Μαθηματικά Γυμνασίου με Python

Δημήτρης Νικολός

16 Δεκεμβρίου 2020

Κεφάλαιο 1

Θετικοί και αρνητικοί αριθμοί

1.1 Θετικοί και Αρνητικοί Αριθμοί (Ρητοί αριθμοί) - Η ευθεία των ρητών - Τετμημένη σημείου

Ασκηση 1.1.1 *(Ασκηση 4 του βιβλίου, Σελ. 117) Στα ζεύγη αριθμών που ακολουθούν να βρεις ποιοι αριθμοί είναι ομόσημοι και ποιοι είναι ετερόσημοι: (α) 3 και +3, (β) 2 και 5, (γ) −2 και −4, (δ) 7 και +9, (ε) −2 και 1,(στ) 17 και −20, (ζ) −9 και −3,2, (η) −10,5 και 11, (θ) −3 και −100, (ι) +6,7 και +12,3*

Αργότερα θα μάθεις έναν εύκολο τρόπο για να ελέγξεις αν δύο αριθμοί είναι ομόσημοι οι ετερόσημοι, με όσα έχεις δει μέχρι τώρα μπορείς να το κάνεις ως εξής:

```
while (True):
    a = float(input('α> '))
    b = float(input('β> '))

    if a > 0:
        if b > 0:
            print("Ομόσημοι")
        else:
            print("Ετερόσημοι")
    else:
        if b < 0:
            print("Ομόσημοι")
        else:
            print("Ετερόσημοι")
```

και το αποτέλεσμα θα είναι:

```
α
>3β
>+3Ομόσημοια
```

```
>2β
>5Ομόσημοια

>-2β
>-4Ομόσημοια

>7β
>+9Ομόσημοια

>-2β
>1Ετερόσημοια

>17β
>-20Ετερόσημοια

> -9β
> -3.2Ομόσημοια

> -10.5β
> 11Ετερόσημοια

> -3β
> -100Ομόσημοια

> 6.7β
> 12.3Ομόσημοι
```

Ασκηση 1.1.2 *(Ασκηση 6 του βιβλίου, Σελ. 117) Βρες τη λέξη που σχηματίζεται από τα γράμματα με τετμημένες −6, 10, 9, −9, 5, −5, 0 στο παρακάτω σχήμα. Στη συνέχεια γράψε μ’ αυτό τον τρόπο ένα όνομα που σου αρέσει. Εικόνα*

Οι αντιστοιχίσεις μπορούν να αποθηκευτούν σε ένα λεξικό και να βρούμε τη λέξη ως εξής:

```
antistoixiseis = {-11:'Ψ',
-10:'Φ',
-9:'Τ',
-8:'Ρ',
-7:'Ξ',
-6:'Μ',
-5:'Κ',
-4:'Θ',
-3:'Ζ',
-2:'Δ',
-1:'Β',
0:'Ο',
1:'Α',
```

```
2:'Γ',
3:'Ε',
4:'Η',
5:'Ι',
6:'Λ',
7:'Ν',
8:'Π',
9:'Σ',
10:'Υ',
11:'Χ',
12:'Ω'}
tetmimenes = [-6,10,9,-9,5,-5,0]
for i in tetmimenes:
    print(antistoixiseis[i])
```

Το αποτέλεσμα θα είναι:

```
Μ
Υ
Σ
Τ
Ι
Κ
Ο
```

Αν αλλάξουμε την εντολή print ως εξής:

```
print(antistoixiseis[i],end='')
```

Θα προκύψει:

```
ΜΥΣΤΙΚΟ
```

Με το end=” δίνουμε την οδηγία στην Python να μην αλλάζει γραμμή μετά από κάθε print. Η κωδικοποίηση γίνεται με το ίδιο λεξικό αλλά ως εξής:

```
lexi = 'ΜΗΝΥΜΑ'
for l in lexi:
    print(list(antistoixiseis.keys())[
        list(antistoixiseis.values()).index(l)],
          end=',')
```

Ο λόγος για τον οποίο είναι τόσο πολύπλοκη η κωδικοποίηση είναι ότι το λεξικό δεν μπορεί να υποστηρίξει και τις δύο κατευθύνσεις πρόσβασης. Ενας εναλλακτικός τρόπος αναπαράστασης των ίδιων δεδομένων θα ήταν ο εξής:

```
grammata = ['Ψ','Φ','Τ','Ρ','Ξ','Μ','Κ','Θ','Ζ','Δ','Β','Ο','Α','Γ','Ε','Η','Ι','Λ','Ν','Π','
arithmoi = [-11,-10,-9,-8,-7,-6,-5,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12]

tetmimenes = [-6,10,9,-9,5,-5,0]
for i in tetmimenes:
    print(grammata[arithmoi.index(i)],end='')
print()
```

```
lexi = 'ΜΗΝΥΜΑ'
for l in lexi:
    print(arithmoi[grammata.index(l)],end=',')
```

που δίνει το σωστό αποτέλεσμα:

```
   ΜΥΣΙΚΟ
Τ
-6,4,7,10,-6,1,
```

Ασκηση 1.1.3 *(Ασκηση 7 του βιβλίου, Σελ. 117) Τα σημεία Α και Β έχουν τετμημένες α και β, αντίστοιχα. Να βρεθεί η τετμημένη του μέσου Μ του τμήματος ΑΒ όταν: (α) α = +5 και β = +8, (β) α = −4 και β = −13.*

```
>>> (5+8)/2
6.5
>>> (-4+(-13))/2
-8.5
```

1.2 Απόλυτη τιμή

Να συμπληρώσεις τον πίνακα που ακολουθεί:

Αριθμός	-2,73	+7,66	-1,05	0
Απόσταση του σημείου που αντιστοιχεί από την αρχή του άξονα				

Γνωρίζουμε ότι η απόσταση από την αρχή του άξονα είναι η απόλυτη τιμή. Η python μπορεί να υπολογίσει την απόλυτη τιμή με την ειδική εντολή abs, τα τρία πρώτα γράμματα της λέξης absolute. Οπότε έχουμε:

```
>>> abs(-2.73)
2.74
>>> abs(+7.66)
7.66
>>> abs(-1.05)
1.05
>>> abs(0)
0
>>> abs(+8.07)
8.07
>>> abs(-8)
8
```

Ασκηση 1.2.1 *(Ασκηση 3 του βιβλίου, Σελ. 121) ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ (α) Ισχύει η ανισότητα: $-5,7 < 5,7$.*

(β) Ισχύει η ανισότητα: $-7,6 > -6,7$.

(γ) Στην ανισότητα $2,3 < x < 4,7$ ο x μπορεί να πάρει 2 ακέραιες τιμές.

(δ) Υπάρχουν 5 ακριβώς ακέραιοι που αληθεύουν τη σχέση: $-2 \leq x \leq 2$.

(ε) Δύο ακέραιοι με αντίθετο πρόσημο είναι αντίθετοι.

(α)

```
>>> -5.7 < 5.7
True
```

Σωστό (β)

```
>>> -7.6 > -6.7
False
```

Λάθος (γ)

```
for i in range(10):
    if i > 2.3 and i < 4.7:
        print(i)
```

το αποτέλεσμα είναι:

```
3
4
```

Ο x μπορεί να πάρει 2 ακέραιες τιμές άρα ΣΩΣΤΟ. (δ)

```
for i in range(-3,3):
    if i >= -2 and i <= 2:
        print(i)
```

το αποτέλεσμα είναι:

```
-2
-1
0
1
2
```

Υπάρχουν 5 ακριβώς ακέραιοι που αληθεύουν τη σχέση άρα ΣΩΣΤΟ (ε) Λάθος γιατί υπάρχει η εξαίρεση του μηδενός.

Ασκηση 1.2.2 *(Ασκηση 4 του βιβλίου, Σελ. 121) Βρες την απόλυτη τιμή των ρητών: (α) +7,25, (β) −2,5, (γ) +16, (δ) −20,05, (ε) −58.*

```
>>> abs(+7.25)
7.25
>>> abs(-2.5)
2.5
```

```
>>> abs(+16)
16
>>> abs(-20.05)
20.05
>>> abs(-58)
58
```

Ασκηση 1.2.3 *(Ασκηση 5 του βιβλίου, Σελ. 121) Βρες τους αριθμούς που έχουν ως απόλυτη τιμή: (α) 100, (β) 21,7, (γ) 0, (δ) 7,03, (ε) 5,2.*

```
def fromabs(x):
    if x == 0:
        return(0)
    else:
        return((x, -x))

>>> fromabs(100)
(100, -100)
>>> fromabs(21.7)
(21.7, -21.7)
>>> fromabs(0)
0
>>> fromabs(7.03)
(7.03, -7.03)
>>> fromabs(5.2)
(5.2, -5.2)
```

Ασκηση 1.2.4 *(Ασκηση 6 του βιβλίου, Σελ. 121) Συμπλήρωσε τον πίνακα:*

<table>
<tr><td>Αριθμός</td><td>1</td><td></td><td></td><td>-19</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Αντίθετος</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>-8</td><td>12</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Απόλυτη τιμή</td><td></td><td colspan="2">2</td><td></td><td></td><td></td><td colspan="2">7</td></tr>
</table>

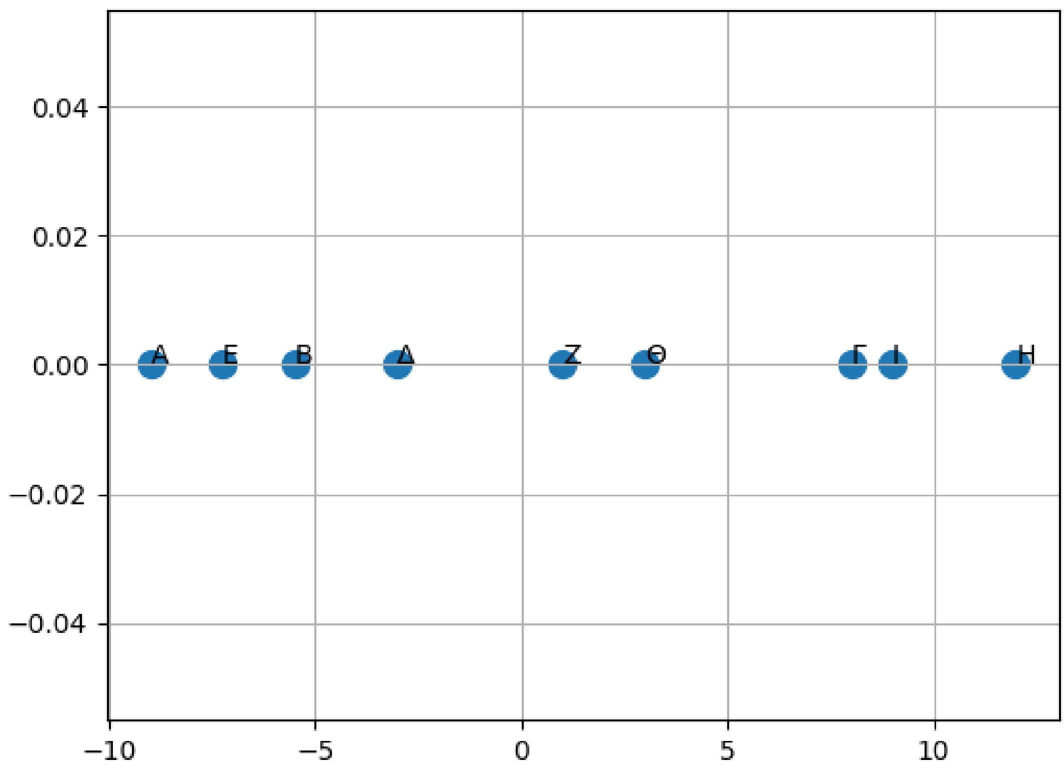
Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την abs και την fromabs για να βρούμε κάποια στοιχεία του πίνακα ο οποίος διαρμορφώνεται ως εξής:

<table>
<tr><td>Αριθμός</td><td>1</td><td>2</td><td>-2</td><td>-19</td><td>8</td><td>-12</td><td>7</td><td>-7</td></tr>
<tr><td>Αντίθετος</td><td>-1</td><td>-2</td><td>2</td><td>19</td><td>-8</td><td>12</td><td>-7</td><td>7</td></tr>
<tr><td>Απόλυτη τιμή</td><td>1</td><td colspan="2">2</td><td>19</td><td>8</td><td>12</td><td colspan="2">7</td></tr>
</table>

Ασκηση 1.2.5 *(Ασκηση 7 του βιβλίου, Σελ. 121) Τοποθέτησε στον άξονα $x'x$ τα σημεία με τετμημένες:–9, –$5,5$, $+8$, -3, $-7,25$, $+1$, $+12$, $+3$, $+9$. Ποια από αυτά είναι συμμετρικά ως προς την αρχή του άξονα;*

```
import matplotlib.pyplot as plt

plt.clf()
points = [(-9,0), (-5.5,0), (8,0), (-3,0), (-7.25,0), (+1,0), (+12,0), (+3,0), (+9,0)]
pointName = ['A','B','Γ','Δ','E','Z','H','Θ','I']
x = [p[0] for p in points]
y = [p[1] for p in points]
plt.grid()
plt.scatter(x,y, s=100 ,marker='o')
for (i,p) in enumerate(points):
    plt.annotate(pointName[i],(p[0],p[1]))

plt.show()
```

Που δίνει το αποτέλεσμα: Για να δούμε ποια είναι συμμετρικά θα πρέπει



να δούμε ποια ζευγάρια έχουν τις ίδιες απόλυτες τιμές:

```
    l = [-9, -5.5, 8, -3, -7.25, +1, +12, +3, +9]
    for i in l:
```

```
        apTimi = abs(i)
        for j in l:
            if apTimi == abs(j) and i != j:
                print(i,j)
```

Που δίνει το αποτέλεσμα:

```
-9 9
-3 3
3 -3
9 -9
```

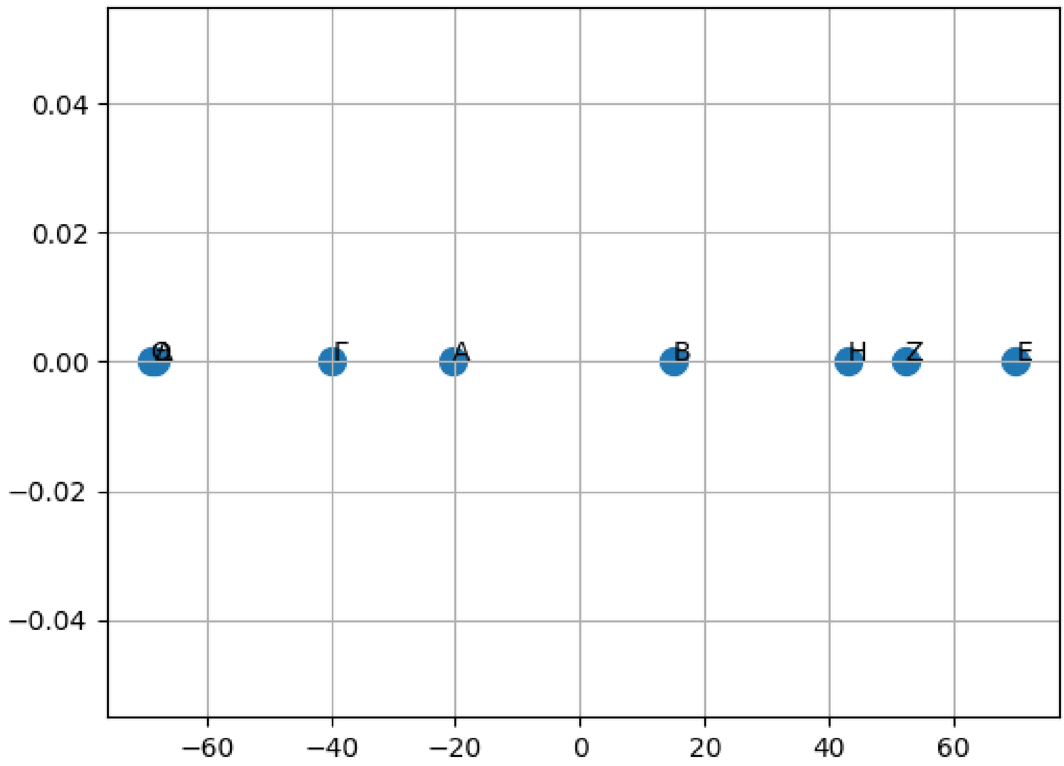
Ασκηση 1.2.6 *(Ασκηση 8 του βιβλίου, Σελ. 121) Σχεδίασε τον άξονα $x'Ox$, με κατάλληλη μονάδα για να παραστήσεις τα σημεία με τετμημένες τους αριθμούς:* $-20,5$, $+15$, $-39,75$, $-68,25$, $+70$, $+52,25$,$+43$, -69.

```
import matplotlib.pyplot as plt

plt.clf()
points = [(-20.5,0), (+15,0), (-39.75,0), (-68.25,0), (+70,0), (+52.25,0), (+43,0), (
pointName = ['A','B','Γ','Δ','E','Z','H','Θ']
x = [p[0] for p in points]
y = [p[1] for p in points]
plt.grid()
plt.scatter(x,y, s=100 ,marker='o')
for (i,p) in enumerate(points):
    plt.annotate(pointName[i],(p[0],p[1]))

plt.show()
```

Που δίνει το αποτέλεσμα: Ετσι βλέπουμε ότι η python επέλεξε μια μονάδα να αντιστοιχεί στο 20 (1:20) και σε αυτή τη κλίμακα είναι αδύνατο να διακρίνουμε τους αριθμούς -69 και $-68,25$.

Ασκηση 1.2.7 *Να συγκρίνεις τους αριθμούς: (α) +41 και +38, (β) 9 και 11, (γ) –3 και –2, (δ) –9 και –16, (ε) 7 και –8, (στ) 0 και –3, (ζ) 0 και +4.*

```
>>> 41 > 38
True
>>> 9 < 11
True
>>> -3 < -2
True
>>> -9 > -16
True
>>> 7 > -8
True
>>> 0 > -3
```




```
True
>>> 4 > 0
True
```

Ασκηση 1.2.8 *(Ασκηση 10 του βιβλίου, Σελ. 121) Να συγκρίνεις τους αριθμούς: (α)* 11, -11 *και* $|11|$, *(β)* -3, $+3$ *και* $|3|$. *Τι συμπεραίνεις;*

```
>>> 11 == abs(11)
True
>>> -11 < abs(11)
True
>>> -3 < abs(3)
True
>>> 3 == abs(3)
True
```

Ασκηση 1.2.9 *(Ασκηση 11 του βιβλίου, Σελ. 121) Να γράψεις τους αριθμούς: −2, +7, +15, −3, 0, −4, +5, −8 και −10 σε αύξουσα σειρά.*

```
>>> print(sorted([-2, +7, +15, -3, 0, -4, +5, -8, -10]))
[-10, -8, -4, -3, -2, 0, 5, 7, 15]
```

Ασκηση 1.2.10 *(Ασκηση 12 του βιβλίου, Σελ. 121) Να συμπληρώσεις με το κατάλληλο σύμβολο: <, > ή = τα κενά, ώστε να προκύψουν αληθείς σχέσεις: (α) $-3\ldots-8$, (β) $-4\ldots10$, (γ) $0\ldots-1$, (δ) $+3\ldots0$, (ε) $-5\ldots-|-5|$, (στ) $-5\ldots-(+5)$, (ζ) $|+7|\ldots|-7|$, (η) $-(-8)\ldots-8$, (θ) $+3\ldots-(+4)$, (ι) $0\ldots-|-4|$.*

```
>>> -3 > -8
True
>>> -4 < 10
True
>>> 0 > -1
True
>>> 3 > 0
True
>>> -5 == -abs(-5)
True
>>> -5 == -(+5)
True
>>> abs(+7) == abs(-7)
True
>>> -(-8) > -8
True
>>> 3 > -(+4)
True
>>> 0 > -abs(-4)
True
```

Ασκηση 1.2.11 *Το x παριστάνει έναν ακέραιο αριθμό. Για ποιες τιμές του x θα ισχύουν οι σχέσεις: (α) $-13 < x < -8$, (β) $-4 > x > -5$, (γ) $-2 < x < 5$.*

```
>>> for i in range(-14,-7):
    if i > -13 and i < -8:
        print(i)
-12
-11
-10
-9
>>> for i in range(-6,0):
    if i < -4 and i > -5:
        print(i)
```

```
>>> for i in range(-3,6):
    if i>-2 and i<5:
        print(i)
-1
0
1
2
3
4
```

1.3 Πρόσθεση ρητών αριθμών

Ασκηση 1.3.1 *(Ασκηση 1 του βιβλίου, Σελ. 123) Σε μια πόλη παρατηρήθηκαν οι παρακάτω αυξομειώσεις της θερμοκρασίας: Αρχικές θερμοκρασίες Αυξομειώσεις θερμοκρασίας*

(α) Βράδυ +1°C την επόμενη μέρα αυξήθηκε κατά 4°C
(β) Μεσημέρι −1°C το βράδυ μειώθηκε κατά 2°C
(γ) Βράδυ −2°C την επόμενη μέρα αυξήθηκε κατά 5°C
(δ) Μεσημέρι +5°C το βράδυ μειώθηκε κατά 7°C
(ε) Μεσημέρι −3°C το βράδυ μειώθηκε κατά 3°C

```
>>> 1 + 4
5
>>> -1 + (-2)
-3
>>> -2 + 5
3
>>> 5 + (-7)
-2
>>> +3 + (-3)
0
```

Ασκηση 1.3.2 *(Ασκηση 2 του βιβλίου, Σελ. 124) Να υπολογιστούν τα παρακάτω αθροίσματα: (α)* $(+5,6)+(+8,7)+(-3,2)+(-6,9)+(+3,2)+(-7,4)$ *και (β)* $(-1,8)+(+4,8)+(+9,7)+(-4,8)+(-3,4)+(+1,5)$.

```
>>> (+5.6) + (+8.7) + (-3.2) + (-6.9) + (+3.2) + (-7.4)
-2.6645352591003757e-15
```

Στην ουσία το αποτέλεσμα είναι 0, αυτός ο αριθμός είναι πολύ μικρός.

```
>>> (-1.8) + (+4.8) + (+9.7) + (-4.8) + (-3.4) + (+1.5)
6.0
```

Ασκηση 1.3.3 *(Ασκηση 2 του βιβλίου, Σελ. 125) Υπολόγισε τα αθροίσματα: (α) (+4,05) + (+6,15),*
(β) (+5,03) + (+4,07),
(γ) (+2,7) + (+97,3),
(δ) (+2,6) + (+11,4),
(ε) (+7,25) + (+8,75),
(στ) (−3,5) + (−2,5),
(ζ) (−1,3) + (−5,2),
(η) (−7,15) + (−4,85),
(θ) (−5,25) + (−9,75),
(ι) (−13,7) + (−6,3).

```
>>> (+4.05) + (+6.15)
10.2
>>> (+5.03) + (+4.07)
9.100000000000001
>>> (+2.7) + (+97.3)
100.0
>>> (+2.6) + (+11.4)
14.0
>>> (+7.25) + (+8.75)
16.0
>>> (-3.5) + (-2.5)
-6.0
>>> (-1.3) + (-5.2)
-6.5
>>> (-7.15) + (-4.85)
-12.0
>>> (-5.25) + (-9.75)
-15.0
>>> (-13.7) + (-6.3)
-20.0
>>>
```

Ασκηση 1.3.4 *Υπολόγισε τα αθροίσματα: (α)* $(+4,05) + (-6,15)$*,*
(β) $(+5,03) + (-4,07)$*,*
(γ) $(-2,7) + (+97,3)$*,*
(δ) $(-2,6) + (+11,4)$*,*
(ε) $(+7,25) + (-8,75)$*,*
(στ)$(+3,5) + (-2,5)$*,*
(ζ) $(-1,3) + (+5,2)$*,*
(η) $(+7,15) + (-4,85)$*,*
(θ) $(-5,25) + (+9,75)$*,*
(ι) $(+13,7) + (-6,3)$*.*

```
>>> (+4.05) + (-6.15)
-2.1000000000000005
>>> (+5.03) + (-4.07)
0.96
>>> (-2.7) + (+97.3)
94.6
>>> (-2.6) + (+11.4)
8.8
>>> (+7.25) + (-8.75)
-1.5
>>> (+3.5) + (-2.5)
1.0
>>> (-1.3) + (+5.2)
3.9000000000000004
>>> (+7.15) + (-4.85)
2.3000000000000007
>>> (-5.25) + (+9.75)
4.5
>>> (+13.7) + (-6.3)
7.3999999999999995
```

Ασκηση 1.3.5 *(Ασκηση 4 του βιβλίου, Σελ. 125)*

+	+4	-8	-11	+17
-5				
+9				
-4				
-21				

```
>>> for i in [+4,-8,-11,+17]:
    for j in [-5,+9,-4,-21]:
        print(i,'+',j,'=',i+j)
4 + -5 = -1
4 + 9 = 13
4 + -4 = 0
4 + -21 = -17
-8 + -5 = -13
-8 + 9 = 1
-8 + -4 = -12
-8 + -21 = -29
-11 + -5 = -16
-11 + 9 = -2
-11 + -4 = -15
-11 + -21 = -32
17 + -5 = 12
```

```
17 + 9 = 26
17 + -4 = 13
17 + -21 = -4
```

και ο πίνακας γίνεται:

+	+4	-8	-11	+17
-5	-1	-13	-16	12
+9	13	1	-2	26
-4	0	-12	-15	13
-21	-17	-29	-32	-4

Ασκηση 1.3.6 *(Ασκηση 5 του βιβλίου, Σελ. 125) Τοποθέτησε στα κενά τα κατάλληλα πρόσημα, ώστε να προκύψουν αληθείς ισότητες:*

(α) $(\ldots 6) + (-8) = -2$,
(β) $(+5) + (\ldots 5) = 0$,
(γ) $(+7) + (\ldots 9) = +16$,
(δ) $(\ldots 9) + (\ldots 8) = -17$,
(ε) $(\ldots 6) + (\ldots 5) = +11$.

```
>>> +6 + (-8) == -2
True
>>> (+5) + (-5) == 0
True
>>> (+7) + (+9) == 16
True
>>> (-9) + (-8) == -17
True
>>> (+6) + (+5) == +11
True
```

Ασκηση 1.3.7 *(Ασκηση 6 του βιβλίου, Σελ. 125) Εξέτασε αν είναι μαγικά τα τετράγωνα: (Μαγικά τετράγωνα είναι αυτά στα οποία η πρόσθεση των αριθμών κάθε στήλης ή γραμμής, καθώς και των διαγωνίων τους, δίνουν το ίδιο ακριβώς άθροισμα).*

-1	+4	-3
-2	0	+2
+3	-4	+1

Ενα τετράγωνο με αριθμούς μπορεί να απαρασταθεί σαν μια λίστα από λίστες ως εξής:

+1,1	+2,4	-2,5
-0,1	+3,5	-2,4
0	-4,9	+5,9

```
a = [[-1,+4,-3],
        [-2,0,+2],
        [+3,-4,+1]]
b = [[+1.1,+2.4,-2.5],
         [-0.1,+3.5,-2.4],
         [0,-4.9,+5.9]]
```

Κάθε στοιχείο της λίστας a είναι μια λίστα με κάθε γραμμή του πίνακα οπότε για να βρούμε αν όλες οι γραμμές έχουν το ίδιο άθροισμα θα πρέπει να βρούμε το πρώτο και να συγκρίνουμε τις υπόλοιπες με αυτό.

```
def ismagic(s):
    athrElegxou = s[0][0]+s[0][1]+s[0][2]
    for i in  range(3):
        athr = s[i][0]+s[i][1]+s[i][2]
        if athr!= athrElegxou:
            return(False)
    return(True)
```

Το παραπάνω πρόγραμμα ελέγχει μόνο τις γραμμές θα πρέπει να ελέγξουμε και τις στήλες οι στήλες είναι οι εξής:

```
>>> a[0][0]
-1
>>> a[1][0]
-2
>>> a[2][0]
3
```

Ετσι το πρόγραμμα διαμορφώνεται ως εξής:

```
def ismagic(s):
    athrElegxou = s[0][0]+s[0][1]+s[0][2]
    for i in  range(3):
        athr = s[i][0]+s[i][1]+s[i][2]
        if athr!= athrElegxou:
            return(False)
    for i in range(3):
        athr = s[0][i] + s[1][i]+s[2][i]
        if athr!=athrElegxou:
            return(False)
    return(True)
```

Τέλος πρέπει να ελέγξουμε τις διαγωνίους που είναι οι `a[0][0],a[1][1],a[2][2]` και `a[0][2],a[1][1],a[2][0]`. Οπότε το τελικό πρόγραμμα γίνεται:

```
def ismagic(s):
    athrElegxou = s[0][0]+s[0][1]+s[0][2]
    for i in  range(3):
        athr = s[i][0]+s[i][1]+s[i][2]
        if athr!= athrElegxou:
            return(False)
    for i in range(3):
        athr = s[0][i] + s[1][i]+s[2][i]
        if athr!=athrElegxou:
            return(False)
    athr = a[0][0]+a[1][1]+a[2][2]
    if athr!=athrElegxou:
        return(False)
    athr = a[0][2]+a[1][1]+a[2][0]
    if athr!=athrElegxou:
        return(False)
    return(True)
```

Εκτελώντας την παραπάνω συνάρτηση παίρνουμε:

```
>>> ismagic(a)
True
>>> ismagic(b)
False
```

Που σημαίνει ότι ο πρώτος πίνακας είναι μαγικό τετράγωνο ενώ ο δεύτερος δεν είναι. Οντως για τον δεύτερο βλέπουμε στις διαγώνιες ότι:

```
>>> +1.1+3.5+5.9
10.5
>>> -2.5+3.5+0
1
```

Ασκηση 1.3.8 *(Ασκηση 7 του βιβλίου, Σελ. 125) Υπολόγισε τα αθροίσματα: (α)* $(-3.8) + (+2.8) + (-5.4) + (+8.2)$

(β) $(-3.5) + (-9.99) + (+2.5) + (-15.75) + (+20.75) + (+9.99)$

```
>>> (-3.8)+(+2.8)+(-5.4)+(+8.2)
1.7999999999999999
>>> (-3.5)+(-9.99)+(+2.5)+(-15.75)+(+20.75)+(+9.99)
3.9999999999999982
```

Ασκηση 1.3.9 *(Ασκηση 8 του βιβλίου, Σελ. 125) Υπολόγισε τα αθροίσματα: (α)* $\left(+\frac{9}{4}\right) + \left(-\frac{5}{4}\right) + \left(\frac{2}{3}\right) + \left(-\frac{5}{3}\right) + \left(\frac{7}{13}\right) + \left(-\frac{20}{13}\right)$ *και*

(β) $\left(+\frac{1}{7}\right) + \left(-\frac{5}{7}\right) + \left(+\frac{3}{5}\right) + \left(-\frac{1}{35}\right)$

```
>>> from fractions import Fraction
>>> (+Fraction(9,4))+(-Fraction(5,4))+(Fraction(2,3))+(-Fraction(5,3))+(Fraction(7,13))+(-Fra
Fraction(-1, 1)
>>> (+Fraction(1,7))+(-Fraction(5,7))+(+Fraction(3,5))+(-Fraction(1,35))
Fraction(0, 1)
```

Οπότε οι απαντήσεις είναι -1 και 0 αντίστοιχα.

1.4 Αφαίρεη ρητών αριθμών

Ασκηση 1.4.1 *(Ασκηση 1 του βιβλίου, Σελ. 127) Ενα βράδυ το θερμόμετρο στο μπαλκόνι ενός σπιτιού έδειχνε -3^{o}C και μέσα στο σπίτι 18^{o}C. Πόση ήταν η διαφορά θερμοκρασίας;*

```
>>> 18 - (-3)
21
```

Ασκηση 1.4.2 *(Ασκηση 2 του βιβλίου, Σελ. 127) Ενας έμπορος χρωστάει στον προμηθευτή του 897,56€ και του οφείλει ένα πελάτης 527,42€. Πόσα € πρέπει να έχει στο ταμείο για να ξεχρεώσει;*

```
>>> (+897.56)-(+527.42)
370,14
```

Ασκηση 1.4.3 *(Ασκηση 3 του βιβλίου, Σελ. 127) Να λυθούν οι εξισώσεις:*
(α) $x + (+3) = (-9)$
(β) $(-8) - x = +7$

```
>>> from sympy import symbols,solve
>>> x = symbols('x')
>>> expr=x+(+3)+(+9)
>>> solve(expr)
[-12]
>>> expr=(-8)-x-7
>>> solve(expr)
[-15]
```

Ασκηση 1.4.4 *(Ασκηση 4 του βιβλίου, Σελ. 127) Να βρεθεί η τιμή της παράστασης* $-13 - (0,38 - 11 - 13) + (0,38 - 11)$.

```
>>> -13-(0.38-11-13)+(0.38-11)
-1.7763568394002505e-15
>>>
```

Στην ουσία η απάντηση είναι 0.

Ασκηση 1.4.5 *(Ασκηση 1 του βιβλίου, Σελ. 128) δ) Ισχύει ότι:* $6-(+8)+(+5)+(-3)+(2)+(-1)=0$ *.*

ε) Λύση της εξίσωσης $x+(-3)=-2$ *είναι ο αριθμός* $+1$*.*

στ) Οι εξισώσεις $x+(-2)=+5$ *και* $x-(+7)=10+(+5)$ *έχουν την ίδια λύση. ζ) Λύση της εξίσωσης* $x-(-2)$ = $-8+(+7)-(-4)$ *είναι ο αριθμός* $+1$*.*

δ)

```
>>> 6 - ( + 8 ) + ( + 5 ) + ( - 3 ) + ( 2 ) + ( - 1 ) == 0
False
>>> 6 - ( + 8 ) + ( + 5 ) + ( - 3 ) + ( 2 ) + ( - 1 )
1
```

Αρα λάθος ε) Στην python μπορούμε να δούμε αν η λύση της μιας εξίσωσης είναι ένας αριθμός λύνοντάς τη ή αντικαθιστώντας τη λύση και βλέποντας αν ισχύει.

```
from sympy import symbols,solve
>>> x = symbols('x')
>>> expr = x+(-3)
>>> expr.subs(x,1)
-2
>>> expr = expr + 2
>>> expr
x-1
>>> solve(expr)
[1]
```

στ)

```
>>> from sympy import symbols,solve
>>> x = symbols('x')
>>> expr1 = x+(-2)-(+5)
>>> solve(expr1)
7
>>> expr2 = x-(+7)-(10+(+5))
>>> solve(expr2)
22
```

Αρα Λάθος ζ)

```
>>> from sympy import symbols,solve
>>> x = symbols('x')
>>> expr = x-(-2)-(-8 +(+7)-(-4))
>>> solve(expr)
[1]
```

Δεύτερη λύση:

```
>>> expr = x-(-2)
>>> expr.subs(x,1) == -8 +(+7)-(-4)
True
```

Αρα Σωστό

Ασκηση 1.4.6 *Υπολόγισε τις διαφορές: (α)* $5-(-7)$*, (β)* $-8-(+8)$*, (γ)* $-2-(-15,2)$*, (δ)* $14,55-18,45$*, (ε)* $-\frac{2}{7}-\left(-\frac{2}{7}\right)$*.*

```
from fractions import Fraction
>>> 5-(-7)
12
>>> -8-(+8)
-16
>>> -2-(-15.2)
13.2
>>> 14.55-18.45
-3.8999999999999986
>>> -Fraction(2,7)-(-Fraction(2,7))
Fraction(0, 1)
>>>
```

Ασκηση 1.4.7 *(Ασκηση 3 του βιβλίου, Σελ. 128) Κάνε τις πράξεις: (α)* $|+3|+|-2|+|-9|$*, (β)* $|-20|+|-10|-|+10|$*, (γ)* $|-3|-|-2|+|-5|-|+6|$*.*

```
>>> abs(+3)+abs(-2)+abs(-9)
14
>>> abs(-20)+abs(-10)-abs(+10)
20
>>> abs(-3)-abs(-2)+abs(-5)-abs(+6)
0
```

Ασκηση 1.4.8 *(Ασκηση 4 του βιβλίου, Σελ. 128) Κάνε τις πράξεις: (α)* $(+5)-(+3)+(+8)$*, (β)* $(-25)+(-4)-(-10)$*, (γ)* $(+12)+(+2)-(-8)$*.*

```
>>> (-25)+(-4)-(-10)
-19
>>> (+12)+(+2)-(-8)
22
>>>
```

Ασκηση 1.4.9 *(Ασκηση 5 του βιβλίου, Σελ. 128) Συμπλήρωσε τον πίνακα με τους κατάλληλους αριθμούς:*

h

α	β	$\alpha+\beta$	$\alpha-\beta$
+3		-5	
	-8	10	
-2	-5		
-9		+6	

h

α	β	$\alpha+\beta$	$\alpha-\beta$
+3	-8	-5	11
18	-8	10	26
-2	-5	-7	3
-9	15	+6	-24

```
>>> from sympy import symbols,solve
>>> a = symbols('a')
>>> b = symbols('b')
>>> solve(3+b-(-5))
[-8]
>>> b = -8
>>> a = 3
>>> a-b
11
>>> solve(a-8-10)
[18]
>>> b = -8
>>> a =  18
>>> a - b
26
>>> -2+(-5)
-7
>>> -2 -(-5)
3
>>> solve(-9+b-6)
[15]
>>> a = -9
>>> b = 15
>>> a - b
-24
```

Και ο πίνακας γίνεται:

Ασκηση 1.4.10 *(Ασκηση 5 του βιβλίου, Σελ. 128) Να λύσεις τις εξισώσεις: (α)* $x+(-8)=-18$, *(β)* $x+12=-14$, *(γ)* $x+\frac{5}{4}=\frac{7}{8}$ *(δ)* $x-\frac{5}{4}=2$

```
from sympy import symbols, solve
from fractions import Fraction
expr = x+(-18) -(-18)
```

```
solve(expr)
expr = x+12-(-14)
solve(expr)
expr = x+Fraction(5,4) - Fraction(7,8)
solve(expr)
expr  = x - Fraction(5,4) - 2
solve(expr) >>> from sympy import symbols, solve
>>> from fractions import Fraction
>>> expr = x+(-18) -(-18)
>>> solve(expr)
0
>>> expr = x+12-(-14)
>>> solve(expr)
-26
>>> expr = x+Fraction(5,4) - Fraction(7,8)
>>> solve(expr)
```

$$\frac{-3}{8}$$

```
>>> expr  = x - Fraction(5,4) - 2
>>> solve(expr)
```

$$\frac{13}{4}$$

Ασκηση 1.4.11 *(Ασκηση 7 του βιβλίου, Σελ. 128) Συμπλήρωσε τις δύο τελευταίες στήλες του πίνακα: Τι συμπεραίνεις για τους αριθμούς των δύο αυτών στηλών;*

α	β	$\alpha-\beta$	$\beta-\alpha$
7	3		
$2\frac{3}{4}$	$3\frac{1}{4}$		
-5.55	-2.45		
3	-2.1		

```
from fractions import Fraction
al = [7,2+Fraction(3,4),-5.55,3]
bl = [3,3+Fraction(1,5),-2.45,-2.1]
for i in range(4):
    a=al[i]
    b=bl[i]
    print(a+b)
    print(a-b)
```

και το αποτέλεσμα είναι:

```
4
-4
-9/20
9/20
-3.0999999999999996
3.0999999999999996
5.1
-5.1
```

Ασκηση 1.4.12 *(Ασκηση 8 του βιβλίου, Σελ. 128) Υπολόγισε την τιμή των παραστάσεων με δύο τρόπους: (α)* $11-(12-2)+(10-5)-(8+5)$, *(β)* $-(13,7-2,6)+14,8-(-8,7+5)$, *(γ)* $\frac{1}{6}-\left(\frac{3}{4}-\frac{5}{4}\right)-\left(\frac{7}{12}+\frac{5}{6}\right)$

```
>>> from fractions import Fraction
>>> 11-(12-2)+(10-5)-(8+5)
-7
>>> -(13.7-2.6)+14.8-(-8.7+5)
7.4
>>> Fraction(1,6) -(Fraction(3,4) - Fraction(5,4)) - (Fraction(7,12)+Fraction(5,6))
Fraction(-3, 4)
>>>
```

Ασκηση 1.4.13 *(Ασκηση 9 του βιβλίου, Σελ. 128) Συμπλήρωσε τον πίνακα:*

x	$3,5$		$1,89$	$-\frac{1}{4}$
y	$-1,5$	$4,3$		$-\frac{1}{4}$
z		-2,3	$3,11$	
x+y+z	0		$0,22$	$\frac{1}{2}$
x-y-z		0		

```
>>> from sympy import symbols,solve
>>> from fractions import Fraction
>>> x,y,z = symbols('x y z')
>>> x = 3.5
>>> y = -1.5
>>> solve(x+y+z,z)
[-2.00000000000000]
>>> z = -2
>>> x-y-z
7.0
>>> y = 4.3
>>> z = -2.3
>>> x,y,z = symbols('x y z')
>>> y = 4.3
```

```
>>> z = -2.3
>>> solve(x-y-z,x)
[2.00000000000000]
>>> x = 2
>>> x + y + z
4.0
>>> x,y,z = symbols('x y z')
>>> x = 1.89
>>> z = 3.11
>>> solve(x+y+z-0.22,y)
[-4.78000000000000]
>>> y = -4.78
>>> x -y -z
3.56
>>> x,y,z = symbols('x y z')
>>> x = -Fraction(1,4)
>>> y = -Fraction(1,4)
>>> solve(x+y+z-Fraction(1,2),z)
[1]
>>> z = 1
>>> x-y-z
Fraction(-1, 1)
>>>
```

και ο πίνακας γίνεται:

x	$3,5$	2	$1,89$	$-\frac{1}{4}$
y	$-1,5$	$4,3$	-4.78	$-\frac{1}{4}$
z	-2	$-2,3$	$3,11$	1
x+y+z	0	4	$0,22$	$\frac{1}{2}$
x-y-z	7	0	3.56	-1

1.5 Πολλαπλασιασμός ρητών αριθμών

Ασκηση 1.5.1 *(Ασκηση 1 του βιβλίου, Σελ. 131) Να υπολογιστούν τα γινόμενα: (α)* $(-1,4)\cdot 5$*, (β)* $\left(+\frac{2}{3}\right)\cdot(-2,1)$*, (γ)* $(-10)\cdot(-0,7)$*.*

```
>>> from fractions import Fraction
>>> -1.4*5
-7.0
>>> (+Fraction(2,3))*(-2.1)
-1.4
>>> (-10)*(-0.7)
7.0
>>>
```

Ασκηση 1.5.2 *(Ασκηση 2 του βιβλίου, Σελ. 131) Να υπολογιστεί το γινόμενο* $(-1)\cdot$*, όταν το α παίρνει τις τιμές:*$+3$*,* $-1,2$*,* $+\frac{2}{3}$*,* -2*.*

```
from fractions import Fraction
al = [+3,-1.2,+Fraction(2,3),-2]
for a in al:
    print(-1*a)
```

που δίνει το αποτέλεσμα:

```
-3
1.2
-2/3
2
```

Ασκηση 1.5.3 *(Ασκηση 4 του βιβλίου, Σελ. 131) Να υπολογιστεί η τιμή της παράστασης:* $(-1)(-20)(+\frac{2}{3})(-3)(-0,25)$*.*

```
>>> (-1)*(-20)*(+Fraction(2,3))*(-3)*(-0.25)
10.0
```

Ασκηση 1.5.4 *(Ασκηση 2 του βιβλίου, Σελ. 132) Υπολόγισε τα γινόμενα: (α)* $(-1)(-1)$*, (β)* $-3(-10)$*, (γ)* $-1,2(-0,5)$*, (δ)* $0(-10589)$*, (ε)* $1(-20015)$*, (στ)* $-0,725(+1000)$*, (ζ)* $\frac{12}{25}\left(-\frac{15}{24}\right)$*.*

```
>>> (-1)*(-1)
1
>>> -3*(-10)
30
>>> -1,2*(-0.5)
(-1, -1.0)
>>> 0*(-10589)
0
>>> 1*(-20015)
-20015
>>> -0.725*(1000)
-725.0
>>> Fraction(12,25)*(-Fraction(15,24))
Fraction(-3, 10)
```

Ασκηση 1.5.5 *(Ασκηση 3 του βιβλίου, Σελ. 132) Υπολόγισε την τιμή των παραστάσεων με τις λιγότερες δυνατές πράξεις: (α)* $-5\cdot 27+2\cdot 27$*, (β)* $10,35(-25)+9,65(-25)$*, (γ)* $-\frac{6}{7}(-10)+(-\frac{6}{7})(+3)$*.*

```
>>> -5 * 27 + 2 *27
-81
>>> 10.35*(-25)+0.65*(-25)
-275.0
>>> -Fraction(6,7)*(-10)+(-Fraction(6,7))*(+3)
Fraction(6, 1)
>>>
```

Ασκηση 1.5.6 *(Ασκηση 4 του βιβλίου, Σελ. 132) Συμπλήρωσε τον διπλανό πίνακα:*

$\cdot$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	+2	+3
-2					
$-3,2$					
$+\frac{3}{2}$					
$+10$					

```
for a in [-1,-Fraction(1,2),0,+2,+3]:
    for b in [-2,-3.2,Fraction(3,2),10]:
        print(a*b)
```

που δίνει το αποτέλεσμα:

```
2
3.2
-3/2
-10
1
1.6
-3/4
-5
0
-0.0
0
0
-4
-6.4
3
20
-6
-9.600000000000001
9/2
30
```

και ο πίνακας γίνεται:

$\cdot$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	+2	+3
-2	2	1	0	-4	-6
$-3,2$	3.2	1.6	0	-6.4	-9.6
$+\frac{3}{2}$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{3}{4}$	0	3	$\frac{9}{2}$
$+10$	-10	-5	0	20	30

Ασκηση 1.5.7 *(Ασκηση 5 του βιβλίου, Σελ. 132) Κάνε τις πράξεις: (α)* $-7(-8+10-5)$, *(β)* $(0,25-0,05)(-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}-\frac{1}{8})$, *(γ)*$-10-6(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})$.

```
>>> 7*(-8+10-5)
-21
>>> (0.25-0.05)*(- Fraction(1,4) + Fraction(1,2) - Fraction(1,8))
0.025
>>> -10-6*(Fraction(1,2) - Fraction(1,3))
Fraction(-11, 1)
>>>
```

Ασκηση 1.5.8 *(Ασκηση 6 του βιβλίου, Σελ. 132) Κάνε τις πράξεις: (α)* $(5+)(2+)$, *(β)* $(+7)(-7)$, *(γ)* $(-3)(-3)$, *(δ)* $(+8)(+5)$.

Σε αυτή την περίπτωση θα χρησιμοποιήσουμε την expnad η οποία θα αναπτύξει το γινόμενο και θα κάνει τις πράξεις.

```
from sympy import symbols,expand
a,b,g,d = symbols("a b g d")
>>> from sympy import expand
>>> expand((5+a)*(2+b))
a*b + 2*a + 5*b + 10
>>> expand((5+a)*(2+b))
a*b + 2*a + 5*b + 10
>>> expand((a+7)*(a-7))
a**2 - 49
>>> expand((a-3)*(b-3))
a*b - 3*a - 3*b + 9
>>> expand((g+8)*(d+5))
d*g + 8*d + 5*g + 40
```

Ασκηση 1.5.9 *(Ασκηση 7 του βιβλίου, Σελ. 132) Υπολόγισε τα γινόμενα: (α)* $(-1)(-1)$, *(β)* $(-1)(-1)(-1)$, *(γ)* $(-1)(-1)(-1)(-1)$.

```
>>> (-1)*(-1)
1
>>> (-1)*(-1)*(-1)
-1
>>> (-1)*(-1)*(-1)*(-1)
1
```

Ασκηση 1.5.10 *(Ασκηση 8 του βιβλίου, Σελ. 132)* *Υπολόγισε την τιμή των παραστάσεων:*

A = $(\alpha–1)(\alpha+1)(\alpha–2)(\alpha+2)$, όταν $\alpha=3$
B = $\beta(\beta–3)(\beta+3)(\beta–5)(\beta+5)$, όταν $\beta=2$
Γ= $\gamma(2\gamma–1)(3\gamma+1)(4\gamma–2)(\gamma+2)(\gamma–2)$, όταν $\gamma=0,5$

```
>>> from sympy import symbols
>>> a,b,g = symbols("a b g")
>>> A = (a-1)*(a+1)*(-a-2)*(a+2)
>>> A.subs(a,3)
-200
>>> B=b*(b-3)*(b+3)*(b-5)*(b+5)
>>> B.subs(b,2)
210
>>> G=g*(2*g-1)*(3*g+1)*(4*g-2)*(g+2)*(g-2)
>>> G.subs(g,0.5)
0
```

Ασκηση 1.5.11 *(Ασκηση 9 του βιβλίου, Σελ. 132)* *Συμπλήρωσε τον πίνακα:*

x	y	z	ω	$A=xyz$	$B=yx\omega$	$\Gamma=xA-B$	$AB+\Gamma$
-2	0,5	+1	-3				
$-\frac{1}{2}$	+6	-4	-0.3				
-2	$+\frac{3}{2}$	0.2	-7				

```
from sympy import symbols
from fractions import Fraction
xl = [-2,Fraction(1,2),-2]
yl = [0.5,+6,+Fraction(3,2)]
zl = [+1,-4,0.2]
wl = [-3,0.3,-7]
x,y,z,w = symbols("x y z w")
A = z*y*z
B = y*x*w
G = x*A-B
expr = A*B+G
for i in range(3):
    xv = xl[i]
    yv = yl[i]
    zv = zl[i]
    wv = wl[i]
    print('A',A.subs(x,xv).subs(y,yv).subs(z,zv).subs(w,wv))
    print('B',B.subs(x,xv).subs(y,yv).subs(z,zv).subs(w,wv))
    print('Γ',G.subs(x,xv).subs(y,yv).subs(z,zv).subs(w,wv))
    print('E',expr.subs(x,xv).subs(y,yv).subs(z,zv).subs(w,wv))
```

που δίνει το αποτέλεσμα:

```
A 0.500000000000000
B 3.00000000000000Γ
 -4.00000000000000E
 -2.50000000000000
A 96
B 0.900000000000000Γ
 47.1000000000000E
 133.500000000000
A 0.0600000000000000
B 21Γ
 -21.1200000000000E
 -19.8600000000000
```

και ο πίνακας γίνεται:

x	y	z	ω	$A = xyz$	$B = yx\omega$	$\Gamma = xA - B$	$AB + \Gamma$
-2	0,5	+1	-3	0.5	3	-4	-2.5
$-\frac{1}{2}$	+6	-4	-0.3	96	0.9	47.1	133.5
-2	$+\frac{3}{2}$	0.2	-7	0.06	21	-21.12	-19.86

1.6 Διαίρεση ρητών αριθμών

Ασκηση 1.6.1 *(Ασκηση 1 του βιβλίου, Σελ. 133) Να υπολογιστούν τα πηλίκα: (α)* $(+1,4) : (+5)$, *(β)* $\left(+\frac{2}{3}\right) : \left(-\frac{7}{5}\right)$ *(γ)* $(-0,45) : (-0,15)$

```
from fractions import Fraction
>>> (+1.5)/(+5)
0.3
>>> (+Fraction(2,3))/(-Fraction(7,5))
Fraction(-10, 21)
>>> (-0.45)/(-0.15)
3.0
```

Οπότε οι λύσεις είναι 0,3, $-\frac{10}{21}$, 3

Ασκηση 1.6.2 *(Ασκηση 2 του βιβλίου, Σελ. 134) Να λυθούν οι εξισώσεις: (α)* $-6x = -24$ *(β)* $-3x = +15$ *(γ)* $x : (-2) = -3$

```
>>> from sympy import symbols,solve
>>> x = symbols('x')
>>> solve(-6*x-(-24))
[4]
>>> solve(-3*x-(+15))
```

```
[-5]
>>> solve(x/(-2)-(-3))
[6]
>>>
```

Ασκηση 1.6.3 *(Ασκηση 2 του βιβλίου, Σελ. 134) Να βρεθεί η τιμή της παράστασης:*

$$\left[\frac{2}{3}(-3)-(-2)(-9)\right]:[0,4(-10)-(-0,2)(-5)]+7$$

```
>>> (Fraction(2,3)*(-3)-(-2)*(-9))/(0.4*(-10)-(-0.2)*(-5))+7
11
```

Ασκηση 1.6.4 *(Ασκηση 2 του βιβλίου, Σελ. 134) Κάνε τις διαιρέσεις: (α)* $(+15,15):(+3)$ *(β)* $(-4,5):(-1,5)$ *(γ)* $(-81):(+0,9)$ *(δ)* $49:(-7)$

```
>>> (+15.15)/(+3)
5.05
>>> (-4.5)/(-1.5)
3.0
>>> (-81)/(0.9)
-90.0
>>> (49)/(-7)
-7.0
>>>
```

Ασκηση 1.6.5 *(Ασκηση 3 του βιβλίου, Σελ. 134) Συμπλήρωσε τον πίνακα:*

x	y	$x+y$	$x-y$	xy	$x:y$
$\frac{-7}{3}$	$\frac{5}{-6}$				
$1,7$	$2,3$				
$-\frac{4}{5}$	-1				

```
xl = [-Fraction(7,3),1.7,-Fraction(4,5)]
yl = [Fraction(5,-6),2.3,-1]
for i in range(3):
    x = xl[i]
    y = yl[i]
    print(x+y,x-y,xy,x/y)
```

Που δίνει το αποτέλεσμα:

x	y	$x+y$	$x-y$	xy	$x:y$
$\frac{-7}{3}$	$\frac{5}{-6}$	$-\frac{19}{6}$	$-\frac{3}{2}$	$\frac{35}{18}$	$\frac{14}{5}$
$1,7$	$2,3$	4	$-0,6$	$3,901$	0.73913
$-\frac{4}{5}$	-1	$-\frac{9}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{4}{5}$

```
-19/6 -3/2 35/18 14/5
4.0 -0.5999999999999999 3.9099999999999997 0.7391304347826088
-9/5 1/5 4/5 4/5
```

και ο πίνακας γίνεται:

Ασκηση 1.6.6 *(Ασκηση 4 του βιβλίου, Σελ. 134) Υπολόγισε τα πηλίκα: (α)* $\frac{10}{0,25}$*, (β)* $\frac{-0,75}{-0,5}$*, (γ)* $\frac{-120}{(-12)+(-8)}$*, (δ)* $\left(-3\frac{1}{5}\right) : \left(-2\frac{2}{3}\right)$.

```
>>> 10/0.25
40.0
>>> -0.75/-0.5
1.5
>>> -120/((-12)+(-8))
6.0
>>> (-3+Fraction(1,5))/(-(2+Fraction(2,3)))
Fraction(21, 20)
>>>
```

Ασκηση 1.6.7 *(Ασκηση 5 του βιβλίου, Σελ. 134) Λύσε τις εξισώσεις: (α)* $-3x = 74$*, (β)* $-0,14x = -49$*, (γ)* $x(-2) = 12$*, (δ)* $\frac{2}{3}x = -\frac{4}{6}$.

```
>>> from sympy import symbols,solve
>>> solve(-3*x-74)
[-74/3]
>>> solve(-0.14*x-(-49))
[350.000000000000]
>>> solve(x*(-2)-12)
[-6]
>>> solve(Fraction(2,3)*x-(-Fraction(4,6)))
[-1]
>>>
```

Ασκηση 1.6.8 *(Ασκηση 6 του βιβλίου, Σελ. 135) Κάνε τις πράξεις: (α)* $\frac{-1}{3} + \frac{2}{-6} - \frac{12}{-15}$ *, (β)* $-\frac{(-2)(-5)(-1)}{-10}$ *, (γ)* $\left(\frac{-7}{3} - \frac{5}{-3}\right) / \left(-\frac{3}{2}\right)$

```
>>> Fraction(-1,3)+Fraction(2,-6) - Fraction(12,-15)
Fraction(2, 15)
>>>
>>> -Fraction((-2)*(-5)*(-1),(-10))
Fraction(-1, 1)
>>>
>>> (Fraction(-7,3)-Fraction(5,-3))/(-Fraction(3,2))
Fraction(4, 9)
>>>
```

Ασκηση 1.6.9 *(Ασκηση 7 του βιβλίου, Σελ. 134) Υπολόγισε την τιμή της παράστασης:*

$$\left[(-8)\left(\frac{-7}{64}\right)-(-15):(-8)\right](-8)+(-27):(-\frac{9}{8})$$

```
>>> ((-8)*(Fraction(-7,64))-(-15)/(-8))*(-8)+(-27)/(-Fraction(9,8))
32.0
```

1.7 Δεκαδική μορφή ρητών αριθμών

Ασκηση 1.7.1 *(Ασκηση 1 του βιβλίου, Σελ. 135) Τεσσερις μαθητές, ο Κώστας, η Μαρία, η Ελένη και ο Γιώργος, πήγαν στο γήπεδο του σχολείου τους για να τρέξουν γύρω από αυτό. Ενας γύρος του γηπέδου είναι 400 μέτρα. Ο Κώστας έτρεξε το $\frac{1}{10}$ του γύρου, η Μαρία έτρεξε το $\frac{1}{4}$ του γύρου, η Ελένη έτρεξε μισό γύρο και ο Γιώργος έτρεξε το $\frac{1}{9}$ του γύρου.*

Ποιό είναι το ακριβές μήκος σε μέτρα που έτρεξε το καθένα από τα παιδιά;

```
>>> 400*1/10
40.0
>>> 400*1/4
100.0
>>> 400*1/9
44.44444444444444
>>>
```

Ασκηση 1.7.2 *(Ασκηση 2 του βιβλίου, Σελ. 135) Προσπάθησε να βρεις, με όση ακρίβεια μπορείς, το πηλίκο της διαίρεσης 101 διά 44.*

```
>>> 101/44
2.2954545454545454
```

Φαίνεται ότι ο αριθμός είναι περιοδικός δηλαδή πρόκειται για τον $2.29\overline{54}$ αλλά θα πρέπει να το υπολογίσουμε.

Χρειαζόμαστε ένα πρόγραμμα που να υπολογίζει τους περιοδικούς δεκαδικούς αριθμούς και επειδή δεν μπορούμε να έχουμε την γραμμή πάνω από τους αριθμούς θα τους συμβολίζουμε ως εξής: Ο $\frac{101}{44}$ θα είναι ο `2.2954r2` που σημαίνει ότι τα τελευταία δύο δεκαδικά του ψηφία επαναλαμβάνονται ενώ ο $400\frac{1}{9}$ θα είναι ο `4.4r1`, αφού το τελευταίο του δεκαδικό ψηφίο επαναλαμβάνεται. Ενα τέτοιο πρόγραμμα είναι το εξής:

```
def repeating(D,d):
    x = D//d
    y = D%d
    #εδώ έχει τελειώσει το ακέραιο κομμάτι της
    #διαίρεσης αν δεν υπάρχει υπόλοιπο
    #τελειώνει και το πρόγραμμα
    if y==0:
        return(str(x))
    else:
        #πλέον το πηλίκο θα είναι string και
        #θα προσθέτουμε στοιχεία στο τέλος της
        x = str(x)
        x+='.'
        ypoloipa = []
        NeoYp = y*10
        while (NeoYp != 0) and (NeoYp not in ypoloipa):
            ypoloipa.append(NeoYp)
            piliko = NeoYp//d
            x = x+str(piliko)
            NeoYp = NeoYp % d
            NeoYp = NeoYp*10
        #ή έφτασε σε NeoYp 0 οπότε φτάσαμε τη μέγιστη ακρίβεια
        #ή έφτασε σε υπόλοιπο που είχε ξαναφτάσει
        if NeoYp == 0:
            #μέγιστη ακρίβεια
            return(x)
        else:
            #τα ψηφία που επαναλαμβάνονται είναι τα
            #ψηφία της λίστας ms από το τέλος μέχρι
            #εκεί που βρέθηκε το NeoYp
            return(x+'r'+str(len(ypoloipa)-ypoloipa.index(NeoYp)))
```

Αν την εκτελέσουμε παίρνουμε το αποτέλεσμα:

```
>>> repeating(400,9)
'44.4r1'
>>> repeating(101,44)
'2.2954r2'
>>> repeating(100,1)
'100'
```

```
>>> repeating(10,2)
'5'
```

Η κλασματική μορφή των περιοδικών αριθμών μπορεί να βρεθεί όπως τα παραδείγματα του βιβλίου αλλά στη γενική περίπτωση μπορούμε να πολλαπλασιάσουμε τον αρχικό αριθμό x με 10^p όπου p το πλήθος των ψηφίων της περιόδου τότε. Αν αφαιρέσουμε από το αποτέλεσμα τον αρχικό αριθμό η σειρά των δεκαδικών ψηφίων απαλείφεται και μένει ο αριθμός x χωρίς τα επαναλαμβανόμενα ψηφία. Σε python μπορούμε να κάνουμε την αντίστροφη διαδικασία ως εξής:

```
from fractions import Fraction
def fromrepeating(r):
    num,period=r.split('r')
    period = int(period)
    mhepan = num[:-period]
    arithMhEpan = int(mhepan.replace('.',''))
    paronMhEpan = 10**(len(mhepan)-mhepan.index('.')-1)
    num = '0.'+'0'*(len(num)-period-mhepan.index('.')-1)+num[-period:]
    num1,num2 = num.split('.')
    num = num1+num2[:period]+'.'+num2[period:]
    num = float(num)
    denom = 10**period-1
    while int(num)!=num:
        num *= 10
        denom *=10
    num = int(num)
    denom = int(denom)
    return(Fraction(arithMhEpan,paronMhEpan)+Fraction(num,denom))
```

Που δίνει τα αποτελέσματα:

```
>>> fromrepeating('0.2r1')
Fraction(2, 9)
>>> fromrepeating('1.64r2')
Fraction(163,99)
```

Ασκηση 1.7.3 *(Ασκηση 1 του βιβλίου, Σελ. 136) Βρες τη δεκαδική μορφή των ρητών: (α)* $-\frac{15}{10}$, *(β)* $\frac{5}{8}$, *(γ)* $\frac{13}{14}$, *(δ)* $\frac{20}{11}$, *(ε)* $\frac{32}{31}$

```
>>> repeating(15,10)
'1.5'
>>> repeating(5,8)
'0.625'
>>> repeating(13,14)
'0.9285714r6'
>>> repeating(20,11)
'1.81r2'
```

```
>>> repeating(32,31)
'1.032258064516129r15'
>>>
```

Οι απαντήσεις είναι: (α) $-\frac{15}{10} = -1,5$,
(β) $\frac{5}{8} = 0,625$,
(γ)$\frac{13}{14} = 0,9\overline{285714}$,
(δ) $\frac{20}{11} = 1,\overline{81}$,
(ε)$\frac{32}{31} = 1,\overline{032258064516129}$

Ασκηση 1.7.4 *(Ασκηση 2 του βιβλίου, Σελ. 136) Βρες την κλασματική μορφή των αριθμών: (α) $57,92$, (β) $2,\overline{8}$, (γ) $3,\overline{83}$ (δ) $7,4\overline{561}$, (ε) $15,3\overline{99}$.*

```
>>> Fraction(5792,100)
Fraction(1448, 25)
>>> fromrepeating('2.8r1')
Fraction(26, 9)
>>> fromrepeating('3.83r2')
Fraction(380, 99)
>>> fromrepeating('7.4561r3')
Fraction(24829, 3330)
>>> fromrepeating('15.399r2')
Fraction(77, 5)
>>>
```

Οι απαντήσεις είναι: $\frac{1448}{25}$, $\frac{26}{9}$, $\frac{380}{99}$, $\frac{24829}{3330}$, $\frac{77}{5}$.

Ασκηση 1.7.5 *(Ασκηση 3 του βιβλίου, Σελ. 136) Βρες μια άλλη δεκαδική μορφή των αριθμών: (α) $2,\overline{9}$, (β) $7,6\overline{9}$, (γ) $7,325\overline{9}$*

```
>>> fromrepeating('2.9r1')
Fraction(3, 1)
>>> fromrepeating('7.69r1')
Fraction(77, 10)
>>> fromrepeating('7.3259r1')
Fraction(3663, 500)
>>>
```

Αρα μια άλλη δεκαδική μορφή είναι αντίστοιχα 3,7.7,7.326

1.8 Δυνάμεις ρητών αριθμών με εκθέτη φυσικό

Ασκηση 1.8.1 *(Ασκηση 1 του βιβλίου, Σελ. 139) Να υπολογιστούν οι τιμές των παραστάσεων: (α) -3^3, (β) $(-3)^3$, (γ) -3^4 ,(δ) $(-3)^4$.*

```
>>> -3**3
-27
>>> (-3)**3
-27
>>> -3**4
-81
>>> (-3)**4
81
>>>
```

Ασκηση 1.8.2 *(Ασκηση 2 του βιβλίου, Σελ. 139) Να υπολογιστεί η τιμή της παράστασης:*

$$= (-2)^3 \cdot 3 - 3^4 + (-2)^4 : 16 + [-1 - (-1)^7 \cdot 8]$$

```
>>> (-2)**3*3-3**4+(-2)**4/16+(-1-(-1)**7*8)
-97.0
```

Ασκηση 1.8.3 *(Ασκηση 2 του βιβλίου, Σελ. 139) Βρες με ποιο στοιχείο της 2ης και της 3ης γραμμής αντίστοιχα είναι ίσο κάθε στοιχείο της 1ης γραμμής του παρακάτω πίνακα.*

$3+5^2$	$(3+5)^2$	$3\cdot 5^2$	$(3\cdot 5)^2$	$3-5^2$	$(3-5)^2$	$\frac{3^2}{5}$	$\left(\frac{3}{5}\right)$
75	4	28	64	0,36	225	1,8	−22

```
>>> 3+5**2
28
>>> (3+5)**2
64
>>> 3*5**2
75
>>> (3*5)**2
225
>>> 3-5**2
-22
>>> (3-5)**2
4
>>> 3**2/5
1.8
>>> (3/5)**2
0.36
```

Ασκηση 1.8.4 *(Ασκηση 3 του βιβλίου, Σελ. 139) Υπολόγισε τις τιμές των παραστάσεων:*

$$A = (-1)^1 + (-1)^2 + (-1)^3 + (-1)^4 + (-1)^5$$
$$B = 32 \cdot 5^4 - 25 \cdot 4^5 + 87,5 \cdot 4^3$$
$$\Gamma = -\frac{(-6)^5}{3^5} - \frac{8^4}{(-4)^4} + \frac{10^3}{(-5)^3}$$

```
>>> (-1)**1+(-1)**2+(-1)**3+(-1)**4+(-1)**5
-1
>>> 32*5**4 - 25*4**5 + 87.5*4**3
0.0
>>> -Fraction((-6)**5,3**5)-Fraction(8**4,(-4)**4)+Fraction(10**3,(-5)**3)
Fraction(8, 1)
>>>
```

Ασκηση 1.8.5 *(Ασκηση 1 του βιβλίου, Σελ. 141) Να υπολογιστούν οι δυνάμεις (α)* $(-2)^{-5}$*, (β)* -3^{-3}*, (γ)* $(-234567)^0$

```
>>> (-2)**-5
-0.03125
>>> (-3)**-3
-0.037037037037037035
>>> (-234567)**0
1
>>>
```

Ειδικά για το $(-3)^{-3}$ ξέρουμε ότι $(-3)^{-3} = \left(\frac{-3}{1}\right)^{-3} = \left(\frac{1}{-3}\right)^3 = \frac{1^3}{(-3)^3} = \frac{1}{-27}$ και με βάση το repeating της προηγούμενης ενότητας έχουμε:

```
>>> repeating(1,27)
'0.037r3'
```

Ετσι τα αποτελέσματα είναι $-0,03125$, $0,\overline{037}$, 1.

Ασκηση 1.8.6 *(Στο βιβλίο βρίσκεται στη Σελ. 2) 141Να υπολογιστούν οι τιμές των παραστάσεων: (α)* $[(-3)^3]^2$*, (β)* $3^3 : 3^{-2}$*, (γ)* $(-2)^4 \cdot (-2)^6$*, (δ)* $\frac{12^{-3}}{3^{-3}}$ *.*

```
>>> ((-3)**3)**2
729
>>> (3^3)/(3**(-2))
0.0
>>> (-2)**4 * (-2)^6
-26
>>> 12**(-3)/3**(-3)
0.015625
```

Ασκηση 1.8.7 *(Ασκηση 3 του βιβλίου, Σελ. 141)* Να υπολογιστούν οι δυνάμεις: 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}, 10^{-5}, 10^{-6}, 10^{-7}

```
for i in range(-1,-8,-1):
    print(10**i)
```

που δίνει το αποτέλεσμα:

```
0.1
0.01
0.001
0.0001
1e-05
1e-06
1e-07
```

Ασκηση 1.8.8 *Συμπλήρωσε τον πίνακα:*

α	β	γ	$(\alpha+\beta)^2$	$(\alpha\beta)^2$	$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2$	$(-\alpha)^{-2}$	$(\gamma\beta)^{-1}$
$\frac{1}{2}$	-2	$-\frac{1}{5}$					
-1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$					
10	-10	0.01					

```
al = [1/2,-2,-1/5]
bl = [-1,-1/2,3/2]
cl = [10,-10,0.01]
for i in range(3):
    a = al[i]
    b = bl[i]
    c = cl[i]
    print((a+b)**2)
    print((a*b)**2)
    print((a/b)**2)
    print((-a)**(-2))
    print((c*b)**(-1))
\end{lstlisitng}
\begin{lstlisting}
0.25
0.25
0.25
4.0
-0.1
6.25
1.0
16.0
```

```
0.25
0.2
1.6900000000000002
0.09000000000000002
0.017777777777777778
24.999999999999996
66.66666666666667
```

Ασκηση 1.8.9 *(Ασκηση 2 του βιβλίου, Σελ. 142) Υπολόγισε τις τιμές των παραστάσεων:*

$$= (-1)^{-3} + (-1)^{-2} + (-1)^{-1} + (-1)^{0} + (-1)^{1} + (-1)^{2}$$

$$= [(-2)^2]^5[(-3)^2]^{-2} + [(-23,5)^2(23,5)-2]^5$$

$$\Gamma = \frac{(-6)^{-5}}{12^{-5}} + \frac{16^{-4}}{(-32)^{-4}} - \frac{5^{-3}}{(-10)^{-}3}$$

```
>>> (-1)**(-3)+(-1)**(-2)+(-1)**(-1)+(-1)**0+(-1)**1+(-1)**2
0.0
>>> ((-2)**2)**5*((-3)**2)**(-2)+((-23.5)**2*(23.5)**(-2))**5
13.641975308641975
>>> ((-6)**-5)/(12**-5)+(16**-4)/((-32)**-4)-(5**-3)/((-10)**-3)
-8.0
>>>
```

Ασκηση 1.8.10 *(Ασκηση 3 του βιβλίου, Σελ. 142) Βρες ποιος από τους αριθμούς: $\frac{1}{10}$,$10^3 \cdot 5 \cdot 2$, $\frac{1}{10^3}$,$10^3 + 10^2$, δεν είναι δύναμη του 10.*

```
>>> from sympy import symbols,solve
>>> x = symbols('x')
>>> solve(10**x-1/10)
[-1.00000000000000]
>>> solve(10**x-10**3*5*2)
[4]
>>> solve(10**x-1/10**3)
[-3.00000000000000]
>>> solve(10**x-(10**3+10**2))
[log(1100)/log(10)]
>>>
```

Αρα οι τρεις πρώτες παραστάσεις μπορούν να γραφούν ως 10^{-1},10^4,10^{-3} ενώ η τελευταία όχι.

Ασκηση 1.8.11 *(Ασκηση 4 του βιβλίου, Σελ. 142) Συμπλήρωσε τον πίνακα:*

x	$0,001$	$0,01$	$0,1$	-10	-100	$2 \cdot 10^4$	$5 \cdot 10^{-3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{5}$
x^{-3}										
x^3										
x^{-1}										

```
xl = [0.001,0.01,0.1, -10, -100, 2*10**4,5*10**-3,1/2,3/2,-1/5]
for x in xl:
    print(x**-3)
    print(x**3)
    print(x**-1)
```

που δίνει τα αποτελέσματα:

```
999999999.9999999
1e-09
1000.0
999999.9999999999
1.0000000000000002e-06
100.0
999.9999999999999
0.0010000000000000002
10.0
-0.001
-1000
-0.1
-1e-06
-1000000
-0.01
1.25e-13
8000000000000
5e-05
7999999.999999999
1.2500000000000002e-07
200.0
8.0
0.125
2.0
0.2962962962962963
3.375
0.6666666666666666
-124.99999999999999
-0.008000000000000002
-5.0
```

Οπότε ο πίνακας γίνεται:

Ασκηση 1.8.12 *(Ασκηση 5 του βιβλίου, Σελ. 142) Συμπλήρωσε τον πίνακα:*

x	$0,001$	$0,01$	$0,1$	-10	-100	$2 \cdot 10^4$	$5 \cdot 10^{-3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$
x^{-3}	10^9	10^6	1000	-0.001	-0.1	$1.25 \cdot 10^{-13}$	$8 \cdot 10^6$	0.296296	-125
x^3	10^{-9}	10^{-6}	0.001	-1000	-10^{-6}	$8 \cdot 10^{12}$	0.125	3.375	-0.008
x^{-1}	10^3	100	10	$-0,1$	-10^6	$5 \cdot 10^{-5}$	2	$\frac{2}{3}$	-5.0

$\cdot$	10^{-3}	10^{-2}	10^{-1}	10^0	10^1	10^2	10^3
10^{-3}							
10^{-2}							
10^{-1}							
10^0							
10^1							
10^2							
10^3							

```
for i in range(-3,4):
    for j in range(-3,4):
        print(i,j,i+j)
```

```
-3 -3 -6
-3 -2 -5
-3 -1 -4
-3 0 -3
-3 1 -2
-3 2 -1
-3 3 0
-2 -3 -5
-2 -2 -4
-2 -1 -3
-2 0 -2
-2 1 -1
-2 2 0
-2 3 1
-1 -3 -4
-1 -2 -3
-1 -1 -2
-1 0 -1
-1 1 0
-1 2 1
-1 3 2
0 -3 -3
0 -2 -2
0 -1 -1
0 0 0
0 1 1
0 2 2
0 3 3
```

```
1 -3 -2
1 -2 -1
1 -1 0
1 0 1
1 1 2
1 2 3
1 3 4
2 -3 -1
2 -2 0
2 -1 1
2 0 2
2 1 3
2 2 4
2 3 5
3 -3 0
3 -2 1
3 -1 2
3 0 3
3 1 4
3 2 5
3 3 6
```

και ο πίνακας γίνεται

$\cdot$	10^{-3}	10^{-2}	10^{-1}	10^{0}	10^{1}	10^{2}	10^{3}
10^{-3}	10^{-6}	10^{-5}	10^{-4}	10^{-3}	10^{-2}	10^{-1}	1
10^{-2}	10^{-5}	10^{-4}	10^{-3}	10^{-2}	10^{-1}	1	10
10^{-1}	10^{-4}	10^{-3}	10^{-2}	10^{-1}	1	10	10^{2}
10^{0}	10^{-3}	10^{-2}	10^{-1}	1	10	10^{2}	10^{3}
10^{1}	10^{-2}	10^{-1}	1	10	10^{2}	10^{3}	10^{4}
10^{2}	10^{-1}	1	10	10^{2}	10^{3}	10^{4}	10^{5}
10^{3}	1	10	10^{2}	10^{3}	10^{4}	10^{5}	10^{6}