Гипергеометрическая функция ${}_2F_1(a, b, c, z)$

Гипергеометрический ряд (ряд Гаусса)

$$ {}_2F_1(a, b, c, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} \frac{z^n}{n!}, \tag{1} $$

где $(x)_n$ – символ Похгаммера: $(x)_0 = 1, (x)_n = x(x+1)\dots(x+n-1)$

Свойства ряда:

- Ряд сходится при $|z| < 1$, а при $|z| = 1$ сходится если $c - a - b > 1$.
- Ряд теряет смысл для $c = 0, -1, -2\dots$

Элементарные функции как частные случаи ${}_2F_1$

$$ {}_2F_1(1, 1, 2, z) = -z^{-1} ln(1-z) \tag{2} $$

$$ {}_2F_1(1/2, 1/2, 3/2, z^2) = z^{-1} arcsin(z) \tag{3} $$

Задание: первая часть

1. Запрограммировать вычисление гипергеометрического ряда (1)
2. Для случаев (2) и (3) напечатать таблицы функций: z, ${}_2F_1()$, соответствующая элементарная функция, относительная ошибка
   - для (2) $ln()$: $z \in [-0.95; +0.95]$ с шагом 0.1
   - для (3) $arcsin()$: $z \in [0.05; 0.95]$ с шагом 0.1

Заметки по заданию

- Предусмотрите остановку суммирования ряда по достижению «желаемой точности». Избегайте бесконечного суммирования.
- Таблицы должны быть выровнены по столбцам. Пример, как могут выглядеть таблицы в конце задания. Смотрите параметры функции `printf()` в справочных материалах для практических заданий.

Формулы преобразований

$$
{}_2F_1(a,b,c,z) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} \cdot {}_2F_1(a,b,a+b-c+1,1-z) +
$$

$$
(1-z)^{c-a-b} \cdot \frac{\Gamma(c)\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \cdot {}_2F_1(c-a,c-b,c-a-b+1,1-z) \tag{4}
$$

$$
c-a-b \neq 0, \pm 1, \pm 2 \ldots
$$

$$
{}_2F_1(a,b,c,z) = (1-z)^{-a} {}_2F_1(a,c-b,c,\frac{z}{z-1}) \tag{5}
$$

Элементарные функции как частные случаи ${}_2F_1$ (продолжение)

$$
{}_2F_1(1/2,1,3/2,-z^2) = z^{-1} arctg(z) \tag{6}
$$

$$
{}_2F_1(-1/4,\ 1/4,1/2,-z^2) = 1/2 \times \left(\sqrt{\sqrt{1+z^2}+z} + \sqrt{\sqrt{1+z^2}-z} \right) \tag{7}
$$

Задание, вторая часть

3. Запрограммировать вычисление гипергеометрической функции:
   - для $|z| \leqslant 1/2$ использовать ряд (1)
   - для $1/2 < z \leqslant 1$ если $c - a - b \neq 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$ использовать (4)
   - для $z < -1/2$ преобразование (5)

   Здесь логично использовать рекуррентный вызов функции
4. Для (6) и (7) напечатать таблицы функций для $z \in [0, 10]$ с шагом:
   0.05 для $z < 0.5$, 0.1 для $0.5 \leqslant z < 1.5$, 0.5 для $1.5 \leqslant z \leqslant 10$.

Примеры таблиц:

```
  z      F21(1,1,2,z)          -ln(1-z)/z           ( eps )
 -0.95   0.7021971960722390 7  0.70297828692174257 ( 1.111e-03)
 -0.85   0.7237446477428761 7  0.72374781069439230 ( 4.370e-06)
...
  z      F21(1/2,1/2,3/2,z^2)  asin(z)/z            ( eps )
  0.05   1.00041713611540040   1.00041713611540029 (-1.027e-16)
  0.15   1.00378848517790709   1.00378848517790684 (-2.412e-16)
...
```