Неоднородные сети массового обслуживания

Неоднородные ССМО

$$S = \begin{Bmatrix} \vec{n}_1 \\ \vec{n}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \vec{n}_M \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} n_{11}, n_{12}, \ldots, n_{1V} \\ n_{21}, n_{22}, \ldots, n_{2V} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ n_{M1}, n_{M2}, \ldots, n_{MV} \end{Bmatrix}$$

Неоднородные ССМО

$$\vec{n}_i = \left(n_{i1}, n_{i2}, \ldots, n_{iV} \right)$$

M — число узлов сети,
V — число классов заявок

Неоднородные ССМО

4 допустимых типа узла неоднородной ССМО

Узел типа 1

Дисциплина обслуживания FIFO Длительность обслуживания заявок всех классов в *i*-м узле имеет одно и то же экспоненциальное распределение с интенсивностью $\mu_i(n_i)$, зависящей от числа заявок в узле.

Узел типа 2.

Дисциплина обслуживания PS. Длительность обслуживания распределена по закону Кокса. Дисциплина Processor Sharing [31] предполагает предоставление бесконечно малого кванта времени обслуживания каждой заявке. Не успевшие обслужиться заявки становятся на дообслуживание в хвост очереди.

Неоднородные ССМО

4 допустимых типа узла неоднородной ССМО

Узел типа 3

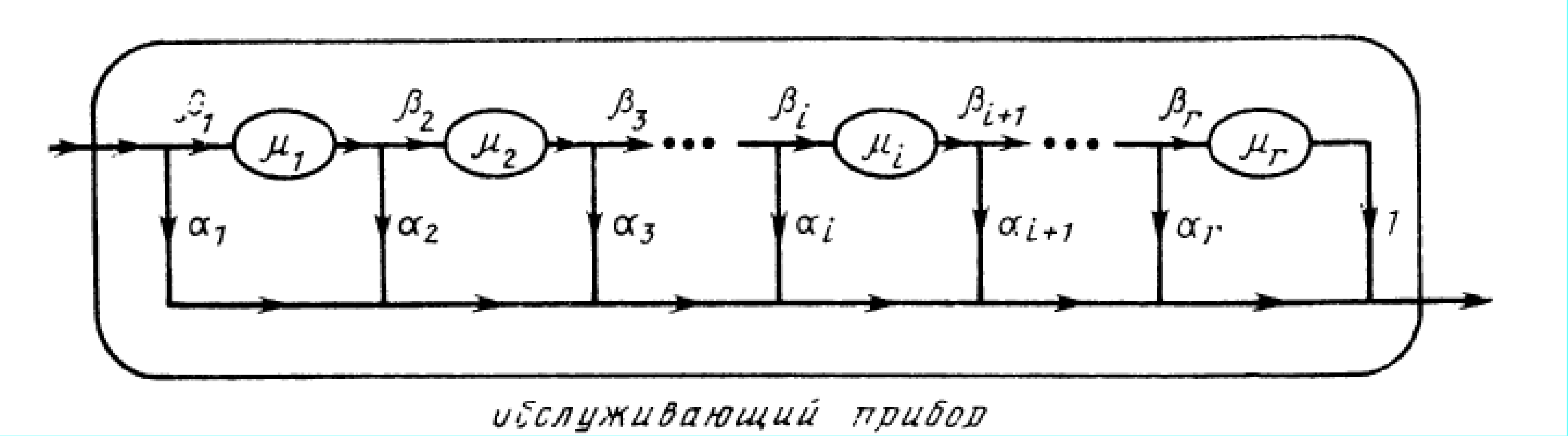
Многоканальный узел с бесконечным числом каналов и дисциплиной IS (без ожидания). Длительность обслуживания задается так же, как и для узла типа 2.

Узел типа 4.

Одноканальный узел с дисциплиной обслуживания LIFO (в порядке, обратном поступлению) и с прерыванием обслуживания. Длительность обслуживания задается так же, как и для узла типа 2.

Неоднородные ССМО

Распределение Кокса



$$B^*(s) = \sum_{i=1}^{R} \alpha_i \prod_{j=1}^{r_i} \left(\frac{\mu_{ij}}{s+\mu_{ij}} \right).$$

Неоднородные ССМО

4 допустимых типа узла неоднородной ССМО

Основная часть представленных ниже аналитических решений для разомкнутых и замкнутых ССМО справедлива в том случае, если узлы сети принадлежат одному из четырех типов

Неоднородные ССМО

Разомкнутые неоднородные ССМО

Класс разомкнутых неоднородных сетей СМО: заявки меняют класс при переходе из узла в узел.

Матрица передач

$$\pi = \left\{ p_{ik,\,jv} \right\} \quad i,j = \overline{0,M}; \; k,v = \overline{1,V}$$

Неоднородные ССМО

Разомкнутые неоднородные ССМО

Класс разомкнутых неоднородных сетей СМО: заявки меняют класс при переходе из узла в узел.

Матрица передач

$$\pi = \left\{ p_{ik,\,jv} \right\} \quad i, j = \overline{0, M}; \; k, v = \overline{1, V}$$

λ_0 -- **интенсивность внешнего источника заявок**

Разомкнутые неоднородные ССМО

$$\lambda_{jv} = \sum_{i=0}^{M} \sum_{k=1}^{V} \lambda_{ik} p_{ik,jv}, \qquad i = \overline{0, M}, \quad j = \overline{1, M},$$

$$k, v = \overline{1, V}$$

$$if \quad i = 0, \ then \ k = 0,$$

$$if \quad j = 0, \ then \ v = 0,$$

Неоднородные ССМО

Разомкнутые неоднородные ССМО

Условие наличия установившегося режима

$$R_j = \sum_{v=1}^{V} \frac{\lambda_{jv}}{\mu_{jv}} < 1, \quad j = \overline{1, M}$$

Разомкнутые неоднородные СCМО

Заявки не меняют класса

$$\pi^{(v)} = \left\{ p_{iv,\, jv} \right\} = \left\{ p_{ij}^{(v)} \right\}$$

$$i, j = \overline{0, M}\ ; \quad v = \overline{1, V}$$

Неоднородные ССМО

Разомкнутые неоднородные ССМО

Заявки не меняют класса

$$\lambda_{jv} = \sum_{i=0}^{M} \lambda_{iv} p_{ij}^{(v)}, \quad j = \overline{1, M}, \; v = \overline{1, V}$$

Условие наличия установившегося режима

$$R_j = \sum_{v=1}^{V} \frac{\alpha_{jv} \lambda_{0v}}{\mu_{jv}} < 1, \quad j = \overline{1, M}$$

$$\lambda_{jv} = \alpha_{jv} \lambda_{0r}, \quad j = \overline{1, M}; \; v = \overline{1, V}$$

Неоднородные ССМО

Разомкнутые неоднородные ССМО

Распределение числа заявок в сети СМО без разделения на классы

$$S = (n_1, n_2, \ldots, n_M)$$

$$P(S) = P_1(n_1)P_2(n_2)\ldots P_M(n_M)$$

$$P_i(n_i) = \begin{cases} (1 - R_i)R_i^{n_i} & \text{- для узлов типов 1, 2, 4} \\ \dfrac{R_i^{n_i} e^{-R_i}}{n_i!} & \text{- для узлов типа 3} \end{cases}$$

Неоднородные ССМО

Замкнутые неоднородные ССМО

$$\left(M, \vec{N}, \left\{ \pi^{(v)} \right\}, \left\{ \mu_{iv} \right\}, \vec{m}, D \right)$$

M - *число узлов*

$$\vec{N} = (N_1, N_2, \ldots, N_v, \ldots, N_V)$$

$$\left\{ \pi^{(v)} \right\}, \quad v = \overline{1,V}, \text{ где } \pi^{(v)} = \left\{ p_{ij}^{(v)} \right\}, \quad i, j = \overline{1,M}$$

$\vec{m} = \{ m_1, \ldots m_M \}$ $\quad$ D - *матрица - диспетчер*

Неоднородные ССМО

Замкнутые неоднородные ССМО

Мощность множества состояний ССМО

$$|S| = \prod_{v=1}^{V} C_{N_v + M - 1}^{N_v}$$

Неоднородные ССМО

Замкнутые неоднородные ССМО

$$\omega_{jv} = \sum_{i=1}^{M} \omega_{iv} p_{jv}^{(v)} \qquad i, j = \overline{1, M}\ ;\ v = \overline{1, V}$$

$$\vec{n}_i = \{ n_{iv} \}_{v=\overline{1,V}}$$ - *состояние узла*

$$\{ n_{iv} \}_{i=\overline{1,M};\ v=\overline{1,V}}$$ - *состояние сети*

$$\sum_{i=1}^{M} n_{iv} = N_v,\ v = \overline{1,V}$$ -

число заявок в классе пнеизменно

Неоднородные ССМО

Замкнутые неоднородные ССМО

Теорема Джексона

$$P\left(\left\{ n_{iv}\right\}\right)=\frac{1}{G}\prod_{i=1}^{M} Z_i\left(n_{i1},n_{i2},\ldots,n_{iV}\right)=$$

$$=\frac{1}{G}\prod_{i=1}^{M} Z_i\left(\vec{n}_i\right)$$

Неоднородные ССМО

Замкнутые неоднородные ССМО

для многоканальных узлов типа 1

$$Z_i\left(\vec{n}_i\right) = \frac{n_i!}{\prod\limits_{k=1}^{n_i} \mu_i(k)} \prod_{v=1}^{V} \frac{\omega_{iv}^{n_{iv}}}{n_{iv}!} \text{ -}$$

Неоднородные ССМО

Замкнутые неоднородные ССМО

для одноканальных узлов типа 1, 2, 4

$$Z_i\left(\vec{n}_i\right) = n_i!\prod_{v=1}^{V}\frac{\left(\dfrac{\omega_{iv}}{\mu_{iv}}\right)^{n_{iv}}}{n_{iv}!}$$

Неоднородные ССМО

Замкнутые неоднородные ССМО

для узлов типа 3

$$Z_i\left(\vec{n}_i\right) = \prod_{v=1}^{V} \frac{1}{n_{iv}!}\left(\frac{\omega_{iv}}{\mu_{iv}}\right)^{n_{iv}}$$

Замкнутые неоднородные ССМО

для узлов типа 3

$$Z_i\left(\vec{n}_i\right) = \prod_{v=1}^{V} \frac{1}{n_{iv}!} \left(\frac{\omega_{iv}}{\mu_{iv}}\right)^{n_{iv}}$$

$$n_i = \sum_{v=1}^{V} n_{iv},\ i = \overline{1,M}$$

Неоднородные ССМО

Замкнутые неоднородные ССМО

G - нормирующая константа

$$Z_i(0,0,\ldots,0)\equiv 1$$

Эффективность точного анализа ССМО зависит от эффективности алгоритма вычисления нормирующей константы

Неоднородные ССМО

Расчет нормирующей константы G

Z_i - *множество значений* $Z_i(n_{i1}, n_{i2}, \ldots, n_{iV})$

$$|Z_i| = \prod_{v=1}^{V} (N_v + 1)$$

свертка множеств A *и* $B \Rightarrow \quad C = A \ast B$

$$c(n_1, \ldots, n_V) = \sum_{m_V = 0}^{m_V = n_V} \cdots \sum_{m_1 = 0}^{m_1 = n_1} a(m_1, \ldots, m_V) \times$$

$$\times\, b(n_1 - m_1, \ldots, n_V - m_V).$$

Неоднородные ССМО

Расчет нормирующей константы G

$$M \text{ множеств } \quad G_i, \, i = \overline{1, M}$$

$$G_i = G_0 * Z_1 * Z_2 * \ldots * Z_i$$

$$\text{или} \quad G_i = G_{i-1} * Z_i$$

$$G = G_M \left[N_1, N_2, \ldots, N_V \right]$$

$$G_0(0, 0, \ldots, 0) = 1$$

Порядок включения множеств в свертку может быть произвольным

Неоднородные ССМО

Расчет характеристик замкнутых неоднородных ССМО

$$P_M(n_1,\dots,n_V) = Z_M(n_1,\dots,n_V)\frac{G_{M-1}(N_1-n_1,\dots,N_V-n_\nu)}{G}$$

$$\lambda_{M\nu} = \omega_{M\nu}\frac{G_M(N_1,N_2,\dots,N_{\nu-1},N_\nu-1,N_{\nu+1},\dots,N_V)}{G}$$

$$\overline{n}_{M\nu} = \frac{1}{G}\sum_{n_\nu=0}^{N_\nu}\cdots\sum_{n_1=0}^{N_1} n_\nu Z_M(n_1,\dots,n_V)\,G_{M-1}(N_1-n_1,\dots,N_V-n_\nu)$$