# Εργαστηριακή Αναφορά

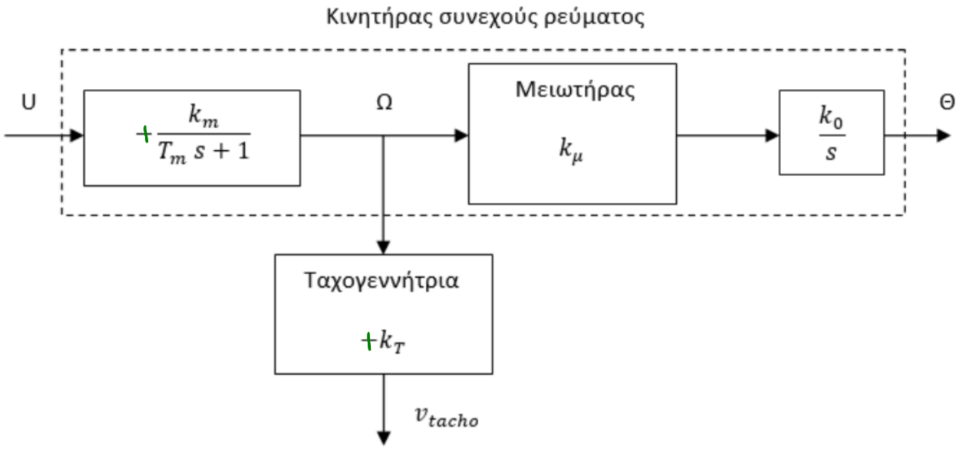
031 - Συστήματα Αυτομάτου Ελέγχου ΙΙ

Ιωάννης Δημουλιός 10641

Εαρινό εξάμηνο 2024

## Προεργασία

Το μοντέλο του συστήματος δίνεται από το μπλοκ διάγραμμα.




Έχουν γίνει οι απαραίτητες αλλαγές στα πρόσημα καθ' υπόδειξη του διδάσκοντος.
Ορίζουμε μεταβλητές κατάστασης του συστήματος

$$x_1 = \theta$$
$$x_2 = v_{\text{tacho}}.$$

Από το σχήμα παίρνουμε

$$\Omega = \frac{v_{\text{tacho}}}{k_T} = \frac{x_2}{k_T} \tag{1}$$
$$\Theta = \Omega k_\mu \frac{k_0}{s} \overset{(1)}{\implies} \dot{x}_1 = \frac{k_\mu k_0}{k_T} x_2 \tag{2}$$
$$\Omega = \frac{k_m}{T_m s + 1} U \overset{(1)}{\implies} \dot{x}_2 = -\frac{1}{T_m} x_2 + \frac{k_T k_m}{T_m} u. \tag{3}$$

Γράφουμε τις εξισώσεις (2) και (3) σε μορφή πινάκων, οπότε

$$\dot{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \frac{k_\mu k_0}{k_T} \\ 0 & -\frac{1}{T_m} \end{bmatrix}}_{A} x + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{k_T k_m}{T_m} \end{bmatrix}}_{B} u.$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του συστήματος είναι

$$p(s) = \det(sI - A) = s^2 + \frac{1}{T_m} s.$$

Το ζεύγος πινάκων $(A, B)$ είναι ελέγξιμο, αφού

$$M = \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{k_\mu k_0 k_m}{T_m} \\ \dfrac{k_T k_m}{T_m} & -\dfrac{k_T k_m}{T_m^2} \end{bmatrix}, \quad \det(M) \neq 0.$$

Επίσης, αφού έχουμε ως έξοδο μόνο τη θέση, τότε

$$y = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}_{C} x.$$

Δείχνουμε ότι το σύστημα είναι και παρατηρήσιμο. Πράγματι,

$$W = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \dfrac{k_\mu k_0}{k_T} \end{bmatrix}, \quad \det(W) \neq 0.$$

# 1ο Εργαστήριο

Ακολουθώντας τις οδηγίες του φυλλαδίου, λαμβάνουμε, όταν $U = 10\,\mathrm{V}$, $V_{\text{tacho}} = 8.6\,\mathrm{V}$, άρα

$$k_m k_T = \frac{8.6}{10} = 0.86.$$

Υπολογίζουμε $8.6 \cdot 63.3\% = 5.44\,\mathrm{V}$ και ο χρόνος που απαιτείται για να φτάσει σε αυτήν την τιμή είναι

$$T_m = 0.555\,\mathrm{s}.$$

Μια πλήρης περιστροφή του άξονα του κινητήρα αντιστοιχεί σε $10^\circ$ του άξονα εξόδου, άρα

$$k_\mu = \frac{10^\circ}{360^\circ} = \frac{1}{36}.$$

Μετά μετράμε $\Delta x_2 = 12.6\,\mathrm{V}$ σε $\Delta t = 0.873\,\mathrm{s}$ για $1$ περιστροφή, άρα

$$\omega_{\text{out}} = \frac{60\,\mathrm{s} \cdot 1\text{round}}{\Delta t} = 68.73\,\mathrm{rpm}.$$

Τότε,

$$\begin{aligned} \frac{\Delta x_2}{\Delta t} &= k_0 \omega_{\text{out}} \implies k_0 = 0.21 \\ \omega_{\text{in}} &= \frac{1}{k_\mu}\omega_{\text{out}} = 2474.28\,\mathrm{rpm} \\ V_{\text{tacho}} = k_T \omega_{\text{in}} &\implies k_T = \frac{8.6}{2474.28} = 0.00348 \\ k_m k_T = 0.86 &\implies k_m = \frac{0.86}{0.00348} = 247.13. \end{aligned}$$

Συγκεντρωτικά, οι ζητούμενες σταθερές έχουν τις ακόλουθες τιμές

$$\begin{aligned} k_m &= 247.13 \\ T_m &= 0.55 \\ k_T &= 0.00348 \\ k_0 &= 0.21 \\ k_\mu &= \frac{1}{36}. \end{aligned}$$

# 2ο Εργαστήριο

Καλούμαστε να σχεδιάσουμε έναν ελεγκτή γραμμικής ανάδρασης καταστάσεων. Επομένως, θέτουμε

$$u = -k_1 x_1 - k_2 x_2 + k_r r$$

και ψάχνουμε τα κέρδη $k_1, k_2, k_r$. Όμως πρέπει, μετά από πράξεις,

$$k_r = -\frac{1}{C(A - Bk)^{-1}Bk} = k_1.$$

Τότε,

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= Ax + Bu = (A - Bk)x + Bk_1 r \\
&= \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \dfrac{k_\mu k_0}{k_T} \\ -\dfrac{k_1 k_T k_m}{T_m} & -\dfrac{1 + k_2 k_T k_m}{T_m} \end{bmatrix}}_{A'} x + \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{k_T k_m k_1}{T_m} \end{bmatrix} r.
\end{aligned}$$

Τώρα το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του $A'$ γράφεται

$$\begin{aligned}
\det(sI - A') &= \det\left(\begin{bmatrix} s & -\dfrac{k_\mu k_0}{k_T} \\ \dfrac{k_1 k_T k_m}{T_m} & \dfrac{1 + k_2 k_T k_m}{T_m} s \end{bmatrix}\right) \\
&= s^2 + \frac{1 + k_2 k_T k_m}{T_m} s + \frac{k_\mu k_1 k_0 k_m}{T_m}.
\end{aligned}$$

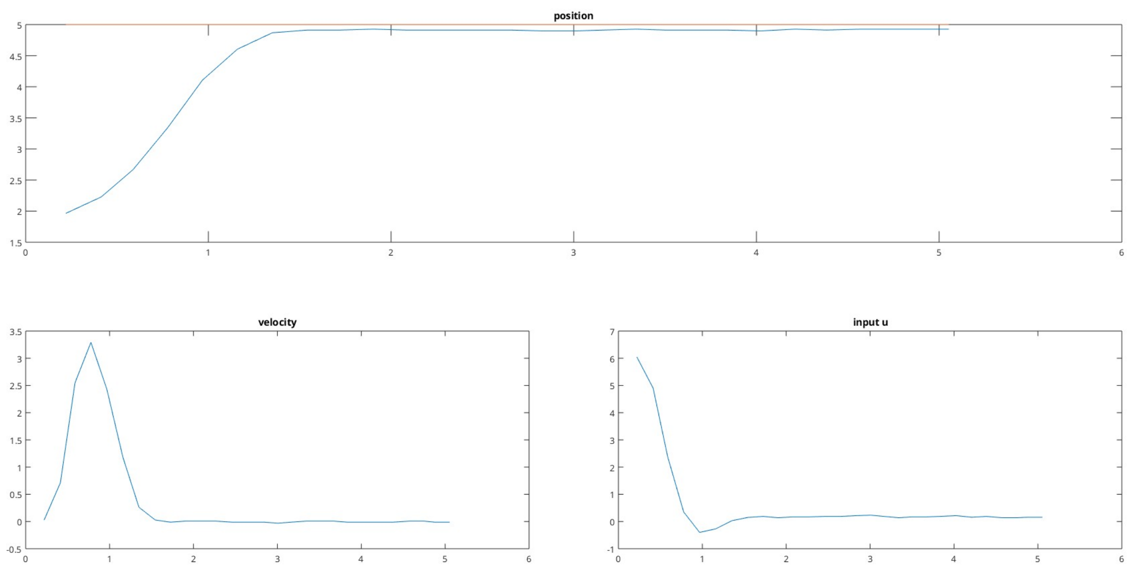
Το σύστημα για θετικά $k_1, k_2$ από το κριτήριο Routh-Hurwitz είναι ευσταθές.

## Ερωτήματα

Για αυτό το εργαστήριο χρησιμοποιούμε

$$k_1 = 2, \quad k_2 = 0.9.$$

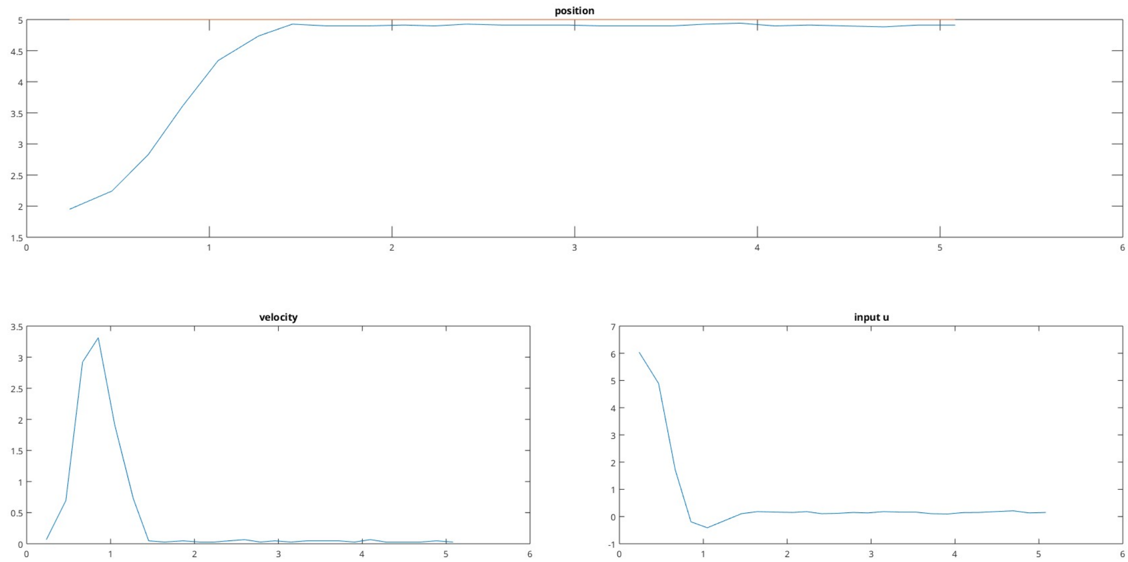
### 2.1



**2.2**

Υπάρχει ένα μικρό σφάλμα της τάξεως του 1%, το οποίο οφείλεται στις τριβές του συστήματος.
Για να μειωθεί το σφάλμα στη μόνιμη κατάσταση μπορούμε να προσθέσουμε έναν ολοκληρωτικό όρο στον ελεγκτή μας, ακριβώς δηλαδή αυτό που ορίζει η δυναμική ανάδραση καταστάσεων στο επόμενο εργαστήριο.

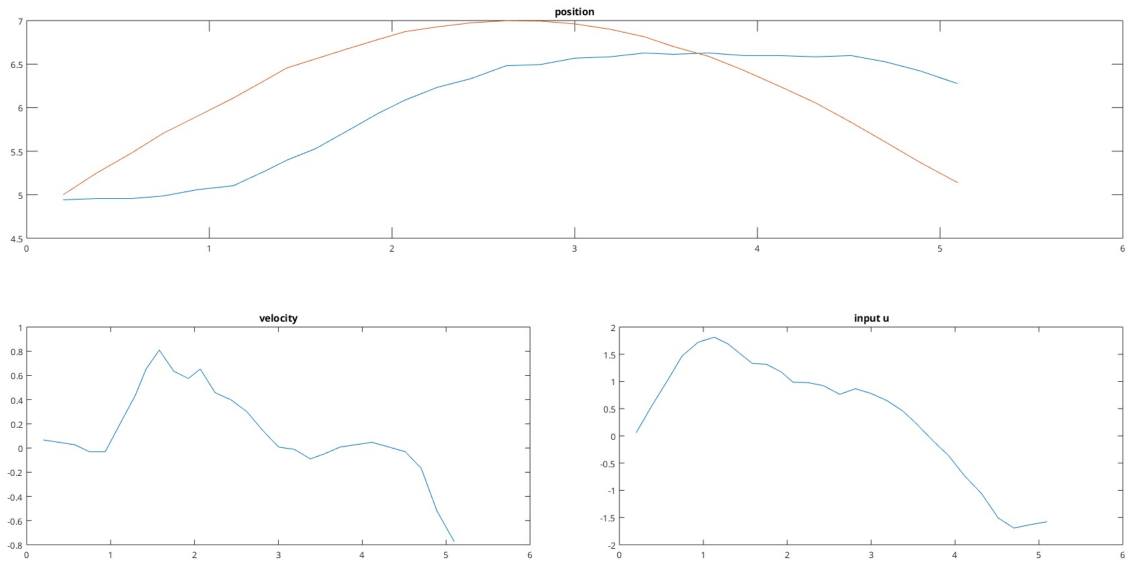
**2.3**



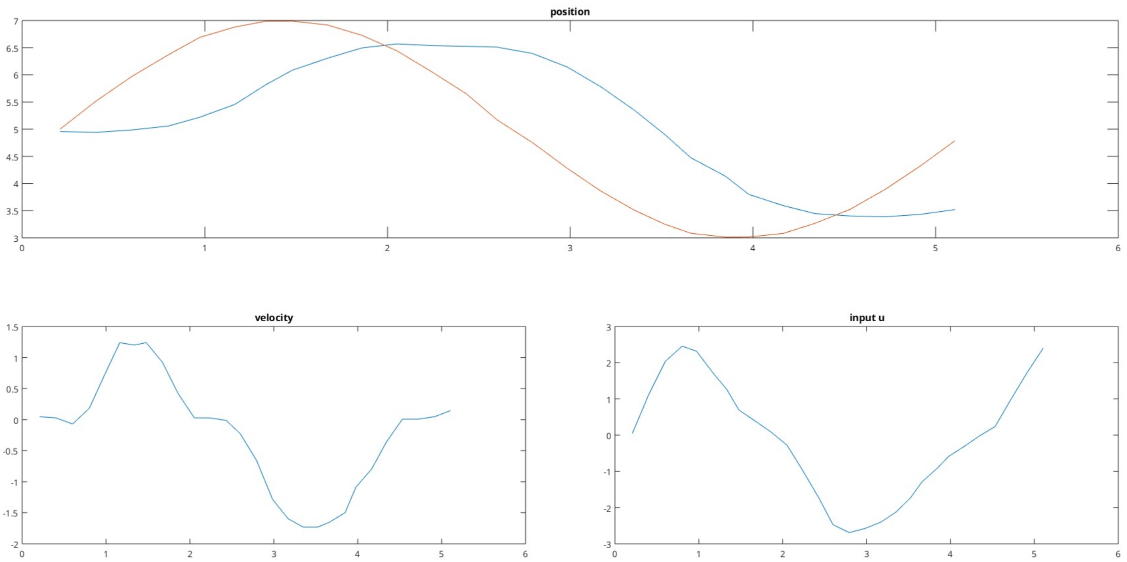

Τα αποτελέσματα είναι πανομοιότυπα με την αρχική περίπτωση, με μια ελαφρώς μεγαλύτερη απόκλιση, της τάξεως του $1.5\%$ από την επιθυμητή τελική τιμή. Αυτό οφείλεται στην εξωτερική παρεμβολή που εισάγει το μαγνητικό φρένο στην είσοδο του συστήματος, η οποία δεν αποσβέννυται με τη χρήση γραμμικής ανάδραση καταστάσεων.

**2.4**

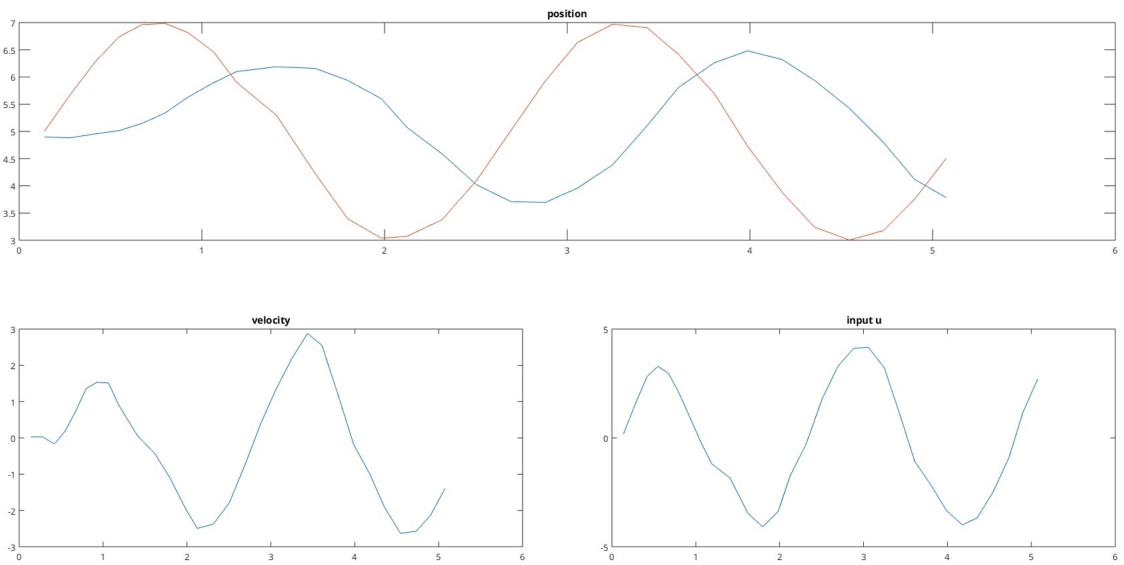
$$\omega = 2\pi \cdot 0.1 \text{ (μισή περίοδος σε } 5\text{ s)}$$



$$\omega = 2\pi \cdot 0.2 \text{ (μία περίοδος σε 5 s)}$$




$$\omega = 2\pi \cdot 0.4 \text{ (δύο περίοδοι σε 5 s)}$$




Καταρχάς, παρατηρούμε ότι σε όλες τις περιπτώσεις η θέση του συστήματος εκτελεί και αυτή ταλάντωση στην εισηγμένη συχνότητα, αλλά το πλάτος της μειώνεται όσο μεγαλώνει η συχνότητα της ταλάντωσης της επιθυμητής θέσης.
Επιπλέον, παρατηρούμε ότι σε κάθε περίπτωση η θέση του συστήματος, αν και προσπαθεί να ακολουθήσει την επιθυμητή τιμή, υστέρει με μια διαφορά φάσης σχεδόν σταθερή περίπου στις $70°$. Αυτή εισάγεται αμέσως μόλις ξεκινάει η ταλάντωση της επιθυμητής θέσης, οπότε και η θέση του συστήματος παραμένει σχεδόν σταθερή στην αρχική της τιμή για τον χρόνο που αντιστοιχεί στην προαναφερθείσα διαφορά φάσης σε κάθε περίπτωση.

# 3ο Εργαστήριο

Καλούμαστε να σχεδιάσουμε έναν ελεγκτή δυναμικής ανάδρασης καταστάσεων. Επομένως, εισάγουμε μια επιπλέον μεταβλητή κατάστασης, την $z$, για την οποία

$$\dot{z} = y - r = x_1 - r.$$

Ο νέος ελεγκτής θα είναι

$$u = -k_1 x_1 - k_2 x_2 - k_i z$$

και το νέο σύστημα με αυτόν τον ελεγκτή

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{k_\mu k_0}{k_T} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{T_m} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{k_T k_m}{T_m} \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -k_1 & -k_2 & -k_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} r$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & \frac{k_\mu k_0}{k_T} & 0 \\ -\frac{k_1 k_T k_m}{T_m} & -\frac{1 + k_2 k_T k_m}{T_m} & -\frac{k_i k_T k_m}{T_m} \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} r.$$

Τώρα το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του συστήματος κλειστού βρόχου γράφεται

$$\det(sI - A'') = \det\left(\begin{bmatrix} s & \frac{k_\mu k_0}{k_T} & 0 \\ \frac{k_1 k_T k_m}{T_m} & s + \frac{1 + k_2 k_T k_m}{T_m} & \frac{k_i k_T k_m}{T_m} \\ -1 & 0 & s \end{bmatrix}\right)$$

$$= s^3 + \frac{1 + k_2 k_T k_m}{T_m} s^2 + \frac{k_1 k_\mu k_0 k_m}{T_m} s + \frac{k_i k_\mu k_0 k_m}{T_m}.$$

Θεωρώντας θετικά κέρδη $k_1, k_2, k_i$, από το κριτήριο Routh-Hurwitz, για να είναι ευσταθές το σύστημα πρέπει

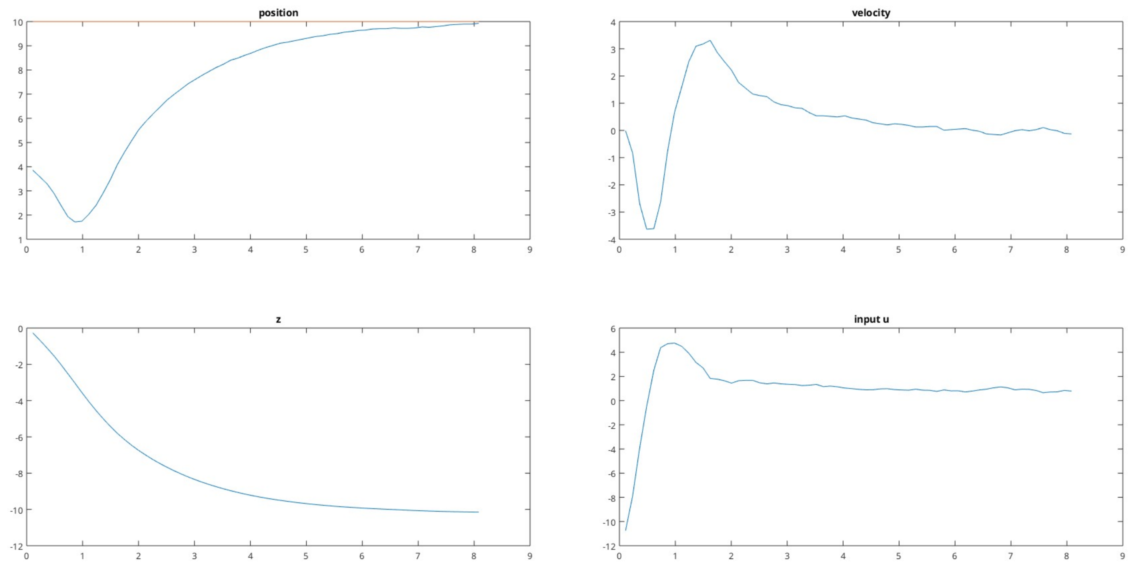
$$\frac{1 + k_2 k_T k_m}{T_m} \cdot \frac{k_1 k_\mu k_0 k_m}{T_m} > \frac{k_i k_\mu k_0 k_m}{T_m} \implies \frac{(1 + k_2 k_T k_m) k_1}{T_m} > k_i.$$

## Ερωτήματα

Σε αυτό το εργαστήριο χρησιμοποιούμε

$$k_1 = 3, \quad k_2 = 1, \quad k_i = 3.$$

Εύκολα διαπιστώνουμε ότι ικανοποιείται η συνθήκη ευστάθειας, όπως ορίστηκε παραπάνω.
Εξαιτίας προβλημάτων του Arduino στη μετατροπή τιμών θέσης σε τάση για θέσεις του συστήματος που αντιστοιχούσαν σε τιμές μικρότερες του $1.5\,\mathrm{V}$, χρησιμοποιούμε αρχική τιμή $\theta_0 = 4\,\mathrm{V}$, $\theta_{\text{ref}} = 10\,\mathrm{V}$ και $T_{\max} = 8\,\mathrm{s}$.



Τώρα τα σφάλματα που είχαμε στο δεύτερο εργαστήριο μειώνονται. Τελευταία τιμή που μετρήθηκε για τη θέση είναι η `positionData(end) = 9.9267` που αντιστοιχεί σε σφάλμα $0.7\%$, υποδιπλάσιο του προηγούμενου στο ερώτημα του μαγνητικού φρένου.
Ωστόσο αυτή η ενίσχυση της ακρίβειας αυξάνει αρκετά τον χρόνο αποκατάστασης. Εδώ τα $8$ s μόλις είναι αρκετά για να φτάσει η θέση στη μόνιμη κατάσταση. Αντίθετα, στο προηγούμενο εργαστήριο (αν και για διαφορετική αρχική θέση και θέση αναφοράς) το σύστημα έφτανε στη μόνιμη κατάσταση σε λιγότερο από $2$ s.
Ακόμα, επειδή ο ελεγκτής $u$ λαμβάνει αρχικά αρνητικές τιμές δεδομένων των επιλεγμένων κερδών και της αρχικής κατάστασης του συστήματος, από τις εξισώσεις κατάστασης προκύπτει ότι η παράγωγος της ταχύτητας είναι αρχικά αρνητική με αποτέλεσμα και η ταχύτητα να γίνεται αρνητική και άρα η θέση για ένα σύντομο χρονικό διάστημα περίπου $0.5$ s να μειώνεται, δηλαδή το σφάλμα θέσης να αυξάνεται πριν ξεκινήσει να μειώνεται.

# 4ο Εργαστήριο

Καλούμαστε να σχεδιάσουμε έναν παρατηρητή του συστήματος και κατ' επέκταση έναν ελεγκτή γραμμικής ανάδρασης εξόδου. Έστω

$$p_d(s) = s^2 + p_1 s + p_2$$

το επιθυμητό χαρακτηριστικό πολυώνυμο του παρατηρητή.
Στην πρώτη ενότητα υπολογίσαμε τον πίνακα $W$ και το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του συστήματος $p(s)$, οπότε

$$\begin{aligned} W^{-1} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \dfrac{k_\mu k_0}{k_T} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\dfrac{k_T}{k_\mu k_0} \end{bmatrix}, \\ \tilde{W} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{1}{T_m} & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\dfrac{1}{T_m} & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Τότε,

$$\begin{aligned} L &= W^{-1}\tilde{W} \begin{bmatrix} p_1 - \dfrac{1}{T_m} \\ p_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} p_1 - \dfrac{1}{T_m} \\ \dfrac{k_T}{k_\mu k_0 T_m}\left(p_1 - \dfrac{1}{T_m}\right) - \dfrac{k_T}{k_\mu k_0} p_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Τώρα ο παρατηρητής γράφεται

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(y - Cx),$$

όπου $u = -k\hat{x} + k_r r$.

## Ερωτήματα

Θέτουμε

$$p_1 = 15, \quad p_2 = 25,$$

οπότε προκύπτει

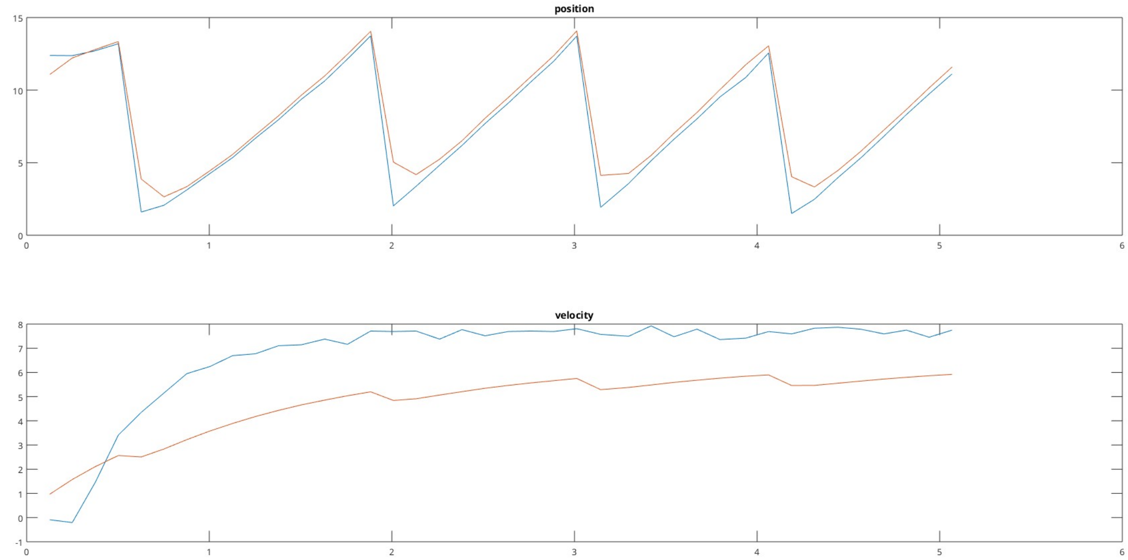
$$L = \begin{bmatrix} 13.18 \\ 0.62 \end{bmatrix}.$$

Για κέρδη του ελεγκτή χρησιμοποιούμε αυτά από τη γραμμική ανάδραση καταστάσεων, δηλαδή

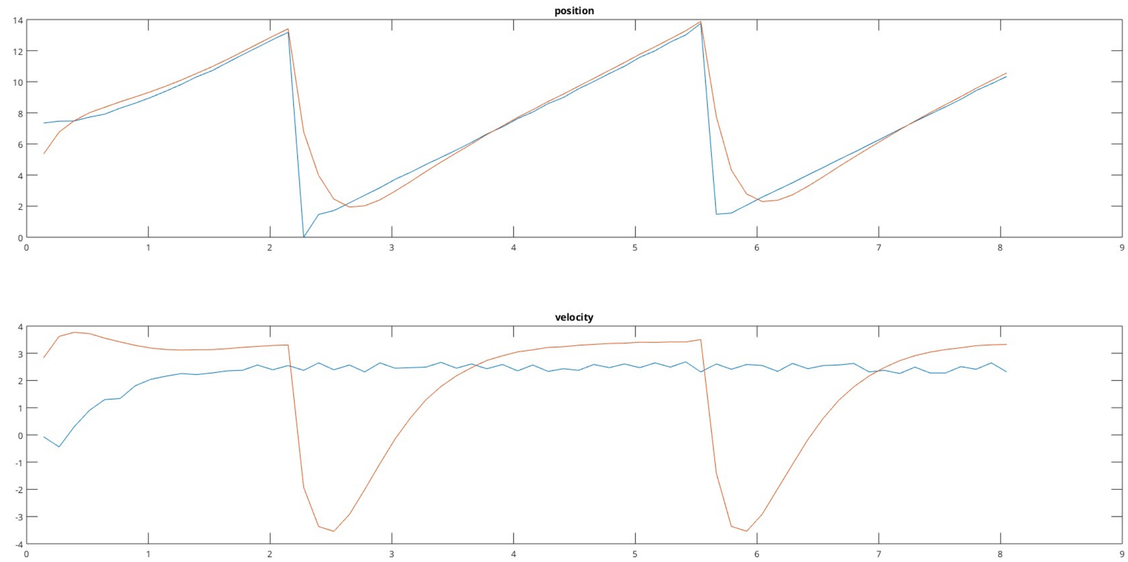
$$k_1 = k_r = 2, \quad k_2 = 0.9.$$

### 4.1

Βηματική είσοδος $u = 7$




Βηματική είσοδος $u = 3$



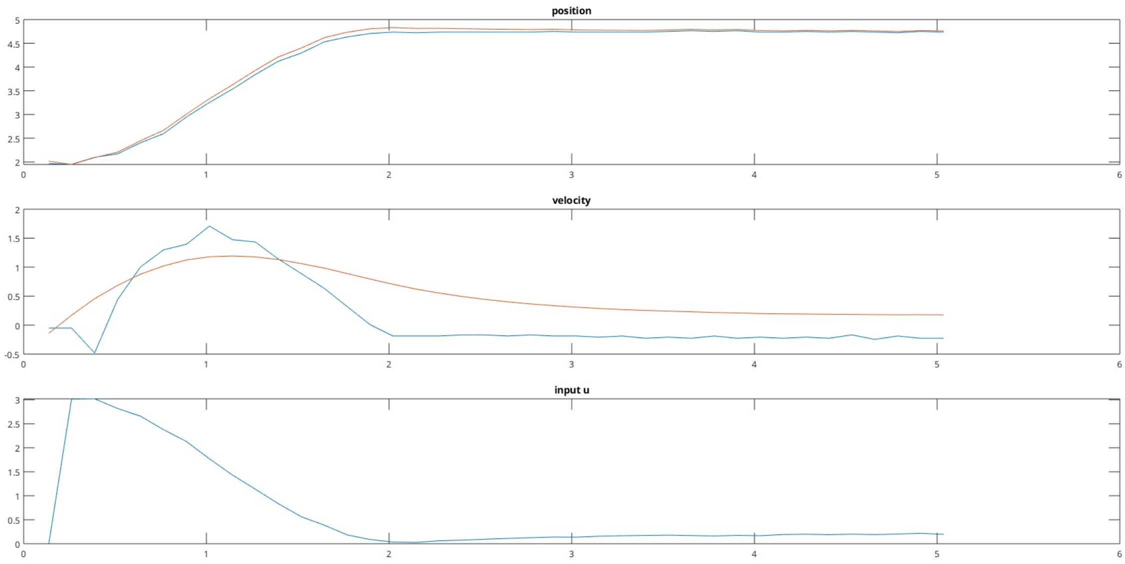

Η δειγματοληψία της εξόδου, δηλαδή της θέσης, γινόταν πολύ αργά (μόλις $40$ δείγματα σε $5\,\mathrm{s}$) με αποτέλεσμα να χάνεται η ακρίβεια ιδιαίτερα σε απότομες αλλαγές, όπως φαίνεται χαρακτηριστικά στην περίπτωση $u = 7$. Στην προσπάθεια επίλυσης αυτού του ζητήματος αλλάξαμε το Baud Rate της σειριακής θύρας του Arduino από το προεπιλεγμένο $9600$ σε $115200$, αλλά δεν είδαμε κάποια βελτίωση.

Και στις δύο περιπτώσεις ο παρατηρητής ακολουθεί ικανοποιητικά την πραγματική θέση.

Αντίθετα, στην περίπτωση $u = 7$ ο παρατηρητής δεν καταφέρνει να συγκλίνει στην πραγματική ταχύτητα, γεγονός που οφείλεται κυρίως στην απουσία ικανοποιητικής δειγματοληψίας. Πράγματι, μεταξύ απότομων μεταβολών της θέσης δεν υπάρχουν ενδιάμεσες μετρήσεις με αποτέλεσμα η παρατήρηση της ταχύτητας να μην προλαβαίνει να αυξηθεί ή να μειωθεί επαρκώς, ώστε να αντικατοπτρίσει αυτήν την μεταβολή.

Στην περίπτωση $u = 3$ ο παρατηρητής φτάνει στην μόνιμη κατάσταση της ταχύτητας του συστήματος, αλλά σε απότομες μεταβολές της θέσης μειώνεται ακαριαία η παρατήρηση της ταχύτητας εξαιτίας, όπως προκύπτει από τις εξισώσεις κατάστασης του παρατηρητή, έως ότου να επαναφερθεί στην πρότερη τιμή της.

**4.2**




Και πάλι η παρατήρηση της θέσης είναι ικανοποιητική, ενώ της ταχύτητας παρουσιάζει σφάλμα ως προς την πραγματική τιμή. Για επαρκώς μεγάλα $p_1$ και $p_2$ (π.χ. $60$ και $100$ αντίστοιχα), δηλαδή για μεγαλύτερους κατά απόλυτη τιμή πόλους, ο παρατηρητής καταρρέει λόγω υπερυψώσεων.

Για μικρότερα $p_1$ και $p_2$ (π.χ. τέτοια ώστε $L = \begin{bmatrix} 4 & 0.1 \end{bmatrix}^T$), δηλαδή για μικρότερους κατά απόλυτη τιμή πόλους, η παρατήρηση του συστήματος είναι πιο αργή και λιγότερο αξιόπιστη, ιδιαίτερα κατά τη διάρκεια του μεταβατικού φαινομένου. Ωστόσο, ο παρατηρητής της ταχύτητας εδώ συγκλίνει τελικά στη μόνιμη κατάσταση της πραγματικής ταχύτητας.