Рациональные числа

Ratio – отношение, дробь

$$r = \frac{m}{n}; \qquad m \in \mathbb{Z} \text{ (целое)}, \quad n \in \mathbb{N} \text{ (натуральное)}$$

Сложение и умножение

$$\frac{m_1}{n_1} + \frac{m_2}{n_2} = \frac{m_1 n_2 + m_2 n_1}{n_1 n_2}, \qquad \frac{m_1}{n_1} \times \frac{m_2}{n_2} = \frac{m_1 m_2}{n_1 n_2}.$$

Алгоритм Евклида нахождения Наибольшего Общего Делителя НОД(a,b)

- для двух ненулевых целых чисел a и b, цикл пока $b \neq 0$:

$$t \leftarrow b$$
$$b \leftarrow a \mod b$$
$$a \leftarrow t$$

- по завершению цикла a – искомый НОД

Задание I: запрограммировать рациональные числа как класс:

1. Конструкторы:
   - инициализация числителем (m) и знаменателем (n)
   - инициализация целым числом
   - конструктор по умолчанию
2. Оператор вывода рационального числа на печать
3. Операторы унарные: $-$ и $++$, $--$ (префиксные и постфиксные); и бинарные: $+$, $-$, $*$, $/$, $+=$, $-=$, $*=$, $/=$
4. Функцию возведения в целую степень: `pow()`
5. Преобразования rational $\Longleftrightarrow$ double:
   - конструктор-преобразование из `double` с заданной точностью
   - оператор преобразования рационального числа в `double`

- предусмотрите преобразование к несократимому виду
- для всех операций и функций должны быть тестовые примеры
- в пятом пункте возможно использовать `explicit`

Использование класса рациональных чисел

Вычисление чисел Бернулли: алгоритм Akiyama-Tanigawa

- Задаётся целое число n
- Цикл по i от 0 до n с шагом 1:

  $A[i] \leftarrow \frac{1}{i+1}$

  Цикл по j от i до 1 с шагом -1:

  $$A[j-1] \leftarrow j \times (A[j-1] - A[j])$$

- В конце получаем $A[0]$, которое и есть B_n
- На следующем слайде графическая иллюстрация алгоритма и значения B_{1-16}

Задание II

- Написать функцию возвращающую N первых чисел Бернулли: (возвращающую `vector<Rational>`)
- Вычислить B_{2k}, $k = 1 \ldots 8$

Треугольник Akiyama-Tanigawa

$$
\begin{array}{ccccccccccccccc}
1 & & \frac{1}{2} & & \frac{1}{3} & & \frac{1}{4} & & \frac{1}{5} & & \frac{1}{6} & & \frac{1}{7} & & \cdots \\
 & \frac{1}{2} & & \frac{1}{3} & & \frac{1}{4} & & \frac{1}{5} & & \frac{1}{6} & & \frac{1}{7} & & \cdots & \\
 & & \frac{1}{6} & & \frac{1}{6} & & \frac{3}{20} & & \frac{2}{15} & & \frac{5}{42} & & \cdots & & \\
 & & & 0 & & \frac{1}{30} & & \frac{1}{20} & & \frac{2}{35} & & \cdots & & & \\
 & & & & -\frac{1}{30} & & -\frac{1}{30} & & -\frac{3}{140} & & \cdots & & & & \\
 & & & & & 0 & & -\frac{1}{42} & & \cdots & & & & & \\
 & & & & & & \frac{1}{42} & & \cdots & & & & & &
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
B_0 &= 1;\\
B_1 &= 1/2;\\
B_2 &= 1/6;\\
B_4 &= -1/30;\\
B_6 &= 1/42;\\
B_8 &= -1/30;\\
B_{10} &= 5/66;\\
B_{12} &= -691/2730;\\
B_{14} &= 7/6;\\
B_{16} &= -3617/510
\end{aligned}
$$