

Αλγεβρα
Μαθηματικά Γυμνασίου με Python

Δημήτρης Νικολός

11 Ιουνίου 2020

Κεφάλαιο 1

Εξισώσεις και προβλήματα

Σε αυτό το κεφάλαιο θα χρησιμοποιήσουμε τη βιβλιοθήκη sympy. Υπάρχει ένα περιβάλλον στο οποίο μπορούμε να πληκτρολογούμε εντολές της βιβλιοθήκης ώστε να βλέπουμε τα αποτελέσματα με φιλικό τρόπο στον φυλλομετρητή μας, συνήθως Chrome, Firefox ή Microsoft Edge. Το περιβάλλον αυτό βρίσκεται στη διεύθυνση <https://live.sympy.org/>. Μπορούμε να κάνουμε τα ίδια παραδείγματα στον Mu Editor όπως έχουμε συνηθίσει χρησιμοποιώντας την εντολή:

```
from sympy import *
```

όμως τα αποτελέσματα δεν θα εμφανίζονται με φιλικό τρόπο αλλά με τον συμβολισμό της Python.

1.1 Η έννοια της εξίσωσης

Ασκηση 1.1.1 Γράψε συντομότερα τις εκφράσεις:

- (α) $x + x + x + x$,
- (β) $\alpha + \alpha + \alpha + \beta + \beta$,
- (γ) $3 \cdot \alpha + 5 \cdot \alpha$,
- (δ) $18 \cdot x + 7 \cdot x + 4 \cdot x$,
- (ε) $15 \cdot \beta - 9 \cdot \beta$.

Επειδή τα σύμβολα είναι τα x, a, b θα πρέπει να τα δηλώσουμε στο sympy. Αυτό γίνεται ως εξής:

```
from sympy import *  
x,a,b = symbols("x a b")
```

Στη συνέχεια όποτε αναφέρουμε τα x, a, b η Python θα καταλαβαίνει ότι πρόκειται για σύμβολα και θα δρα ανάλογα. Ετσι αν δώσουμε στην Python

```
>>> x + x + x + x
```

Θα μας δώσει ως απάντηση

$$4x$$

στο live.sympy.org και

```
4*x
```

στην απλή Python ή στο Mu Editor. Αρα το

```
>>> a + a + a + b + b
```

Θα μας δώσει σαν απάντηση:

$$3a + 2b$$

και τα

```
>>> 3*a + 5*a
>>> 18*x + 7*x + 4*x
>>> 15*b - 9b
```

$$8a$$

$$29x$$

$$6b$$

αντίστοιχα.

Άσκηση 1.1.2 Να αντικαταστήσεις το x , με τους αριθμούς 1, 3, 4, 5, 6 και 11, σε κάθε ισότητα της πρώτης στήλης, του παρακάτω πίνακα. Βρες ποιος από αυτούς την επαληθεύει και ποιος όχι.

Εξίσωση	Αριθμοί που την επαληθεύουν	Αριθμοί που δεν την επαληθεύουν
$x - 4 = 1$		
$5 - x = 4$		
$2x = 8$		
$\frac{6}{x} = 2$		
$\frac{x}{2} = 3$		
$x + 7 = 30$		

```
>>> e = x - 4
>>> e.subs(x,1)
```

$$-3$$

```
>>> e.subs(x,3)
```

$$-1$$

```
>>> e.subs(x,4)
```

0

```
>>> e.subs(x,5)
```

1

```
>>> e.subs(x,6)
```

2

```
>>> e.subs(x,11)
```

7

Οπότε ο αριθμός που την επαληθεύει είναι ο 5 και όλοι οι υπόλοιποι δεν την επαληθεύουν.

```
>>> e = 5 - x
```

```
>>> e.subs(x,1)
```

4

```
>>> e.subs(x,3)
```

2

```
>>> e.subs(x,4)
```

1

```
>>> e.subs(x,5)
```

0

```
>>> e.subs(x,6)
```

-1

```
>>> e.subs(x,11)
```

-6

Οπότε ο αριθμός που την επαληθεύει είναι ο 1 και όλοι οι υπόλοιποι δεν την επαληθεύουν.

```
>>> e = 2*x
```

```
>>> e.subs(x,1)
```

2

```
>>> e.subs(x,3)
```

6

```
>>> e.subs(x,4)
```

8

```
>>> e.subs(x,5)
```

10

```
>>> e.subs(x,6)
```

12

```
>>> e.subs(x,11)
```

22

Οπότε ο αριθμός που την επαληθεύει είναι ο 4 και όλοι οι υπόλοιποι δεν την επαληθεύουν.

```
>>> e = 6/x
```

```
>>> e.subs(x,1)
```

6

```
>>> e.subs(x,3)
```

2

```
>>> e.subs(x,4)
```

 $\frac{3}{2}$

```
>>> e.subs(x,5)
```

 $\frac{6}{5}$

```
>>> e.subs(x,6)
```

1

```
>>> e.subs(x,11)
```

 $\frac{6}{11}$

Οπότε ο αριθμός 3 επαληθεύει την εξίσωση και όλοι οι υπόλοιποι δεν την επαληθεύουν:

```
>>> e = x/2
```

```
>>> e.subs(x,1)
```

6

```
>>> e.subs(x,3)
```

 2

```
>>> e.subs(x,4)
```

 $\frac{3}{2}$

```
>>> e.subs(x,5)
```

 $\frac{6}{5}$

```
>>> e.subs(x,6)
```

 1

```
>>> e.subs(x,11)
```

 $\frac{6}{11}$

```
>>> e = x/2
```

```
>>> e.subs(x,1)
```

 $\frac{1}{2}$

```
>>> e.subs(x,3)
```

 $\frac{3}{2}$

```
>>> e.subs(x,4)
```

 2

```
>>> e.subs(x,5)
```

 $\frac{5}{2}$

```
>>> e.subs(x,6)
```

 3

```
>>> e.subs(x,11)
```

$$\frac{11}{2}$$

Ο αριθμός που επαληθεύει την εξίσωση είναι ο 6, οι υπόλοιποι αριθμοί δεν την επαληθεύουν.

```
>>> e = x + 7
>>> e.subs(x,1)
```

8

```
>>> e.subs(x,3)
```

10

```
>>> e.subs(x,4)
```

11

```
>>> e.subs(x,5)
```

12

```
>>> e.subs(x,6)
```

13

```
>>> e.subs(x,11)
```

18

Κανένας από αυτούς τους αριθμούς δεν επαληθεύει την εξίσωση, οπότε:

Εξίσωση	Αριθμοί που την επαληθεύουν	Αριθμοί που δεν την επαληθεύουν
$x - 4 = 1$	5	1, 3, 4, 6 και 11
$5 - x = 4$	1	3, 4, 5, 6 και 11
$2x = 8$	4	1, 3, 5, 6 και 11
$\frac{6}{x} = 2$	3	1, 4, 5, 6 και 11
$\frac{x}{2} = 3$	6	1, 3, 4, 5 και 11
$x + 7 = 30$		1, 3, 4, 5, 6 και 11

Ενας καλύτερος τρόπος για να έχουμε το ίδιο αποτέλεσμα είναι να γραφτεί ένα πρόγραμμα που να υπολογίζει τα αποτελέσματα για όλους τους αριθμούς και να συγκρίνει το αποτέλεσμα με το αναμενόμενο. Η enumerate μετράει τη λίστα και δημιουργεί έναν μετρητή με όνομα *i* που μπορούμε να τον χρησιμοποιήσουμε για να μετρήσουμε τα αναμενόμενα αποτελέσματα:

```
for e in exprs:
    for (i,xi) in enumerate([1,3,4,5,6,11]):
        print(e,xi,e.subs(x,xi),res[i])
        print(e.subs(x,xi)==res[i])
```


Άσκηση 1.1.3 (Στο βιβλίο βρίσκεται στη Σελ. 73) Να λυθούν οι εξισώσεις:

$$x + 5 = 12$$

$$y - 2 = 3$$

$$10 - z = 1$$

$$7 \cdot \phi = 14$$

$$w : 5 = 4$$

$$24 : \psi = 6$$

Η βιβλιοθήκη sympy έχει συνάρτηση solve για να λύνει εξισώσεις όταν το δεξί μέρος της εξίσωσης είναι ο οπότε οι εξισώσεις πρέπει να μετατραπούν με το χέρι σε:

$$x + 5 - 12 = 0$$

$$y - 2 - 3 = 0$$

$$10 - z - 1 = 0$$

$$7 \cdot \phi - 14 = 0$$

$$w : 5 - 4 = 0$$

$$24 : \psi - 6 = 0$$

```
>>> from sympy import *
>>> x,y,z,f,w,psi = symbols('x y z f w psi')
>>> solve(x+5-12)
[7]
>>> solve(y-2-3)
[5]
>>> solve(10-z -1)
[9]
>>> solve(7* f - 14)
[2]
>>> solve(w/5 - 4)
[20]
>>> solve(24/psi - 6)
[4]
```

Η συνάρτηση solve επιστρέφει μια λίστα με τις τιμές που επαληθεύουν την εξίσωση. Επειδή υπάρχει μόνο μία τιμή που επαληθεύει την εξίσωση για αυτό το λόγο υπάρχει μόνο μία τιμή στην κάθε λίστα.

Άσκηση 1.1.4 (Στο βιβλίο βρίσκεται στη Σελ. 63) Μια δεξαμενή χωρητικότητας 6m^3 που έχει μήκος $1,5\text{m}$ και πλάτος 2m , έχει ύψος (α) $1,5\text{m}$ ή (β) 3m ή (γ) 2m ;

```
>>> solve(2*1.5*x - 6)
[2.0]
```

Άσκηση 1.1.5 (Άσκηση 4 του βιβλίου, Σελ. 74) Γράψε με απλούστερο τρόπο τις μαθηματικές εκφράσεις:

- (α) $x + x$,
- (β) $\alpha + \alpha + \alpha$,
- (γ) $3 \cdot \alpha + 52 \cdot \alpha$,
- (δ) $2 \cdot \beta + \beta + 3 \cdot \alpha + 2 \cdot \alpha$,
- (ε) $4 \cdot x + 8 \cdot x - 3 \cdot x$,
- (στ) $7 \cdot \omega + 4 \cdot \omega - 10 \cdot \omega$

```
>>> x+x
```

$$2x$$

```
>>> a = symbols('a')
>>> a+a+a
```

$$3a$$

```
>>> 3*a + 52 * a
```

$$55a$$

```
>>> a,b = symbols('a b')
>>> 2*b+b+3*a+2*a
```

$$5a + 3b$$

```
>>> 4*x+8*-x3*x
```

$$9x$$

```
>>> w = symbols('w')
>>> 7*w+4*-w10*w
```

$$w$$

Άσκηση 1.1.6 (Άσκηση 6 του βιβλίου, Σελ. 74) Στην εξίσωση $2 + \alpha = x$, το α και το x είναι φυσικοί αριθμοί. Ποια από τις τιμές 0, 3, 1 μπορεί να πάρει το x ;

Θα λύσουμε την

$$2 + a - x = 0$$

για αυτές τις τιμές:

```
>>> solve(2+a-0)
[-2]
>>> solve(2+a-3)
[1]
>>> solve(2+a-1)
[-1]
```

Από αυτές τις λύσεις συμπεραίνουμε ότι μόνο η $2 + a - 3$ μπορεί να ισχύει για φυσικό αριθμό και άρα μόνο την τιμή 3 μπορεί να πάρει το x .

Άσκηση 1.1.7 (Άσκηση 7 του βιβλίου, Σελ. 74) Να εξετάσεις, αν ο αριθμός 12 είναι η λύση της εξίσωσης: $x + 13 = 25$

```
>>> e = x + 13
>>> e.subs(e,x,12)
```

25

Άσκηση 1.1.8 (Άσκηση 8 του βιβλίου, Σελ. 74) Τοποθέτησε ένα “X” στη θέση εκείνη που ο αριθμός επαληθεύει την αντίστοιχη εξίσωση:

	1	2	3	4	5	6	7	8
$x-2 = 4$								
$1 + y = 4$								
$18-\omega = 10$								
$2-\alpha = 1$								
$93-\beta = 86$								

Χρησιμοποιώντας έναν πίνακα για τα αποτελέσματα res γράφουμε:

```
from sympy import *
x,y,w,a,b = symbols('x y w a b')
s = [x,y,w,a,b]
e = [x-2,1+y,18-w,2-a,93-b]
res = [4,4,10,1,86]
for (en,expr) in enumerate(e):
    for i in range(9):
        if expr.subs(s[en],i) == res[en]:
            print('X',end='')
        else:
            print('0',end='')
    print()
```

που δίνει το αποτέλεσμα

```
000000X00
000X00000
00000000X
0X0000000
0000000X0
```

οπότε ο πίνακας διαμορφώνεται ως εξής:

	1	2	3	4	5	6	7	8
$x-2 = 4$						X		
$1+y = 4$				X				
$18-\omega = 10$								X
$2-\alpha = 1$		X						
$93-\beta = 86$							X	

Ασκηση 1.1.9 (Ασκηση 9 του βιβλίου, Σελ. 74) Ποιος αριθμός επαληθεύει κάθε μία από τις παρακάτω εξισώσεις;

- (α) $x + 4,9 = 15,83$
- (β) $40,4 + x = 93,19$
- (γ) $53,404 - x = 4,19$
- (δ) $38 - x = 7,1$.

Όπως και προηγουμένως η symPy μπορεί να λύσει την εξίσωση αρκεί το αριστερό μέλος να είναι 0. Οπότε:

```
>>> solve(x+4.9-15.83)
[10.930000000000000]
>>> solve(40.4+x-93.19)
[52.790000000000000]
>>> solve(53.404 - x - 4.19)
[49.214000000000000]
>>> solve(38-x-7.1)
[30.900000000000000]
```

Αρα οι απαντήσεις είναι 10,93, 52,79, 49,214, 30,9.

Ασκηση 1.1.10 (Ασκηση 11 του βιβλίου, Σελ. 74) Ποια είναι η τιμή του x για να ισχύει;

- (α) $3x = \frac{12}{20}$,
- (β) $\frac{5}{7} = \frac{15}{x}$,
- (γ) $\frac{35}{40} = \frac{x}{8}$,
- (δ) $\frac{49}{5} = x + \frac{4}{5}$.

Με την ίδια λογική:

```
>>> solve(3/x-12/20)
[9.000000000000000]
>>> solve(5/7-15/x)
[21.000000000000000]
```

```
>>> solve(35/40-x/8)
[7.000000000000000]
>>> solve(49/5-x-4/5)
[9.000000000000000]
```

Αρα οι απαντήσεις είναι 9, 21, 7 και 9.

Ασκηση 1.1.11 (Ασκηση 12 του βιβλίου, Σελ. 74) Λύσε τις εξισώσεις:

- (α) $\varnothing + 3 = 4$,
- (β) $x - 2 = 8$,
- (γ) $t + 4 + 1 = 3 + 19$,
- (δ) $6 - x = 5$.

```
from sympy import *
x,n,t = symbols('x n t')
print(solve(n+3-4))
print(solve(x-2-8))
print(solve(t+4+1-3-19))
print(solve(6-x-5))
```

και το αποτέλεσμα είναι:

```
[1]
[10]
[17]
[1]
```

Ασκηση 1.1.12 (Ασκηση 13 του βιβλίου, Σελ. 74) Ποιον αριθμό πρέπει να προσθέσεις στον 4, για να προκύψει ο αντίστροφός του $\frac{5}{21}$;

```
>>> solve(x+4-21/5)
[0.200000000000000]
```

Ασκηση 1.1.13 (Ασκηση 14 του βιβλίου, Σελ. 74) Σε έναν αριθμό προσθέτουμε 5 και παίρνουμε άθροισμα 313. Ποιος είναι ο αριθμός;

```
>>> solve(x+5-313)
[308]
```

Ασκηση 1.1.14 (Ασκηση 15 του βιβλίου, Σελ. 74) Τα τετράγωνα που αποτελούν τους “δομικούς λίθους” με τους οποίους κατασκευάζουμε τα παρακάτω σχήματα, έχουν πλευρά ίση με 1 cm. (α) Βρες την περίμετρο του πέμπτου σχήματος και εξήγησε πώς έφτασες στην απάντησή σου. (β) Γράψε ένα τύπο με τη βοήθεια του οποίου θα μπορείς να υπολογίσεις την περίμετρο κάθε σχήματος. (γ) Ποια είναι η σειρά του σχήματος του οποίου η περίμετρος είναι 128 cm;

α) Το πέμπτο σχήμα θα έχει περίμετρο 20cm.

β)

$$4x$$

(γ)

```
>>> solve(4x-128)
32
```