Μαθηματικά Γυμνασίου με Python

Δημήτρης Νικολός

25 Ιουλίου 2020

Κεφάλαιο 1

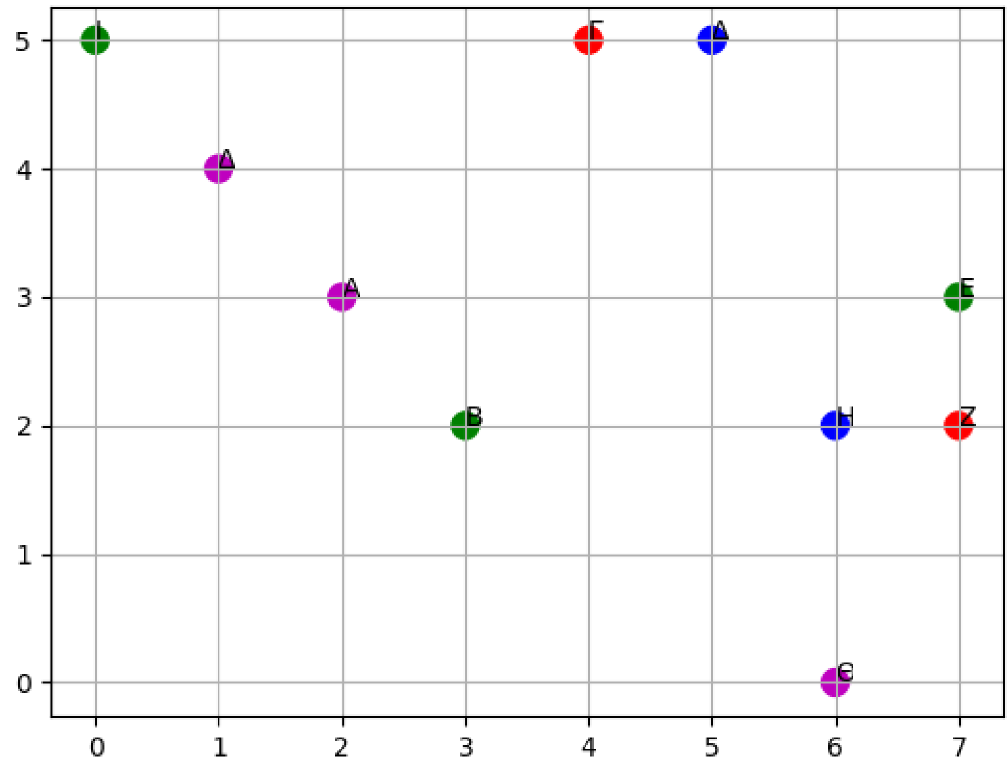
Ανάλογα ποσά - Αντιστρόφως ανάλογα ποσά

Ασκηση 1.0.1 *Να σχεδιάσεις ένα ορθοκανονικό σύστημα ημιαξόνων, με μονάδα το 1 cm και να τοποθετήσεις τα σημεία Α(2,3), Β(3,2), Γ(4,5), Δ(5,5), Ε(1,4), Ζ(7,3), Η(7,2), Θ(6,2), Ι(6,0), Κ(0,5). Τι παρατηρείς για τα σημεία Ι και Κ; Πού βρίσκονται αυτά; Μπορείς να γενικεύσεις τις παρατηρήσεις σου για τα σημεία που έχουν τετμημένη ή τεταγμένη το μηδέν;*

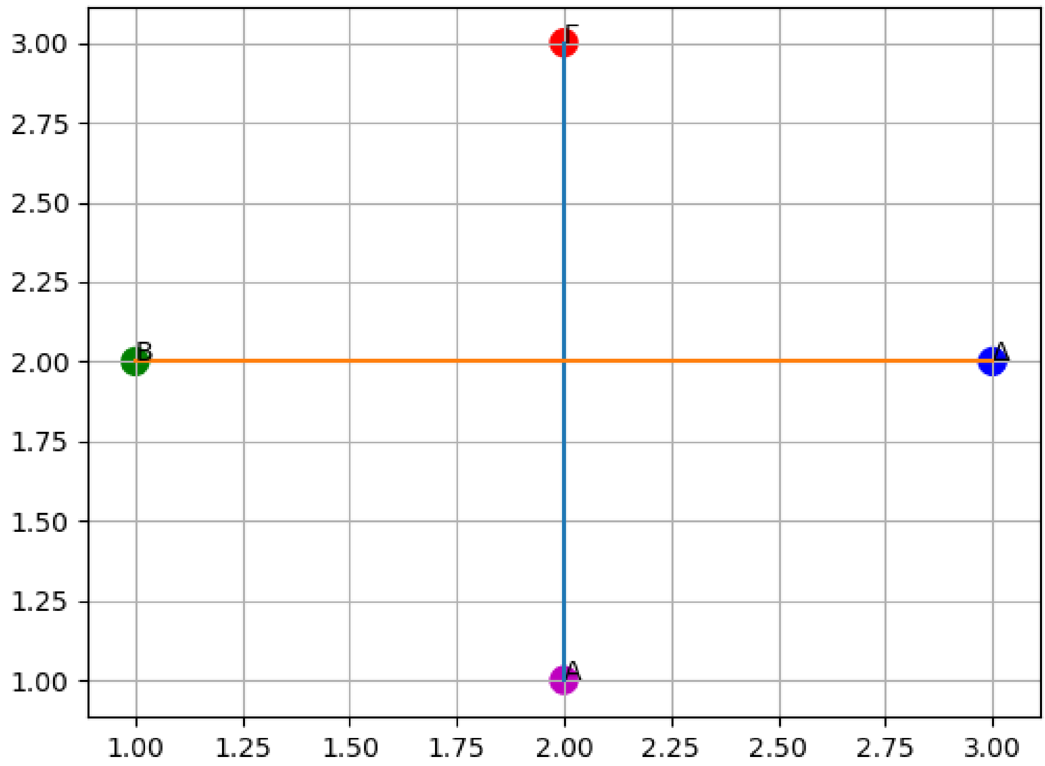
```
import matplotlib.pyplot as plt

plt.clf()
points = [(2,3), (3,2), (4,5), (5,5), (1,4), (7,3), (7,2), (6,2), (6,0), (0,5)]
pointName = ['Α','Β','Γ','Δ','Δ','Ε','Ζ','Η','Θ','Ι','Κ']
x = [p[0] for p in points]
y = [p[1] for p in points]
color=['m','g','r','b']
plt.grid()
plt.scatter(x,y, s=100 ,marker='o', c=color)
for (i,p) in enumerate(points):
    plt.annotate(pointName[i],(p[0],p[1]))

plt.show()
```

Ασκηση 1.0.2 *(Ασκηση 2 του βιβλίου, Σελ. 89) Σε ορθοκανονικό σύστημα ημιαξόνων να τοποθετήσεις τα σημεία Α(2,1), Β(1,2), Γ(2,3) και Δ(3,2). Τι σχήμα είναι το ΑΒΓΔ; Αν τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΓ και ΒΔ τέμνονται στο σημείο Κ, ποιες είναι οι συντεταγμένες του Κ;*

```
import matplotlib.pyplot as plt
```



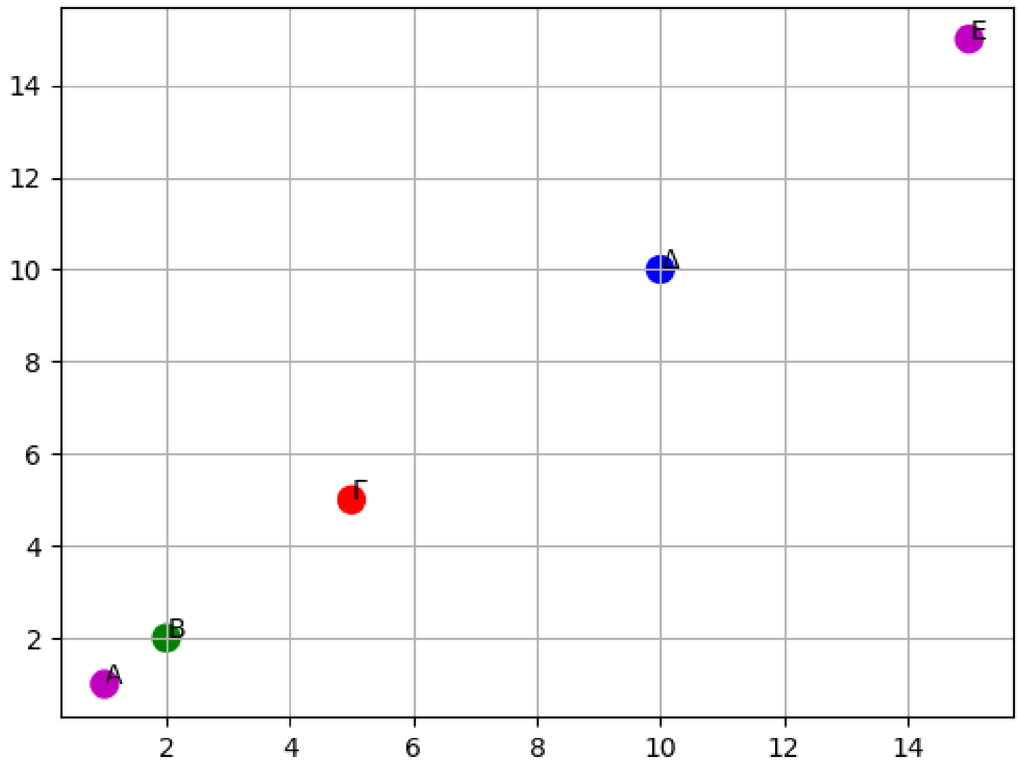

```
plt.clf()
points = [(2,1), (1,2), (2,3), (3,2)]
pointName = ['Α','Β','Γ','Δ']
x = [p[0] for p in points]
y = [p[1] for p in points]
color=['m','g','r','b']
plt.grid()
plt.scatter(x,y, s=100 ,marker='o', c=color)
for (i,p) in enumerate(points):
    plt.annotate(pointName[i],(p[0],p[1]))

x = [points[0][0],points[2][0]]
y = [points[0][1],points[2][1]]
plt.plot(x,y)
x = [points[1][0],points[3][0]]
y = [points[3][1],points[3][1]]
plt.plot(x,y)
```




```
plt.show()
```

Ασκηση 1.0.3 *(Ασκηση 3 του βιβλίου, Σελ. 89) Γράψε πέντε διατεταγμένα ζεύγη σημείων, των οποίων η τετμημένη τους είναι ίση με την τεταγμένη τους. Μπορείς να τα τοποθετήσεις, σε ένα ορθοκανονικό σύστημα ημιαξόνων; Τι παρατηρείς;*

```
import matplotlib.pyplot as plt

plt.clf()
points = [(1,1), (2,2), (5,5), (10,10), (15,15)]
pointName = ['A','B','Γ','Δ','E']
x = [p[0] for p in points]
y = [p[1] for p in points]
color=['m','g','r','b']
plt.grid()
plt.scatter(x,y, s=100 ,marker='o', c=color)
```



Πλευρά τετραγώνου	1,5 cm	4 cm	4,5 cm
Περίμετρος τετραγώνου			

```
for (i,p) in enumerate(points):
    plt.annotate(pointName[i],(p[0],p[1]))

plt.show()
```

Ασκηση 1.0.4 *(Στο βιβλίο βρίσκεται στη Σελ. 90) Συμπλήρωσε τον παρακάτω πίνακα:*

- *Εξήγησε πώς προκύπτουν οι αριθμοί της δεύτερης σειράς.*
- *Βρες για κάθε τετράγωνο το κλάσμα πλευρά προς περίμετρο.*
- *Ποιο είναι το συμπέρασμα που βγάζεις;*

```
>>> 4*1.5
6.0
>>> 4*4
16
>>> 4*4.5
18.0
```

Πλευρά τετραγώνου	1,5 cm	4 cm	4,5 cm
Περίμετρος τετραγώνου	6	16	18

Θυμηθείτε το ποσοστό σε κλάσμα:

```
def posostoseklasma(fx):
    fx = float(fx)
    denom = 100
    while int(fx) != fx:
        fx *= 10
        denom *= 10
    fx = int(fx)
    return(Fraction(fx,denom))
```

Το fx είναι είναι ο αριθμητής ενός κλάσματος με παρονομαστή 100. Εδώ δεν θα υπάρχει ο παρονομαστής 100 οπότε έχουμε denom = 1.

```
def dekadikosseklasma(fx):
    fx = float(fx)
    denom = 1
    while int(fx) != fx:
        fx *= 10
        denom *= 10
    fx = int(fx)
    return(Fraction(fx,denom))

dekadikosseklasma(1.5/6)
dekadikosseklasma(4/16)
dekadikosseklasma(4.5/18)
```

και το αποτέλεσμα είναι:

```
>>> dekadikosseklasma(1.5/6)
Fraction(1, 4)
>>> dekadikosseklasma(4/16)
Fraction(1, 4)
>>> dekadikosseklasma(4.5/18)
Fraction(1, 4)
```

Αρα παντού το κλάσμα είναι $\frac{1}{4}$.

Ασκηση 1.0.5 *(Στο βιβλίο βρίσκεται στη Σελ. 90) Χρησιμοποιούμε τη φωτογραφική μηχανή για να απεικονίσουμε εικόνες αντικειμένων. Οι εικόνες αυτές δείχνουν τα πραγματικά αντικείμενα σε σμίκρυνση. Στη φωτογραφία το ύψος* *ενός παιδιού είναι 2 cm ενώ γνωρίζουμε ότι το πραγματικό του ύψος είναι 1,65 m = 165 cm. Πόση θα είναι τότε η σμίκρυνσή του στη φωτογραφία;*

```
>>> 2/165
0.012121212121212121
```

Ασκηση 1.0.6 *(Στο βιβλίο βρίσκεται στη Σελ. 91) Μετρούμε μια απόσταση, σε χάρτη, με κλίμακα 1:10.000.000 και τη βρίσκουμε ίση με 2,4 cm. Ποια είναι η πραγματική απόσταση των δύο σημείων;*

```
>>> x = 2.4*10000000
>>> x
24000000
>>> x = x/100
>>> x
240000
>>> x = x/1000
>>> x
240
```

240Km

Ασκηση 1.0.7 *(Ασκηση 3 του βιβλίου, Σελ. 92) Σε μια φωτογραφία το ύψος ενός ανθρώπου είναι 4 cm, ενώ το πραγματικό το ύψος είναι 1,76 m. Πόσο έχει σμικρυνθεί η εικόνα του ανθρώπου στη φωτογραφία;*

```
def pososto(x):
    print(str(round(x*100,2))+'%')
```

Αν θυμηθούμε τη συνάρτηση pososto τότε

```
>>> pososto(4/176)
2.27%
```

Ασκηση 1.0.8 *(Ασκηση 4 του βιβλίου, Σελ. 92) Ενας προβολέας διαφανειών προβάλλει το κείμενο μιας διαφάνειας στον απέναντι τοίχο. Αν ένα "Α" έχει ύψος 7 mm στη διαφάνεια και 4,2 cm στον τοίχο, ποια είναι η μεγέθυνση που δίνει ο προβολέας*

```
>>> pososto(4.2/0.7)
600%
```

Ασκηση 1.0.9 *(Ασκηση 5 του βιβλίου, Σελ. 92) Η σύνθεση μιας μπλούζας είναι 80% βαμβάκι και το υπόλοιπο πολυεστέρας. Αν η μπλούζα ζυγίζει 820 gr, πόσα γραμμάρια ζυγίζουν τα νήματα του πολυεστέρα που περιέχει;*

Κλίμακα	1:5	3:8	1:30		1:100
Μήκος σε σχέδιο	4cm		12cm	2cm	3,5cm
Πραγματικό ύψος		24m		10m	

Κλίμακα	1:5	3:8	1:30	1:500	1:100
Μήκος σε σχέδιο	4cm	9cm	12cm	2cm	3,5cm
Πραγματικό ύψος	20cm	24m	360cm	10m	350cm

x		2		4
Π	8		16	

```
>>> 820*20/100
164.0
```

Ασκηση 1.0.10 *(Ασκηση 6 του βιβλίου, Σελ. 92) Να συμπληρωθεί ο πίνακας*

```
>>> from fractions import Fraction
>>> 5*4
20
>>> 3/8*24
9.0
>>> 12*30
360
>>> Fraction(2,1000)
Fraction(1, 500)
>>> 3.5*100
350
```

Αρα ο πίνακας γίνεται:

Ασκηση 1.0.11 *(Ασκηση 7 του βιβλίου, Σελ. 92) Οι διαστάσεις ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου είναι $x + 2$ και x.*

(α) Να γράψεις τη σχέση που συνδέει την περίμετρο Π του ορθογωνίου με το x.

(β) Να συμπληρώσεις τον πίνακα:

α)

```
>>> from sympy import *
>>> x = symbols('x')
>>> p = x+x+2+x+x+2
>>> p
4*x + 4
```

β)

x	1	2	3	4
Π	8	12	16	20

```
>>> solve(p-8)
[1]
>>> p.subs(x,2)
12
>>> solve(p-16)
[3]
>>> p.subs(x,4)
20
```

και ο πίνακας γίνεται:

Ασκηση 1.0.12 *(Ασκηση 8 του βιβλίου, Σελ. 92) Αν οι διαστάσεις ενός δωματίου, σε ένα σχέδιο με κλίμακα 1:250, είναι 3x5, οι πραγματικές διαστάσεις του δωματίου θα είναι .....x..... .*

```
>>> 3*250
750
>>> 5*250
1250
```

Οπότε το δωμάτιο είναι 7,5m x 12,5m αν οι διαστάσεις ήταν σε cm.

Ασκηση 1.0.13 *(Ασκηση 9 του βιβλίου, Σελ. 92) Αν ανακατέψουμε 2 κιλά κόκκινο χρώμα και 3 κιλά κίτρινο χρώμα, φτιάχνουμε μια συγκεκριμένη απόχρωση του πορτοκαλί. Αν ανακατέψεις 5 κιλά κόκκινο χρώμα και 6 κιλά κίτρινο, θα πάρεις την ίδια απόχρωση; Δικαιολόγησε την απάντησή σου.*

```
>>> 3/2 == 6/5
False
```

Οχι δεν είναι η ίδια απόχρωση.

Ασκηση 1.0.14 *(Ασκηση 2 του βιβλίου, Σελ. 93) Οταν ο Κώστας έκλεισε τα δώδεκα χρόνια είχε το ένα τρίτο της ηλικίας της μητέρας του. Οταν θα γίνει είκοσι χρόνων, ο λόγος των δύο ηλικιών τους θα παραμείνει ο ίδιος;*

```
>>> ilikiaMiteras = 3*12
>>> ilikiaMiteras
36
>>> xronia = 20-12
>>> xronia
8
>>> neailikiaMiteras = ilikiaMiteras + xronia
>>> neailikiaMiteras = 44
```

x	0	1	0,3		
y				$\frac{5}{3}$	3

x	0	1	0,3	2,5	4,5
y	0	0,6666	0,2	$\frac{5}{3}$	3

```
>>> 44/20 == 36/12
False
```

Αρα όχι.

Ασκηση 1.0.15 *Να συμπληρωθεί ο πίνακας, αν γνωρίζουμε ότι τα ποσά x και □ είναι ανάλογα, με συντελεστή αναλογίας* $\alpha = \frac{2}{3}$.

$$y = \frac{2}{3}x$$

```
>>> from sympy import *
>>> (x,y) = symbols('x y')
>>> e = 2/3*x
>>> e.subs(x,0)
0
>>> e.subs(x,1)
0.666666666666667
>>> e.subs(x,0.3)
0.200000000000000
>>> solve(e-5/3)
[2.50000000000000]
>>> solve(e-3)
[4.50000000000000]
```

Και ο πίνακας γίνεται:

Ασκηση 1.0.16 *(Ασκηση 2 του βιβλίου, Σελ. 92) Σε ένα διάλυμα ζάχαρης η περιεκτικότητα σε ζάχαρη είναι 23%. Πόσα γραμμάρια ζάχαρης υπάρχουν σε 300 gr διαλύματος;*

```
>>> 300*23/100
69.0
```

Ασκηση 1.0.17 *(Ασκηση 3 του βιβλίου, Σελ. 97) Ενα πλοίο έχει σταθερή ταχύτητα και καλύπτει απόσταση 80 Km σε 2 ώρες. Σε πόσο χρόνο θα καλύψει απόσταση 2.000 Km;*

$$\frac{2}{80} = \frac{x}{2000}$$

x	3	5	7
y	8	10	12

x	3	4	6	11
y	0,9	1,2	1,8	3,3

x	5	0	1			3,7	0,61	
y hline	10,05			2	0,125			0,55

```
>>> from sympy import *
>>> x = symbols('x')
>>> solve(2/80-x/2000)
[50.0000000000000]
```

Η απάντηση είναι 50 ώρες.

Ασκηση 1.0.18 *Εξέτασε αν τα ποσά που δίνονται στους παρακάτω πίνακες είναι ανάλογα: (α) (β)*

```
>>> 8/3==10/5==12/7
False
>>> 0.9/3==1.2/4==1.8/6==3.3/11
True
```

Ασκηση 1.0.19 *(Ασκηση 4 του βιβλίου, Σελ. 98) Στον πίνακα που ακολουθεί, τα ποσά x και y είναι ανάλογα. Υπολόγισε τον συντελεστή αναλογίας τους και συμπλήρωσε τον πίνακα.*

Η αναλογία είναι

```
>>> 10.05/5
2.0100000000000002
```

Ομως αυτό είναι 2,01 Οπότε:

```
>>> 0*2.01
0.0
>>> 1*2.01
2.01
>>> 2/2.01
0.9950248756218907
>>> 0.125/2.01
0.06218905472636817
>>> 3.7*2.01
7.436999999999999
>>> 0.61*2.01
```

x	5	0	1	0,995	0,0622	3,7	0,61	0,273632
y hline	10,05	0	2.01	2	0,125	7,437	1.226	0,55

Βάρος	58	71	56	68
Υψος	1,60	1,65	1,62	1,72

Τιμή	6€	2,8€	5,2€	3,2€		3,6€	4,8€	2,4€	1,6€	4,4€	2€
Κιλά											

```
1.2260999999999997
>>> 0.55/2.01
0.27363184079601993
```

και προσεγγιστικά ο πίνακας γίνεται:

1.1 Ανάλογα ποσά

Ασκηση 1.1.1 *Σε μια παρέα κάποιος υποστήριζε ότι το βάρος του ανθρώπου είναι ανάλογο του ύψους του. Μετρήθηκαν, λοιπόν, όλοι και έβαλαν στον παρακάτω πίνακα τα αποτελέσματα σε Κ.*

- *Μπορείς να επιβεβαιώσεις ή να απορρίψεις τον ισχυρισμό αυτό;*
- *Πώς δικαιολογείς το συμπέρασμά σου;*

```
>>> 58/1.60 == 71/1.65
False
```

Οπότε ο ισχυρισμός απορρίπτεται.

Ασκηση 1.1.2 *Ο μανάβης πουλάει τα καρπούζια προς 0,4 Q το κιλό. Μέσα σε μια ημέρα πούλησε 11 καρπούζια που ζύγιζαν 100 κιλά συνολικά. Ο μανάβης έγραφε, σ' ένα χαρτί, τα λεφτά που εισέπραττε κάθε φορά. Ξέχασε, όμως, μία φορά να το σημειώσει.*

⍰ Μπορείς να τον βοηθήσεις συμπληρώνοντας τα κενά του παρακάτω πίνακα:

- *Δικαιολόγησε τα αποτελέσματα των πράξεων που έκανες και προσπάθησε να διατυπώσεις έναν γενικό κανόνα.*

Τα χρήματα που πήρε συνολικά θα είναι $0,4 * 100 = 40$€. Οπότε μπορούμε να αθροίσουμε τα χρήματα και να βρούμε τα κιλά που πωλήθηκαν από τα χρήματα.

Τιμή	6€	2,8€	5,2€	3,2€	4€	3,6€	4,8€	2,4€	1,6€	4,4€	2€
Κιλά	15	7	13	8	10	9	12	6	4	1	5

```
>>> 6+2.8+5.2+3.2+3.6+4.8+2.4+1.6+4.4+2
36.0
>>> 36/0.4
90.0
>>> 100-90
10
>>> 10*0.4
4.0
```

Για να συμπληρώσουμε ολόκληρο τον πίνακα μπορούμε να βρούμε τα κιλά από τα χρήματα διαιρώντας με το 0,4.

```
>>> 6/0.4
15.0
>>> 2.8/0.4
6.999999999999999
>>> 5.2/0.4
13.0
>>> 3.6/0.4
9.0
>>> 4.8/0.4
11.999999999999998
>>> 2.4/0.4
5.999999999999999
>>> 1.6/0.4
4.0
>>> 4.4/0.4
11.0
>>> 2/0.4
5.0
>>>
```

Αν λάβουμε υπόψη τις στρογγυλοποιήσεις ο πίνακας γίνεται:

Ασκηση 1.1.3 *(Στο βιβλίο βρίσκεται στη Σελ. 99) Η σχέση, μεταξύ δύο ανάλογων ποσών x και με συντελεστή αναλογίας α = 3, δίνεται από τον τύπο:*

$$y = 3 \cdot x$$

.

- *Συμπλήρωσε τα κενά του πίνακα και με άλλες τιμές των αναλόγων ποσών x και .*
- *Βρες τα σημεία του επιπέδου που αναπαριστούν τα παραπάνω ζεύγη τιμών.*

x	0	1	2	3
y	0	2	1	1.5

Πίνακας 1.1: Πίνακας Α

x	0	1	2	3
y	1	1.5	2	2.5

Πίνακας 1.2: Πίνακας Β

- *Προσπάθησε να διαπιστώσεις, εάν τα σημεία ανήκουν σε μία ημιευθεία ή όχι.*
- *Η ημιευθεία αυτή περνάει από το σημείο Ο(0,0) δηλαδή την αρχή των ημιαξόνων;*

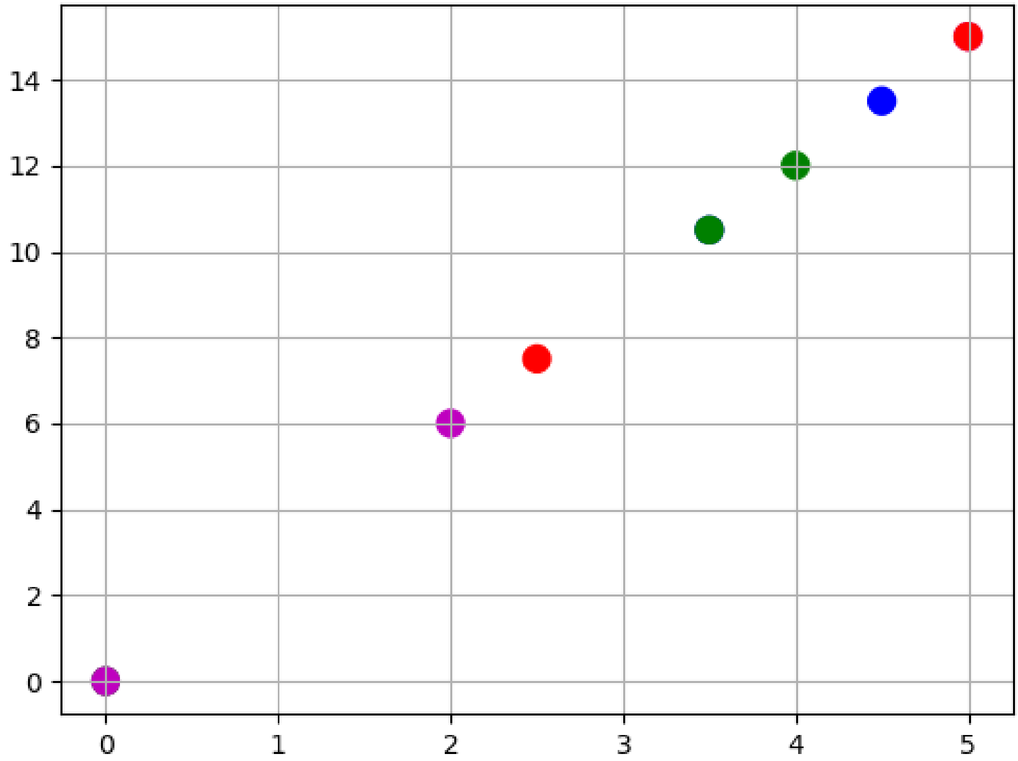
```
import matplotlib.pyplot as plt
from random import randint
from math import floor
plt.clf()
points = []
for i in range(10):
    x = 0+randint(0,10)*0.5
    y = 3*x
    points.append((x,y))

x = [p[0] for p in points]
y = [p[1] for p in points]
color=['m','g','r','b']
plt.grid()
plt.scatter(x,y, s=100 ,marker='o', c=color)

plt.show()
```

Οπότε τα σημεία ανήκουν σε ημιευθεία η οποία περνάει από την αρχή των αξόνων.

Ασκηση 1.1.4 *(Στο βιβλίο βρίσκεται στη Σελ. 100) Δίνονται οι πίνακες Α, Β, Γ και Δ.*

(α) Να γίνει η γραφική απεικόνιση των ζευγών (x,y) των πινάκων στο επίπεδο και (β) να διαπιστωθεί σε ποια περίπτωση αυτά παριστάνουν ποσά ανάλογα.

```
import matplotlib.pyplot as plt
```



x	0	1	2	3
y	0	1	2	3

Πίνακας 1.3: Πίνακας Γ

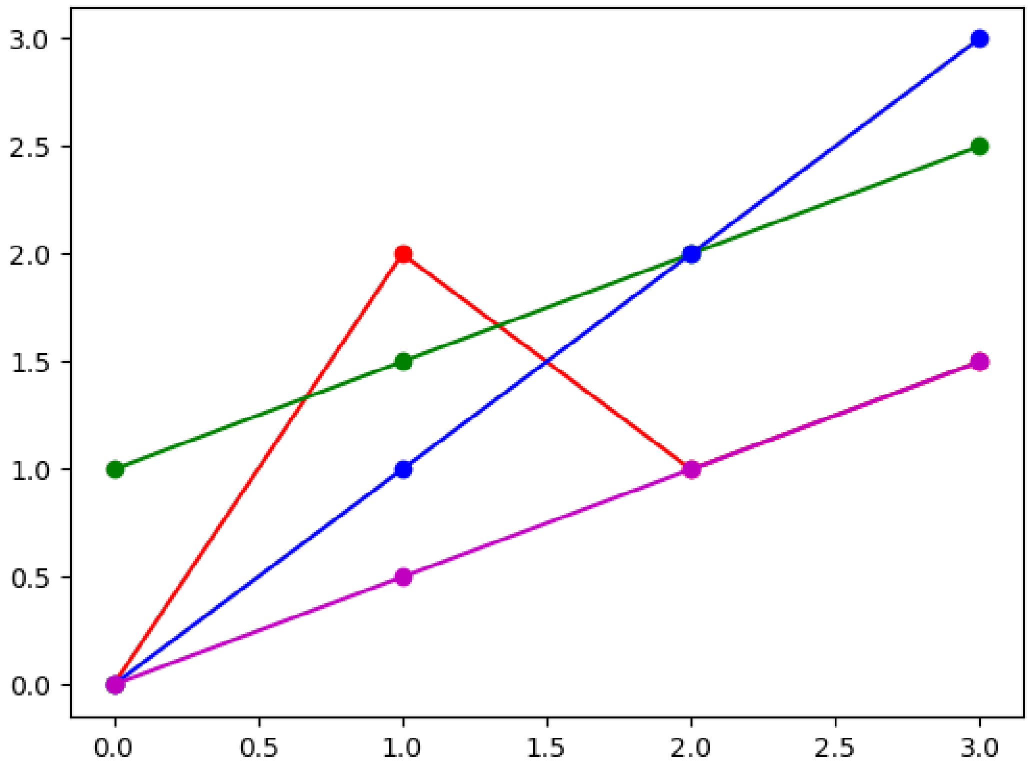
x	0	1	2	3
y	0	0.5	1	1.5

Πίνακας 1.4: Πίνακας Δ

```
plt.clf()
pointsA = [(0,0),(1,2),(2,1),(3,1.5)]
pointsB = [(0,1),(1,1.5),(2,2),(3,2.5)]
pointsC = [(0,0),(1,1),(2,2),(3,3)]
pointsD = [(0,0),(1,0.5),(2,1),(3,1.5)]

x = [p[0] for p in pointsA]
y = [p[1] for p in pointsA]
plt.grid()
plt.plot(x,y, marker='o', c='r')


x = [p[0] for p in pointsB]
y = [p[1] for p in pointsB]
plt.grid()
plt.plot(x,y, marker='o', c='g')


x = [p[0] for p in pointsC]
y = [p[1] for p in pointsC]
plt.grid()
plt.plot(x,y,marker='o', c='b')


x = [p[0] for p in pointsD]
y = [p[1] for p in pointsD]
plt.grid()
plt.plot(x,y, marker='o', c='m')
plt.show()
```

Μια πιο σύντομη έκδοση του προγράμματος που δίνει το ίδιο αποτέλεσμα είναι:

```
import matplotlib.pyplot as plt

plt.clf()
pointslist = [[(0,0),(1,2),(2,1),(3,1.5)],
          [(0,1),(1,1.5),(2,2),(3,2.5)],
          [(0,0),(1,1),(2,2),(3,3)],
          [(0,0),(1,0.5),(2,1),(3,1.5)]]
colors = ['r','g','b','m']
for (i,points) in enumerate(pointslist):
    x = [p[0] for p in points]
    y = [p[1] for p in points]
    plt.grid()
    plt.plot(x,y, marker='o', c=colors[i])

plt.show()
```



x	1	2
y	1.5	3

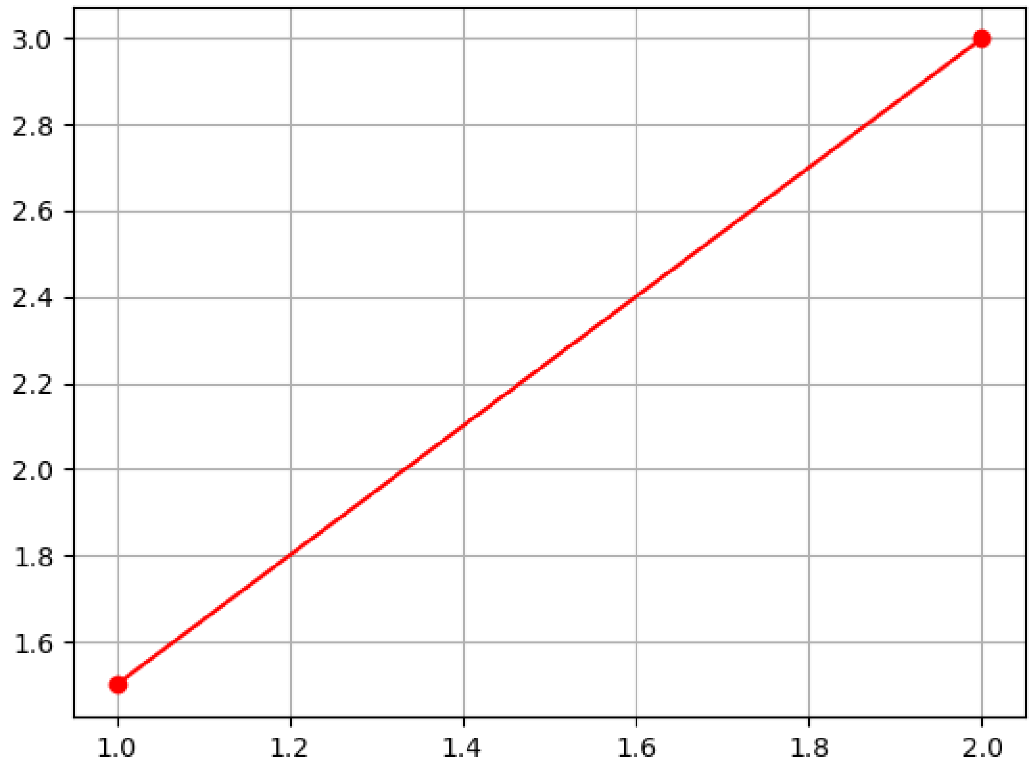
Ασκηση 1.1.5 *(Ασκηση 1 του βιβλίου, Σελ. 101) Δύο ποσά x και είναι ανάλογα, με συντελεστή αναλογίας α = 1,5.*

(α) Δημιούργησε έναν πίνακα τιμών των δύο ποσών, ο οποίος να περιέχει τουλάχιστον δύο ζεύγη τιμών.

(β) Βρες τα σημεία που αναπαριστούν τα ζεύγη τιμών του πίνακά σου.

(γ) Σχεδίασε τη γραφική παράσταση της σχέσης αναλογίας των ποσών x και , σε ένα ορθοκανονικό σύστημα ημιαξόνων.

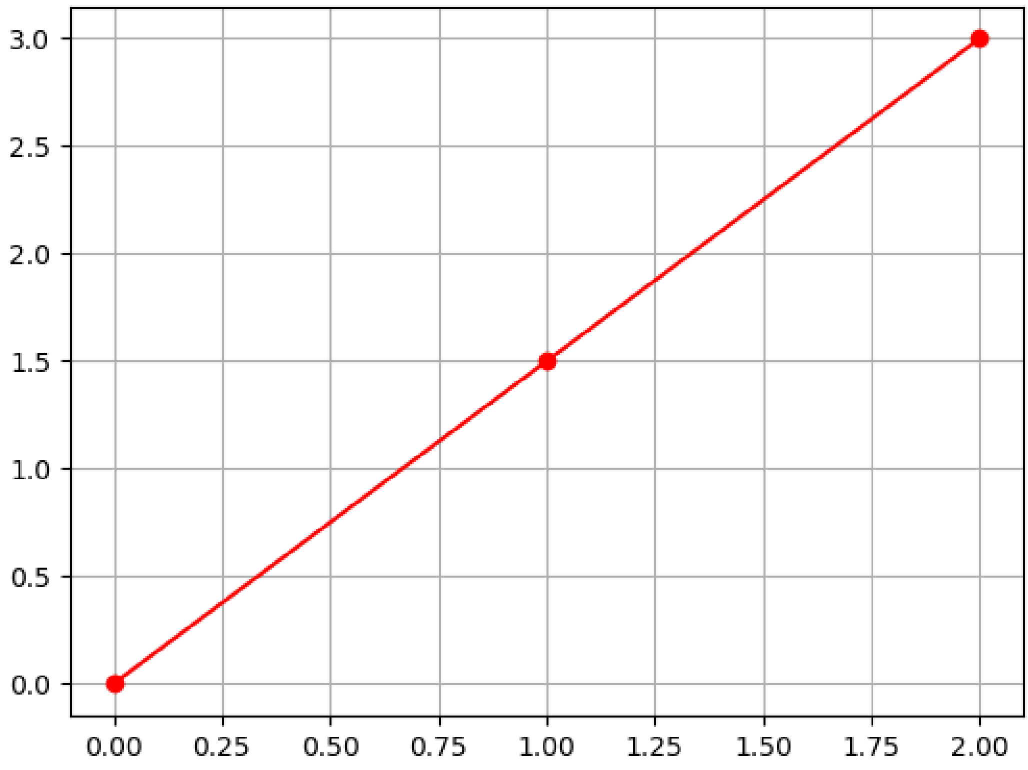
```
import matplotlib.pyplot as plt

plt.clf()
points = [(1,1.5),(2,3)]
```




```
x = [p[0] for p in points]
y = [p[1] for p in points]

plt.grid()
plt.plot(x,y, marker='o', c='r')

plt.show()
```

Καλύτερα όμως είναι να βάλουμε και το σημείο (0,0) ως εξής:

```
import matplotlib.pyplot as plt

plt.clf()
points = [(0,0),(1,1.5),(2,3)]

x = [p[0] for p in points]
y = [p[1] for p in points]

plt.grid()
```

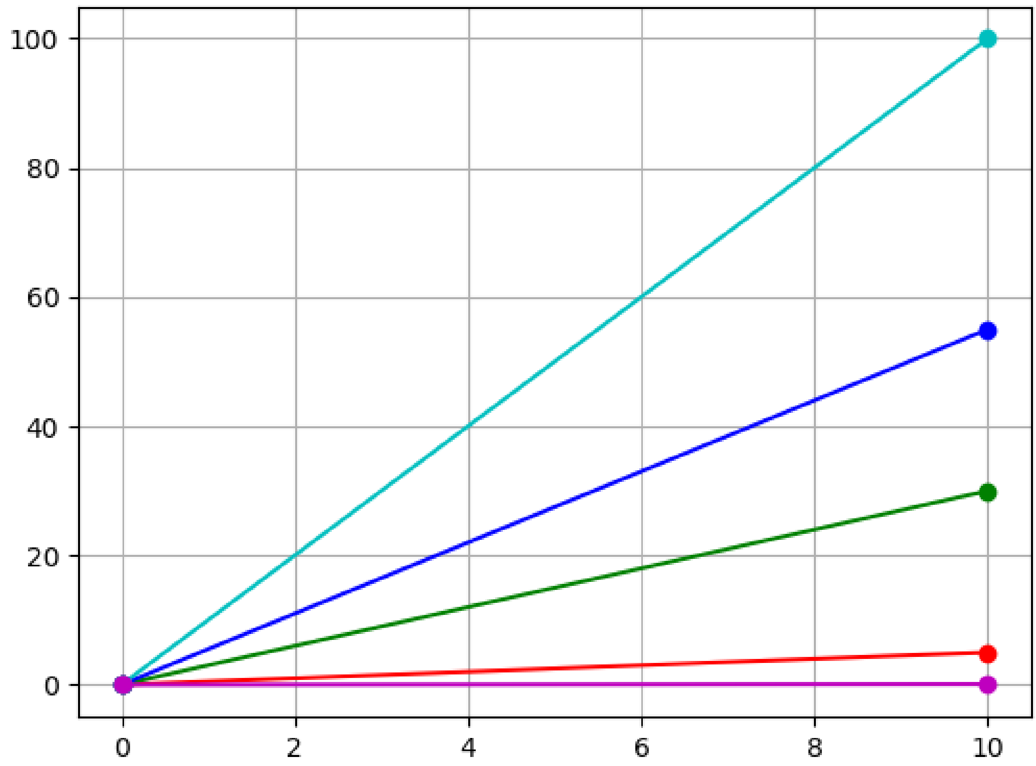



```
plt.plot(x,y, marker='o', c='r')

plt.show()
```

Ασκηση 1.1.6 *(Ασκηση 2 του βιβλίου, Σελ. 101) Σε κατάλληλο ορθογώνιο σύστημα ημιαξόνων να σχεδιάσεις τις γραφικές παραστάσεις για κάθε μία από τις ακόλουθες σχέσεις αναλογίας:*

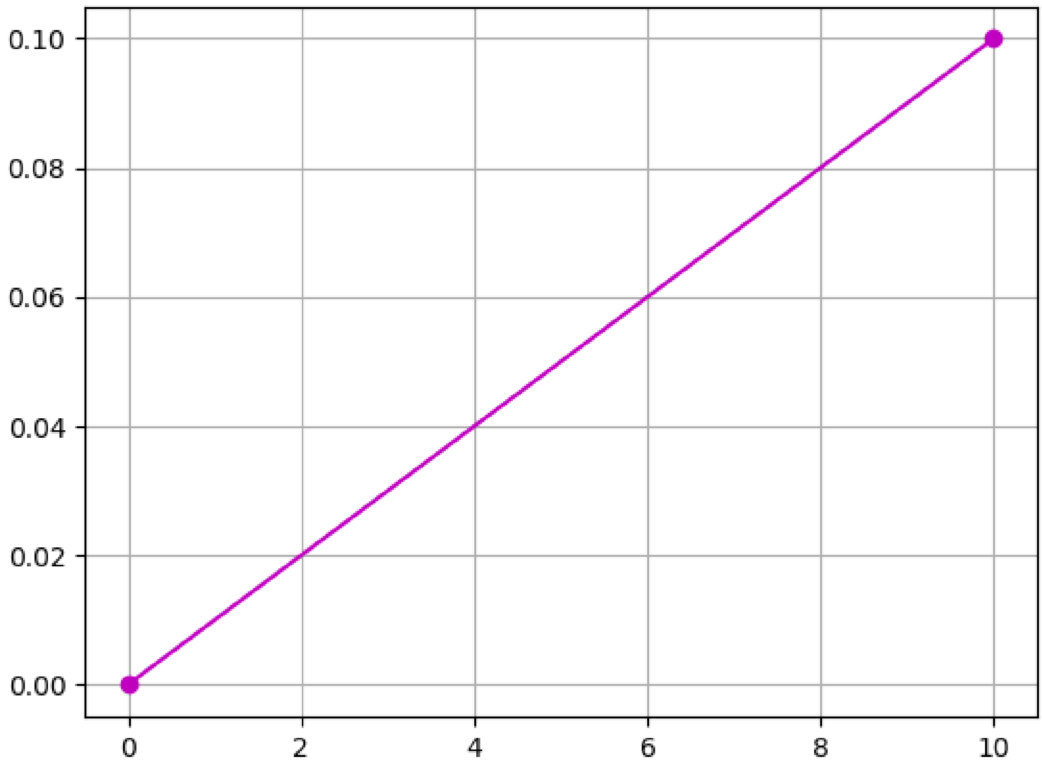
(α) $y = \left(\frac{1}{2}\right) \cdot x$*,*
(β) $y = 3 \cdot x$*,*
(γ) $y = 5,5 \cdot x$
(δ) $y = 10 \cdot x$*,*
(ε) $y = 0,01 \cdot x$*.*

Μπορούμε να τις σχεδιάσουμε και όλες μαζί με διαφορετικά χρώματα. Εχουν ένα κοινό σημείο ενώ μπορούμε να υπολογίσουμε εύκολα ένα δεύτερο, π.χ. για $x = 10$.




```
import matplotlib.pyplot as plt
from sympy import *
x = symbols('x')

analogies = [1/2*x,3*x,5.5*x,10*x,0.01*x]
colors = ['r','g','b','c','m']
for (i,s) in enumerate(analogies):
    x = symbols('x')
    points = [(0,0),(10,s.subs(x,10))]
    x = [p[0] for p in points]
    y = [p[1] for p in points]
    plt.grid()
    plt.plot(x,y, marker='o', c=colors[i])

plt.show()
```

Ομως τα συστήματα δεν είναι κατάλληλα για όλες τις γραφικές παραστάσεις ειδικά η τελευταία φαίνεται να είναι σταθερή στο 0. Αν τη σχεδιά-



σουμε μόνη της η matplotlib θα υπολογίσει ένα κατάλληλο σύστημα αξόνων, δες στον άξονα y.

```
import matplotlib.pyplot as plt
from sympy import *

points = [(0,0),(10,0.01*10]
x = [p[0] for p in points]
y = [p[1] for p in points]
plt.grid()
plt.plot(x,y, marker='o', c='m')

plt.show()
```

Ασκηση 1.1.7 *Αντιστοίχισε κάθε πίνακα με ένα από τους προτεινόμενους τύπους:*

(Α)

x	4	7	12
y	10	17,5	30

(Β)

x	5	7,5	9
y	11	16	19

(Γ)

x	2	3	10
y	7	9	23

(Δ)

x	2	4	6
y	6	3	2

(Ε)

x	2	5	0,5
y	1	2,5	0,25

(Ζ)

x	0,2	6	10
y	2,4	14	22

(Η)

x	1	1,2	2,5
y	3	3,6	7,5

(Θ)

x	0,8	1	1,5
y	2,2	3	5

(1) $y = 2x + 3$

(2) $y = 3x$

(3) $y = 12 : x$

(4) $y = 2,5x$

(5) $y = 2x + 2$

(6) $y = 2x + 1$

(7) $y = 4x - 1$

(8) $y = 0,5x$

```
from sympy import *
x = symbols('x')
pointsList = [[(4,10),(7,17.5),(12,30)],
              [(5,11),(7.5,16),(9,19)],
              [(2,7),(3,9),(10,23)],
              [(2,6),(4,3),(6,2)],
              [(2,1),(5,2.5),(0.5,0.25)],
              [(0.2,2.4),(6,14),(10,22)],
              [(1,3),(1.2,3.6),(2.5,7.5)],
              [(0.8,2.2),(1,3),(1.5,5)]]

typoi = [2*x+3,3*x,12/x,2.5*x,2*x+2,2*x+1,4*x-1,0.5*x]
onomataPinaka = ['A','B','Γ','Δ','E','Z','H','Θ']

for (arithmosPinaka,points) in enumerate(pointsList):
    for (arithmosTipou, t) in enumerate(typoi):
        for p in points:
            x = symbols('x')
            if abs((p[1] - t.subs(x,p[0]))) > 1e-8:
                break
        else:
            print(onomataPinaka[arithmosPinaka],'-',arithmosTipou+1)
```

Που δίνει το αποτέλεσμα:

```
   A
 - 4B
 - 6Γ
```

```
- 1Δ
- 3Ε
- 8Ζ
- 5Η
- 2Θ
- 7
```

Χρησιμοποιούμε abs((p[1] - t.subs(x,p[0]))) > 1e-8 αντί για το πιο απλό p[1]!=t.subs(x,p[0]) γιατί στην δεύτερη περίπτωση θα έχουμε σφάλματα απο στρογγυλοποιήσεις.

Ασκηση 1.1.8 *(Ασκηση 4 του βιβλίου, Σελ. 101) Ενας καταστηματάρχης αθλητικών ειδών διαθέτει 12.000€ για να αγοράσει φόρμες γυμναστικής, μαγιό και αθλητικά παπούτσια. Κάθε φόρμα κοστίζει 40€ , κάθε μαγιό 20€ και κάθε ζευγάρι παπούτσια 50€.*

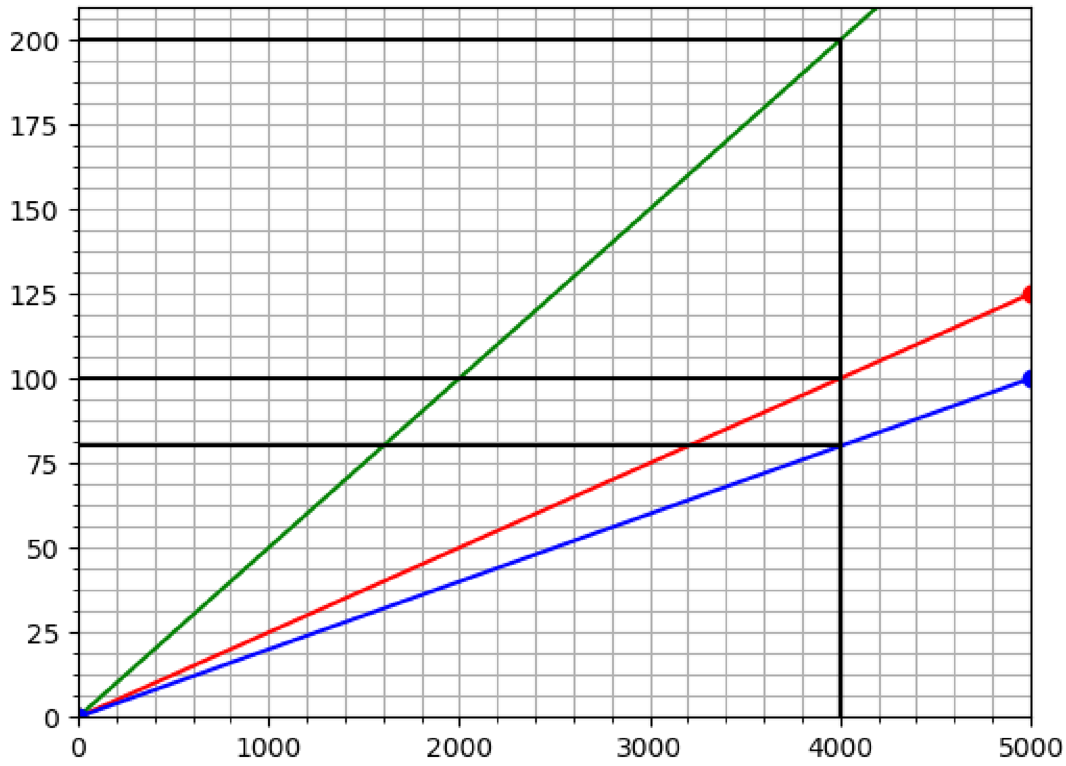
(α) Να βρεις τις σχέσεις αναλογίας "χρήματα-κομμάτια από κάθε είδος" και να τις παραστήσεις γραφικά στο ίδιο σύστημα ορθογωνίων αξόνων.

(β) Ο καταστηματάρχης αποφάσισε να διαθέσει το ίδιο ποσό, για κάθε είδος. Βρες πόσα κομμάτια από κάθε είδος θα αγοράσει με τα χρήματα που διαθέτει, χρησιμοποιώντας μόνο τη γραφική παράσταση των σχέσεων που δημιούργησες στο πρώτο ερώτημα της άσκησης.

$$y = x/40$$
$$y = x/20$$
$$y = x/50$$

Αν δώσει 0 ευρώ τότε το y είναι 0 σε όλες τις γραφικές παραστάσεις. Αν δώσει 200 ευρώ τότε θα πάρει 5 φόρμες ($200/40 = 5$), 10 μαγιό ($200/40 = 10$), και 4 ζευγάρια αθλητικά παπούτσια ($200/50 = 40$). Οπότε μπορούμε να σχεδιάσουμε τις ευθείες με τα σημεία: (0,0) και (200,5), (200,10), (200,50) αντίστοιχα.

```
import matplotlib.pyplot as plt

plt.clf()
pointslist = [[(0,0),(200,5)],
                        [(0,0),(200,10)],
                        [(0,0),(200,50)]]
colors = ['r','g','b']
for (i,points) in enumerate(pointslist):
    x = [p[0] for p in points]
    y = [p[1] for p in points]
    plt.grid([10,10])
    plt.plot(x,y, marker='o', c=colors[i])

plt.show()
```



Ασκηση 1.1.9 *(Στο βιβλίο βρίσκεται στη Σελ. 103) Για να φτιάξουμε γλυκό βύσσινο πρέπει να καθαρίσουμε τα βύσσινα από τα κουκούτσια. Αν καθαρίσουμε 2,5 Kg βύσσινο, παίρνουμε 2 Kg καθαρό βύσσινο. Αν καθαρίσουμε 5 Kg βύσσινο, τι ποσότητα καθαρού βύσσινου θα πάρουμε;*

Για αυτή την άσκηση και όλες τις αντίστοιχες μπορούμε να προγραμματίσουμε μια συνάρτηση:

```
def analoga(gnwsto1,gnwsto2,analogo1):
    #analogo2/analogo1  = gnwsto2/gnwsto1
    analogo2 = gnwsto2/gnwsto1*analogo1
    return(analogo2)

print(analoga(2,5,2,5))
```

Που δίνει το σωστό αποτέλεσμα

```
4.0
```

Ασκηση 1.1.10 *(Στο βιβλίο βρίσκεται στη Σελ. 104) Ενας μεσίτης αγοράζει ένα σπίτι 360.000 € και σκοπεύει να το πουλήσει με κέρδος 28%. Σε έναν πελάτη έκανε έκπτωση 15%, επί της τιμής πώλησης.*

(α) Πόσο πουλήθηκε το σπίτι στον πελάτη αυτόν;

(β) Ποιο είναι το ποσοστό κέρδους του μεσίτη, για το σπίτι αυτό;

```
>>> arxikiTimi = analoga(100,128,360000)
>>> arxikiTimi
460800.0
>>> telikiTimi = analoga(100,85,460800)
>>> telikiTimi
391680.0
>>> kerdos = (telikiTimi-360000)/360000*100
>>> kerdos
8.799999999999999
>>>
```

Αρα λόγω της έκπτωσης το τελικό κέρδος του μεσίτη ήταν 8.8%.

Ασκηση 1.1.11 *(Ασκηση 1 του βιβλίου, Σελ. 105) Ενας πάσσαλος ύψους 1,2 m ρίχνει σκιά 3 m. Την ίδια στιγμή ένα δέντρο ρίχνει σκιά 14 m. Αν γνωρίζουμε ότι τα ποσά ύψος - σκιά είναι ανάλογα, να βρεθεί το ύψος του δέντρου.*

```
>>> analoga(3,1.2,14)
5.6
```

Ασκηση 1.1.12 *(Στο βιβλίο βρίσκεται στη Σελ. 2) [105] Το βάρος στο φεγγάρι και το βάρος στη γη είναι ποσά ανάλογα. Ενας αστροναύτης ζύγιζει στο φεγγάρι 12,9 Kg και στη γη 78 Kg. Πόσο θα ζυγίζει στο φεγγάρι ένα παιδί, που στη γη έχει βάρος 52 Kg;*

```
>>> analoga(78,12.9,52)
8.6
```

Ασκηση 1.1.13 *(Ασκηση 3 του βιβλίου, Σελ. 105) Από 100 Kg σταφύλια βγαίνουν 80 Kg μούστος. Ενας αμπελουργός θέλει να γεμίσει με μούστο 6 βαρέλια, των 350 Kg το καθένα. Πόσα K σταφύλια, της ίδιας ποιότητας, πρέπει να πατήσει;*

```
>>> analoga(80,100,6*350)
2625.0
```

Ασκηση 1.1.14 *(Ασκηση 4 του βιβλίου, Σελ. 105) Δύο εργάτες δούλεψαν σε μια οικοδομή και πήραν μαζί 270€ . Ο πρώτος δούλεψε 4 ημέρες και ο δεύτερος 5 ημέρες. Πόσα χρήματα αντιστοιχούν στον καθένα.*

```
>>> analoga(9,270,4)
120.0
>>> analoga(9,270,5)
150.0
```

Και όντως $120 + 150 = 270$.

Ασκηση 1.1.15 *(Ασκηση 5 του βιβλίου, Σελ. 105) Το θαλασσινό νερό περιέχει αλάτι σε ποσοστό 3%. Πόσα κιλά θαλασσινό νερό πρέπει να εξατμιστούν για να πάρουμε 60Kg αλάτι;*

```
>>> analoga(3,100,60)
2000.0000000000002
```

Αρα 2 τόνοι θαλασσινό νερό.

Ασκηση 1.1.16 *(Ασκηση 6 του βιβλίου, Σελ. 105) Ενας γεωργός είχε ένα χωράφι 7 στρέμματα και πήρε και το γειτονικό χωράφι εμβαδού 8 στρεμμάτων, για να φυτέψει καλαμπόκι. Η συμφωνία με το γείτονά του ήταν να του δώσει το 15 της παραγωγής του χωραφιού του. Η συνολική παραγωγή ήταν 14 τόνοι καλαμπόκι. Πόσους τόνους θα πάρει ο γεωργός και πόσους ο γείτονάς του;*

```
>>> xwrafi8 = analoga(7+8,14000,8)
>>> analoga(100,15,xwrafi8)
1120.0
```

Ασκηση 1.1.17 *(Ασκηση 7 του βιβλίου, Σελ. 105) Αν ψήσουμε 2,5 Κ ωμό κρέας θα μείνει 1,9 Κ ψημένο κρέας. (α) Πόσο είναι το ποσοστό απώλειας που έχουμε; (β) Πόσο κρέας πρέπει να ψήσουμε για να έχουμε 2,3 Κ ψημένο κρέας;*

```
>>> analoga(2.5,2.5-1.9,100)
24.000000000000004
>>> analoga(1.9,2.5,2.3)
3.026315789473684
```

Αρα 3Kg ωμό κρέας.

Ασκηση 1.1.18 *(Ασκηση 8 του βιβλίου, Σελ. 105) Η μηνιαία κάρτα απεριορίστων διαδρομών στοιχίζει 12 Q και η τιμή της θα αυξηθεί, κατά 75. Το εισιτήριο στο αστικό λεωφορείο είναι 0,7 Q και θα αυξηθεί, κατά 50. Ενας εργαζόμενος παίρνει λεωφορείο, για να πάει και να γυρίσει από τη δουλειά του κάθε ημέρα, για είκοσι φορές το μήνα. Τον συμφέρει η χρήση της κάρτας ή όχι;*

Το κόστος της κάρτας θα είναι:

```
>>> analoga(100,175,12)
21.0
```

	ΣΥΝΟΛΟ	Με 0 παιδιά	Με 1 παιδί	Με 2 παιδιά	Με 3 παιδιά	Με 4 παιδ
Οικογένειες	200	10	40	80	50	15
Ποσοστά	100%					

Το κόστος του εισιτηρίου θα είναι:

```
>>> analoga(100,150,0.7)
1.0499999999999998
```

1.05€ και το κόστος των 20 εισιτηρίων θα είναι:

```
>>> 20*1.05
21.0
```

Αρα ίδιο κόστος με αυτό της κάρτας.

Ασκηση 1.1.19 *(Ασκηση 9 του βιβλίου, Σελ. 105) Ενα κεφάλαιο δίνει τόκο 1.000 Q το χρόνο, με επιτόκιο 10. Αν το επιτόκιο μειωθεί κατά 20, πόσο τοις εκατό πρέπει ν' αυξήσουμε το κεφάλαιό μας για να έχουμε τον ίδιο τόκο, παρά τη μείωση του επιτοκίου;*

Το αρχικό κεφάλαιο είναι:

```
>>> analoga(10,100,1000)
10000.0
```

Το νέο επιτόκιο είναι:

```
>>> analoga(100,80,10)
8.0
```

Οπότε το νέο κεφάλαιο θα πρέπει να είναι:

```
>>> analoga(8,100,1000)
12500.0
```

και το ποσοστό αύξησης του κεφαλαίο θα είναι:

```
>>> analoga(10000,2500,100)
25.0
```

Ασκηση 1.1.20 *(Ασκηση 10 του βιβλίου, Σελ. 105) Συμπλήρωσε τον παρακάτω πίνακα και σχεδίασε διάγραμμα που αντιστοιχεί στα δεδομένα του προβλήματος.*

```
>>> analoga(200,10,100)
5.0
>>> analoga(200,40,100)
20.0
>>> analoga(200,80,100)
```

	ΣΥΝΟΛΟ	Με 0 παιδιά	Με 1 παιδί	Με 2 παιδιά	Με 3 παιδιά	Με 4 παιδιά	Πά
Οικογένειες	200	10	40	80	50	15	
Ποσοστά	100%	5	20	40	25	7.5	

Ταχύτητα σε Km/h								
Χρόνος σε ώρες								

```
40.0
>>> analoga(200,50,100)
25.0
>>> analoga(200,15,100)
7.5
>>> analoga(200,5,100)
2.5
```

και ο πίνακας γίνεται: Μια επαλήθευση δίνει:

```
>>> 5 + 20 +40  +25 +7.5  + 2.5
100.0
```

1.2 Αντιστρόφως ανάλογα ποσά

Ασκηση 1.2.1 *(Στο βιβλίο βρίσκεται στη Σελ. 106) Ξεκινούν ταυτόχρονα από μια πόλη: (α) ένα αυτοκίνητο που τρέχει με ταχύτητα 120 kmh*

(β) ένα αεροπλάνο με 600 Kmh
(γ) μία μοτοσικλέτα με 75 Kmh
(δ) ένα λεωφορείο που τρέχει με 80 Kmh
(ε) ένα ελικόπτερο με 300 Kmh
(στ) ένα ταξί με 100 Kmh
(ζ) μία βέσπα με 60 Kmh και
(η) ένα πούλμαν με 90 Kmh
Το τέλος της διαδρομής είναι μια άλλη πόλη, που απέχει 600 Km.

- *Βρες σε πόσες ώρες, θα φθάσει το καθένα στον προορισμό του και συμπλήρωσε τον παρακάτω πίνακα:*
- *Ποια σχέση συνδέει τα μεγέθη της ταχύτητας και του χρόνου;*
- *Τοποθέτησε τα ζεύγη των τιμών που βρήκες, σε ένα σύστημα ημιαξόνων και ένωσε τα σημεία, που ορίζουν τα ζεύγη αυτά, με μία γραμμή. Τι παρατηρείς;*

Ταχύτητα σε Km/h	120	600	75	80	300	100	60	90
Χρόνος σε ώρες	5	1	8	7.5	2	6	10	6,66

Εργάτες συνεργείου	2	4	6	8	10	12	24	48
Ημέρες εργασίας				30				

```
>>> 600/120
5.0
>>> 600/600
1.0
>>> 600/75
8.0
>>> 600/80
7.5
>>> 600/300
2.0
>>> 600/100
6.0
>>> 600/60
10.0
>>> 600/90
6.666666666666667
```

Οπότε ο πίνακας γίνεται:

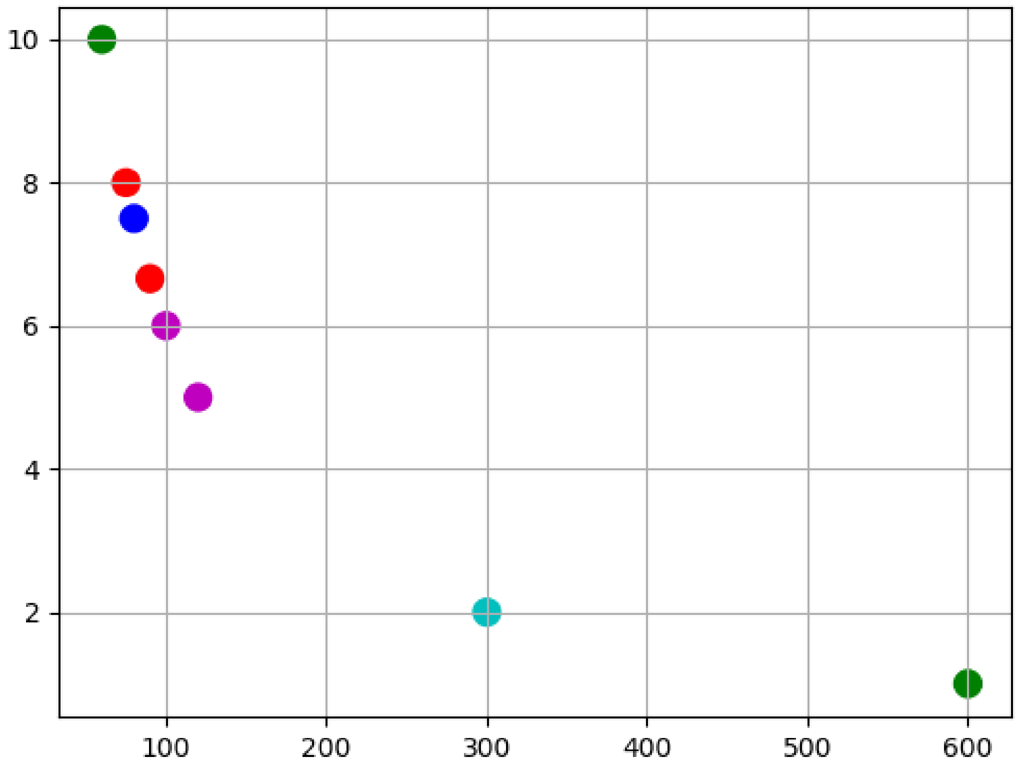
Τα ποσά είναι αντιστρόφως ανάλογα.

```
import matplotlib.pyplot as plt

plt.clf()
points = [(120,5), (600,1), (75,8), (80,7.5), (300,2), (100,6), (60,10), (90,6.66)]
x = [p[0] for p in points]
y = [p[1] for p in points]
color=['m','g','r','b','c']
plt.grid()
plt.scatter(x,y, s=100 ,marker='o', c=color)

plt.show()
```

Ασκηση 1.2.2 *(Στο βιβλίο βρίσκεται στη Σελ. 106) Ενα συνεργείο που αποτελείται από 8 εργάτες χρειάζεται 30 ημέρες για να ολοκληρώσει ένα οικοδομικό έργο.*

- *Πόσες ημέρες θα χρειαστεί το συνεργείο, που αποτελείται από 2, 4, 6, 10, 12, 24 ή 48 εργάτες για να τελειώσει το ίδιο έργο;*

- *Μπορείς να συμπληρώσεις τον παρακάτω πίνακα;*



Σχήμα 1.1: Χρόνος ως προς την ταχύτητα

- *Τι παρατηρείς για το γινόμενο "εργάτες" · "ημέρες";*
- *Τοποθέτησε τα ζεύγη των τιμών του πίνακα, σε ένα σύστημα ημιαξόνων και ένωσε τα σημεία, που ορίζουν τα ζεύγη αυτά, με μία γραμμή. Τι παρατηρείς;*

```
>>> 8/2*30
120.0
>>> 8/4*30
60.0
>>> 8/6*30
40.0
>>> 8/8*30
30.0
>>> 8/10*30
```

Εργάτες συνεργείου	2	4	6	8	10	12	24	48
Ημέρες εργασίας	120	60	40	30	24	20	10	5

```
24.0
>>> 8/12*30
20.0
>>> 8/24*30
10.0
>>> 8/48*30
5.0
>>>
```

Ο πίνακας γίνεται:

```
>>> erg = [2,4,6,8,10,12,24,48]
>>> mer = [120,60,40,30,24,20,10,5]
>>> for i in range(8):
...     print(erg[i]*mer[i])
...
240
240
240
240
240
240
240
240
```

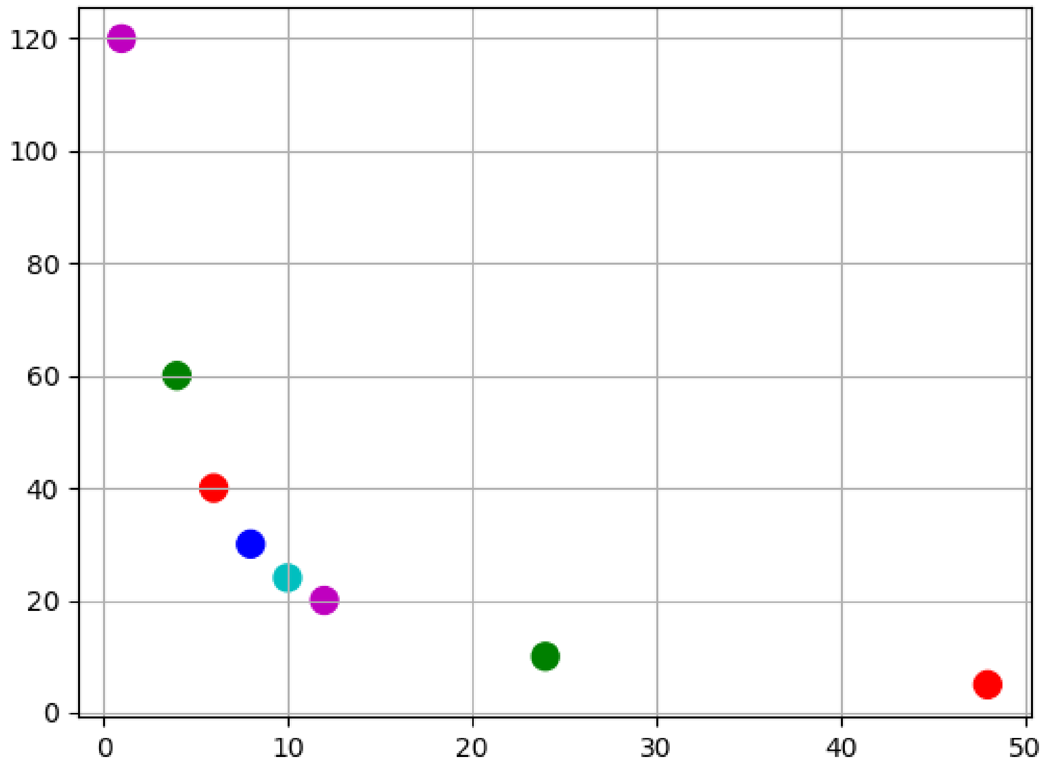
Το γινόμενο είναι πάντα 240.

```
import matplotlib.pyplot as plt

plt.clf()
points = [(1,120),(4,60),(6,40),(8,30),(10,24),(12,20),(24,10),(48,5)]
x = [p[0] for p in points]
y = [p[1] for p in points]
color=['m','g','r','b','c']
plt.grid()
plt.scatter(x,y, s=100 ,marker='o', c=color)

plt.show()
```

Ασκηση 1.2.3 *(Στο βιβλίο βρίσκεται στη Σελ. 107)*

Ενα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο έχει διαστάσεις x και y. Αν γνωρίζεις ότι το εμβαδόν του ορθογωνίου είναι 144 m2, μπορείς να βρεις δεκατέσσερις ακέραιες τιμές των διαστάσεών του και να συμπληρώσεις τον παρακάτω πίνακα;

- *Ποια σχέση συνδέει τις διαστάσεις του ορθογωνίου με το εμβαδόν του;*



x	1	2	3	4	6	12	18	20	22	24	30	32	34	36
y														

- *Τοποθέτησε τα ζεύγη των τιμών του πίνακα, σε ένα σύστημα ημιαξόνων και ένωσε τα σημεία, που ορίζουν τα ζεύγη αυτά, με μία γραμμή. Τι παρατηρείς;*
- *Ποιο ορθογώνιο, απ' αυτά που βρήκες, έχει τη μικρότερη περίμετρο;*

```
>>> 144/1
144.0
>>> 144/2
72.0
>>> 144/3
48.0
>>> 144/4
36.0
```

x	1	2	3	4	6	12	18	20	22	24	30	32	34	36
y	144	72	48	36	24	12	8	7.2	6.55	6	4.8	4.5	4,235	4

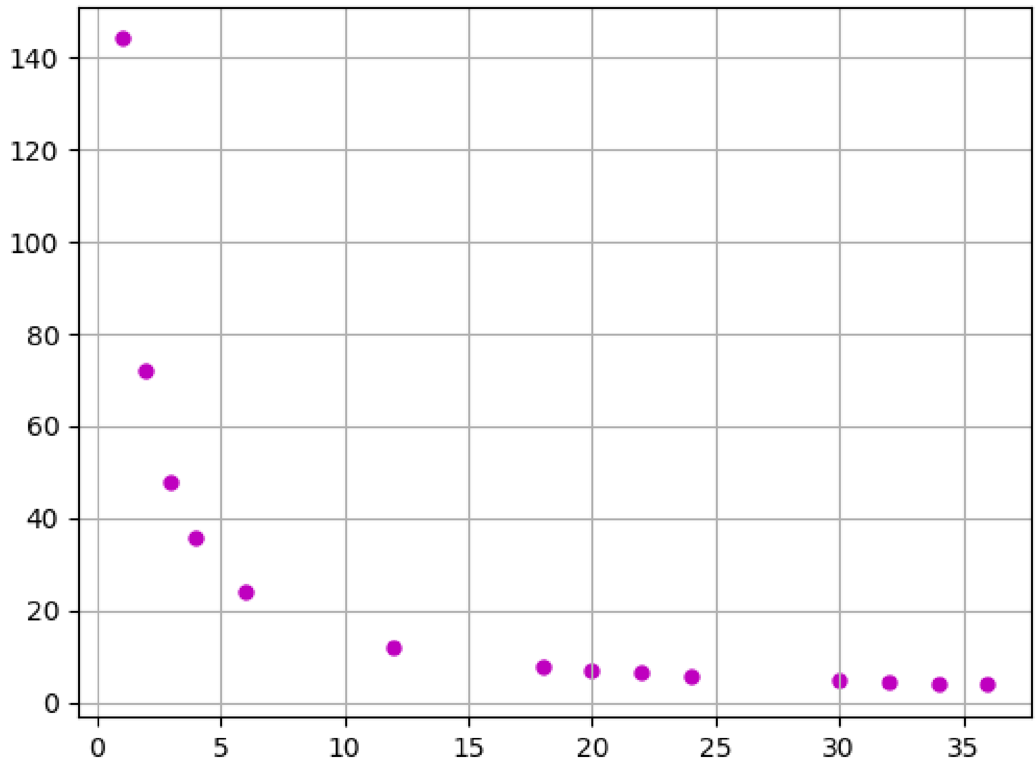
```
>>> 144/6
24.0
>>> 144/12
12.0
>>> 144/18
8.0
>>> 144/20
7.2
>>> 144/22
6.545454545454546
>>> 144/24
6.0
>>> 144/30
4.8
>>> 144/32
4.5
>>> 144/34
4.235294117647059
>>> 144/36
4.0
```

```
import matplotlib.pyplot as plt

plt.clf()
x = [1,2,3,4,6,12,18,20,22,24,30,32,34,36]
y = [144/p for p in x]
plt.grid()
plt.scatter(x,y, s=100 ,marker='.', c='m')

plt.show()
```

Για την περίμετρο μπορούμε να κάνουμε μια γραφική παράσταση για τα σημεία που έχουμε:

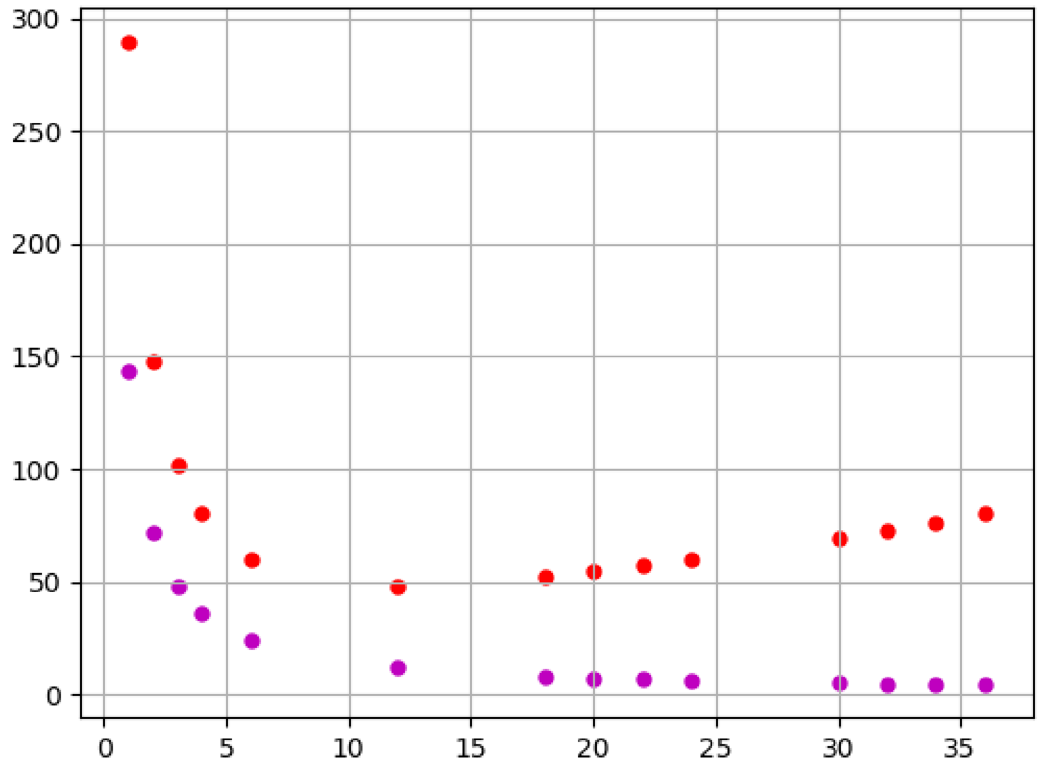
```
import matplotlib.pyplot as plt

plt.clf()
x = [1,2,3,4,6,12,18,20,22,24,30,32,34,36]
y = [144/p for p in x]
perimetros = [2*p+2*144/p for p in x]
plt.grid()
plt.scatter(x,y, s=100 ,marker='.', c='m')
plt.scatter(x,perimetros,s=100,marker='.',c='r')
plt.show()
```

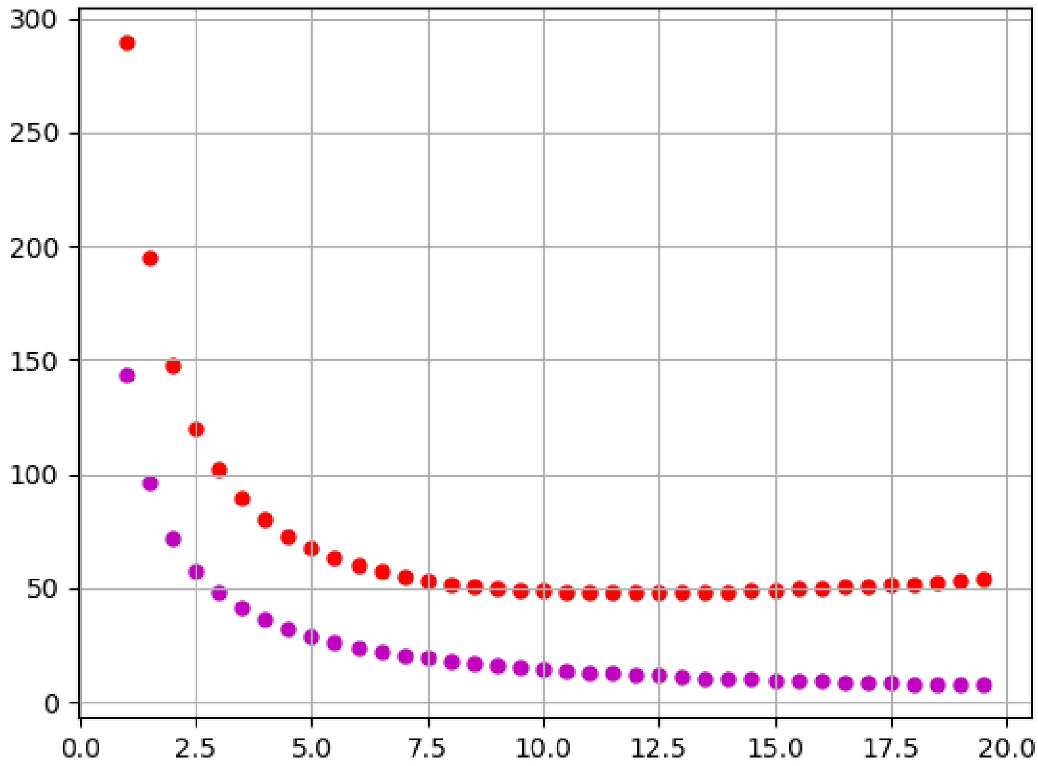
Βλέπουμε ότι η μικρότερη περίμετρος προκύπτει όταν το x είναι 12.



Για την ακρίβεια μπορούμε να δούμε τη γραφική παράσταση για πολλά σημεία ως εξής:

```
import matplotlib.pyplot as plt
from numpy import arange

plt.clf()
x = arange(1,20,0.5)
y = [144/p for p in x]
perimetros = [2*p+2*144/p for p in x]
plt.grid()
plt.scatter(x,y, s=100 ,marker='.', c='m')
plt.scatter(x,perimetros,s=100,marker='.',c='r')
plt.show()
```


300
250
200
150
100
50
0
0
5
10
15
20
25
30
35


300
250
200
150
100
50
0
0.0
2.5
5.0
7.5
10.0
12.5
15.0
17.5
20.0