

# Εργαστηριακή Αναφορά

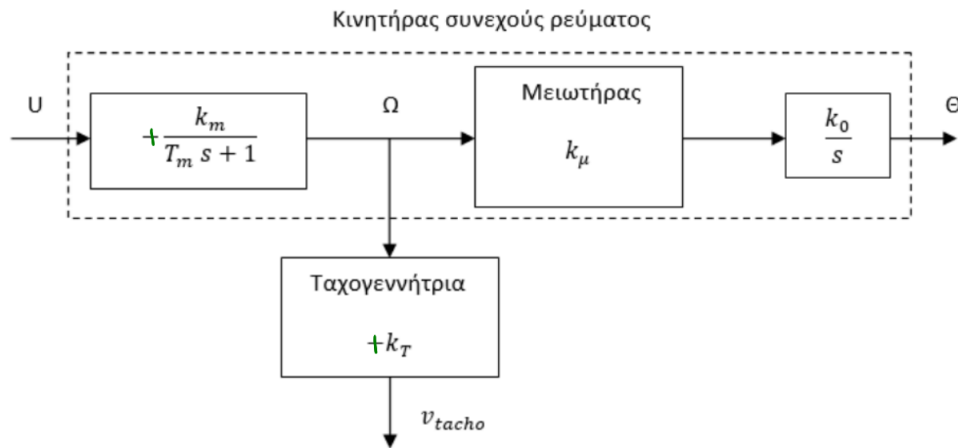
## 031 - Συστήματα Αυτομάτου Ελέγχου II

Ιωάννης Δημουλιός 10641

Εαρινό εξάμηνο 2024

### Προεργασία

Το μοντέλο του συστήματος δίνεται από το μπλοκ διάγραμμα.



Έχουν γίνει οι απαραίτητες αλλαγές στα πρόσημα καθ' υπόδειξη του διδάσκοντος.  
Ορίζουμε μεταβλητές κατάστασης του συστήματος

$$x_1 = \theta$$
$$x_2 = v_{\text{tacho}}.$$

Από το σχήμα παίρνουμε

$$\Omega = \frac{v_{\text{tacho}}}{k_T} = \frac{x_2}{k_T} \quad (1)$$

$$\Theta = \Omega k_\mu \frac{k_0}{s} \xrightarrow{(1)} \dot{x}_1 = \frac{k_\mu k_0}{k_T} x_2 \quad (2)$$

$$\Omega = \frac{k_m}{T_m s + 1} U \xrightarrow{(1)} \dot{x}_2 = -\frac{1}{T_m} x_2 + \frac{k_T k_m}{T_m} u. \quad (3)$$

Γράφουμε τις εξισώσεις (2) και (3) σε μορφή πινάκων, οπότε

$$\dot{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \frac{k_\mu k_0}{k_T} \\ 0 & -\frac{1}{T_m} \end{bmatrix}}_A x + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{k_T k_m}{T_m} \end{bmatrix}}_B u.$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του συστήματος είναι

$$p(s) = \det(sI - A) = s^2 + \frac{1}{T_m} s.$$

Το ζεύγος πινάκων  $(A, B)$  είναι ελέγξιμο, αφού

$$M = \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{k_\mu k_0 k_m}{T_m} \\ \frac{k_T k_m}{T_m} & -\frac{T_m}{T_m^2} \end{bmatrix}, \quad \det(M) \neq 0.$$

Επίσης, αφού έχουμε ως έξοδο μόνο τη θέση, τότε

$$y = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}_C x.$$

Δείχνουμε ότι το σύστημα είναι και παρατηρήσιμο. Πράγματι,

$$W = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{k_\mu k_0}{k_T} \end{bmatrix}, \quad \det(W) \neq 0.$$

## 1ο Εργαστήριο

Ακολουθώντας τις οδηγίες του φυλλαδίου, λαμβάνουμε, όταν  $U = 10 \text{ V}$ ,  $V_{\text{tacho}} = 8.6 \text{ V}$ , άρα

$$k_m k_T = \frac{8.6}{10} = 0.86.$$

Υπολογίζουμε  $8.6 \cdot 63.3\% = 5.44 \text{ V}$  και ο χρόνος που απαιτείται για να φτάσει σε αυτήν την τιμή είναι

$$T_m = 0.555 \text{ s}.$$

Μια πλήρης περιστροφή του άξονα του κινητήρα αντιστοιχεί σε  $10^\circ$  του άξονα εξόδου, άρα

$$k_\mu = \frac{10^\circ}{360^\circ} = \frac{1}{36}.$$

Μετά μετράμε  $\Delta x_2 = 12.6 \text{ V}$  σε  $\Delta t = 0.873 \text{ s}$  για 1 περιστροφή, άρα

$$\omega_{\text{out}} = \frac{60 \text{ s} \cdot 1 \text{ round}}{\Delta t} = 68.73 \text{ rpm}.$$

Τότε,

$$\frac{\Delta x_2}{\Delta t} = k_0 \omega_{\text{out}} \implies k_0 = 0.21$$

$$\omega_{\text{in}} = \frac{1}{k_\mu} \omega_{\text{out}} = 2474.28 \text{ rpm}$$

$$V_{\text{tacho}} = k_T \omega_{\text{in}} \implies k_T = \frac{8.6}{2474.28} = 0.00348$$

$$k_m k_T = 0.86 \implies k_m = \frac{0.86}{0.00348} = 247.13.$$

Συγκεντρωτικά, οι ζητούμενες σταθερές έχουν τις ακόλουθες τιμές

$$k_m = 247.13$$

$$T_m = 0.55$$

$$k_T = 0.00348$$

$$k_0 = 0.21$$

$$k_\mu = \frac{1}{36}.$$

## 2ο Εργαστήριο

Καλούμαστε να σχεδιάσουμε έναν ελεγκτή γραμμικής ανάδρασης καταστάσεων. Επομένως, θέτουμε

$$u = -k_1x_1 - k_2x_2 + k_r r$$

και ψάχνουμε τα κέρδη  $k_1, k_2, k_r$ . Όμως πρέπει, μετά από πράξεις,

$$k_r = -\frac{1}{C(A - Bk)^{-1}Bk} = k_1.$$

Τότε,

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu = (A - Bk)x + Bk_1r \\ &= \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \frac{k_\mu k_0}{k_T} \\ -\frac{k_1 k_T k_m}{T_m} & -\frac{1 + k_2 k_T k_m}{T_m} \end{bmatrix}}_{A'} x + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{k_T k_m k_1}{T_m} \end{bmatrix} r. \end{aligned}$$

Τώρα το χαρακτηριστικό πολώνυμο του  $A'$  γράφεται

$$\begin{aligned} \det(sI - A') &= \det \left( \begin{bmatrix} s & -\frac{k_\mu k_0}{k_T} \\ \frac{k_1 k_T k_m}{T_m} & \frac{1 + k_2 k_T k_m}{T_m} s \end{bmatrix} \right) \\ &= s^2 + \frac{1 + k_2 k_T k_m}{T_m} s + \frac{k_\mu k_1 k_0 k_m}{T_m}. \end{aligned}$$

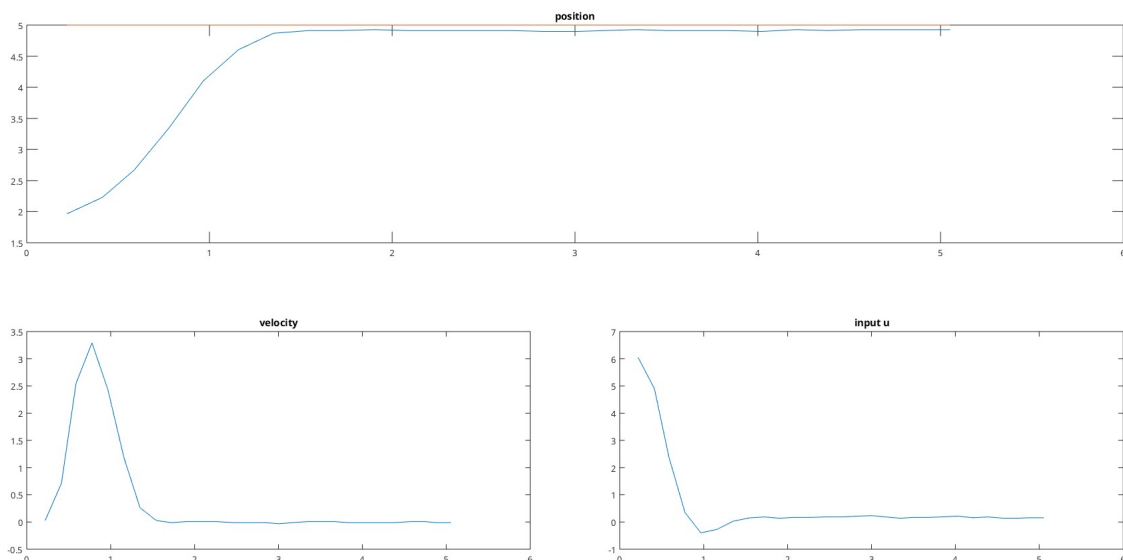
Το σύστημα για θετικά  $k_1, k_2$  από το κριτήριο Routh-Hurwitz είναι ευσταθές.

## Ερωτήματα

Για αυτό το εργαστήριο χρησιμοποιούμε

$$k_1 = 2, \quad k_2 = 0.9.$$

### 2.1

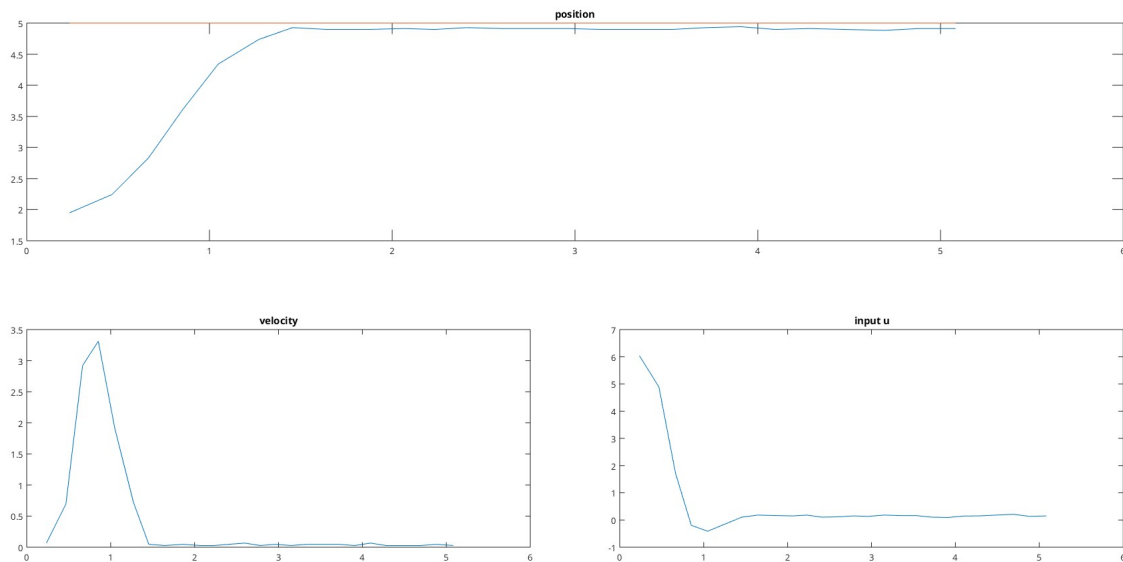


## 2.2

Υπάρχει ένα μικρό σφάλμα της τάξεως του 1%, το οποίο οφείλεται στις τριβές του συστήματος.

Για να μειωθεί το σφάλμα στη μόνιμη κατάσταση μπορούμε να προσθέσουμε έναν ολοκληρωτικό όρο στον ελεγκτή μας, ακριβώς δηλαδή αυτό που ορίζει η δυναμική ανάρδραση καταστάσεων στο επόμενο εργαστήριο.

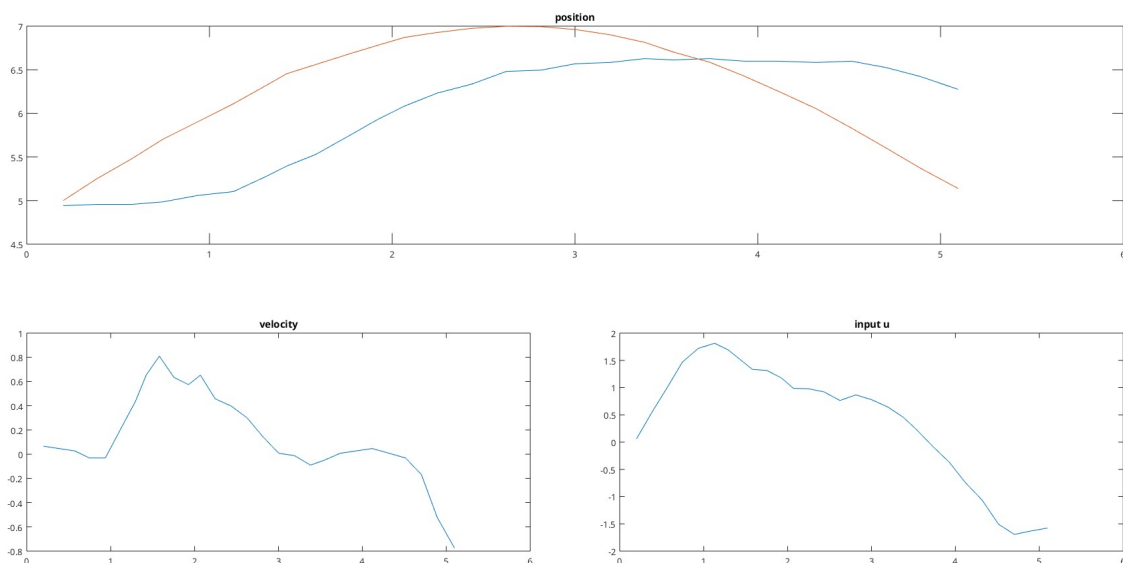
## 2.3



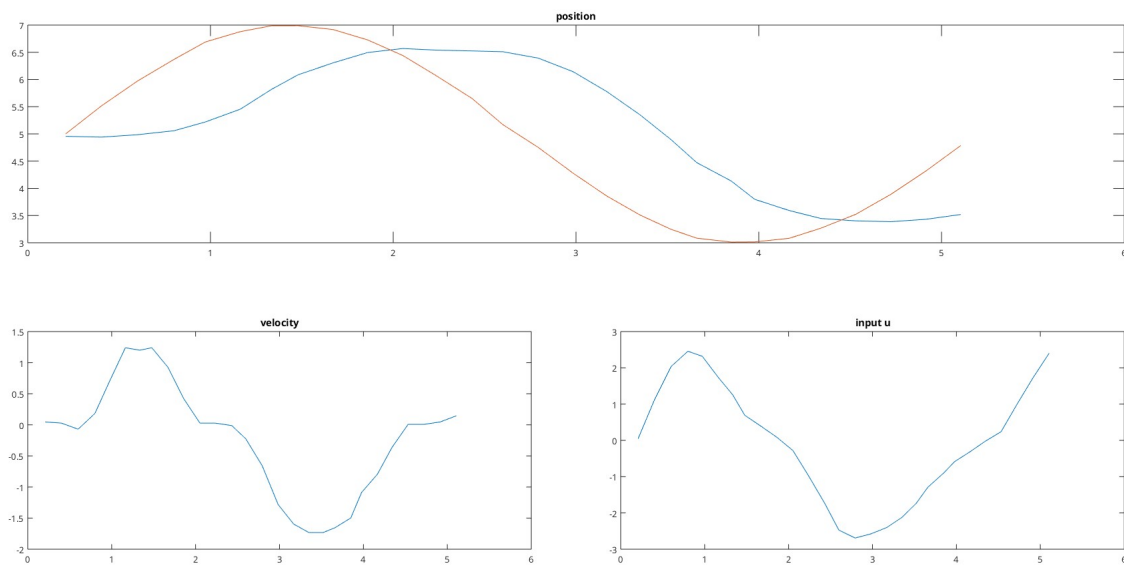
Τα αποτελέσματα είναι πανομοιότυπα με την αρχική περίπτωση, με μια ελαφρώς μεγαλύτερη απόκλιση, της τάξεως του 1.5% από την επιθυμητή τελική τιμή. Αυτό οφείλεται στην εξωτερική παρεμβολή που εισάγει το μαγνητικό φρένο στην είσοδο του συστήματος, η οποία δεν αποσβέννυται με τη χρήση γραμμικής ανάρδραση καταστάσεων.

## 2.4

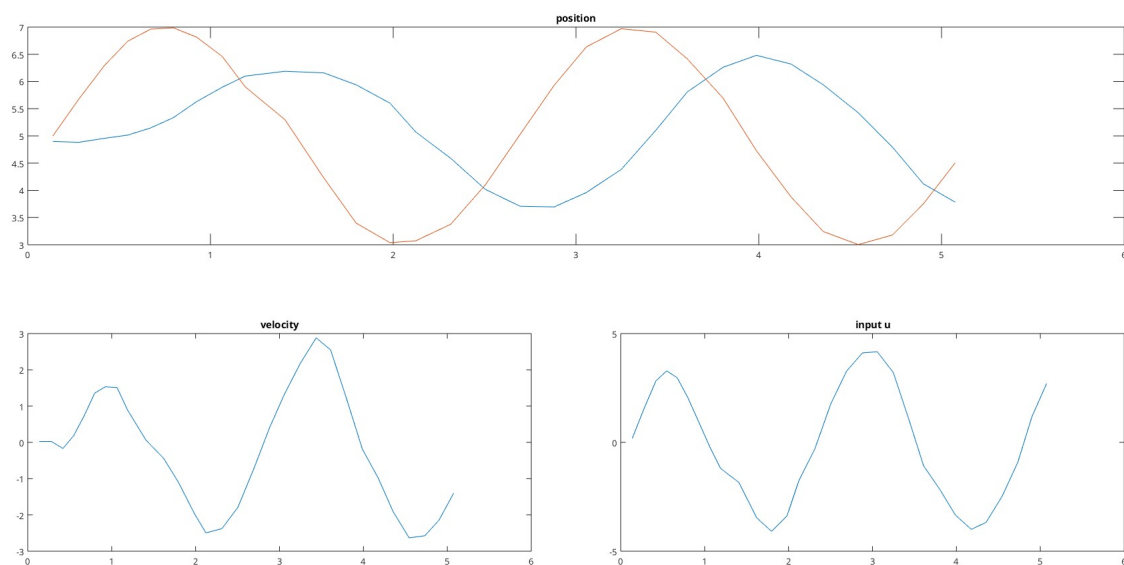
$$\omega = 2\pi \cdot 0.1 \text{ (μισή περίοδος σε 5 s)}$$



$$\omega = 2\pi \cdot 0.2 \text{ (μία περίοδος σε 5 s)}$$



$$\omega = 2\pi \cdot 0.4 \text{ (δύο περίοδοι σε 5 s)}$$



Καταρχάς, παρατηρούμε ότι σε όλες τις περιπτώσεις η θέση του συστήματος εκτελεί και αυτή ταλάντωση στην εισηγμένη συχνότητα, αλλά το πλάτος της μειώνεται όσο μεγαλώνει η συχνότητα της ταλάντωσης της επιθυμητής θέσης.

Επιπλέον, παρατηρούμε ότι σε κάθε περίπτωση η θέση του συστήματος, αν και προσπαθεί να ακολουθήσει την επιθυμητή τιμή, υστερεί με μια διαφορά φάσης σχεδόν σταθερή περίπου στις  $70^\circ$ . Αυτή εισάγεται αμέσως μόλις ξεκινάει η ταλάντωση της επιθυμητής θέσης, οπότε και η θέση του συστήματος παραμένει σχεδόν σταθερή στην αρχική της τιμή για τον χρόνο που αντιστοιχεί στην προαναφερθείσα διαφορά φάσης σε κάθε περίπτωση.

### 3ο Εργαστήριο

Καλούμαστε να σχεδιάσουμε έναν ελεγκτή δυναμικής ανάδρασης καταστάσεων. Επομένως, εισάγουμε μια επιπλέον μεταβλητή κατάστασης, την  $z$ , για την οποία

$$\dot{z} = y - r = x_1 - r.$$

Ο νέος ελεγκτής θα είναι

$$u = -k_1x_1 - k_2x_2 - k_iz$$

και το νέο σύστημα με αυτόν τον ελεγκτή

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{z} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{k_\mu k_0}{k_T} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{T_m} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{k_T k_m}{T_m} \\ 0 \end{bmatrix} [-k_1 \quad -k_2 \quad -k_i] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} r \\ &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{k_\mu k_0}{k_T} & 0 \\ -\frac{k_1 k_T k_m}{T_m} & -\frac{1 + k_2 k_T k_m}{T_m} & -\frac{k_i k_T k_m}{T_m} \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} r. \end{aligned}$$

Τώρα το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του συστήματος κλειστού βρόχου γράφεται

$$\begin{aligned} \det(sI - A'') &= \det \left( \begin{bmatrix} s & \frac{k_\mu k_0}{k_T} & 0 \\ \frac{k_1 k_T k_m}{T_m} & s + \frac{1 + k_2 k_T k_m}{T_m} & \frac{k_i k_T k_m}{T_m} \\ -1 & 0 & s \end{bmatrix} \right) \\ &= s^3 + \frac{1 + k_2 k_T k_m}{T_m} s^2 + \frac{k_1 k_\mu k_0 k_m}{T_m} s + \frac{k_i k_\mu k_0 k_m}{T_m}. \end{aligned}$$

Θεωρώντας θετικά κέρδη  $k_1, k_2, k_i$ , από το κριτήριο Routh-Hurwitz, για να είναι ευσταθές το σύστημα πρέπει

$$\frac{1 + k_2 k_T k_m}{T_m} \cdot \frac{k_1 k_\mu k_0 k_m}{T_m} > \frac{k_i k_\mu k_0 k_m}{T_m} \implies \frac{(1 + k_2 k_T k_m) k_1}{T_m} > k_i.$$

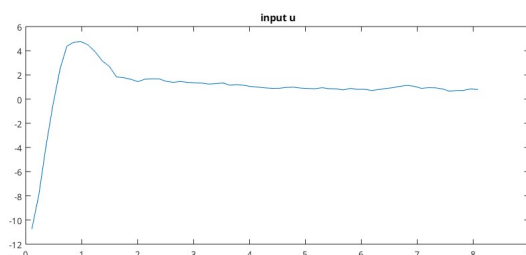
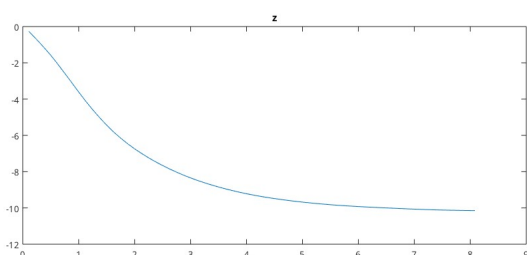
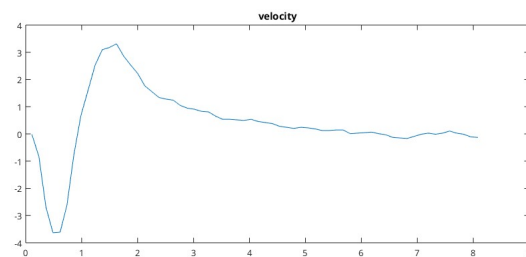
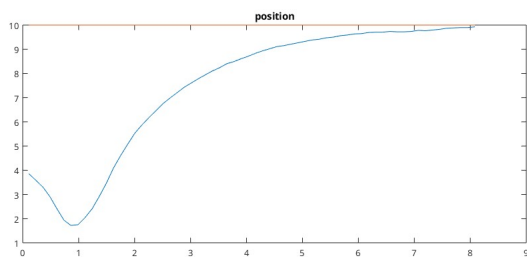
## Ερωτήματα

Σε αυτό το εργαστήριο χρησιμοποιούμε

$$k_1 = 3, \quad k_2 = 1, \quad k_i = 3.$$

Εύκολα διαπιστώνουμε ότι ικανοποιείται η συνθήκη ευστάθειας, όπως ορίστηκε παραπάνω.

Εξαιτίας προβλημάτων του Arduino στη μετατροπή τιμών θέσης σε τάση για θέσεις του συστήματος που αντιστοιχούσαν σε τιμές μικρότερες του 1.5 V, χρησιμοποιούμε αρχική τιμή  $\theta_0 = 4$  V,  $\theta_{\text{ref}} = 10$  V και  $T_{\text{max}} = 8$  s.



Τώρα τα σφάλματα που είχαμε στο δεύτερο εργαστήριο μειώνονται. Τελευταία τιμή που μετρήθηκε για τη θέση είναι η  $\text{positionData}(\text{end}) = 9.9267$  που αντιστοιχεί σε σφάλμα 0.7%, υποδιπλάσιο του προηγούμενου στο ερώτημα του μαγνητικού φρένου.

Ωστόσο αυτή η ενίσχυση της ακρίβειας αυξάνει αρκετά τον χρόνο αποκατάστασης. Εδώ τα 8 s μόλις είναι αρκετά για να φτάσει η θέση στη μόνιμη κατάσταση. Αντίθετα, στο προηγούμενο εργαστήριο (αν και για διαφορετική αρχική θέση και θέση αναφοράς) το σύστημα έφτανε στη μόνιμη κατάσταση σε λιγότερο από 2 s.

Ακόμα, επειδή ο ελεγκτής  $u$  λαμβάνει αρχικά αρνητικές τιμές δεδομένων των επιλεγμένων κερδών και της αρχικής κατάστασης του συστήματος, από τις εξισώσεις κατάστασης προκύπτει ότι η παράγωγος της ταχύτητας είναι αρχικά αρνητική με αποτέλεσμα και η ταχύτητα να γίνεται αρνητική και άρα η θέση για ένα σύντομο χρονικό διάστημα περίπου 0.5 s να μειώνεται, δηλαδή το σφάλμα θέσης να αυξάνεται πριν ξεκινήσει να μειώνεται.

## 4ο Εργαστήριο

Καλούμαστε να σχεδιάσουμε έναν παρατηρητή του συστήματος και κατ' επέκταση έναν ελεγκτή γραμμικής ανάδρασης εξόδου. Έστω

$$p_d(s) = s^2 + p_1 s + p_2$$

το επιθυμητό χαρακτηριστικό πολυώνυμο του παρατηρητή.

Στην πρώτη ενότητα υπολογίσαμε τον πίνακα  $W$  και το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του συστήματος  $p(s)$ , οπότε

$$W^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{k_\mu k_0}{k_T} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{k_T}{k_\mu k_0} \end{bmatrix},$$

$$\tilde{W} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{T_m} & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{T_m} & 1 \end{bmatrix}.$$

Τότε,

$$L = W^{-1} \tilde{W} \begin{bmatrix} p_1 - \frac{1}{T_m} \\ p_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} p_1 - \frac{1}{T_m} \\ \frac{k_T}{k_\mu k_0 T_m} \left( p_1 - \frac{1}{T_m} \right) - \frac{k_T}{k_\mu k_0} p_2 \end{bmatrix}$$

Τώρα ο παρατηρητής γράφεται

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(y - C\hat{x}),$$

όπου  $u = -k\hat{x} + k_r r$ .

## Ερωτήματα

Θέτουμε

$$p_1 = 15, \quad p_2 = 25,$$

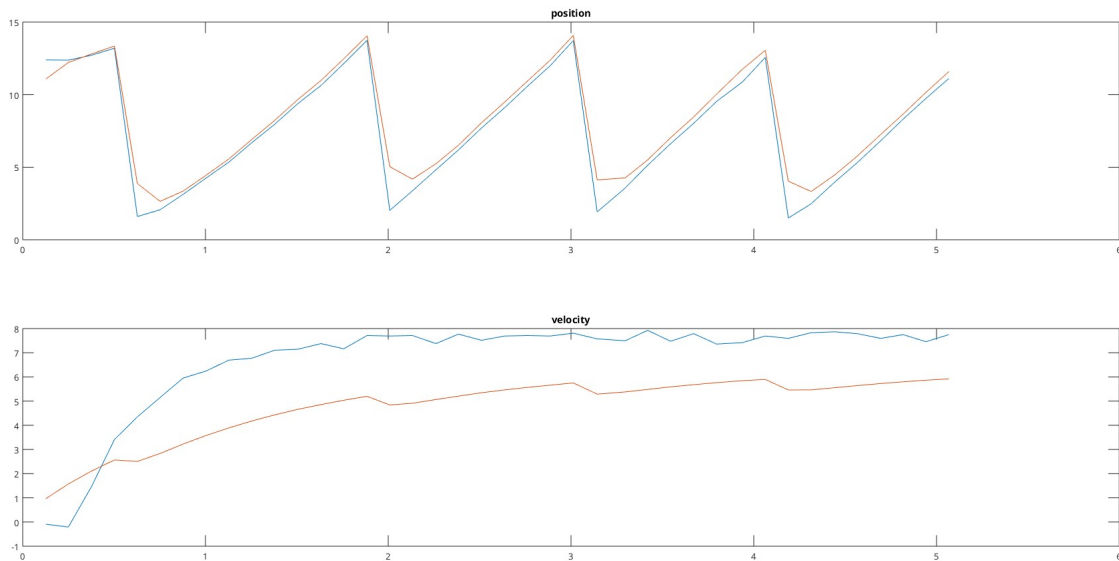
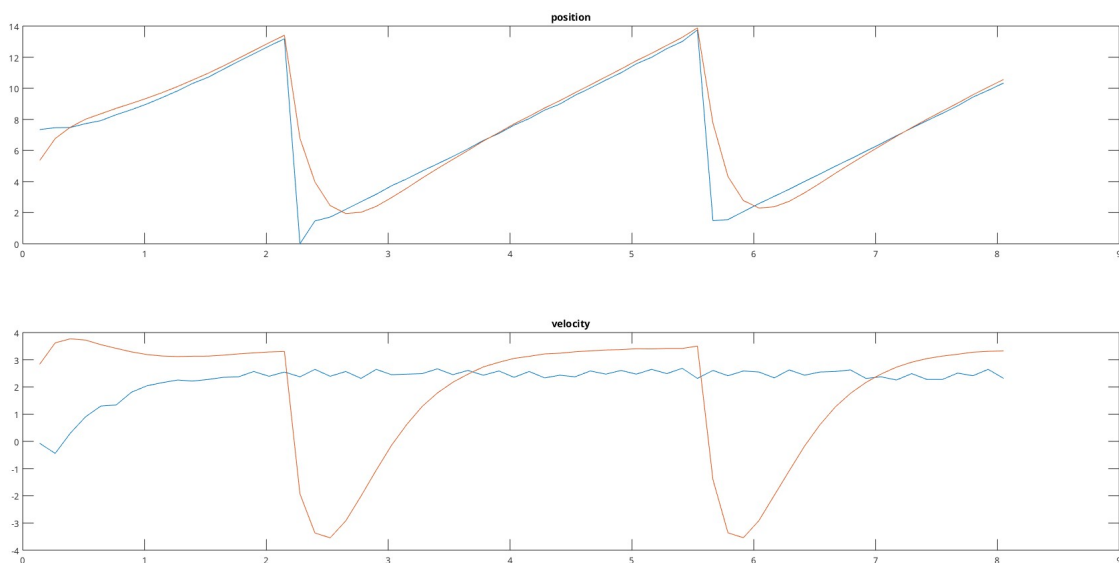
οπότε προκύπτει

$$L = \begin{bmatrix} 13.18 \\ 0.62 \end{bmatrix}.$$

Για κέρδη του ελεγκτή χρησιμοποιούμε αυτά από τη γραμμική ανάδραση καταστάσεων, δηλαδή

$$k_1 = k_r = 2, \quad k_2 = 0.9.$$

## 4.1

Βηματική είσοδος  $u = 7$ Βηματική είσοδος  $u = 3$ 

Η δειγματοληψία της εξόδου, δηλαδή της θέσης, γινόταν πολύ αργά (μόλις 40 δείγματα σε 5 s) με αποτέλεσμα να χάνεται η ακρίβεια ιδιαίτερα σε απότομες αλλαγές, όπως φαίνεται χαρακτηριστικά στην περίπτωση  $u = 7$ . Στην προσπάθεια επίλυσης αυτού του ζητήματος αλλάξαμε το Baud Rate της σειριακής θύρας του Arduino από το προεπιλεγμένο 9600 σε 115200, αλλά δεν είδαμε κάποια βελτίωση.

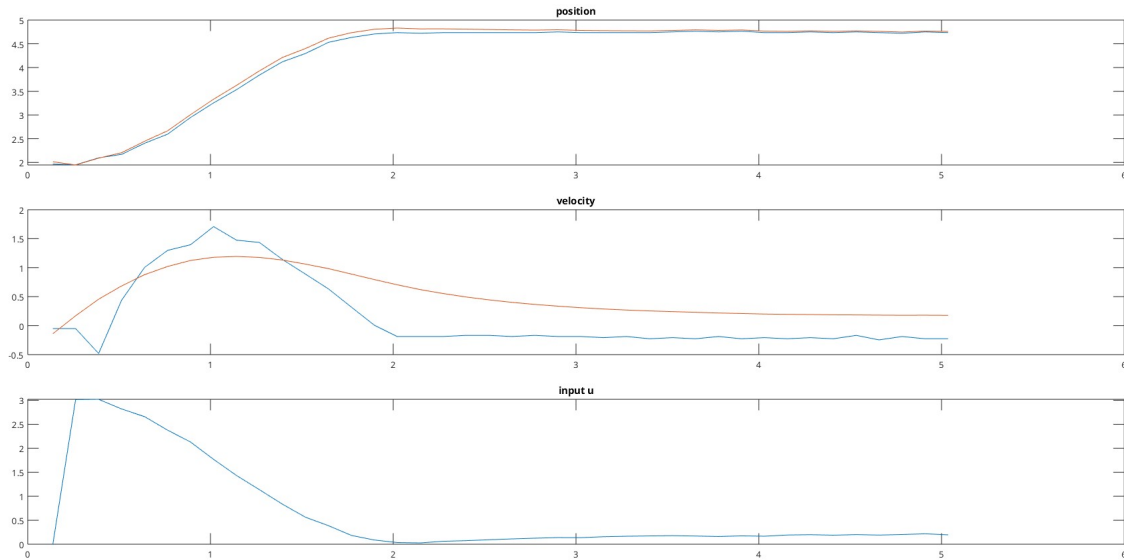
Και στις δύο περιπτώσεις ο παρατηρητής ακολουθεί ικανοποιητικά την πραγματική θέση.

Αντίθετα, στην περίπτωση  $u = 7$  ο παρατηρητής δεν καταφέρει να συγκλίνει στην πραγματική ταχύτητα, γεγονός που οφείλεται κυρίως στην απουσία ικανοποιητικής δειγματοληψίας. Πράγματι, μεταξύ απότομων μεταβολών της θέσης δεν υπάρχουν ενδιάμεσες μετρήσεις με αποτέλεσμα η παρατήρηση της ταχύτητας να μην προλαβαίνει να αυξηθεί ή να μειωθεί επαρκώς, ώστε να αντικατοπτρίσει αυτήν την μεταβολή.



Στην περίπτωση  $u = 3$  ο παρατηρητής φτάνει στην μόνιμη κατάσταση της ταχύτητας του συστήματος, αλλά σε απότομες μεταβολές της θέσης μειώνεται ακαριαία η παρατήρηση της ταχύτητας εξαιτίας, όπως προκύπτει από τις εξισώσεις κατάστασης του παρατηρητή, έως ότου να επαναφερθεί στην πρότερη τιμή της.

## 4.2



Και πάλι η παρατήρηση της θέσης είναι ικανοποιητική, ενώ της ταχύτητας παρουσιάζει σφάλμα ως προς την πραγματική τιμή. Για επαρκώς μεγάλα  $p_1$  και  $p_2$  (π.χ. 60 και 100 αντίστοιχα), δηλαδή για μεγαλύτερους κατά απόλυτη τιμή πόλους, ο παρατηρητής καταρρέει λόγω υπερυψώσεων.

Για μικρότερα  $p_1$  και  $p_2$  (π.χ. τέτοια ώστε  $L = [4 \ 0.1]^T$ ), δηλαδή για μικρότερους κατά απόλυτη τιμή πόλους, η παρατήρηση του συστήματος είναι πιο αργή και λιγότερο αξιόπιστη, ιδιαίτερα κατά τη διάρκεια του μεταβατικού φαινομένου.

