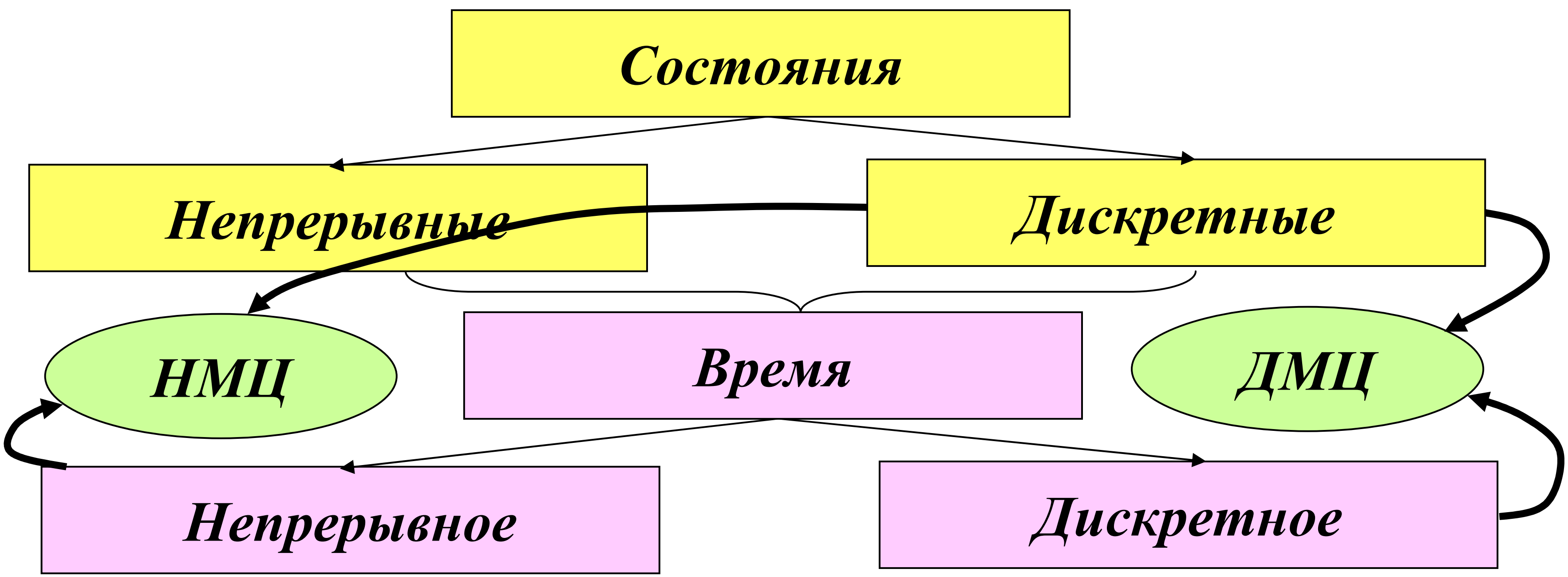
Марковские процессы

Определение

Случайный процесс $x(t)$ называется марковским, если для любого момента t' при фиксированном значении $x(t')$ (каково бы ни было x) значения процесса $x(t)$ при $t > t'$ не зависят от значений процесса $x(t)$ при $t < t'$.



Дискретные марковские цепи

$$\left\{ \{S_i\},\ i=\overline{1,n}\ ;\ \pi^{(l)}=\left\{p_{ij}^{(l)}\right\},\ \vec{P}(0)=\{P_1(0),P_2(0),\ldots,P_n(0)\} \right\}$$

$$p_{ij}^{(l)}=P\left\{ S_j^{(l)} \big/ S_i^{(l-1)} \right\} \quad p_{ij}^{(l)}=p_{ij}=P\left\{ S_j \big/ S_i \right\} - \textit{однородные НМЦ}$$

Немарковские цепи

$$p^{(l)}_{i\_j,k,m,f,\ldots.d}=P\left\{ S_j^{(l)} \big/ S_j^{(l-1)},S_k^{(l-2)},S_m^{(l-3)},S_f^{(l-4)}\ldots,S_d^{(0)}, \right\}$$

Предыстория

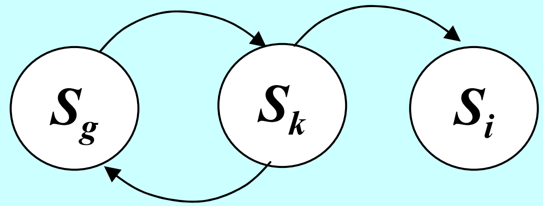
$$\left| \{ S_{\underset{\leftarrow\quad l \quad\rightarrow}{j,k,m,f,\ldots,d}} \} \right| = n^{l-1}$$

Классификация марковских цепей

Взаимно-связанные состояния: $S_i \leftrightarrow S_j$

Возвратное состояние S_i **:** $\sum_{n=1}^{\infty} P_{ii}(n) = 1$

Поглощающее состояние S_i **:**



Марковские цепи

Эргодические цепи

Поглощающие цепи

Задачи анализа эргодических ДМЦ

Анализ переходного режима

$$P^{(l)}(S_j) = P_j^{(l)} = \sum_{i=1}^{n} P_i^{(l-1)} p_{ij}\ , \quad j = \overline{1,n}$$

$$P^T(l) = P^T(l-1)\pi = P^T(l-2)\pi^2 = \ldots = P^T(0)\pi^l$$

Анализ установившегося режима: $l \to \infty$

$$\lim_{l \to \infty} P(l) = \lim_{l \to \infty} P(l-1) = P(\infty) = P$$

Отсюда $P^T = P^T\pi; \quad P^T(E - \pi) = 0$

Нормировочное условие: $\sum_{(i)} P_i = 1$

Поглощающие ДМЦ

Матрица переходов

$$\pi = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} k & r \end{array} \\ \begin{array}{c} k \\ r \end{array} & \begin{bmatrix} Q & R \\ O & E \end{bmatrix} \end{array}$$

При $l \to \infty$ $\qquad \pi^{l} = \pi(\infty) = \left[\begin{array}{c|c} O & U \\ \hline O & E \end{array}\right]$

Фундаментальная матрица $\qquad N = (E - Q)^{-1}$

Введем $\qquad \xi^{T} = (\underset{1}{1}\ \underset{2}{1}\ \underset{3}{1} \ldots \underset{r}{1})$

$$\bar{\tau}_1 = N \cdot \xi, \qquad D(\tau) = \bar{\tau}_2 = (2 \cdot N - E) \cdot \bar{\tau}_1 - \tau_{sq},$$

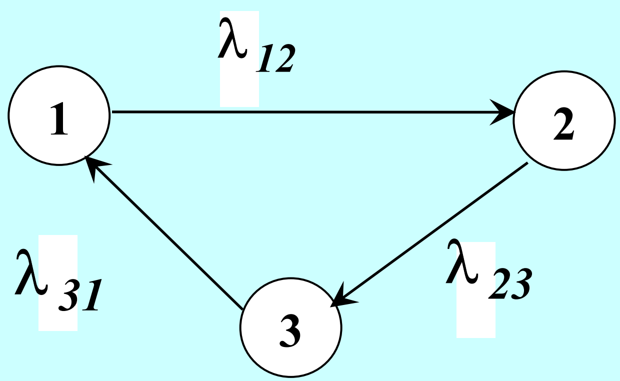
$$U = \{ u_{ij} \} = N \cdot R \quad , \begin{cases} i \in k \\ j \in r \end{cases}$$

Непрерывные марковские цепи

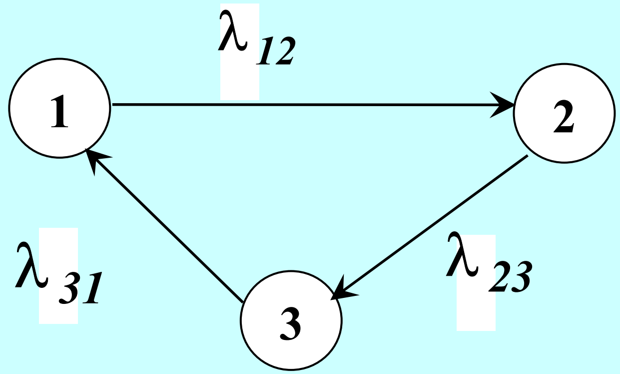
$P_{ij}(t_1) \equiv 0$ $\qquad$ $P_{ij}(t_1, \Delta t) \neq 0$

$\lambda_{ij}(t) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{P_{ij}(t, \Delta t)}{\Delta t}$ -- **Интенсивность перехода из состояния i в состояние j**

$$\left\{ \{S_i\}, i = \overline{1,n};\ \ \Lambda = \{\lambda_{ij}\} i.j = \overline{1,n};\ P(0) = (P_1(0), \vec{P}_2(0), \ldots, P_n(0)) \right\}$$



Непрерывные марковские цепи



$$P_1(t+\Delta t) = P_1(t)\left[1-\lambda_{12}\Delta t\right] + P_3(t)\lambda_{31}\Delta t$$

$$P_2(t+\Delta t) = P_2(t)\left[1-\lambda_{23}\Delta t\right] + P_1(t)\lambda_{12}\Delta t$$

$$P_3(t+\Delta t) = P_3(t)\left[1-\lambda_{31}\Delta t\right] + P_2(t)\lambda_{23}\Delta t$$

$$\frac{P_1(t+\Delta t) - P_1(t)}{\Delta t} = -\lambda_{12}P_1(t) + \lambda_{31}P_3(t)$$

$$\frac{P_2(t+\Delta t) - P_2(t)}{\Delta t} = -\lambda_{23}P_1(t) + \lambda_{12}P_1(t)$$

$$\frac{P_3(t+\Delta t) - P_3(t)}{\Delta t} = -\lambda_{31}P_1(t) + \lambda_{23}P_2(t)$$

Непрерывные марковские цепи

Система уравнений Чепмена-Колмогорова

Переходный процесс

$$\begin{cases} \dfrac{dP_1(t)}{dt} = -\lambda_{12} P_1(t) + \lambda_{31} P_3(t) \\ \dfrac{dP_2(t)}{dt} = -\lambda_{23} P_2(t) + \lambda_{12} P_1(t) \\ \dfrac{dP_3(t)}{dt} = -\lambda_{31} P_3(t) + \lambda_{23} P_2(t) \end{cases}$$

$$\vec{P}(0) = (P_1(0), P_2(0), \ldots, P_n(0))$$

$$\sum_{i=1}^{n} P_i(t) = 1$$

Непрерывные марковские цепи

Система уравнений Чепмена-Колмогорова

Установившийся режим

$$\begin{cases} 0 = -\lambda_{12}P_1 + \lambda_{31}P_3 \\ 0 = -\lambda_{23}P_2 + \lambda_{12}P_1 \\ 0 = -\lambda_{31}P_3 + \lambda_{23}P_2 \end{cases}$$

$$\sum_{i=1}^{n} P_i = 1$$

Непрерывные марковские цепи

Правило записи уравнений Чепмена-Колмогорова

1. **Каждому состоянию – свое уравнение системы**
2. **В левой части уравнения *0***
3. **Число членов в правой части = число стрелок из состояния и в состояние *i***
4. **Если**

$$i \xrightarrow{\lambda_{ij}} j \quad \Rightarrow \quad -P_i\lambda_{ij}$$

5. **Если**

$$i \xleftarrow{\lambda_{ji}} j \quad \Rightarrow \quad P_i\lambda_{ij}$$

Потоки событий

Простейший поток:

- Стационарность
- Отсутствие последействия
- Ординарность

Распределение Пуассона ⟺ **Экспоненциальный закон**

$$P(m)=\frac{a^m}{m!}e^{-a},\quad m=0,1,2,\dots$$

$$P(\tau\geq t)=P(0,t)=\frac{(\lambda t)^0}{0!}e^{\lambda t}=e^{\lambda t}$$

$$\begin{cases} a=\lambda T \\ P(m,T)=\dfrac{(\lambda T)^m}{m!}e^{-\lambda T},\quad m=0,1,2,\dots \end{cases}$$

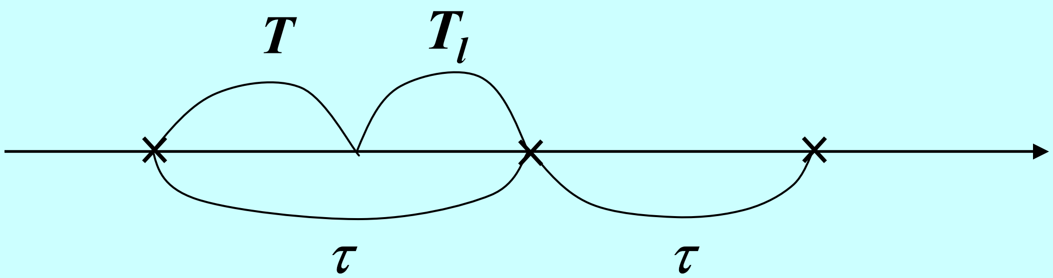
$$F(t)=P(\tau<t)=1-e^{-\lambda t}$$

$$f(t)=\frac{dF(t)}{dt}=\lambda e^{-\lambda t},\ t\geq 0$$

$$M(t)=\sigma(t)=\frac{1}{\lambda}$$

Потоки событий

Простейший поток. Отсутствие последействия



Докажем, что $P(T_l < t / \tau \geq T) = P(T_l < t) = P(\tau < t) = 1 - e^{-\lambda t}$

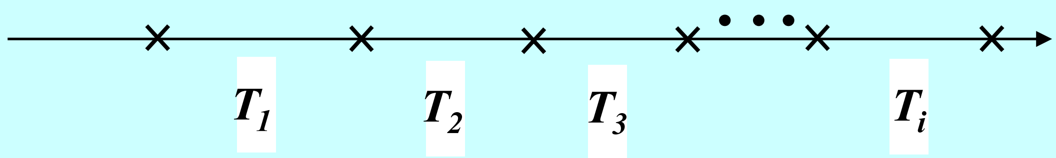
$$P(T_l < t / \tau \geq T) = \frac{P(T_l < t, \tau \geq T)}{P(\tau \geq T)} = \frac{P(T \leq \tau, \tau \leq T + t)}{P(\tau \geq T)} =$$

$$= \frac{P(0 \leq \tau \leq T + t) - P(0 \leq \tau \leq T)}{P(\tau \geq T)} = \frac{1 - e^{-\lambda(T+t)} - 1 + e^{-\lambda T}}{e^{-\lambda T}} =$$

$$= \frac{e^{-\lambda T}\left[1 - e^{-\lambda t}\right]}{e^{-\lambda T}} = 1 - e^{-\lambda t}$$

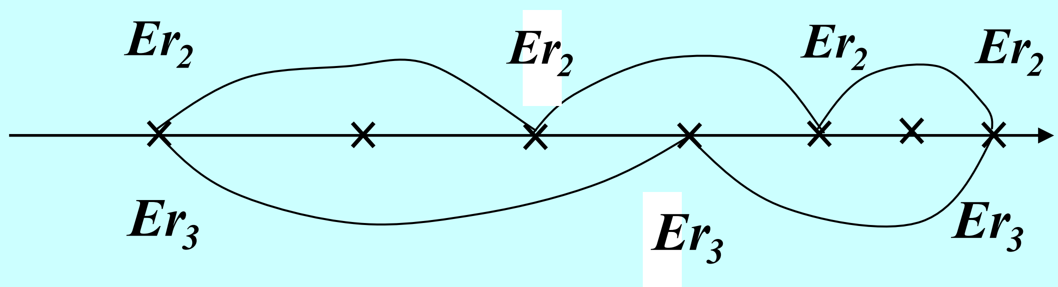
Потоки событий

Поток Пальма



T_i -- одинаково распределенные независимые случайные величины

Поток Эрланга



$$f_k(t) = \lambda P(k-1,t) = \lambda \frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda t}$$

$$M(t) = \frac{k}{\lambda}, \quad \sigma(t) = \frac{\sqrt{k}}{\lambda} \qquad \lim_{k \to \infty} \frac{\sigma(t)}{M(t)} = \frac{1}{\sqrt{k}} = 0$$