Системы массового обслуживания

Понятия и определения

Заявка (требование) – активный объект модели, требующий обслуживания

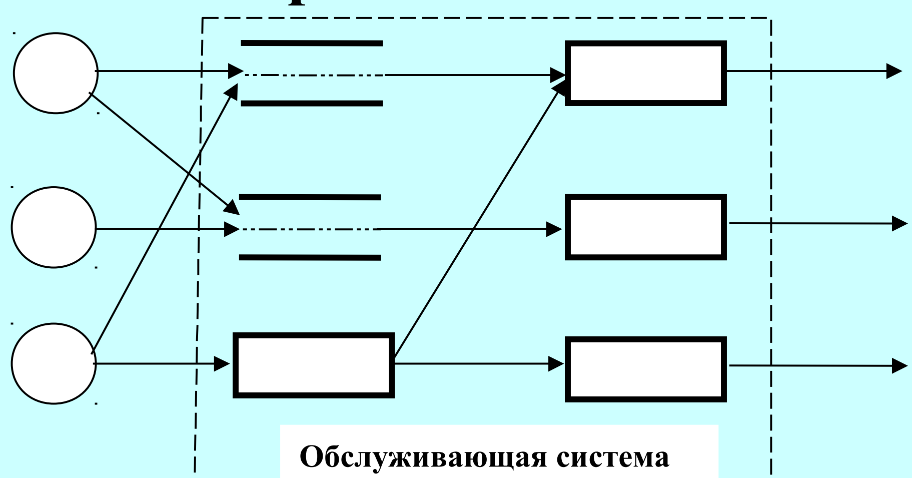
Источник заявок – первопричина возникновения заявок

Очередь – очередь заявок, ожидающих обслуживания

Накопитель – место нахождения очереди

Обслуживающий прибор (канал)

Обслуживающая система – совокупность каналов обслуживания + очередь



Классификация СМО

1. Характеристика источника требований:

- Источник с конечным числом требований – замкнутая СМО
- Источник с бесконечным числом требований – разомкнутая СМО

2. Наличие или отсутствие возможности ожидания обслуживания:

- Системы с отказами
- Системы с ожиданием:
- С неограниченной очередью
- С ограниченной очередью (ограничены длина очереди и/или время ожидания)

3. Количество приборов в системе:

- Одноканальные СМО
- Многоканальные СМО

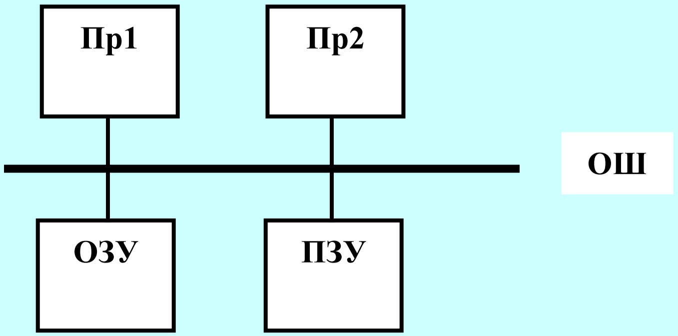
4. Количество этапов (фаз) обслуживания:

- Однофазные СМО
- Многофазные СМО

5. Дисциплина обслуживания:

- Бесприоритетные дисциплины (FIFO, LIFO)
- Приоритетные дисциплины (с относительным и абсолютным приоритетом)

Пример построения СМО
(ВС с общей шиной обмена)



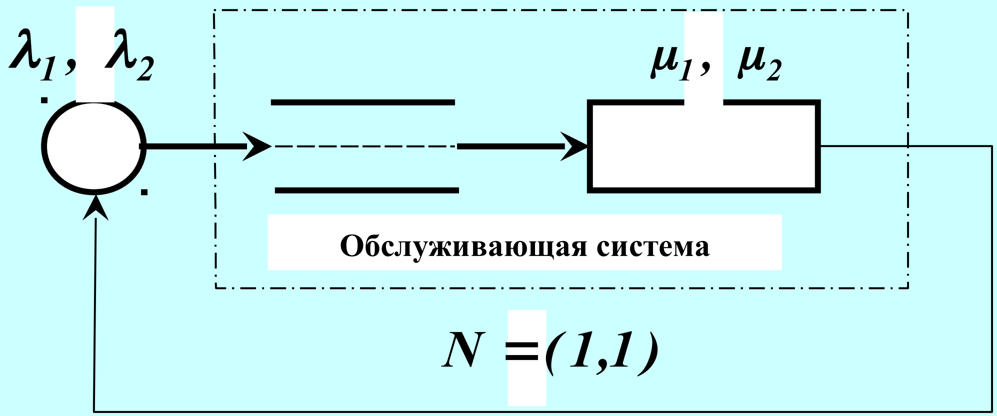
счет **обмен** **счет** **обмен** **счет** **обмен** **счет** **обмен**

Найти:
Коэффициент загрузки ОШ
Коэффициенты загрузки процессоров
Коэффициенты удлинения программ (1-й и 2-й)

Дано: $\boldsymbol{\tau_{сч\,i}},\ \boldsymbol{\tau_{обм\,i}}$ $\qquad \overline{\boldsymbol{\tau_{сч\,i}}},\ \overline{\boldsymbol{\tau_{обм\,i}}},\ \boldsymbol{i=1{,}2}$

законы распределения $\boldsymbol{\tau_{сч\,i}},\ \boldsymbol{\tau_{обм\,i}}$ **– показательные**

Пример построения СМО
(ВС с общей шиной обмена)

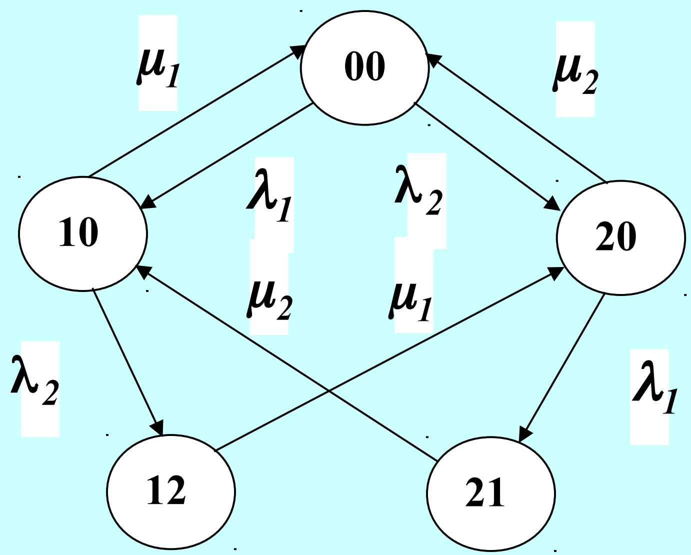


$$\lambda_i = \frac{1}{\tau_{\text{ñ÷}i}}, \; i = 1,2;$$

$$\mu_i = \frac{1}{\tau_{\text{îáì}\;\, i}}, \; i = 1,2$$

$$\left\{ \begin{matrix} n_1 & n_2 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{matrix} \right\} \qquad \left\{ \begin{matrix} 00 \rightarrow \text{Счет1 - Счет1} \\ 10 \rightarrow \text{Обмен1 - Счет2} \\ 20 \rightarrow \text{Обмен2 - Счет1} \\ 12 \rightarrow \text{Обмен1 - Обмен2} \\ 21 \rightarrow \text{Обмен2 - Обмен1} \end{matrix} \right\}$$

Пример построения СМО
(ВС с общей шиной обмена)



$$
\begin{cases}
0 = -P_{00}(\lambda_1 + \lambda_2) + P_{10}\mu_1 + P_{20}\mu_2 \\
0 = -P_{10}(\mu_1 + \lambda_2) + P_{00}\lambda_1 + P_{21}\mu_2 \\
0 = -P_{20}(\mu_2 + \lambda_1) + P_{00}\lambda_2 + P_{12}\mu_1 \\
0 = -P_{12}\mu_1 + P_{10}\lambda_2 \\
0 = -P_{21}\mu_2 + P_{20}\lambda_1
\end{cases}
$$

$1 - P_{00}$ – вероятность занятости ОШ

$P_{00} + P_{20}$ – коэффициент загрузки Пр1

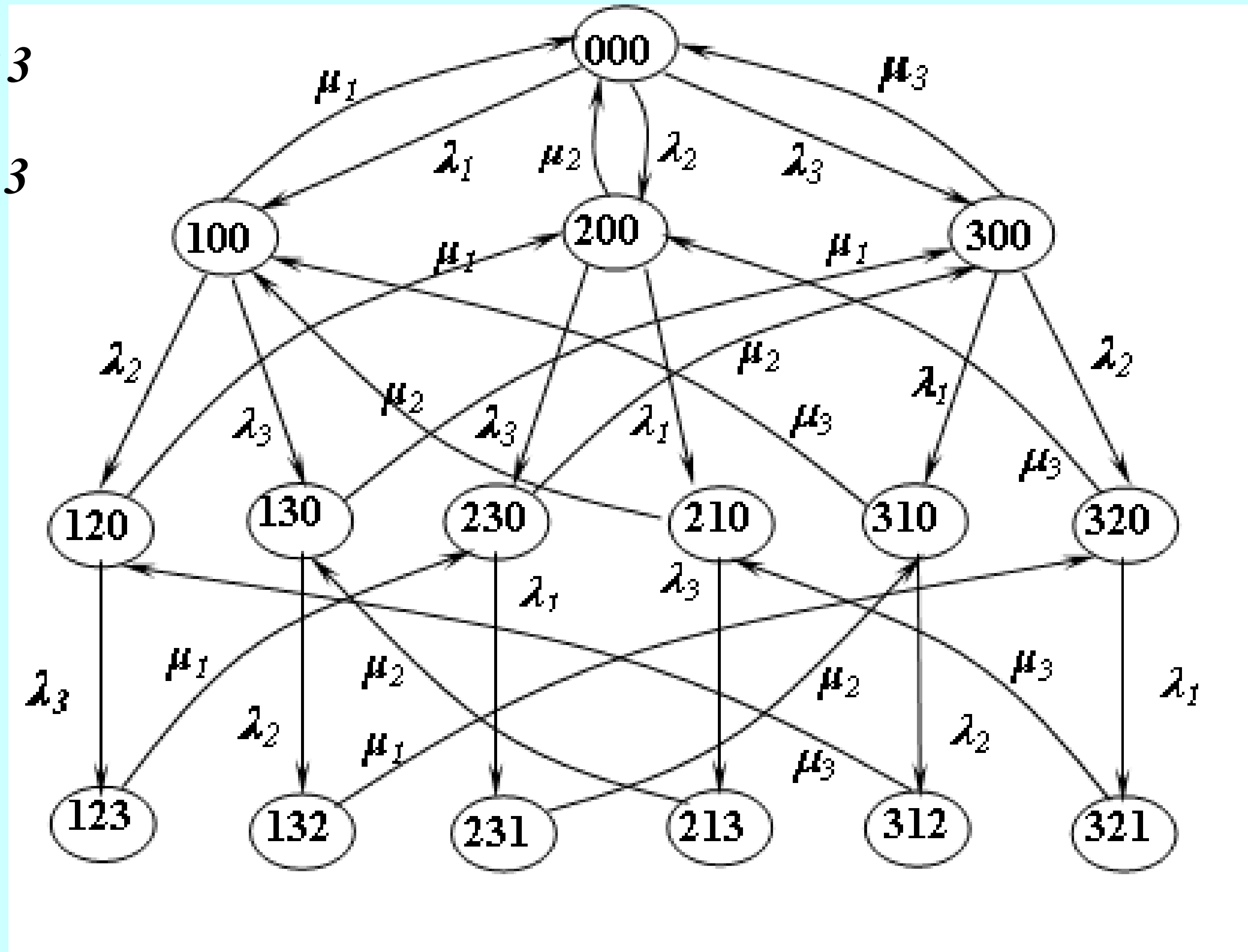
$$\xi_1 = \frac{T}{T - TP_{21}} = \frac{1}{1 - P_{21}}$$

– коэффициент удлинения 1-й пр.

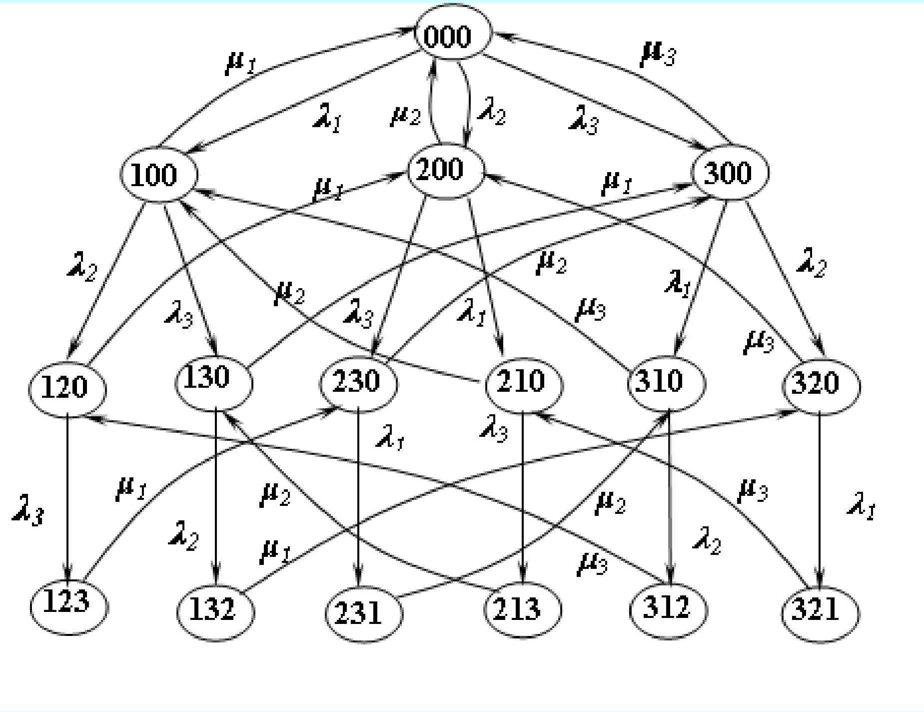
Пример построения СМО
(ВС с общей шиной обмена)

$\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3$

$\mu_1 \neq \mu_2 \neq \mu_3$



Пример построения СМО
(ВС с общей шиной обмена)



$$P_{000} = 1 - \eta$$

$$\bar{t}_{ож\,1} = \frac{\overline{n_1}}{\lambda_1} = \frac{P_{210} + P_{310} + P_{231} + P_{213} + P_{312} + P_{321}}{\lambda_1 (P_{000} + P_{200} + P_{300} + P_{230} + P_{320})}$$

Показатели эффективности СМО

Абсолютная (*A*) и относительная (*q*) пропускные способности – только для СМО с отказами.

A - среднее число заявок, обслуживаемых в единицу времени;

q - вероятность того, что заявка, поступившая на вход СМО, будет обслужена.

Коэффициент загрузки каналов – среднее число занятых каналов $\overline{K_{ç}}$

Среднее число заявок в системе $\overline{j}$ и в очереди $\overline{n}$:

Временные показатели СМО:

$\overline{t_{c}}$ – среднее время пребывания заявки в системе;

$\overline{t_{îæ}}$ – среднее время ожидания заявки в очереди:

Система обозначений СМО

(по Кендаллу)

$A / B / K / m / n$, где

A – arrival – закон поступления заявок (G, D, E_k, M, H)

B – busy – закон обслуживания заявок (G, D, E_k, M, H)

K – число каналов

m – число мест в очереди

n – число заявок в источнике

Варианты систем: $G / G / 1, \quad G / G / K, \quad G / M / 1, \quad M / G / 1$

Общие результаты ТМО

$\underline{G / G / K}$

$$\rho = \lambda \overline{x} = \frac{\lambda}{\mu}$$ – среднее число занятых приборов (каналов)

$$\rho_c = \frac{\lambda \overline{x}}{K} = \frac{\lambda}{K\mu}$$ – коэффициент загрузки системы

(вероятность занятости канала)

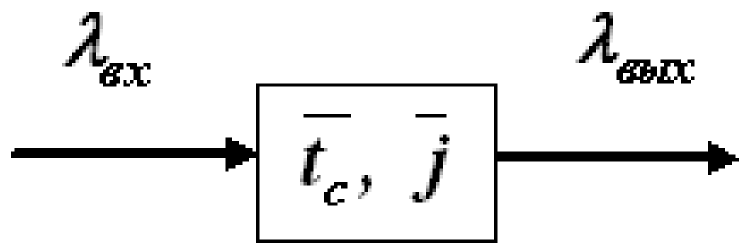
Условие существования установившегося режима
для систем $G / G / K$: $\rho_c < 1$

Общие результаты ТМО

Правило (закон) Литтла

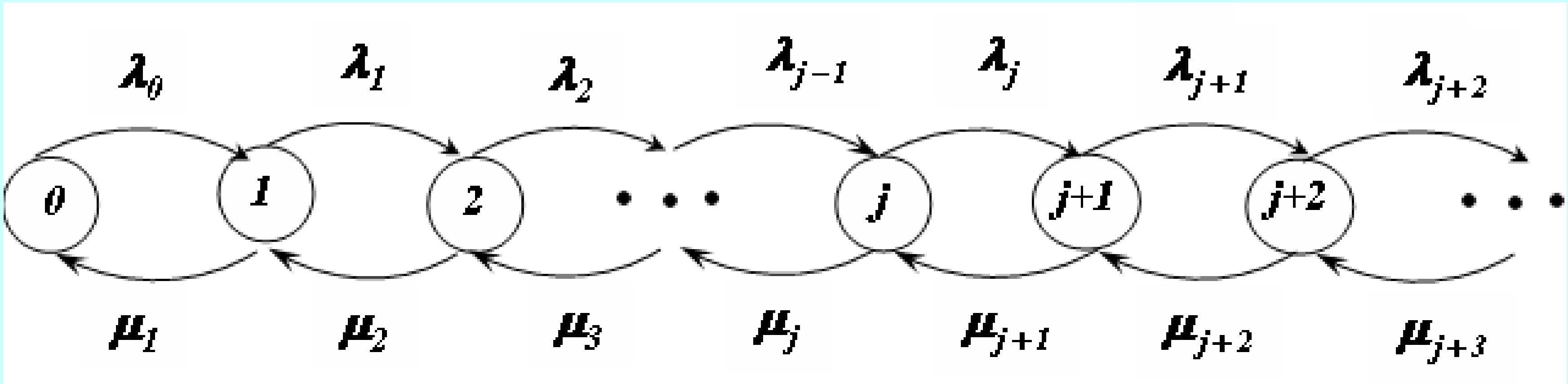
$$G/G/K\ :\ \rho_c < 1$$

Закон Литтла



$$\lambda_{вх} = \lambda_{вых} = \lambda, \quad тогда \quad \overline{t_c} = \frac{\overline{j}}{\lambda}$$

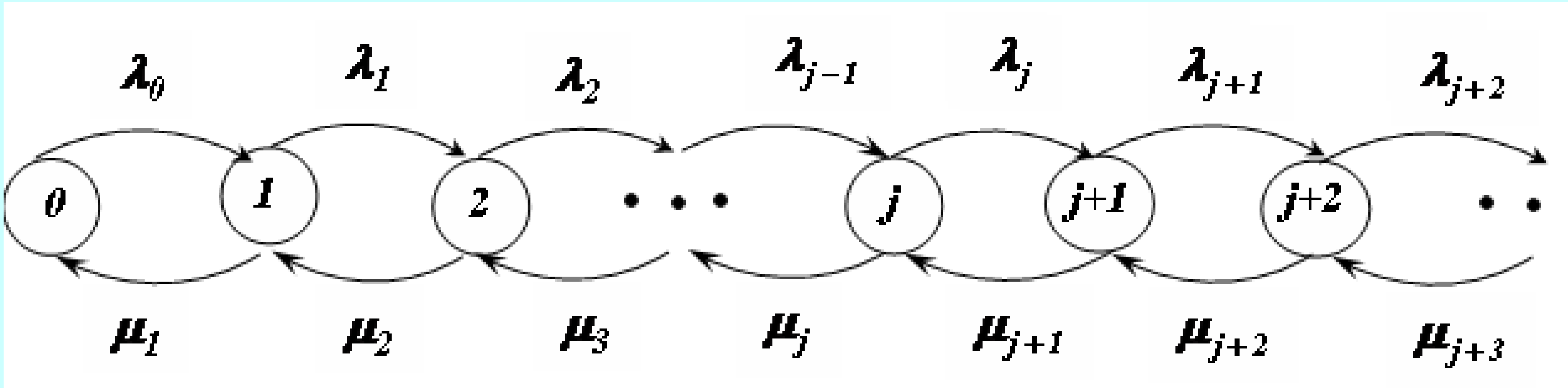
Марковский процесс гибели-размножения



$$\frac{\lambda_j}{\mu_{j+1}} < 1$$

$$\begin{cases} -\lambda_0 P_0 + \mu_1 P_1 = 0 \\ . \\ . \\ . \\ -\lambda_j P_j + \mu_{j+1} P_{j+1} - (-\lambda_{j-1} P_{j-1} + \mu_j P_j) = 0 \\ . \\ . \\ . \\ \lambda_{n-1} P_{n-1} - \mu_n P_n = 0 \\ . \\ . \\ . \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} S_0 = 0 \\ . \\ . \\ . \\ S_{j-1} - S_j = 0 \\ . \\ . \\ . \\ - S_{n-1} = 0 \\ . \\ . \\ . \end{cases}$$

Марковский процесс гибели-размножения



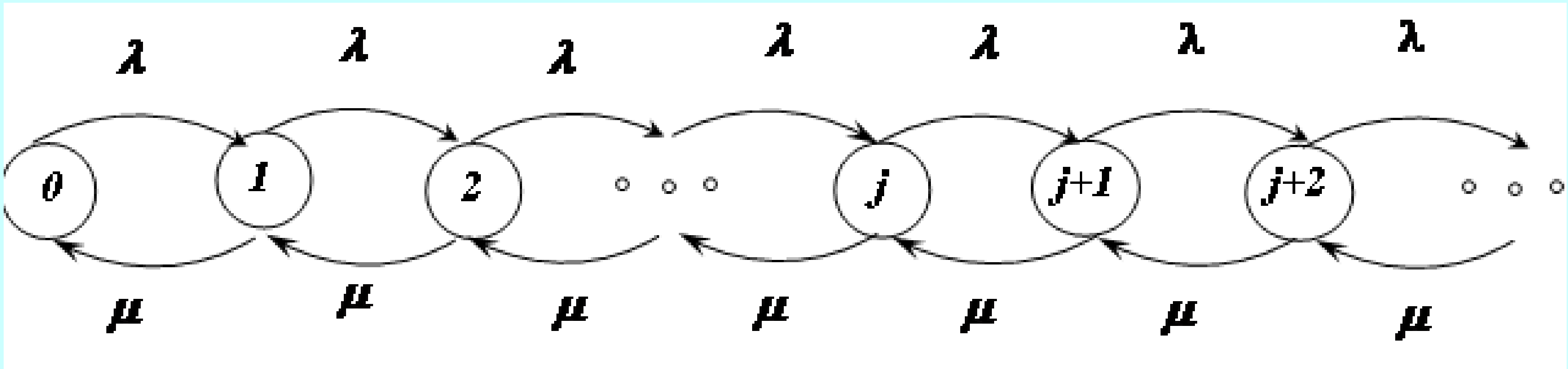
$$P_j = P_0 \prod_{k=1}^{j} \frac{\lambda_{k-1}}{\mu_k} \qquad \sum_{i=1}^{n} P_i = 1$$

$$P_0 = \left[1 + \sum_{j=1}^{n} \prod_{k=1}^{j} \frac{\lambda_{k-1}}{\mu_k} \right]^{-1}$$

Элементарные СМО

M/M/1, *M/M/K*
M/M/1/m, *M/M/K/m*
M/M/1//n, *M/M/K//n*

M/M/1

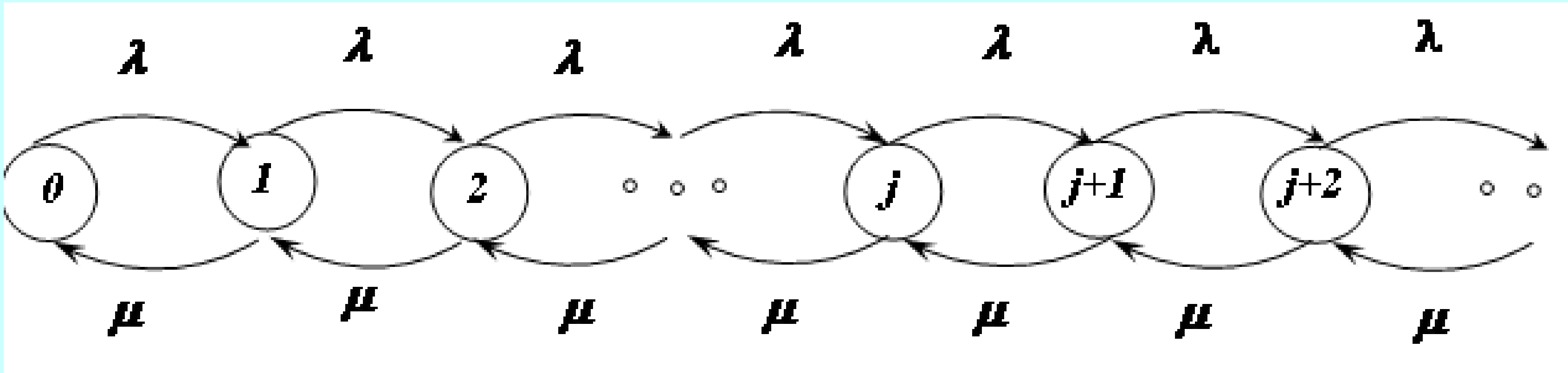


$$P_0 = \left[1 + \rho + \rho^2 + \rho^3 + \dots\right]^{-1} = \left[\frac{1}{1-\rho}\right]^{-1} = 1 - \rho$$

$$\lambda_{вх} = \lambda_{вых} = (1 - P_0)\mu = \lambda$$

Элементарные СМО

M/M/1



Среднее число заявок в системе: $\bar{j} = \sum_{j=1}^{\infty} jP_j = \dfrac{\rho}{1-\rho}$

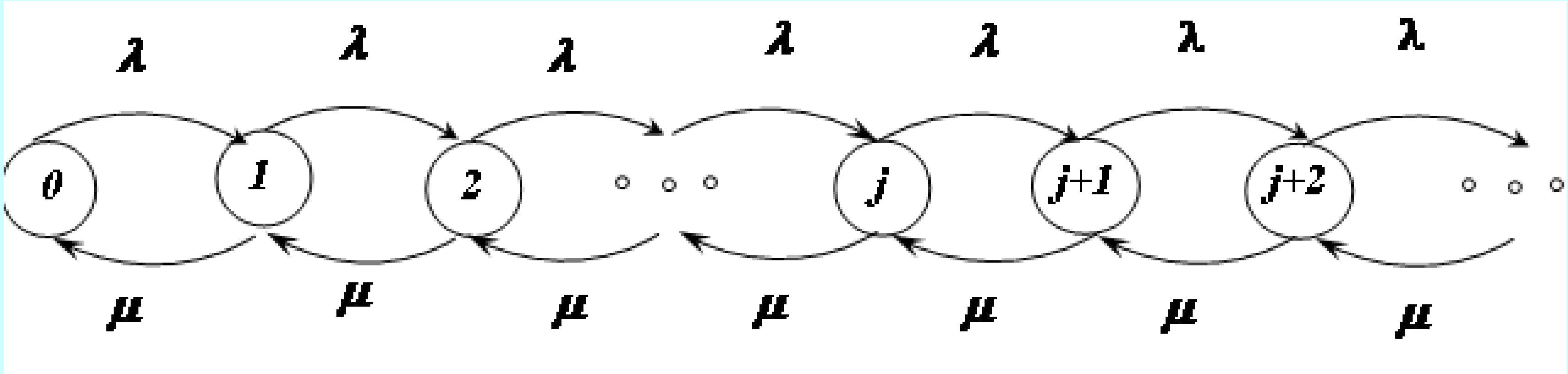
Среднее число заявок в очереди: $\bar{n} = \sum_{j=2}^{\infty} (j-1)P_j = \dfrac{\rho^2}{1-\rho}$

Среднее время пребывания заявки в системе $\overline{t_c} = \dfrac{\bar{j}}{\lambda} = \dfrac{1}{\mu} \cdot \dfrac{1}{(1-\rho)}$

Среднее время пребывания заявки в очереди $\overline{t_{ож}} = \dfrac{\bar{n}}{\lambda} = \dfrac{\rho^2}{(1-\rho)\lambda}$

Элементарные СМО

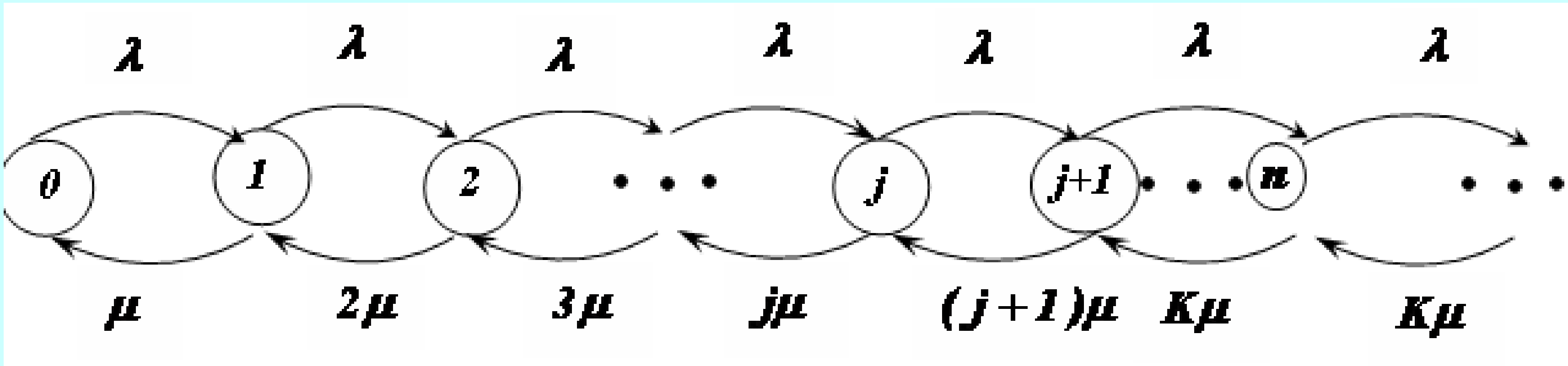
M/M/1



$P(t_{ОЖ} < t)$	$1 - \rho\, e^{-\mu(1-\rho)t};\ \ t \geq 0$
$P(t_C < t)$	$1 - e^{-\mu(1-\rho)t};\ \ t \geq 0$

Элементарные СМО

M/M/K

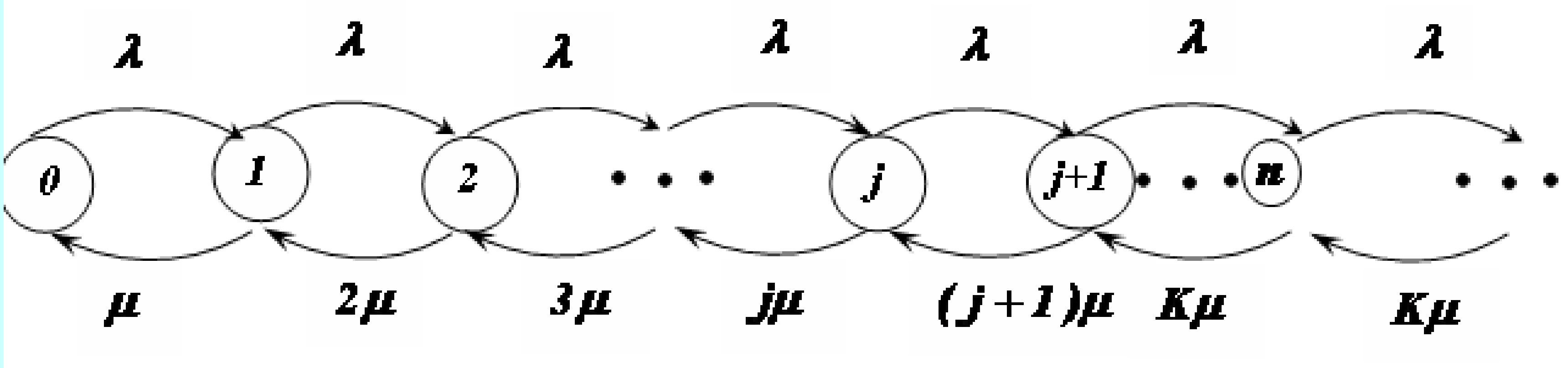


$$\rho_c = \frac{\lambda}{K\mu} \qquad \rho_c < 1$$

$$\mu_j = \begin{cases} j\mu, & j < K \\ K\mu, & j \ge K \end{cases}$$

Элементарные СМО

M/M/K

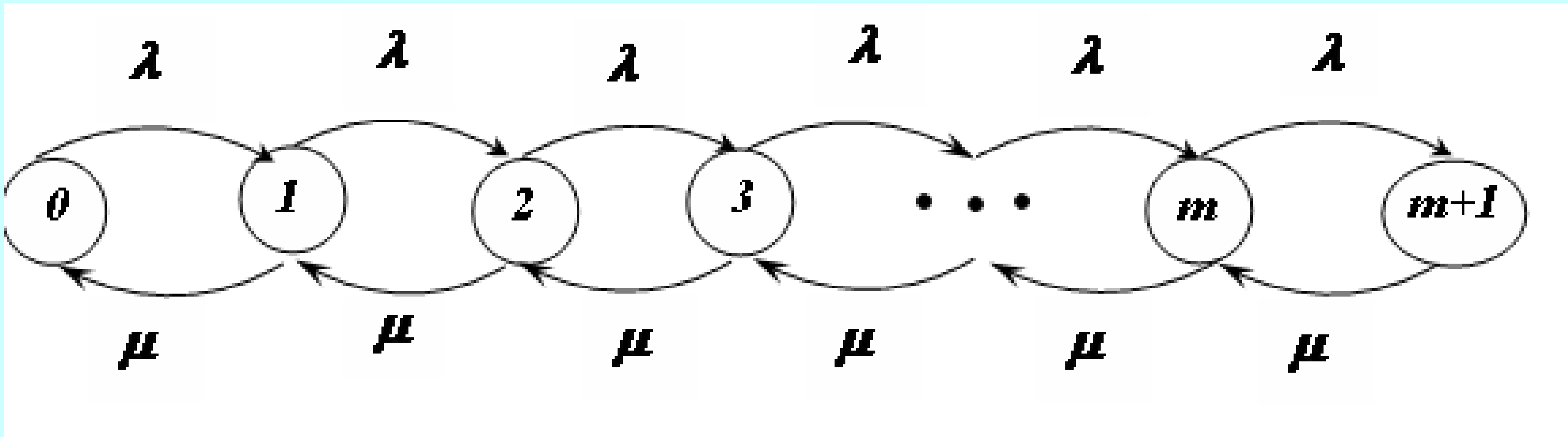


$$\mu_j = \begin{cases} j\mu, & j < K \\ K\mu, & j \ge K \end{cases}$$

$$P_j = P_0 \prod_{k=1}^{j} \frac{\lambda_{k-1}}{\mu_k} \quad \Rightarrow \quad P_j = \begin{cases} P_0 \left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^j \dfrac{1}{j!}, & j < K \\ P_0 \left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^j \dfrac{1}{K!\,K^{j-K}}, & j \ge K \end{cases}$$

Элементарные СМО

M/M/1/m

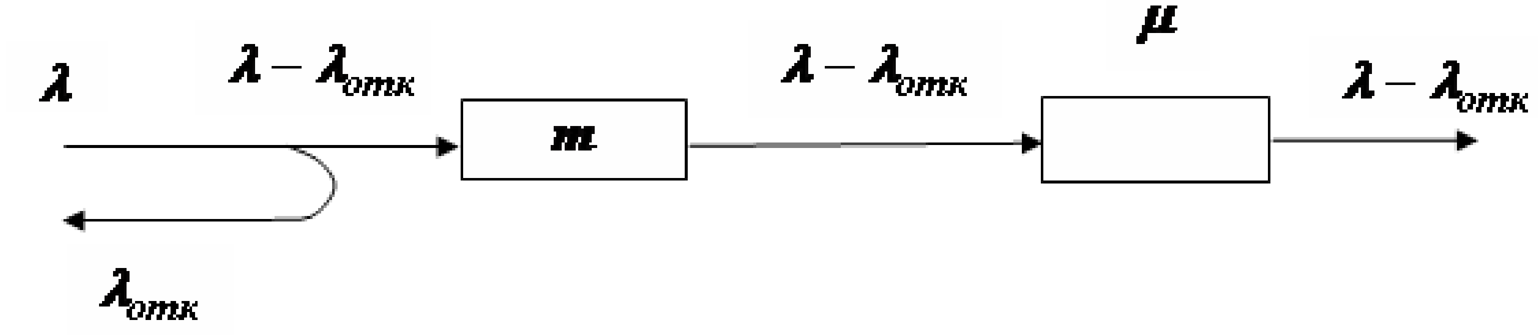


$$P_0 = \left[1 + \rho + \rho^2 + \rho^3 + \ldots \rho^{m+1}\right]^{-1} = \left[\frac{1-\rho^{m+2}}{1-\rho}\right]^{-1} = \frac{1-\rho}{1-\rho^{m+2}}$$

$$P_{отк} = P_{m+1} = \frac{\rho^{m+1}(1-\rho)}{1-\rho^{m+2}}$$

Определение временных показателей СМО с отказами

M/M/1/m

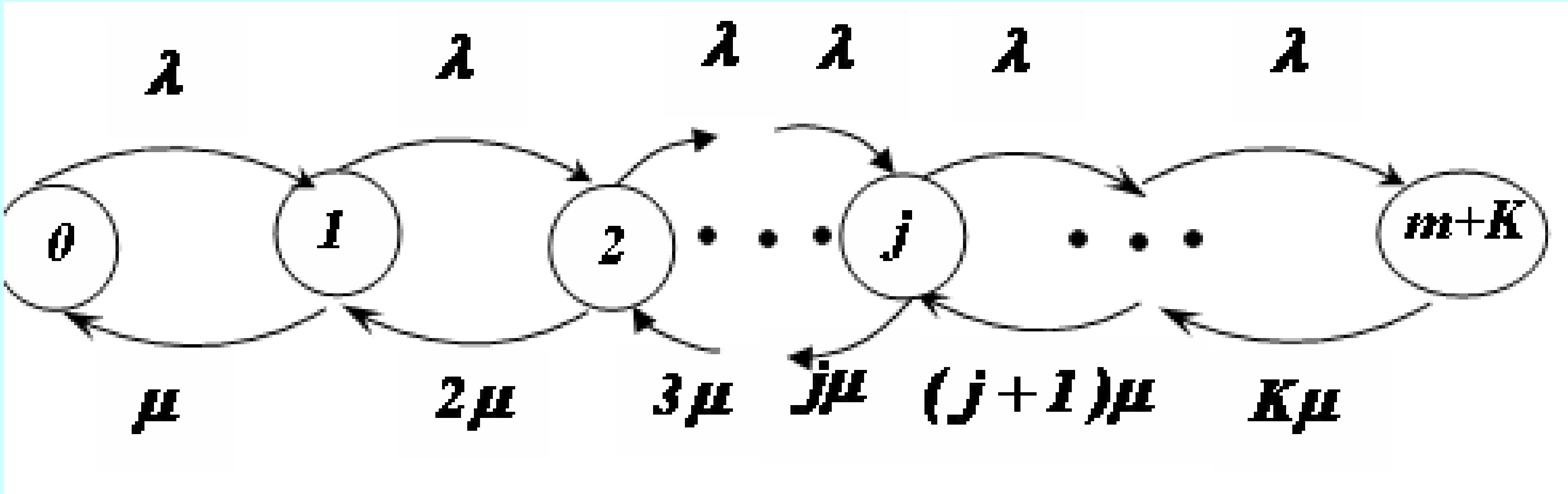


$$\overline{t_c} = \frac{\bar{j}}{\lambda(1 - P_{отк})} = \frac{\bar{j}}{\lambda(1 - P_{m+1})}$$

$$\overline{t_{ож}} = \frac{\bar{n}}{\lambda(1 - P_{отк})} = \frac{\bar{n}}{\lambda(1 - P_{m+1})}$$

Элементарные СМО

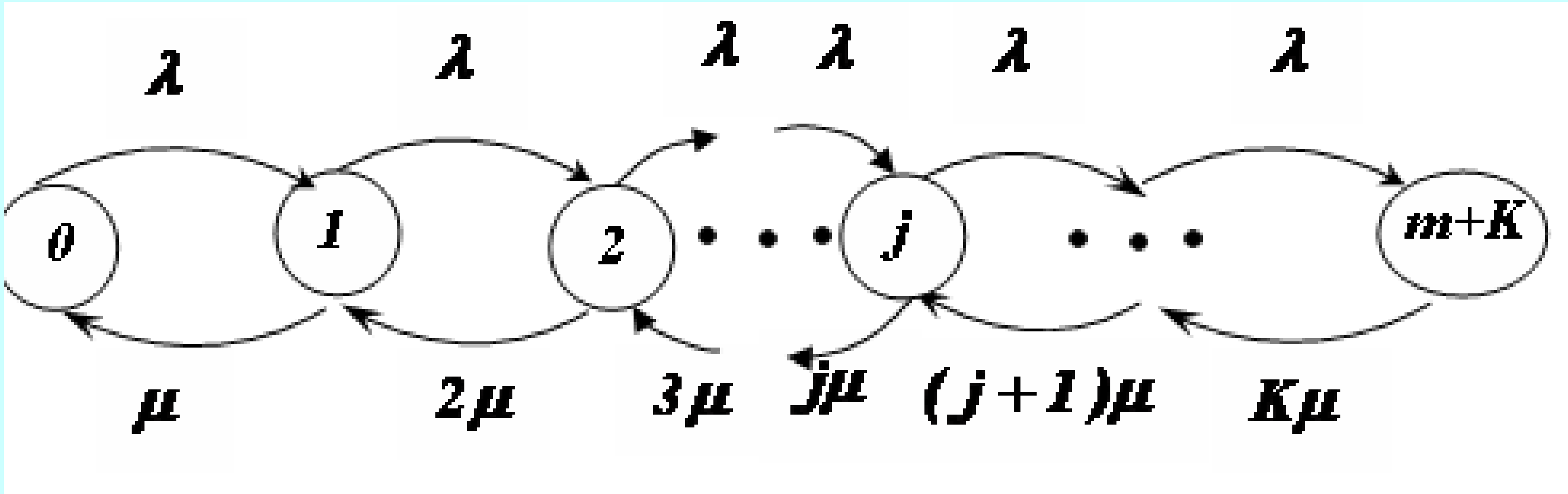
M/M/K/m



$$P_{отк} = P_{m+K}$$

Элементарные СМО

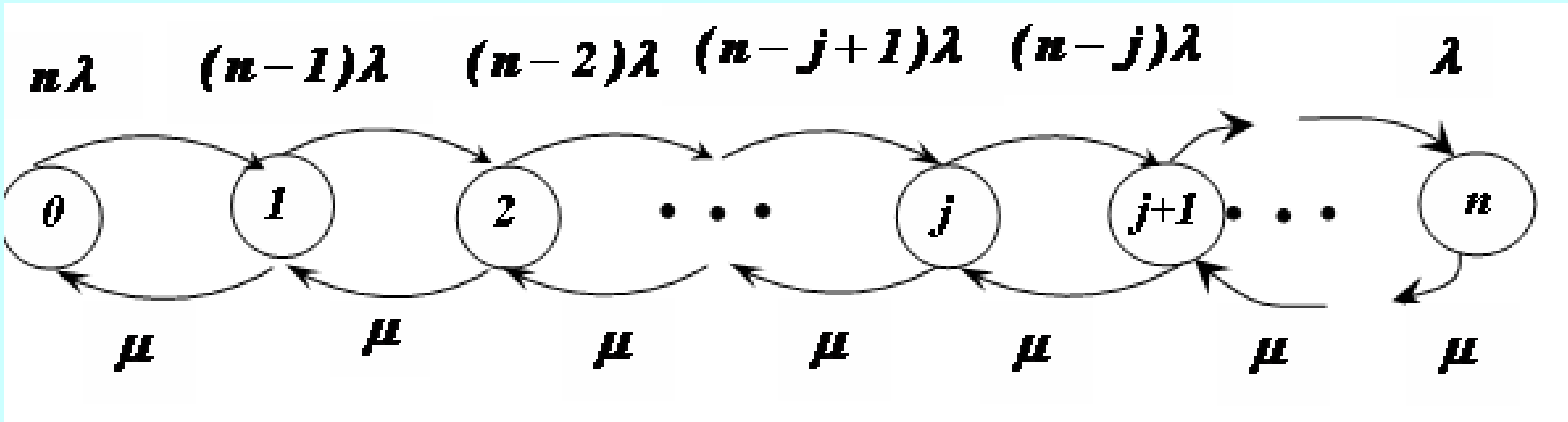
M/M/K/m



$P(t_{ож} < t)$	$1-\pi e^{-\mu(K-\rho)t}; \quad \pi = \sum_{j=K}^{\infty} P_j$

Элементарные СМО

Замкнутая СМО типа *M/M/1/n*

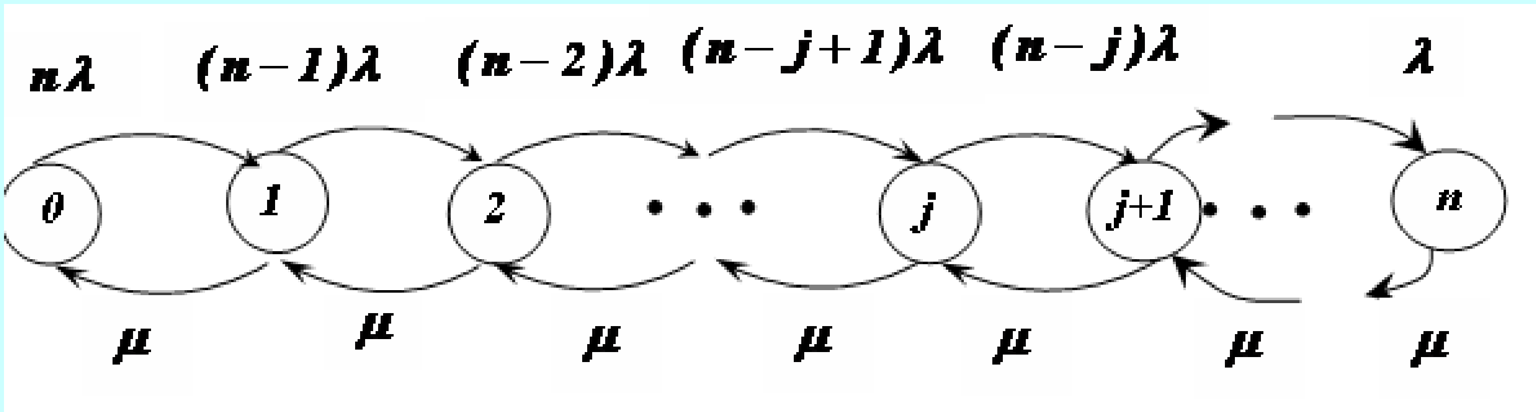


$$P_j = P_0 \frac{n\lambda \cdot (n-1)\lambda \cdot (n-2)\lambda \cdot \ldots \cdot (n-j+1)\lambda}{\mu^j} =$$

$$= P_0 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j \frac{n!}{(n-j)!} = P_0 \rho^j \frac{n!}{(n-j)!}$$

Элементарные СМО

Замкнутая СМО типа *M/M/1/n*



$$\sum_{j=1}^{n} P_j = 1 \quad \Rightarrow \quad P_0 = \left[1 + \sum_{j=1}^{n} \rho^j \frac{n!}{(n-j)!}\right]^{-1}$$

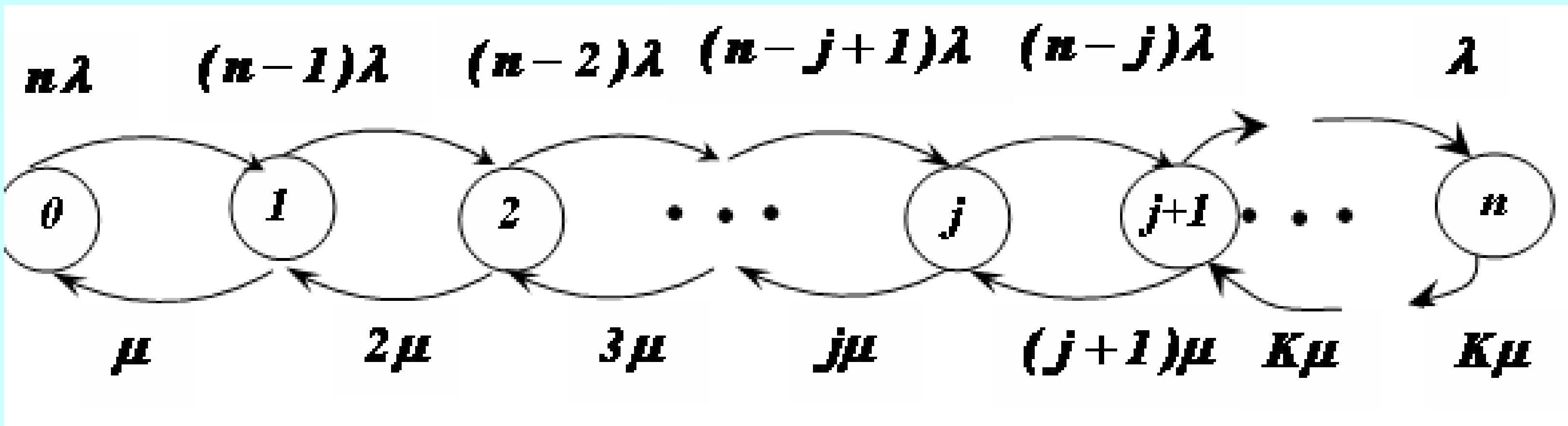
Уравнение баланса потоков

$$\lambda(n - \bar{j}) = (1 - P_0)\mu \quad \Rightarrow \quad \bar{j} = n - \frac{(1 - P_0)\mu}{\lambda}$$

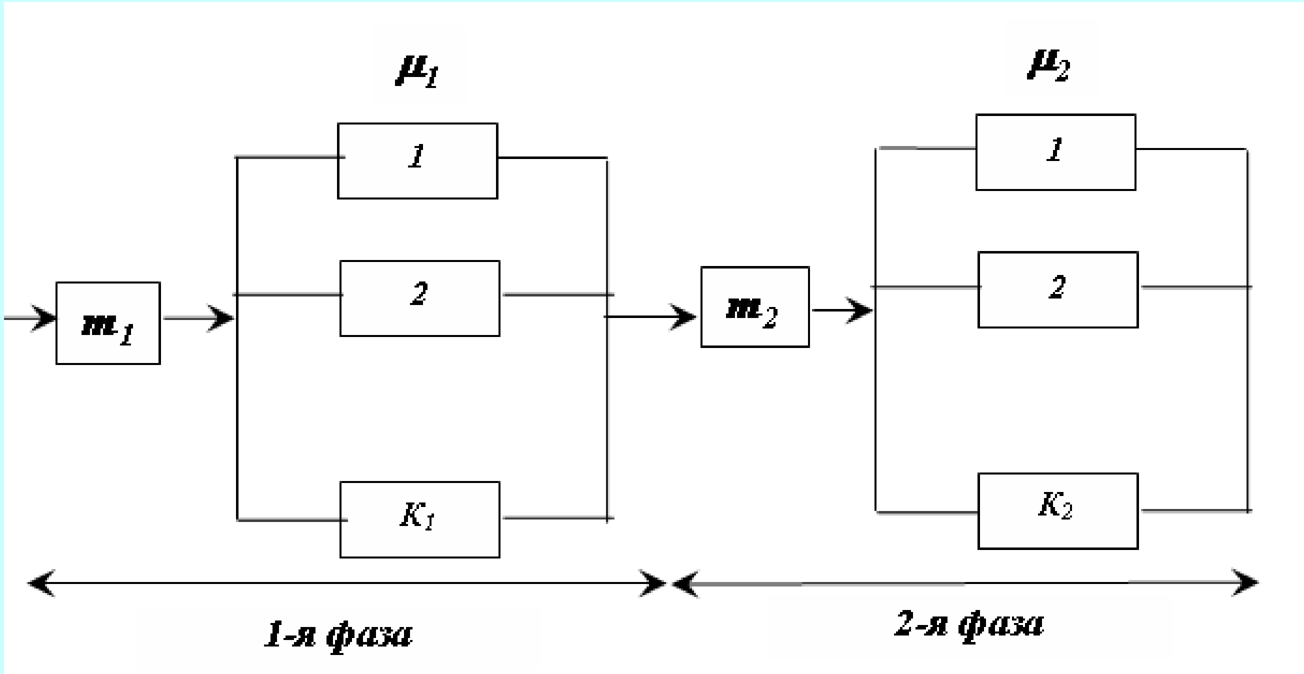
$$\bar{j} = \bar{n} + \overline{n_{îáñë}}, \quad \overline{n_{îáñë}} = 1 - P_0 \quad \Rightarrow \quad \bar{n} = n - (1 - P_0)\frac{\mu + \lambda}{\lambda}$$

Элементарные СМО

Замкнутая СМО типа *M/M/K/n*



Двухфазная СМО с блокировками приборов первой фазы

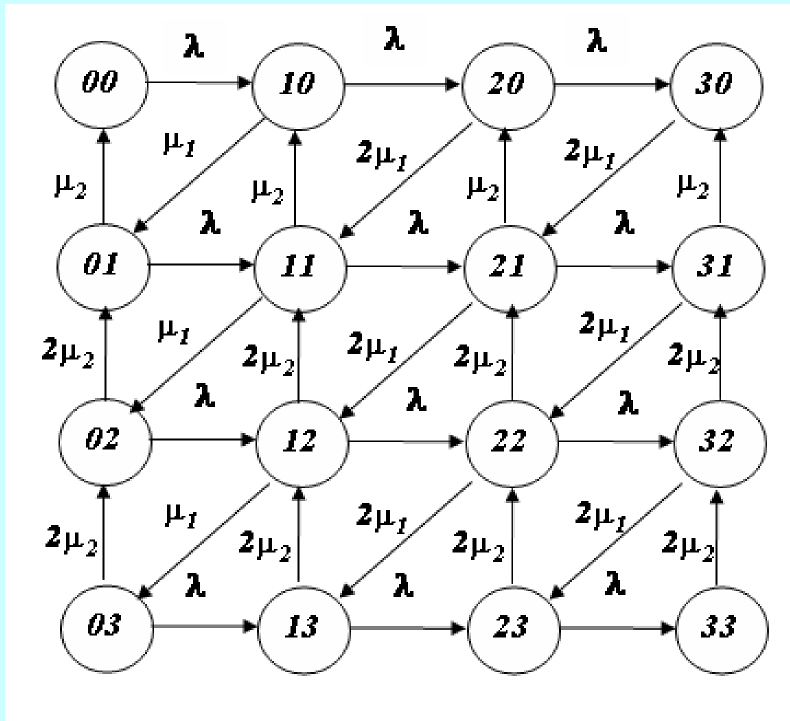


Кодировка состояний

$$\{S\} = \{n_1, n_2\}$$

Двухфазная СМО с блокировками приборов первой фазы

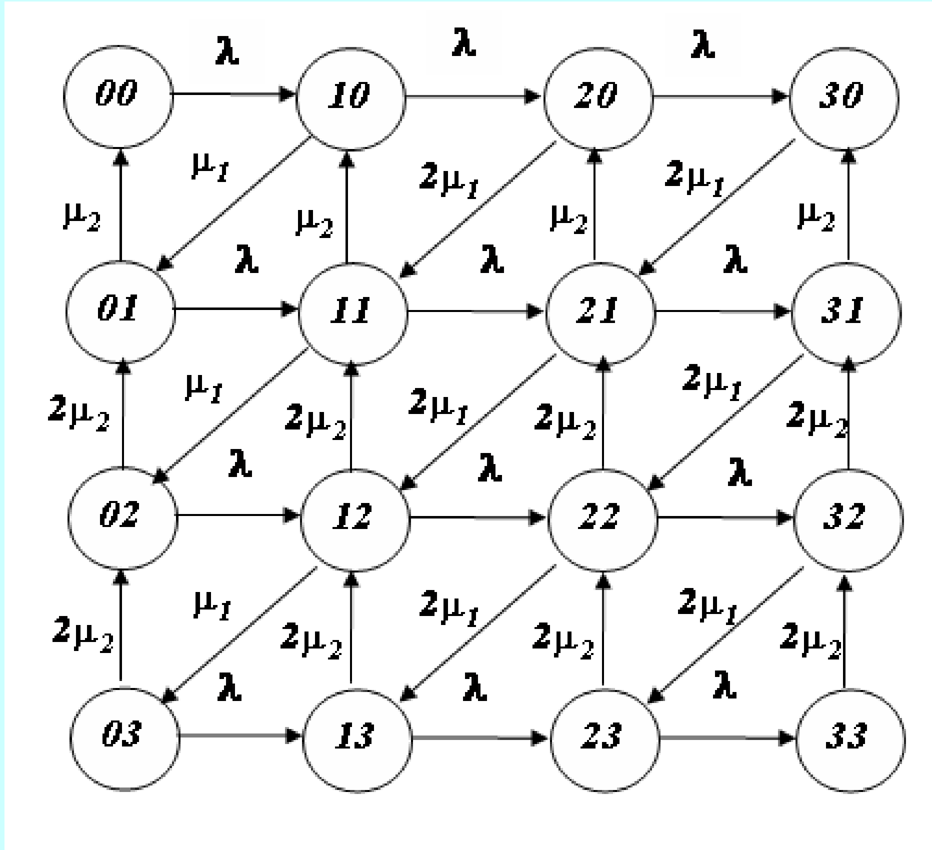
$$m_1 = 1,\ m_2 = 1,\ K_1 = K_2 = 2$$



Каналы 1-й фазы блокируются (не начинают работу), если все места во 2-й фазе оказываются занятыми

Двухфазная СМО с блокировками приборов первой фазы

$$m_1 = 1,\ m_2 = 1,\ K_1 = K_2 = 2$$



$$P_{отк} = P_{30} + P_{31} + P_{32} + P_{33}$$

$$\overline{n_{бл}} = P_{13} + 2(P_{23} + P_{33})$$

Двухфазная СМО с блокировками приборов первой фазы

Изменим интерпретацию $\{S\} = \{n_1, n_2\}$:

n_1 – число заявок, обслуживаемых в 1-й фазе

n_2 – число заявок, обслуженных (уже обслуженных) в 1-й фазе

$$n_1 + n_2 = j.$$

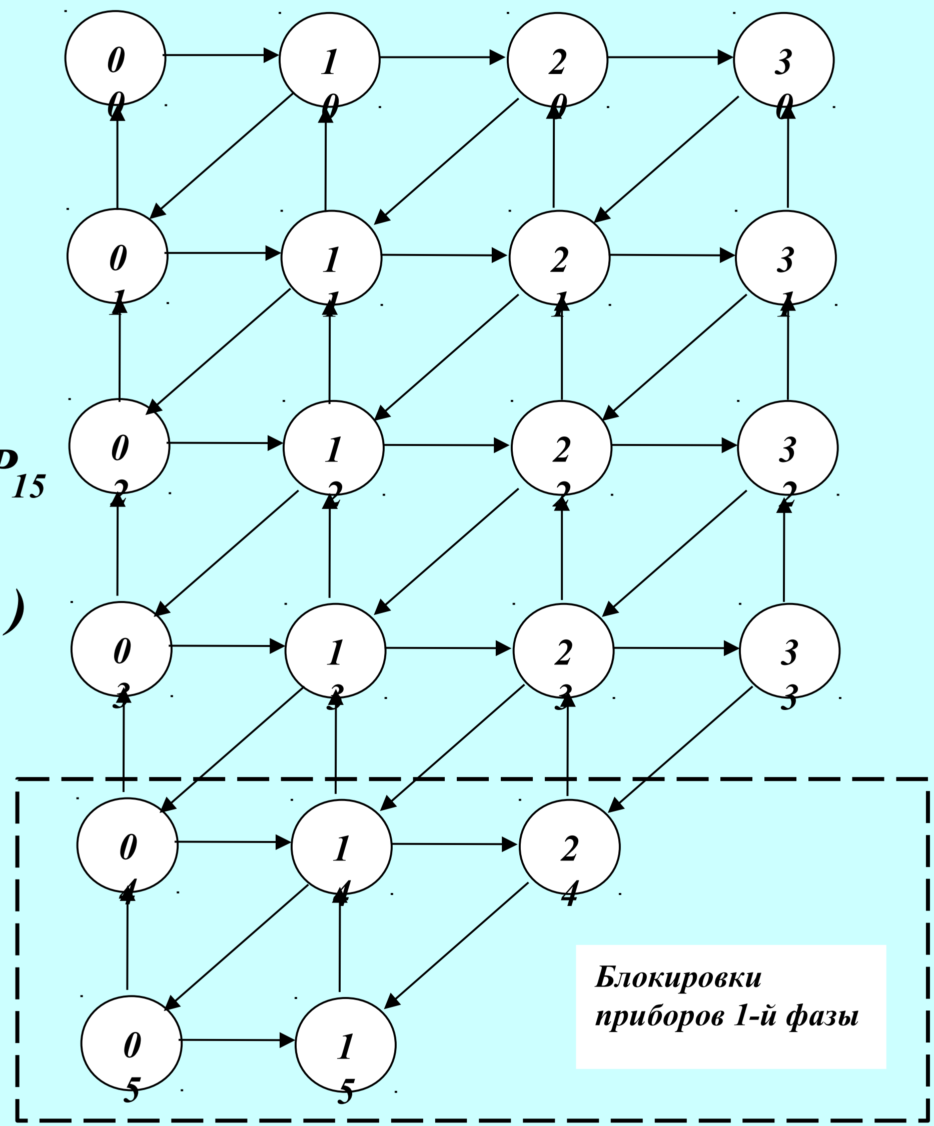
Двухфазная СМО с блокировками приборов первой фазы

Канал 1-й фазы блокируется, если не может передать заявку во 2-ю фазу

$$P_{отк} = P_{30} + P_{31} + P_{32} + P_{33} + P_{24} + P_{15}$$

$$\overline{n_{бл}} = P_{04} + P_{14} + P_{24} + 2(P_{05} + P_{15})$$

$$n_1 + n_2 \le 6$$

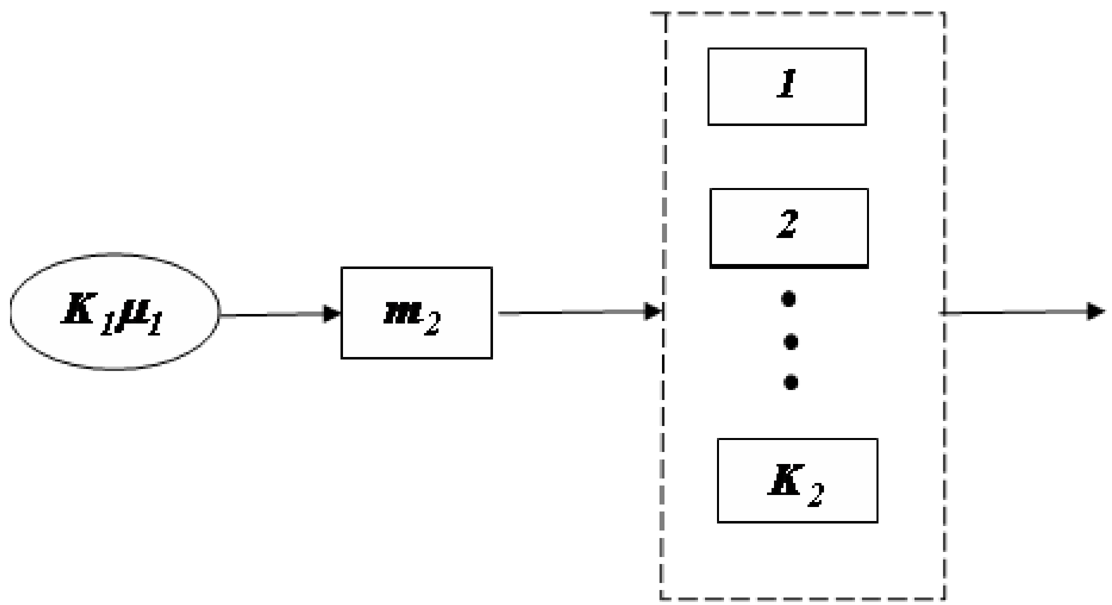


Двухфазная СМО с блокировками приборов первой фазы

Режим «пик нагрузок» – в очереди всегда есть заявки

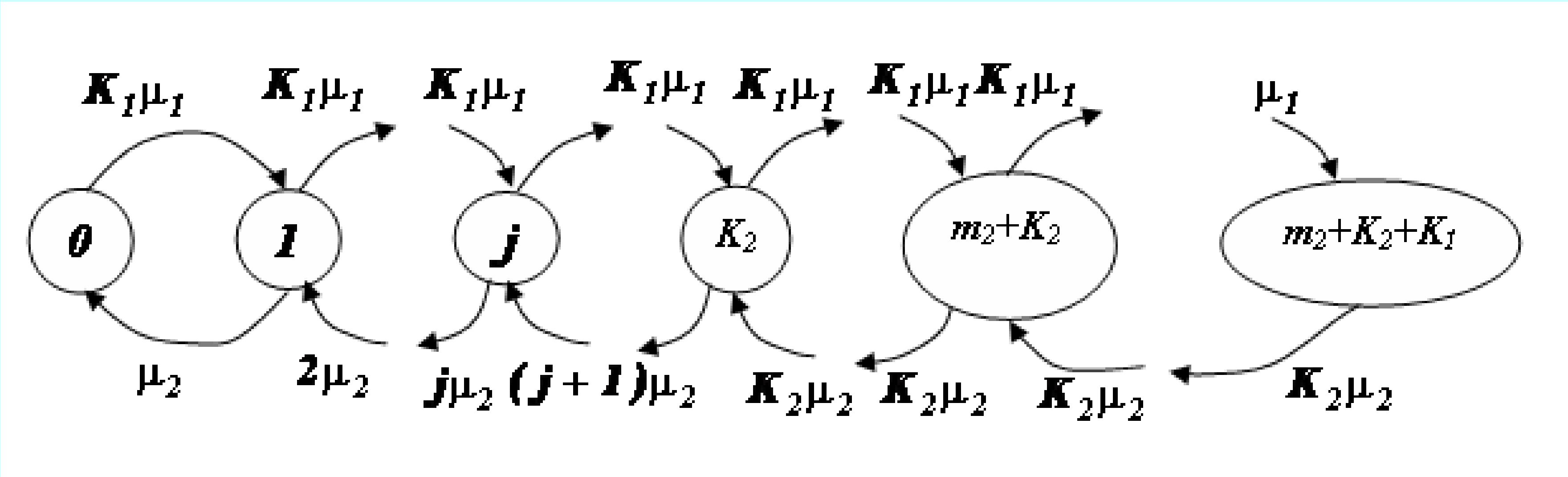
$\{S\} = \{j\}$, где j – число заявок, уже обслуженных в 1– фазе.

Заметим, что $0 \le j \le K_1 + m_2 + K_2$



Двухфазная СМО с блокировками приборов первой фазы (пик нагрузок)

$m_2 + K_2 + 1 \le j \le m_1 + K_1 + m_2 + K_2$ – блокировки приборов 1-й фазы.

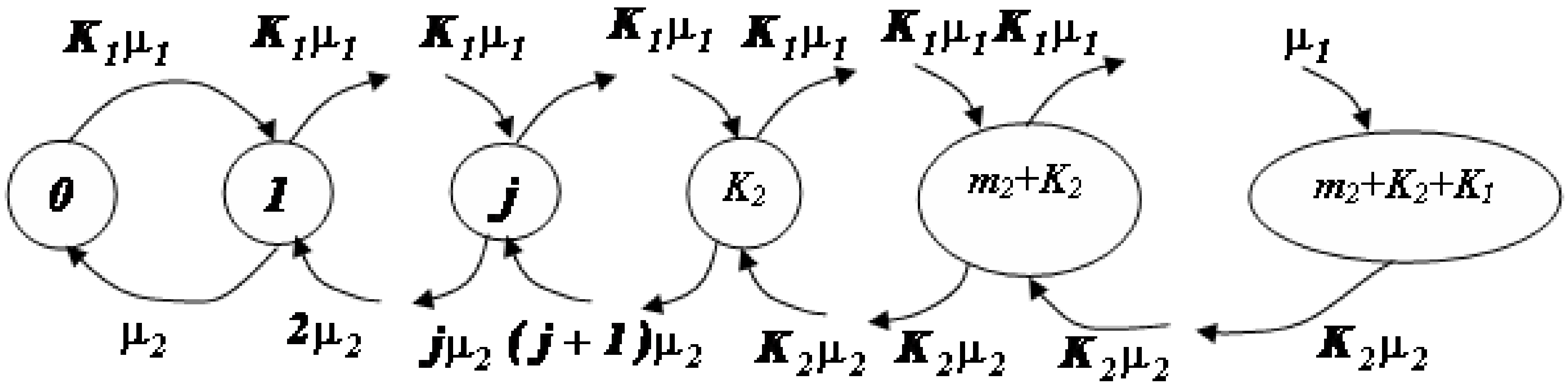


$$\lambda_n = \overline{K_{зан\,1}}\mu_1 = \overline{K_{зан\,2}}\mu_2$$

$$\overline{K_{зан\,1}} = K_1 \sum_{j=0}^{m_2+K_2} P_j + \sum_{j=m_2+K_2+1}^{m_2+K_2+K_1} (K_1 + K_2 + m_2 - j) P_j$$

$$\overline{K_{зан\,2}} = \sum_{j=1}^{K_2} jP_j + K_2 \sum_{j=K_2+1}^{m_2+K_2+K_1} P_j$$

Двухфазная СМО с блокировками приборов первой фазы (пик нагрузок)

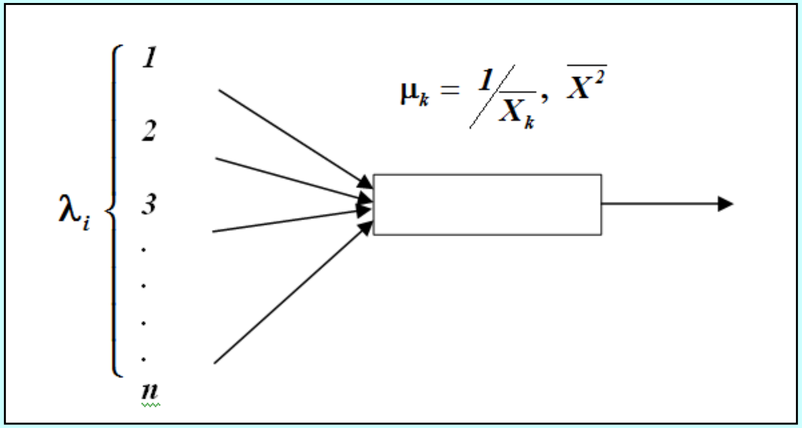


$$\boxed{\overline{j} = \sum_{j=0}^{K_2+m_2}(K_1+j)P_j + (K_1+m_2+K_2)\sum_{j=K_2+m_2+1}^{K_2+m_2+K_1} P_j}$$

$$\overline{t_c} = \frac{\overline{j}}{\lambda_n}$$

– среднее время пребывания заявки в системе $K_1 - m_2 - K_2$

СМО типа M/G/1 с неоднородным потоком на входе



$k = \overline{1,\ n_1}$ – *абсолютные приоритеты*,

$k = \overline{n_1+1,\ n_2}$ – *относительные приоритеты*,

$k = \overline{n_2+1,\ n}$ – *бесприоритетное обслуживание*.

$R_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{\mu_i}$ – коэффициент загрузки СМО заявками $1 - n$ потоков,

$$\overline{T_o} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overline{x_i^2}$$

СМО типа M/G/1 с неоднородным потоком на входе

Бесприоритетное обслуживание

$$\overline{t_{ож}} = \bar{T}_o / (1 - R), \quad \text{где}$$

$$R = \sum_{i=1}^{n} \rho_i, \quad \rho_i = \bar{x}_i \lambda_i,$$

$$M \rightarrow \overline{x_i^2} = \frac{2}{\mu_i^2};$$

$$D \rightarrow \overline{x_i^2} = \frac{1}{\mu_i^2};$$

$$E_k \rightarrow \overline{x_i^2} = \frac{1}{\mu_i^2} \cdot (1 + \frac{1}{k})$$

СМО типа M/G/1 с неоднородным потоком на входе

Относительный приоритет

$$t_{ож\,i} = T_o + \sum_{k=1}^{i} T'_k + \sum_{k=1}^{i-1} T''_k, \quad i = \overline{1,n},$$

$\sum_{k=1}^{i} T'_k$ – время обслуживания всех требований с более высоким приоритетом или таким же приоритетом, поступивших в систему ранее рассматриваемого.

$\sum_{k=1}^{i-1} T''_k$ – время обслуживания всех требований с более высоким приоритетом, чем i, поступивших за время ожидания $t_{ож\,i}$ рассматриваемого требования.

$$\overline{t_{ож\,i}} = \overline{T_o} + \sum_{k=1}^{i} \rho_k \overline{t_{ож\,k}} + \sum_{k=1}^{i-1} \rho_k \overline{t_{ож\,i}}, \quad i = \overline{1,n}.$$

$$\overline{t_{ож\,i}} = \frac{\overline{T_o} + \sum_{k=1}^{i} \rho_k \overline{t_{ож\,k}}}{1 - R_{i-1}}, \quad i = \overline{1,n}.$$

СМО типа M/G/1 с неоднородным потоком на входе

Относительный приоритет

$$\overline{t_{ож\,i}} = \frac{\overline{T_o} + \sum_{k=1}^{i} \rho_k \overline{t_{ож\,k}}}{1 - R_{i-1}}, \quad i = \overline{1,n}. \; (1)$$

$$\overline{t_{ож\,i}} = \frac{\overline{T_o}}{(1 - R_{i-1})(1 - R_i)}, \quad i = \overline{1,n}, \; (2)$$

$$R_i = \sum_{k=1}^{i} \rho_k \quad , \quad R_0 = 0.$$

СМО типа M/G/1 с неоднородным потоком на входе

Относительный приоритет

$$\overline{t_{ож\,i}} = \frac{\overline{T_o} + \sum_{k=1}^{i} \rho_k \overline{t_{ож\,k}}}{1 - R_{i-1}}, \quad i = \overline{1,n}. \ (1)$$

$$\overline{t_{ож\,i}} = \frac{\overline{T_o}}{(1 - R_{i-1})(1 - R_i)}, \quad i = \overline{1,n}, \ (2)$$

Доказательство (2) методом математической индукции

1. Проверить гипотезу для $i = 1$.
2. Выразить $\overline{t_{ож\ i+1}}$ через $\overline{t_{ож\ i}}$ из (1).
3. Выразить $\overline{t_{ож\ k+1}}$ через $\overline{t_{ож\ k}}$ из (2).
4. Убедиться, что обе полученные формулы для $\overline{t_{ож\ i+1}}$ совпадают.

СМО типа M/G/1 с неоднородным потоком на входе

Абсолютный приоритет

$$\overline{t_{ож\ i}} = \overline{T_i^H} + \overline{T_i^n}$$, где

T_i^H – время ожидания начала обслуживания,

T_i^n – время ожидания в прерванном состоянии.

СМО типа M/G/1 с неоднородным потоком на входе

Абсолютный приоритет

Определение $\boxed{\overline{T}_i^{\,n}}$

Для определения $\overline{T}_i^{\,n}$ будем рассуждать следующим образом. За среднее время обслуживания $\overline{x}_i$ заявок i–го типа в систему поступит в среднем $\lambda_k \overline{x}_i$ заявок k–го типа, имеющих более высокий приоритет, чем i,

$$\tau_k^{(1)} = \overline{x}_k \lambda_k \overline{x}_i, \quad k < i \;\Rightarrow$$

$$T_i^{(1)} = \sum_{k=1}^{i-1} \tau_k^{(1)} = \sum_{k=1}^{i-1} \overline{x}_k \lambda_k \overline{x}_i = \overline{x}_i R_{i-1},$$

За это время в систему поступят еще заявки с более высоким приоритетом, чем i в количестве: $\lambda_k T_k^{(1)} = \lambda_k \overline{x}_i R_{i-1}$, которые будут обслужены за время:

$$\tau_k^{(2)} = \overline{x}_k \lambda_k \overline{x}_i R_{i-1} = \rho_k \overline{x}_i R_{i-1}.$$

Общее среднее время обслуживания заявок всех типов с более высоким приоритетом, чем i будет равно:

$$T_i^{(2)} = \sum_{k=1}^{i-1} \tau_k^{(2)} = \sum_{k=1}^{i-1} \rho_k \overline{x}_i R_{i-1} = \overline{x}_i R_{i-1}^2.$$

СМО типа M/G/1 с неоднородным потоком на входе

Абсолютный приоритет

Определение $\boxed{\overline{T}_i^{\,n}}$

За это время в систему поступят еще заявки с более высоким приоритетом, чем i в количестве: $\lambda_k T_k^{(1)} = \lambda_k \bar{x}_i R_{i-1}$, которые будут обслужены за время:

$$\tau_k^{(2)} = \bar{x}_k \lambda_k \bar{x}_i R_{i-1} = \rho_k \bar{x}_i R_{i-1}.$$

Общее среднее время обслуживания заявок всех типов с более высоким приоритетом, чем i будет равно:

$$T_i^{(2)} = \sum_{k=1}^{i-1} \tau_k^{(2)} = \sum_{k=1}^{i-1} \rho_k \bar{x}_i R_{i-1} = \bar{x}_i R_{i-1}^2.$$

$$\boxed{T_i^{(l)} = \bar{x}_i R_{i-1}^l, \quad (l = 1, 2, \ldots).}$$

Общее среднее время ожидания заявок типа будет равно среднему времени обслуживания всех заявок с более высоким приоритетом, которые поступят в систему за время обслуживания рассматриваемой заявки:

$$\overline{T}_i^{\,n} = \sum_{l=1}^{\infty} T_i^{(l)} = \sum_{l=1}^{\infty} \bar{x}_i R_{i-1}^l = \frac{\bar{x}_i R_{i-1}}{1 - R_{i-1}}, \quad (i = 1, \ldots, n), \tag{3.20}$$

СМО типа M/G/1 с неоднородным потоком на входе

Абсолютный приоритет. Определение $\overline{T_i^H}$

Время ожидания начала обслуживания требования i–го класса:

$$T_i^{í} = \sum_{k=1}^{i} T_{ok} + \sum_{k=1}^{i} T'_k + \sum_{k=1}^{i-1} T''_k + \sum_{k=1}^{i} T'''_k \,, \quad \text{где} \qquad (3.21)$$

$\sum_{k=1}^{i} T_{ok}$ – время, необходимое для завершения обслуживания ранее выбранного требования с более высоким или таким же приоритетом i;

$\sum_{k=1}^{i} T'_k$ – время обслуживания требований, которые поступили в систему ранее рассматриваемой заявки и имеют более высокий или такой же приоритет;

$\sum_{k=1}^{i-1} T''_k$ – время обслуживания требований, поступивших в систему за время ожидания начала обслуживания рассматриваемого требования типа i, имеющих более высокий приоритет и, следовательно, принятых на обслуживание ранее рассматриваемого требования.

$\sum_{k=1}^{i} T'''_k$ – время обслуживания всех требований с более высоким или таким же приоритетом, которые на момент поступления рассматриваемого находились в прерванном состоянии.

СМО типа M/G/1 с неоднородным потоком на входе

Абсолютный приоритет

$$\overline{t_{ож\,i}} = \underbrace{\frac{R_{i-1}\overline{x_i}}{1-R_{i-1}}}_{\overline{T_i^n}} + \underbrace{\frac{\sum_{k=1}^{i}\lambda_k \overline{x_k^2}}{2(1-R_i)(1-R_{i-1})}}_{\overline{T_i^H}}, \quad (i=\overline{1,n}).$$

СМО типа M/G/1 с неоднородным потоком на входе

Смешанные приоритеты

$$\overline{t_{ож_k}} = \begin{cases} \dfrac{R_{k-1}\overline{X_k}}{1-R_{k-1}} + \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{k}\lambda_i\overline{X_i^2}}{2(1-R_{k-1})(1-R_k)}, & k=\overline{1,\ n_1}, \\ \dfrac{R_{n_1}\overline{X_k}}{1-R_{n_1}} + \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda\overline{X_i^2}}{2(1-R_{k-1})(1-R_k)}, & k=\overline{n_1+1,\ n_2}, \\ \dfrac{R_{n_1}\overline{X_k}}{1-R_{n_1}} + \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i\overline{X_i^2}}{2(1-R_{n_1+n_2})(1-R)}, & k=\overline{n_2+1,\ n}, \end{cases}$$

СМО типа M/G/1 с неоднородным потоком на входе

Смешанные приоритеты. Универсальный способ задания

Матрица диспетчера $D = [n \times n]$, где n – число потоков заявок на входе в СМО, например:

$$D = \begin{array}{c|ccc|} & 1 & 2 & 3 \\ 1 & F & A & A \\ 2 & \overline{A} & F & R \\ 3 & \overline{A} & \overline{R} & F \end{array} \quad D = \begin{array}{c|ccc|} & 1 & 2 & 3 \\ 1 & F & F & F \\ 2 & F & F & F \\ 3 & F & F & F \end{array} \quad D = \begin{array}{c|ccc|} & 1 & 2 & 3 \\ 1 & F & A & A \\ 2 & \overline{A} & F & \overline{A} \\ 3 & \overline{A} & A & F \end{array}$$

Здесь

A означает абсолютный приоритет,

R – относительный приоритет,

F – бесприоритетное обслуживание,

СМО типа M/G/1 с неоднородным потоком на входе

Смешанные приоритеты. Универсальный способ задания

$$D = \begin{array}{c|ccc|} & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & F & A & A \\ 2 & \overline{A} & F & R \\ 3 & \overline{A} & \overline{R} & F \\ \hline \end{array}$$

$$\overline{t_{ож\,k}} = \overline{X_k}\left[\sum_{(\overline{A})}\lambda_i\overline{X_i}\right]\left[1-\sum_{(\overline{A})}\lambda_i\overline{X_i}\right]^{-1} +$$

$$+ \left[\left(\frac{1}{2}\right)\sum_{(F,\overline{A},R,\overline{R})}\lambda_i\overline{X_i^2}\right]\left[1-\sum_{(F,\overline{R},\overline{A})}\lambda_i\overline{X_i}\right]^{-1}\left[1-\sum_{(\overline{R},\overline{A})}\lambda_i\overline{X_i}\right]^{-1}$$

СМО типа M/G/1 с неоднородным потоком на входе

Смешанные приоритеты. Универсальный способ задания

$$D = \begin{array}{c|ccc} & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & F & A & A \\ 2 & \bar{A} & F & R \\ 3 & \bar{A} & \bar{R} & F \end{array}$$

$$\overline{t_{ож\,k}} = \overline{X_k}\left[\sum_{(\bar{A})} \lambda_i \overline{X_i}\right]\left[1 - \sum_{(\bar{A})} \lambda_i \overline{X_i}\right]^{-1} + $$

$$+ \left[\left(\frac{1}{2}\right) \sum_{(F,\bar{A},R,\bar{R})} \lambda_i \overline{X_i^2}\right]\left[1 - \sum_{(F,\bar{R},\bar{A})} \lambda_i \overline{X_i}\right]^{-1}\left[1 - \sum_{(\bar{R},\bar{A})} \lambda_i \overline{X_i}\right]^{-1}$$

$$\overline{t_{ож\,1}} = \left[\left(\frac{1}{2}\right)\lambda_1 \overline{X_1^2}\right]\left[1 - \lambda_1 \overline{X_1}\right]^{-1}$$

$$\overline{t_{ож\,2}} = \overline{X_2}\left[\lambda_1 \overline{X_1}\right]\left[1 - \lambda_1 \overline{X_1}\right]^{-1} +$$

$$+ \left[\left(\frac{1}{2}\right)\left(\lambda_1 \overline{X_1^2} + \lambda_2 \overline{X_2^2} + \lambda_3 \overline{X_3^2}\right)\right]\left[1 - \left(\lambda_2 \overline{X_2} + \lambda_1 \overline{X_1}\right)\right]^{-1}\left[1 - \lambda_1 \overline{X_1}\right]^{-1}$$

СМО типа M/G/1 с неоднородным потоком на входе

Смешанные приоритеты. Универсальный способ задания

$$D = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \left[\begin{array}{ccc} F & A & A \\ \overline{A} & F & R \\ \overline{A} & \overline{R} & F \end{array}\right] \end{array}$$

$$\overline{t_{ож\,k}} = \overline{X_k}\left[\sum_{(\overline{A})} \lambda_i \overline{X_i}\right]\left[1 - \sum_{(A)} \lambda_i \overline{X_i}\right]^{-1} +$$

$$+ \left[\left(\frac{1}{2}\right)_{(F,\overline{A},R,\overline{R})} \sum \lambda_i \overline{X_i^2}\right]\left[1 - \sum_{(F,\overline{R},\overline{A})} \lambda_i \overline{X_i}\right]^{-1}\left[1 - \sum_{(\overline{R},\overline{A})} \lambda_i \overline{X_i}\right]^{-1}$$

$$\overline{t_{ож\,1}} = \left[\left(\frac{1}{2}\right)\lambda_1 \overline{X_1^2}\right]\left[1 - \lambda_1 \overline{X_1}\right]^{-1}$$

$$\overline{t_{ож\,2}} = \overline{X_2}\left[\lambda_1 \overline{X_1}\right]\left[1 - \lambda_1 \overline{X_1}\right]^{-1} +$$

$$+ \left[\left(\frac{1}{2}\right)\left(\lambda_1 \overline{X_1^2} + \lambda_2 \overline{X_2^2} + \lambda_3 \overline{X_3^2}\right)\right]\left[1 - \left(\lambda_2 \overline{X_2} + \lambda_1 \overline{X_1}\right)\right]^{-1}\left[1 - \lambda_1 \overline{X_1}\right]^{-1}$$

Немарковские СМО

Методы анализа немарковских СМО

1. Метод этапов Эрланга.
2. Введение избыточной переменной.
3. Метод вложенных цепей Маркова.
4. Использование полумарковских процессов.
5. Интегральный подход.

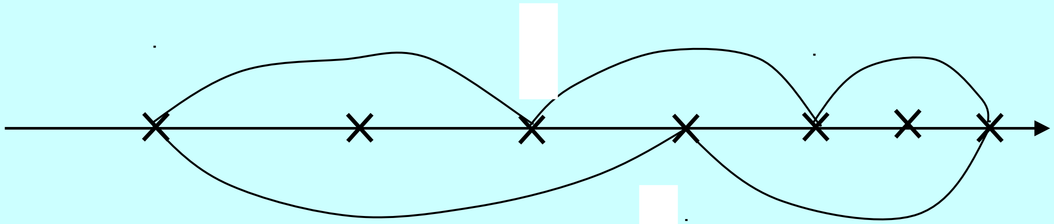
Немарковские СМО

Метод этапов

Распределение Эрланга (Гамма-распределение с целочисленным параметром α = k)

Изменение кодировки состояния системы:

Было: j — число заявок, стало: j — число этапов



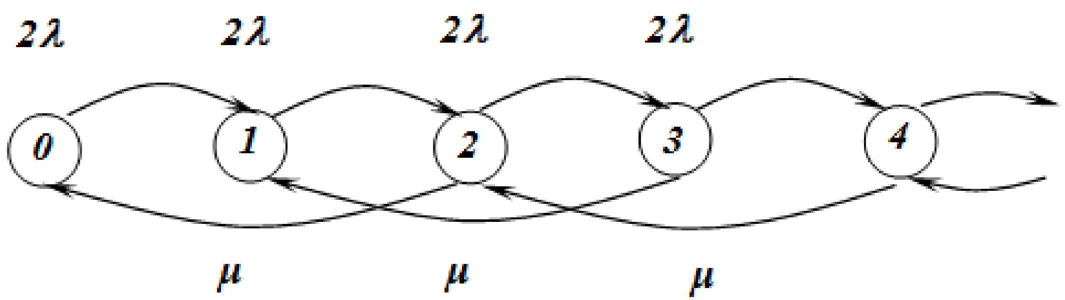
$$f_k(x) = \frac{k\mu(k\mu x)^{k-1} e^{-k\mu x}}{(k-1)!}$$

μ — интенсивность потока Эрланга k -го порядка

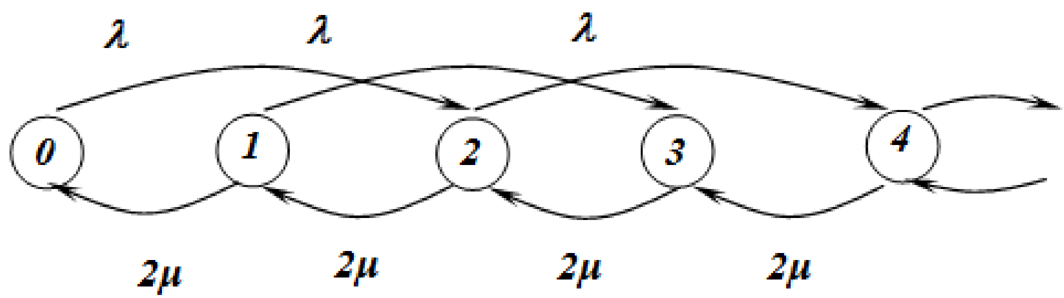
Немарковские СМО

Метод этапов

а) Система типа $E_2/M/1$:



а) Система типа $M / E_2/1$:

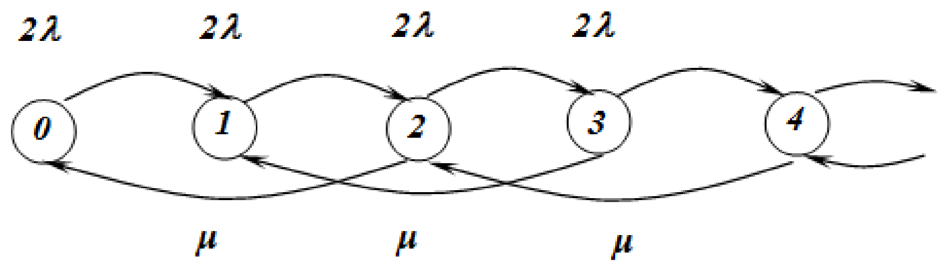


j — число этапов, j = удвоенное число заявок в системе

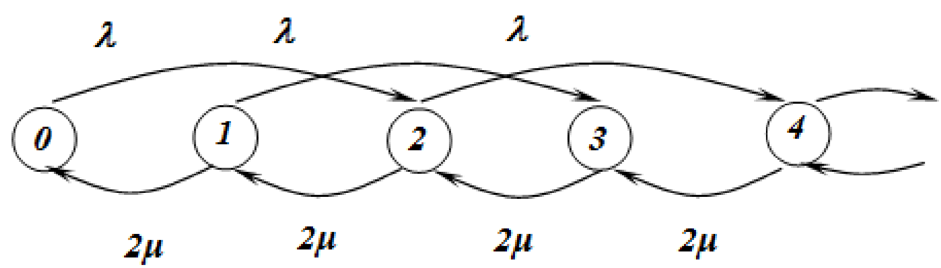
Немарковские СМО

Метод этапов

а) Система типа **$E_2/M/1$**:



а) Система типа **$M / E_2/1$**:



Представленные графы являются Марковскими, следовательно, для них справедливы системы уравнений Чепмена-Колмогорова для анализа установившегося и переходного режимов.

Немарковские СМО

Метод введения избыточной переменной

Для системы M/G/1 переход из состояния в состояние при скалярной интерпретации состояния ($j = N(t)$) не является марковским.

В этом случае приходится расширить размерность состояния процесса за счет введения в него дополнительной переменной X — времени, прошедшего в системе от начала обслуживания текущей заявки до рассматриваемого момента t. Состоянием процесса становится вектор (j, X).

Немарковские СМО

Метод введения избыточной переменной

Для системы M/G/1 переход из состояния в состояние при скалярной интерпретации состояния ($j = N(t)$) не является марковским.

В этом случае приходится расширить размерность состояния процесса за счет введения в него дополнительной переменной X — времени, прошедшего в системе от начала обслуживания текущей заявки до рассматриваемого момента t. Состоянием процесса становится вектор (j, X).

Немарковские СМО

Вложенные марковские цепи

$$(j, X)$$

Упрощение – возврат к скалярному состоянию $j = N(t)$ – возможен в том случае, если состояние системы фиксируется в определенные моменты времени. Для этих моментов должны сохраняться марковские свойства. В этом случае имеет место **вложенная марковская цепь**.

Для системы M/G/1 такой последовательностью являются последовательность моментов ухода требований из обслуживающего прибора, при этом состояние процесса определяется числом требований, остающихся в эти моменты в системе.

Немарковские СМО

Вложенные марковские цепи (j, X)

Упрощение – возврат к скалярному состоянию $j = N(t)$ – возможен в том случае, если состояние системы фиксируется в определенные моменты времени. Для этих моментов должны сохраняться марковские свойства. В этом случае имеет место **вложенная марковская цепь.**

Для системы M/G/1 такой последовательностью являются последовательность моментов ухода требований из обслуживающего прибора, при этом состояние процесса определяется числом требований, остающихся в эти моменты в системе.

Состояние процесса от момента ухода до момента ухода изменяется только за счет требований, поступающих из пуассоновского потока, не обладающего последействием. Следовательно, соответствующая цепочка переходов будет обладать марковскими свойствами. Аналогичное рассмотрение можно провести и для системы типа G / M /1.

Немарковские СМО

Формула Поллячека-Хинчина для среднего для систем M/G/1

$$\bar{j} = \rho + \rho^2 \frac{\left(1 + \dfrac{\sigma_x^{\,2}}{(\bar{x})^2}\right)}{2(1-\rho)},$$

– для системы M/M/1:

$$\sigma_x = \frac{1}{\mu^2}, \quad \bar{x} = \frac{1}{\mu}, \quad \bar{j} = \frac{\rho}{1-\rho};$$

– для системы M/D/1: $\sigma_x^{\,2} = 0, \quad \bar{x} = \dfrac{1}{\mu},$

$$\bar{j} = \rho + \frac{\rho^2}{2(1-\rho)} = \frac{\rho}{1-\rho} - \frac{\rho^2}{2(1-\rho)};$$

Немарковские СМО

Формула Полячека-Хинчина для среднего для систем M/G/1

$$\bar{j} = \rho + \rho^2 \frac{\left(1 + \frac{\sigma_x^{\,2}}{(\bar{x})^2}\right)}{2(1-\rho)},$$

$$\bar{j} = \overline{n_{обсл}} + \overline{n_0}\,, \quad \overline{n_{обсл}} = \rho\,, \quad \overline{n_0} = \rho^2 \frac{\left(1 + \frac{\sigma_x^{\,2}}{(\bar{x})^2}\right)}{2(1-\rho)}$$

для системы M/M/1: $\overline{n_0} = \rho^2 \frac{\left(1 + \frac{\sigma_x^{\,2}}{(\bar{x})^2}\right)}{2(1-\rho)} = \rho^2 \frac{2}{2(1-\rho)} = \frac{\rho^2}{1-\rho}$

для системы M/D/1: $\overline{n_0} = \rho^2 \frac{\left(1 + \frac{\sigma_x^{\,2}}{(\bar{x})^2}\right)}{2(1-\rho)} = \rho^2 \frac{1}{2(1-\rho)} = \frac{\rho^2}{2(1-\rho)}$

Показательный закон не слишком хорош!

Немарковские СМО

Формула Поллячека-Хинчина для среднего для систем M/G/1

$$\bar{j} = \rho + \rho^2 \frac{\left(1 + \frac{\sigma_x{}^2}{(\bar{x})^2}\right)}{2(1-\rho)},$$

$$\lim_{k\to\infty} M/E_k/1 = \lim_{k\to\infty}\left(\bar{j} = \rho + \frac{\rho^2\left(1+\frac{1}{k}\right)}{2(1-\rho)}\right) = \frac{\rho^2}{2(1-\rho)} = \mathrm{M/D/1}$$

Немарковские СМО

Полумарковские процессы

Полумарковский процесс полностью определяется заданием:

- множества состояний и начального состояния;
- вектора закона распределения длительностей пребывания ПМП в каждом состоянии – $F_i(t),\ i=\overline{1,n}$
- матрицей вероятностей непосредственных переходов в моменты, соответствующие окончанию пребывания ПМП в своих состояниях, $P=\{P_{ij}\},\ i,j=\overline{1,n}$

Немарковские СМО

Полумарковские процессы

$\pi_j \ (j=\overline{1,n})$ — вероятность пребывания ПМП в состоянии j в стационарном режиме, только с учетом переходов. Вероятности π_j (по переходу) связаны следующими соотношениями:

$$\pi_j = \sum_i \pi_i P_{ij}, \quad i=\overline{1,n}, \qquad (3.34)$$

Немарковские СМО

Полумарковские процессы

Рассмотрим достаточно длинную реализацию ПМП, содержащую большое число L различных переходов.

T_c – длина этой реализации, а

T_{cj} – длительность пребывания ПМП в состоянии j.

$$M[T_c] = L\sum_i \pi_i M[T_i],$$

$$M[T_{cj}] = L\pi_j M[T_j],$$

где $M[T_j]$ – среднее значение длительности пребывания процесса в j–м состоянии. Тогда

Немарковские СМО

Полумарковские процессы

$P_j \quad (j=\overline{1,n})$ — вероятность пребывания ПМП в состоянии j в стационарном режиме по времени

$$P_j = \lim_{L\to\infty} \frac{M[T_{cj}]}{M[T_c]} = \frac{\pi_j M[T_j]}{\sum\limits_i \pi_i M[T_i]}, \quad \text{откуда:}$$

$$\pi_j = \frac{P_j}{M[T_j]} \sum_i \pi_i M[T_i]. \qquad (3.35)$$

Подставляя выражение (3.35) в систему уравнений (3.34), получим:

$$\pi_j = \sum_i \pi_i P_{ij}, \quad i=\overline{1,n}, \qquad (3.34)$$

$$\frac{P_j}{M[T_j]} = \sum_i \frac{P_i}{M[T_i]} P_{ij}, \quad (j=(\overline{1,n}). \qquad (3.36)$$

Немарковские СМО

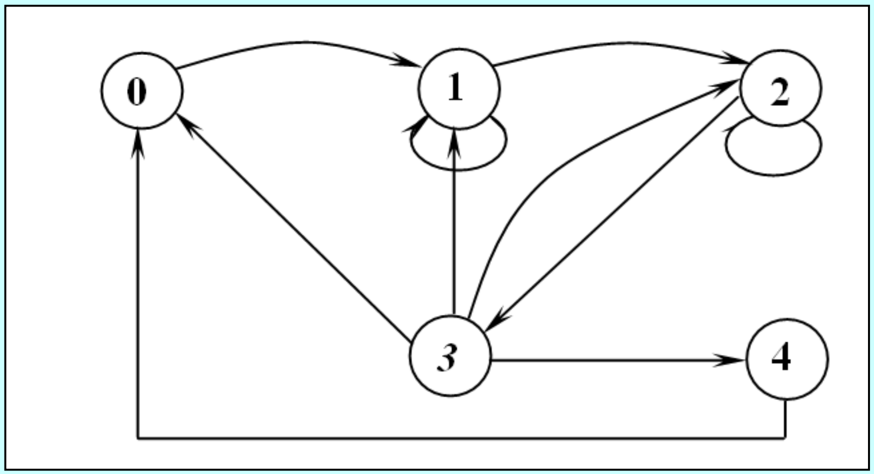
Полумарковские процессы

С учетом $\sum_{j=1}^{n} P_j = 1$ и обозначив $\dfrac{P_j}{M[T_j]} = U_j$, получим:

$$\begin{cases} U_j = \sum_i U_i P_{ij}, \\ \sum_j U_j M[T_j] = 1. \end{cases} \qquad j = (\overline{1,n})$$

Немарковские СМО

Полумарковские процессы. Пример



$$P = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0\\ 1\\ 2\\ 3\\ 4 \end{array} & \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & P_{11} & \mathbf{1} - P_{11} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & P_{22} & \mathbf{1} - P_{22} & \mathbf{0} \\ P_{30} & P_{31} & P_{32} & \mathbf{0} & P_{34} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \end{array},$$

Заданы значения: $M[T_i], (i = \overline{0, 4})$

Найти вероятности состояний

Немарковские СМО

Полумарковские процессы. Пример

$$
P = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\
\begin{pmatrix}
\mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} & P_{11} & 1 - P_{11} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & P_{22} & 1 - P_{22} & \mathbf{0} \\
P_{30} & P_{31} & P_{32} & \mathbf{0} & P_{34} \\
\mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0}
\end{pmatrix}
\end{array},
$$

Заданы значения: $M[T_i],\ (i = \overline{0,4})$.

Найти вероятности состояний

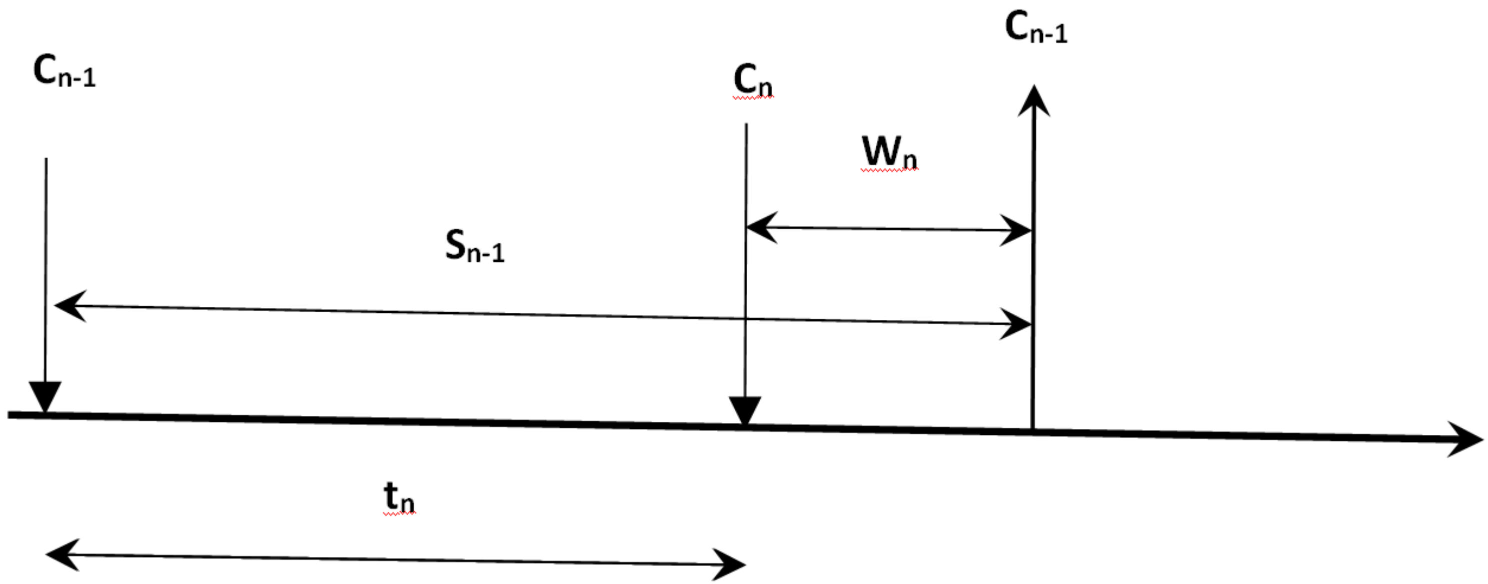
$$
\begin{cases}
u_0 = P_{30}\, u_3 + u_4\,; \\
u_1 = u_0 + P_{11}\, u_1 + P_{31}\, u_3\,; \\
u_2 = (1 - P_{11})u_1 + P_{22}\, u_2 + P_{32}\, u_3\,; \\
u_3 = (1 - P_{22})u_2\,; \\
u_4 = P_{34}\, u_3\,;
\end{cases}
$$

$$
\sum_{i=0}^{4} u_i\, M[T_i] = 1.
$$

Разрешение полученной системы уравнений позволяет найти все интересующие нас вероятности P_j.

Немарковские СМО

Интегральный метод



$$W_n = S_{n-1} - t_n, \text{ если } S_{n-1} > t_n$$

$$W_n = \max\left[0,\ S_{n-1} - t_n\right]$$

Немарковские СМО

Интегральный метод

$$S_n = \max[0, S_{n-1} - t_n] + x_n . \qquad (10.9)$$

Введем функции распределения случайной величины времени ожидания в очереди и пребывания в системе:

$$W_n(x) = P[W_n < x]; \quad S_n(x) = P[S_n \le x]. \qquad (10.3)$$

Тогда из (10.9) и формулы полной вероятности на основании независимости величин t_n и S_n получим:

$$W_n(x) = P\{W_n = \max[0, S_{n-1} - t_n] \le x\} =$$

$$= \sum_{\Delta\xi} P\{t_n \in (\xi + \Delta\xi)\} P\{S_{n-1} < x + \xi\} \Big|_{\xi = \overline{0,\infty}} = \int_0^\infty S_n(x+\xi)\, dA(\xi) \quad (10.11)$$

где $A(x)$ — функция распределения длительности интервала в потоке.

Немарковские СМО

Интегральный метод

$$S_n(x) = P\{S_n(x) = W_n(x) + x_n < x\} = \int_0^x W_n(x-\xi)\,dB(\xi), \qquad (10.12)$$

где $B(x)$ — функция распределения длительности обслуживания.

Переходя к пределу при $n \to \infty$ в выражениях (10.11) и (10.12), получим, что в установившемся режиме функции $W(x)$ и $S(x)$ связаны системой двух интегральных уравнений Винера-Хопфа:

$$W(x) = \int_0^\infty S(x+\xi)\,dA(\xi), \qquad S(x) = \int_0^x W(x-\xi)\,dB(\xi), \qquad (10.13)$$

Немарковские СМО

Интегральный метод

$$W_n(x) = P[W_n < x]; \quad S_n(x) = P[S_n \le x]. \tag{3.38}$$

Установлено, что функции $W(x)$ и $S(x)$ связаны системой двух интегральных уравнений Винера-Хопфа:

$$\begin{cases} W(x) = \int\limits_0^{\infty} S(x+\xi)\, dA(\xi), \\ S(x) = \int\limits_0^{x} W(x-\xi)\, dB(\xi) \end{cases} \tag{3.39}$$

разрешение которых позволяет получить $W(x)$ и $S(x)$ для заданных законов $A(x)$ и $B(x)$. Так, например, для системы типа **M/M/1** и законов

$$A(t) = 1 - e^{-\lambda t} \quad \text{и} \quad B(t) = 1 - e^{-\mu t}$$

получим:

$$W(t) = 1 - \rho e^{-\mu(1-\rho)t}, \quad t \ge 0;$$

$$S(t) = 1 - e^{-\mu(1-\rho)t}, \quad t \ge 0.$$