delta$; Αν τα ευθύγραμμα τμήματα $A\Gamma$ και $B\Delta$ τέμνονται στο σημείο K , ποιες είναι οι συντεταγμένες του K ;

```
import matplotlib.pyplot as plt
```



```
plt.clf()
points = [(2,1), (1,2), (2,3), (3,2)]
pointName = ['Α', 'Β', 'Γ', 'Δ']
x = [p[0] for p in points]
y = [p[1] for p in points]
color=['m', 'g', 'r', 'b']
plt.grid()
plt.scatter(x,y, s=100, marker='o', c=color)
for (i,p) in enumerate(points):
    plt.annotate(pointName[i],(p[0],p[1]))

x = [points[0][0],points[2][0]]
y = [points[0][1],points[2][1]]
plt.plot(x,y)
x = [points[1][0],points[3][0]]
y = [points[3][1],points[3][1]]
plt.plot(x,y)
```

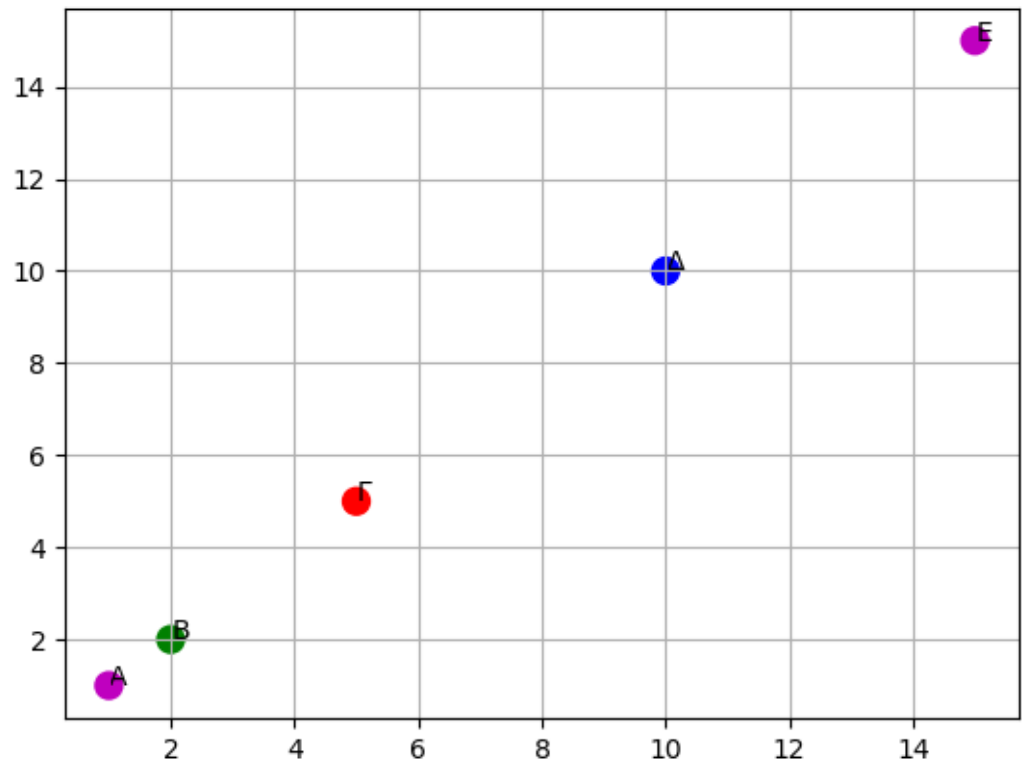


```
plt.show()
```

Άσκηση 1.0.3 (Άσκηση 3 του βιβλίου, Σελ. 89) Γράψε πέντε διατεταγμένα ζεύγη σημείων, των οποίων η τετμημένη τους είναι ίση με την τεταγμένη τους. Μπορείς να τα τοποθετήσεις, σε ένα ορθοκανονικό σύστημα ημιαξόνων; Τι παρατηρείς;

```
import matplotlib.pyplot as plt

plt.clf()
points = [(1,1), (2,2), (5,5), (10,10), (15,15)]
pointName = ['A', 'B', 'Γ', 'Δ', 'Ε']
x = [p[0] for p in points]
y = [p[1] for p in points]
color=['m', 'g', 'r', 'b']
plt.grid()
plt.scatter(x,y, s=100 ,marker='o', c=color)
```



Πλευρά τετραγώνου	1,5 cm	4 cm	4,5 cm
Περίμετρος τετραγώνου			

```
for (i,p) in enumerate(points):
    plt.annotate(pointName[i],(p[0],p[1]))
plt.show()
```

Άσκηση 1.0.4 (Στο βιβλίο βρίσκεται στη Σελ. 90) Συμπλήρωσε τον παρακάτω πίνακα:

- Εξήγησε πώς προκύπτουν οι αριθμοί της δεύτερης σειράς.
- Βρες για κάθε τετράγωνο το κλάσμα πλευρά προς περίμετρο.
- Ποιο είναι το συμπέρασμα που βγάζεις;

```
>>> 4*1.5
6.0
>>> 4*4
16
>>> 4*4.5
18.0
```

Πλευρά τετραγώνου	1,5 cm	4 cm	4,5 cm	Θυμηθείτε το ποσοστό
Περίμετρος τετραγώνου	6	16	18	

σε κλάσμα:

```
def posostoseklasma(fx):
    fx = float(fx)
    denom = 100
    while int(fx) != fx:
        fx *= 10
        denom *= 10
    fx = int(fx)
    return(Fraction(fx,denom))
```

Το fx είναι είναι ο αριθμητής ενός κλάσματος με παρονομαστή 100. Εδώ δεν θα υπάρχει ο παρονομαστής 100 οπότε έχουμε $\text{denom} = 1$.

```
def dekadikosseklasma(fx):
    fx = float(fx)
    denom = 1
    while int(fx) != fx:
        fx *= 10
        denom *= 10
    fx = int(fx)
    return(Fraction(fx,denom))
```

```
dekadikosseklasma(1.5/6)
dekadikosseklasma(4/16)
dekadikosseklasma(4.5/18)
```

και το αποτέλεσμα είναι:

```
>>> dekadikosseklasma(1.5/6)
Fraction(1, 4)
>>> dekadikosseklasma(4/16)
Fraction(1, 4)
>>> dekadikosseklasma(4.5/18)
Fraction(1, 4)
```

Αρα παντού το κλάσμα είναι $\frac{1}{4}$.

Άσκηση 1.0.5 (Στο βιβλίο βρίσκεται στη Σελ. 90) Χρησιμοποιούμε τη φωτογραφική μηχανή για να απεικονίσουμε εικόνες αντικειμένων. Οι εικόνες αυτές δείχνουν τα πραγματικά αντικείμενα σε σμίκρυνση. Στη φωτογραφία το ύψος

ενός παιδιού είναι 2 cm ενώ γνωρίζουμε ότι το πραγματικό του ύψος είναι 1,65 m = 165 cm. Πόση θα είναι τότε η σμίκρυνσή του στη φωτογραφία;

```
>>> 2/165
0.012121212121212121
```

Ασκηση 1.0.6 (Στο βιβλίο βρίσκεται στη Σελ. 91) Μετρούμε μια απόσταση, σε χάρτη, με κλίμακα 1:10.000.000 και τη βρίσκουμε ίση με 2,4 cm. Ποια είναι η πραγματική απόσταση των δύο σημείων;

```
>>> x = 2.4*10000000
>>> x
24000000
>>> x = x/100
>>> x
240000
>>> x = x/1000
>>> x
240
```

240Km

Ασκηση 1.0.7 (Ασκηση 3 του βιβλίου, Σελ. 92) Σε μια φωτογραφία το ύψος ενός ανθρώπου είναι 4 cm, ενώ το πραγματικό το ύψος είναι 1,76 m. Πόσο έχει σμικρυνθεί η εικόνα του ανθρώπου στη φωτογραφία;

```
def pososto(x):
    print(str(round(x*100,2))+'%')
```

Αν θυμηθούμε τη συνάρτηση pososto τότε

```
>>> pososto(4/176)
2.27%
```

Ασκηση 1.0.8 (Ασκηση 4 του βιβλίου, Σελ. 92) Ένας προβολέας διαφανειών προβάλλει το κείμενο μιας διαφάνειας στον απέναντι τοίχο. Αν ένα “Α” έχει ύψος 7 mm στη διαφάνεια και 4,2 cm στον τοίχο, ποια είναι η μεγέθυνση που δίνει ο προβολέας

```
>>> pososto(4.2/0.7)
600%
```

Ασκηση 1.0.9 (Ασκηση 5 του βιβλίου, Σελ. 92) Η σύνθεση μιας μπλούζας είναι 80% βαμβάκι και το υπόλοιπο πολυεστέρα. Αν η μπλούζα ζυγίζει 820 gr, πόσα γραμμάρια ζυγίζουν τα νήματα του πολυεστέρα που περιέχει;

Κλίμακα	1:5	3:8	1:30		1:100
Μήκος σε σχέδιο	4cm		12cm	2cm	3,5cm
Πραγματικό ύψος		24m		10m	

Κλίμακα	1:5	3:8	1:30	1:500	1:100
Μήκος σε σχέδιο	4cm	9cm	12cm	2cm	3,5cm
Πραγματικό ύψος	20cm	24m	360cm	10m	350cm

x		2		4
Π	8		16	

```
>>> 820*20/100
164.0
```

Ασκηση 1.0.10 (Ασκηση 6 του βιβλίου, Σελ. 92) Να συμπληρωθεί ο πίνακας

```
>>> from fractions import Fraction
>>> 5*4
20
>>> 3/8*24
9.0
>>> 12*30
360
>>> Fraction(2,1000)
Fraction(1, 500)
>>> 3.5*100
350
```

Αρα ο πίνακας γίνεται:

Ασκηση 1.0.11 (Ασκηση 7 του βιβλίου, Σελ. 92) Οι διαστάσεις ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου είναι $x + 2$ και x .

(α) Να γράψεις τη σχέση που συνδέει την περίμετρο Π του ορθογωνίου με το x .

(β) Να συμπληρώσεις τον πίνακα:

α)

```
>>> from sympy import *
>>> x = symbols('x')
>>> p = x+x+2+x+x+2
>>> p
4*x + 4
```

β)

x	1	2	3	4
Π	8	12	16	20

```
>>> solve(p-8)
[1]
>>> p.subs(x,2)
12
>>> solve(p-16)
[3]
>>> p.subs(x,4)
20
```

και ο πίνακας γίνεται:

Ασκηση 1.0.12 (Ασκηση 8 του βιβλίου, Σελ. 92) Αν οι διαστάσεις ενός δωματίου, σε ένα σχέδιο με κλίμακα 1:250, είναι 3x5, οι πραγματικές διαστάσεις του δωματίου θα είναιx..... .

```
>>> 3*250
750
>>> 5*250
1250
```

Οπότε το δωμάτιο είναι 7,5m x 12,5m αν οι διαστάσεις ήταν σε cm.

Ασκηση 1.0.13 (Ασκηση 9 του βιβλίου, Σελ. 92) Αν ανακατέψουμε 2 κιλά κόκκινο χρώμα και 3 κιλά κίτρινο χρώμα, φτιάχνουμε μια συγκεκριμένη απόχρωση του πορτοκαλί. Αν ανακατέψεις 5 κιλά κόκκινο χρώμα και 6 κιλά κίτρινο, θα πάρεις την ίδια απόχρωση; Δικαιολόγησε την απάντησή σου.

```
>>> 3/2 == 6/5
False
```

Οχι δεν είναι η ίδια απόχρωση.

Ασκηση 1.0.14 (Ασκηση 2 του βιβλίου, Σελ. 93) Όταν ο Κώστας έκλεισε τα δώδεκα χρόνια είχε το ένα τρίτο της ηλικίας της μητέρας του. Όταν θα γίνει είκοσι χρόνων, ο λόγος των δύο ηλικιών τους θα παραμείνει ο ίδιος;

```
>>> ilikiaMiteras = 3*12
>>> ilikiaMiteras
36
>>> xronia = 20-12
>>> xronia
8
>>> neailikiaMiteras = ilikiaMiteras + xronia
>>> neailikiaMiteras = 44
```

x	0	1	0,3		
y				$\frac{5}{3}$	3

x	0	1	0,3	2,5	4,5
y	0	0,6666	0,2	$\frac{5}{3}$	3

```
>>> 44/20 == 36/12
False
```

Αρα όχι.

Ασκηση 1.0.15 Να συμπληρωθεί ο πίνακας, αν γνωρίζουμε ότι τα ποσά x και y είναι ανάλογα, με συντελεστή αναλογίας $\alpha = \frac{2}{3}$.

$$y = \frac{2}{3}x$$

```
>>> from sympy import *
>>> (x,y) = symbols('x y')
>>> e = 2/3*x
>>> e.subs(x,0)
0
>>> e.subs(x,1)
0.6666666666666667
>>> e.subs(x,0.3)
0.2000000000000000
>>> solve(e-5/3)
[2.500000000000000]
>>> solve(e-3)
[4.500000000000000]
```

Και ο πίνακας γίνεται:

Ασκηση 1.0.16 (Ασκηση 2 του βιβλίου, Σελ. 92) Σε ένα διάλυμα ζάχαρης η περιεκτικότητα σε ζάχαρη είναι 23%. Πόσα γραμμάρια ζάχαρης υπάρχουν σε 300 gr διαλύματος;

```
>>> 300*23/100
69.0
```

Ασκηση 1.0.17 (Ασκηση 3 του βιβλίου, Σελ. 97) Ένα πλοίο έχει σταθερή ταχύτητα και καλύπτει απόσταση 80 Km σε 2 ώρες. Σε πόσο χρόνο θα καλύψει απόσταση 2.000 Km;

$$\frac{2}{80} = \frac{x}{2000}$$

x	3	5	7
y	8	10	12

x	3	4	6	11
y	0,9	1,2	1,8	3,3

x	5	0	1		3,7	0,61	
y	10,05			2	0,125		0,55
hline							

```
>>> from sympy import *
>>> x = symbols('x')
>>> solve(2/80-x/2000)
[50.0000000000000]
```

Η απάντηση είναι 50 ώρες.

Άσκηση 1.0.18 Εξέτασε αν τα ποσά που δίνονται στους παρακάτω πίνακες είναι ανάλογα: (α) (β)

```
>>> 8/3==10/5==12/7
False
>>> 0.9/3==1.2/4==1.8/6==3.3/11
True
```

Άσκηση 1.0.19 (Άσκηση 4 του βιβλίου, Σελ. 98) Στον πίνακα που ακολουθεί, τα ποσά x και y είναι ανάλογα. Υπολόγισε τον συντελεστή αναλογίας τους και συμπλήρωσε τον πίνακα.

Η αναλογία είναι

```
>>> 10.05/5
2.0100000000000002
```

Ομως αυτό είναι 2,01 Οπότε:

```
>>> 0*2.01
0.0
>>> 1*2.01
2.01
>>> 2/2.01
0.9950248756218907
>>> 0.125/2.01
0.06218905472636817
>>> 3.7*2.01
7.436999999999999
>>> 0.61*2.01
```

x	5	0	1	0,995	0,0622	3,7	0,61	0,273632
y	10,05	0	2.01	2	0,125	7,437	1.226	0,55
hline								

Βάρος	58	71	56	68
Υψος	1,60	1,65	1,62	1,72

Τιμή	6€	2,8€	5,2€	3,2€		3,6€	4,8€	2,4€	1,6€	4,4€	2€
Κιλά											

```
1.2260999999999997
>>> 0.55/2.01
0.27363184079601993
```

και προσεγγιστικά ο πίνακας γίνεται:

1.1 Ανάλογα ποσά

Ασκηση 1.1.1 Σε μια παρέα κάποιος υποστήριζε ότι το βάρος του ανθρώπου είναι ανάλογο του ύψους του. Μετρήθηκαν, λοιπόν, όλοι και έβαλαν στον παρακάτω πίνακα τα αποτελέσματα σε Κ.

- Μπορείς να επιβεβαιώσεις ή να απορρίψεις τον ισχυρισμό αυτό;
- Πώς δικαιολογείς το συμπέρασμά σου;

```
>>> 58/1.60 == 71/1.65
False
```

Οπότε ο ισχυρισμός απορρίπτεται.

Ασκηση 1.1.2 Ο μανάβης πουλάει τα καρπούζια προς 0,4 Q το κιλό. Μέσα σε μια ημέρα πούλησε 11 καρπούζια που ζύγιζαν 100 κιλά συνολικά. Ο μανάβης έγραφε, σ' ένα χαρτί, τα λεφτά που εισέπραττε κάθε φορά. Ξέχασε, όμως, μία φορά να το σημειώσει.

❑ Μπορείς να τον βοηθήσεις συμπληρώνοντας τα κενά του παρακάτω πίνακα:

- Δικαιολόγησε τα αποτελέσματα των πράξεων που έκανες και προσπάθησε να διατυπώσεις έναν γενικό κανόνα.

Τα χρήματα που πήρε συνολικά θα είναι $0,4 * 100 = 40€$. Οπότε μπορούμε να αθροίσουμε τα χρήματα και να βρούμε τα κιλά που πωλήθηκαν από τα χρήματα.

Τιμή	6€	2,8€	5,2€	3,2€	4€	3,6€	4,8€	2,4€	1,6€	4,4€	2€
Κιλά	15	7	13	8	10	9	12	6	4	1	5

```
>>> 6+2.8+5.2+3.2+3.6+4.8+2.4+1.6+4.4+2
36.0
>>> 36/0.4
90.0
>>> 100-90
10
>>> 10*0.4
4.0
```

Για να συμπληρώσουμε ολόκληρο τον πίνακα μπορούμε να βρούμε τα κιλά από τα χρήματα διαιρώντας με το 0,4.

```
>>> 6/0.4
15.0
>>> 2.8/0.4
6.999999999999999
>>> 5.2/0.4
13.0
>>> 3.6/0.4
9.0
>>> 4.8/0.4
11.999999999999998
>>> 2.4/0.4
5.999999999999999
>>> 1.6/0.4
4.0
>>> 4.4/0.4
11.0
>>> 2/0.4
5.0
>>>
```

Αν λάβουμε υπόψη τις στρογγυλοποιήσεις ο πίνακας γίνεται:

Ασκηση 1.1.3 (Στο βιβλίο βρίσκεται στη Σελ. 99) Η σχέση, μεταξύ δύο ανάλογων ποσών x και με συντελεστή αναλογίας $\alpha = 3$, δίνεται από τον τύπο:

$$y = 3 \cdot x$$

.

- Συμπλήρωσε τα κενά του πίνακα και με άλλες τιμές των αναλόγων ποσών x και .
- Βρες τα σημεία του επιπέδου που αναπαριστούν τα παραπάνω ζεύγη τιμών.

x	0	1	2	3
y	0	2	1	1.5

Πίνακας 1.1: Πίνακας Α

x	0	1	2	3
y	1	1.5	2	2.5

Πίνακας 1.2: Πίνακας Β

- Προσπάθησε να διαπιστώσεις, εάν τα σημεία ανήκουν σε μία ημιευθεία ή όχι.
- Η ημιευθεία αυτή περνάει από το σημείο $O(0,0)$ δηλαδή την αρχή των ημιαξόνων;

```
import matplotlib.pyplot as plt
from random import randint
from math import floor
plt.clf()
points = []
for i in range(10):
    x = 0+randint(0,10)*0.5
    y = 3*x
    points.append((x,y))

x = [p[0] for p in points]
y = [p[1] for p in points]
color=['m','g','r','b']
plt.grid()
plt.scatter(x,y, s=100 ,marker='o', c=color)

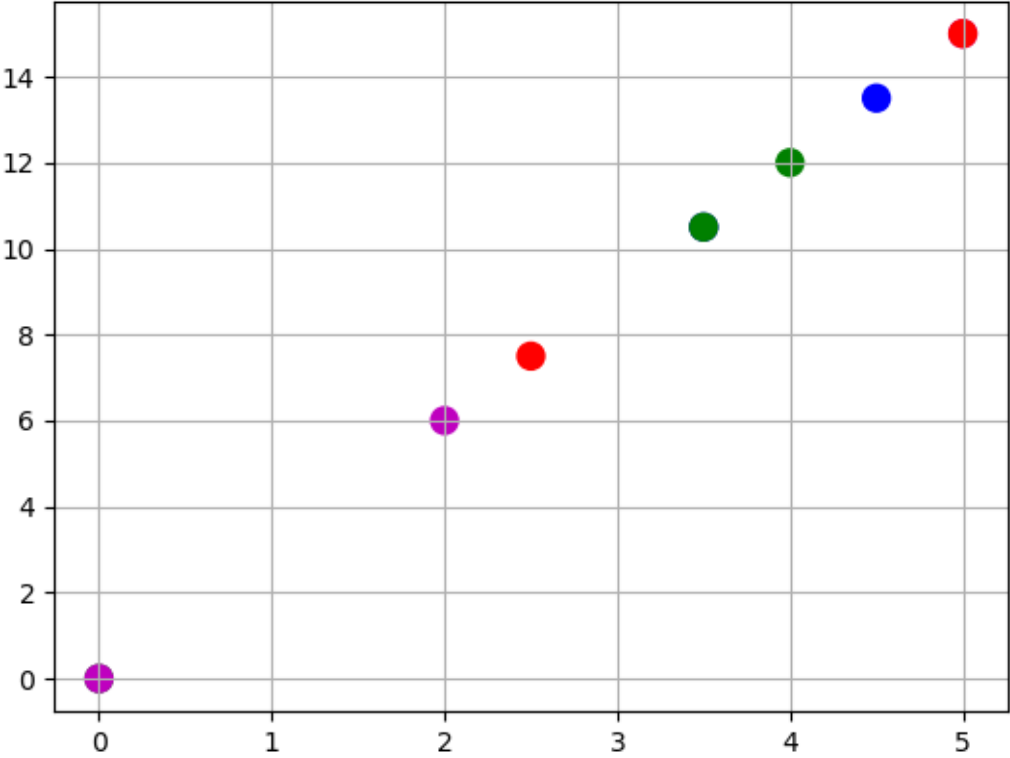
plt.show()
```

Οπότε τα σημεία ανήκουν σε ημιευθεία η οποία περνάει από την αρχή των αξόνων.

Ασκηση 1.1.4 (Στο βιβλίο βρίσκεται στη Σελ. 100) Δίνονται οι πίνακες Α, Β, Γ και Δ.

(α) Να γίνει η γραφική απεικόνιση των ζευγών (x,y) των πινάκων στο επίπεδο και (β) να διαπιστωθεί σε ποια περίπτωση αυτά παριστάνουν ποσά ανάλογα.

```
import matplotlib.pyplot as plt
```



x	0	1	2	3
y	0	1	2	3

Πίνακας 1.3: Πίνακας Γ

x	0	1	2	3
y	0	0.5	1	1.5

Πίνακας 1.4: Πίνακας Δ


```
plt.clf()
pointsA = [(0,0),(1,2),(2,1),(3,1.5)]
pointsB = [(0,1),(1,1.5),(2,2),(3,2.5)]
pointsC = [(0,0),(1,1),(2,2),(3,3)]
pointsD = [(0,0),(1,0.5),(2,1),(3,1.5)]

x = [p[0] for p in pointsA]
y = [p[1] for p in pointsA]
plt.grid()
plt.plot(x,y, marker='o', c='r')

x = [p[0] for p in pointsB]
y = [p[1] for p in pointsB]
plt.grid()
plt.plot(x,y, marker='o', c='g')

x = [p[0] for p in pointsC]
y = [p[1] for p in pointsC]
plt.grid()
plt.plot(x,y,marker='o', c='b')

x = [p[0] for p in pointsD]
y = [p[1] for p in pointsD]
plt.grid()
plt.plot(x,y, marker='o', c='m')
plt.show()
```

Μια πιο σύντομη έκδοση του προγράμματος που δίνει το ίδιο αποτέλεσμα είναι:

```
import matplotlib.pyplot as plt

plt.clf()
pointslist = [[(0,0),(1,2),(2,1),(3,1.5)],
               [(0,1),(1,1.5),(2,2),(3,2.5)],
               [(0,0),(1,1),(2,2),(3,3)],
               [(0,0),(1,0.5),(2,1),(3,1.5)]]
colors = ['r','g','b','m']
for (i,points) in enumerate(pointslist):
    x = [p[0] for p in points]
    y = [p[1] for p in points]
    plt.grid()
    plt.plot(x,y, marker='o', c=colors[i])

plt.show()
```

