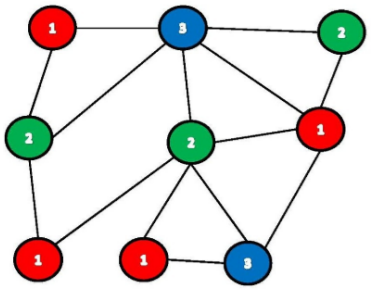
ΤΕΧΝΙΚΗ ΑΝΑΦΟΡΑ

ΣΚΟΥΡΤΗΣ ΔΗΜΗΤΡΗΣ ΑΜ:00100

Περιεχόμενα

1 ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Το πρόβλημα του χρωματισμού γραφήματος είναι ένα NP-hard πρόβλημα συνδυαστικής βελτιστοποίησης. Αφορά την ανάθεση ενός χρώματος σε κάθε κορυφή ενός γραφήματος έτσι ώστε γειτονικές κορυφές να χρωματίζονται με διαφορετικό χρώμα (όπως στο ακόλουθο σχήμα), ενώ παράλληλα χρησιμοποιείται ο ελάχιστος αριθμός διαφορετικών χρωμάτων.



Η κατάρτιση προγράμματος εξετάσεων σε Πανεπιστήμια είναι ένα πρόβλημα το οποίο έχει μελετηθεί κατά κόρον λόγω της πρακτικής του σημασίας. Ανήκει στην γενικότερη κατηγορία των προβλημάτων χρονοπρογραμματισμού (timetabling) η οποία περιέχει και άλλα προβλήματα χρονοπρογραμματισμού από τον εκπαιδευτικό χώρο (π.χ. κατάρτιση προγράμματος μαθημάτων για Πανεπιστήμια, κατάρτιση ωρολογίου προγράμματος για Γυμνάσια-Λύκεια), τον χρονοπρογραμματισμό νοσοκόμων, αθλητικών γεγονότων, μεταφορών κ.α. Τα προβλήματα χρονοπρογραμματισμού γενικά ανήκουν στην κατηγορία προβλημάτων NP-complete και συνεπώς ντετερμινιστικοί αλγόριθμοι, οι οποίοι μπορούν να εγγυηθούν την εύρεση της βέλτιστης λύσης, μπορούν να εφαρμοστούν μόνο σε απλοποιημένα και μικρού μεγέθους στιγμιότυπα προβλήματος. Μια συνηθισμένη πρακτική είναι το πρόβλημα χρονοπρογραμματισμού που πρέπει να επιλυθεί να εξετάζεται για εντοπισμό ιδιαίτερων χαρακτηριστικών τα οποία μπορούν να αξιοποιηθούν προκειμένου να εφαρμοστεί μια ευρετική μέθοδος κατάλληλη να παράγει ικανοποιητικά αποτελέσματα. Συχνά συνδυασμοί μεθόδων που προέρχονται από τον χώρο της Επιχειρησιακής Έρευνας και από τον χώρο της Τεχνητής Νοημοσύνης παράγουν τα βέλτιστα αποτελέσματα.

Στην εργασία αυτή παρουσιάζεται μια επίλυση του προβλήματος χρονοπρογραμματισμού εξετάσεων σε 13 πραγματικά προβλήματα από διάφορα πανεπιστήμια και σχολεία μέσω της χρήσης αλγορίθμων χρωματισμού γράφων

2 ΕΙΣΑΓΩΓΗ (ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ NP-COMPLETE)

Η έννοια της πληρότητας NP παρουσιάστηκε το 1971 (θεώρημα Cook–Levin), αν και ο όρος NP-complete εισήχθη αργότερα. Στο συνέδριο του STOC του 1971 , υπήρξε μια έντονη συζήτηση μεταξύ των επιστημόνων των υπολογιστών σχετικά με το εάν τα ΝΠ-πλήρη προβλήματα θα μπορούσαν να λυθούν σε πολυωνυμικό χρόνο σε μια ντετερμινιστική μηχανή Turing. Ο John Hopcroft έθεσε σε όλους το ερώτημα κατά πόσον τα προβλήματα NP-complete είναι επιλύσιμα σε πολυώνυμο χρόνο και αφού δεν βρέθηκε απάντηση διατυπώθηκε πως πρέπει να αναβληθεί για να λυθεί σε κάποια μεταγενέστερη ημερομηνία, καθώς κανείς δεν είχε επίσημες αποδείξεις για τους ισχυρισμούς του με τον ένα ή τον άλλο τρόπο. Αυτό είναι γνωστό ως το ερώτημα εάν Π = ΝΠ..

Κανείς δεν μπόρεσε ακόμη να καθορίσει με ακρίβεια εάν τα προβλήματα με πλήρη ΝΠ μπορούν να επιλυθούν στην πολυωνυμική εποχή, καθιστώντας αυτό ένα από τα μεγάλα άλυτα προβλήματα των μαθηματικών. Πηγή: wikipidia

Τα NP πλήρη προβλήματα είναι δύσκολα προβλήματα για τα οποία ξέρουμε μόνο εκθετικούς αλγόριθμους. Ίσως υπάρχουν λύσεις αλλά ακόμη δεν έχουν βρεθεί.

Ένα τέτοιο πρόβλημα είναι και ο Χρωματισμός γραφημάτων.

3 ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΧΡΩΜΑΤΙΣΜΟΥ ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ

Στη θεωρία γραφημάτων, ο χρωματισμός γραφήματος είναι μια ειδική περίπτωση της επισήμανσης γράφημα. Είναι μια εκχώρηση ετικετών που παραδοσιακά ονομάζονται ¨χρώματα' σε στοιχεία ενός γραφήματος που υπόκεινται σε ορισμένους περιορισμούς. Στην απλούστερη μορφή του, είναι ένας τρόπος χρωματισμού των κορυφών ενός γραφήματος έτσι ώστε καμία γειτονική κορυφή να έχει το ίδιο χρώμα. Αυτό ονομάζεται χρωματισμός κορυφής. Παρομοίως, ένας χρωματισμός άκρου αποδίδει ένα χρώμα σε κάθε άκρη, έτσι ώστε να μην υπάρχουν δύο γειτονικές άκρες του ίδιου χρώματος, και ένας χρωματισμός προσώπου ενός επίπεδου γραφήματος να εκχωρεί ένα χρώμα σε κάθε πρόσωπο ή περιοχή με αποτέλεσμα δύο πρόσωπα που μοιράζονται ένα όριο να έχουν το ίδιο χρώμα.

Ο χρωματισμός έρτεξ χρησιμοποιείται συνήθως για την εισαγωγή προβλημάτων χρωματισμού γραφημάτων, καθώς άλλα προβλήματα χρωματισμού μπορούν να μετατραπούν σε παρουσία χρωματισμού κορυφής. Για παράδειγμα, ένας χρωματισμός άκρου ενός γραφήματος είναι απλώς ένας χρωματισμός κορυφής του γραφήματος γραμμής του και ένας χρωματισμός προσώπου ενός επιπέδου γραφήματος είναι απλώς ένας χρωματισμός κορυφής του διπλού του.

Η σύμβαση χρήσης χρωμάτων προέρχεται από το χρωματισμό των χωρών ενός χάρτη, όπου κάθε πρόσωπο είναι κυριολεκτικά χρωματισμένο. Αυτό γενικεύτηκε για το χρωματισμό των προσώπων ενός γραφήματος που είναι ενσωματωμένο στο επίπεδο. Με την επίπεδη δυαδικότητα έγινε χρωματισμός των κορυφών και με αυτήν τη μορφή γενικεύεται σε όλα τα γραφήματα. Στις μαθηματικές και υπολογιστικές αναπαραστάσεις, είναι τυπικό να χρησιμοποιούνται οι πρώτοι θετικοί ή μη αρνητικοί ακέραιοι ως ¨χρώματα¨. Σε γενικές γραμμές, μπορεί κανείς να χρησιμοποιήσει οποιοδήποτε πεπερασμένο σετ ως ¨σύνολο χρωμάτων¨. Η φύση του προβλήματος χρωματισμού εξαρτάται από τον αριθμό των χρωμάτων αλλά όχι από το χρώμα.

Ο χρωματισμός γραφικών απολαμβάνει πολλές πρακτικές εφαρμογές καθώς και θεωρητικές προκλήσεις. Εκτός από τους κλασικούς τύπους προβλημάτων, μπορούν επίσης να τεθούν διαφορετικοί περιορισμοί στο γράφημα ή στον τρόπο εκχώρησης ενός χρώματος ή ακόμα και στο ίδιο το χρώμα. Έχει φτάσει ακόμη και σε δημοτικότητα με το ευρύ κοινό με τη μορφή του δημοφιλούς παζλ αριθμού Συδοκυ. Ο χρωματισμός γραφημάτων εξακολουθεί να είναι ένας πολύ ενεργός τομέας έρευνας.

4 ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΕΙΣ ΕΠΙΛΥΣΗΣ

4.1 ΔΕΔΟΜΕΝΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ Toront dadasets

Το πρόβλημα Χρονοπρογραμματισμού Εξετάσεων Πανεπιστημίου έτσι όπως έχει οριστεί από τον Carter αποτελεί μια απλοποιημένη μορφή του πραγματικού προβλήματος Χρονοπρογραμματισμού Εξετάσεων Πανεπιστημίου καθώς δεν περιέχει πληροφορίες για αίθουσες, θέση και διάρκεια των περιόδων στις ημέρες της εβδομάδας, περιορισμούς διάταξης μεταξύ των εξετάσεων και άλλα. Ωστόσο, αποτέλεσε γόνιμο έδαφος στο οποίο αναπτύχθηκε πληθώρα λύσεων. Θα πρέπει να σημειωθεί ότι για τα συγκεκριμένα στιγμιότυπα προβλημάτων τα οποία αναφέρονται στην βιβλιογραφία και ως Toronto Datasets υπάρχει μια σχετική σύγχυση καθώς κυκλοφόρησαν με την ίδια ονομασία διάφορες παραλλαγές των αρχικών στιγμιότυπων προβλημάτων. Η κατάσταση «ξεκαθαρίζει» με την τεχνική αναφορά (QBM06) και την ιστοσελίδα www.cs.nott.ac.uk που περιγράφουν τα χαρακτηριστικά κάθε παραλλαγής για όλα τα στιγμιότυπα προβλημάτων καθώς και τις κυριότερες εργασίες στις οποίες έχει χρησιμοποιηθεί το καθένα. Συγκεντρωτικά στοιχεία των προβλημάτων παρουσιάζονται στον Πίνακα 1 όπου εμφανίζεται και το πλήθος των διαθέσιμων περιόδων για κάθε πρόβλημα.Τα αρχεία δεδομένων (κατάληξη .stu) διαθέτουν για κάθε σπουδαστή μια γραμμή που περιέχει τους αριθμούς των μαθημάτων στα οποία είναι εγγεγραμμένος χωρισμένους μεταξύ τους με κενά. Η πρώτη γραμμή του αρχείου αντιστοιχεί στον πρώτο σπουδαστή, η δεύτερη γραμμή στο δεύτερο σπουδαστή κ.ο.κ. Για παράδειγμα το αρχείο car-f-92.stu περιέχει 18419 σειρές δεδομένων και ξεκινά με τις ακόλουθες σειρές:
- 0170
- 0156
- 0281

- 0006
- 0154 0156
- 0383
- 0534 0535 0536

.....

που σημαίνουν ότι ο φοιτητής 1 έχει εγγραφεί στο μάθημα 0170, ο φοιτητής 2 έχει εγγραφείστο μάθημα 0156, ο φοιτητής 3 έχει εγγραφεί στο μάθημα 0281, ο φοιτητής 4 έχει εγγραφεί στομάθημα 0006, ο φοιτητής 5 στα μαθήματα 0154 0156 κ.ο.κ

Πίνακας 1: Δεδομένα προβλημάτων

Πρόβλημα	Αρχείο Δεδομένων	Εξετάσεις	Φοιτητές	Εγγραφές	Περίοδοι	Πυκνότητα
car-f-92	car-f-92.stu	543	18419	55522	32	0.14
car-s-91	car-s-91.stu	682	16925	56877	35	0.13
ear-f-83	ear-f-83.stu	190	1125	8109	24	0.27
hec-s-92	hec-s-92.stu	81	2823	10632	18	0.42
kfu-s-93	kfu-s-93.stu	461	5349	25113	20	0.06
lse-f-91	lse-f-91.stu	381	2726	10918	18	0.06
pur-s-93	pur-s-93.stu	2419	30029	120681	42	0.03
rye-s-93	rye-s-93.stu	486	11483	45051	23	0.07
sta-f-83	sta-f-83.stu	139	611	5751	13	0.14
tre-s-92	tre-s-92.stu	261	4360	14901	23	0.18
uta-s-92	uta-s-92.stu	622	21266	58979	35	0.13
ute-s-92	ute-s-92.stu	184	2749	11793	10	0.08
yor-f-83	yor-f-83.stu	181	941	6034	21	0.29

5 ΕΠΙΛΥΣΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

5.1 Greedy graph coloring

Για την επίλυση του προβλήματος χρησιμοποίησα τον αλγόριθμο Greedy graph coloring

$$[O(V^2 + E)]$$

Στη θεωρία γραφημάτων, ο χρωματισμός γραφήματος είναι μια ειδική περίπτωση επισήμανσης γραφήματος. Είναι μια εκχώρηση ετικετών που ονομάζονται παραδοσιακά ¨χρώματα' σε στοιχεία ενός γραφήματος που υπόκεινται σε ορισμένους περιορισμούς. Στην απλούστερη μορφή του, είναι ένας τρόπος χρωματισμού των κορυφών ενός γραφήματος έτσι ώστε καμία γειτονική κορυφή να μοιράζεται το ίδιο χρώμα. αυτό ονομάζεται χρωματισμός κορυφής. Παρομοίως, ένας χρωματισμός άκρου αποδίδει ένα χρώμα σε κάθε άκρη, έτσι ώστε δύο γειτονικές άκρες να μοιράζονται το ίδιο χρώμα και ένας χρωματισμός προσώπου ενός επίπεδου γραφήματος εκχωρεί ένα χρώμα σε κάθε πρόσωπο ή περιοχή, έτσι ώστε δύο πρόσωπα που μοιράζονται ένα όριο να έχουν το ίδιο χρώμα.

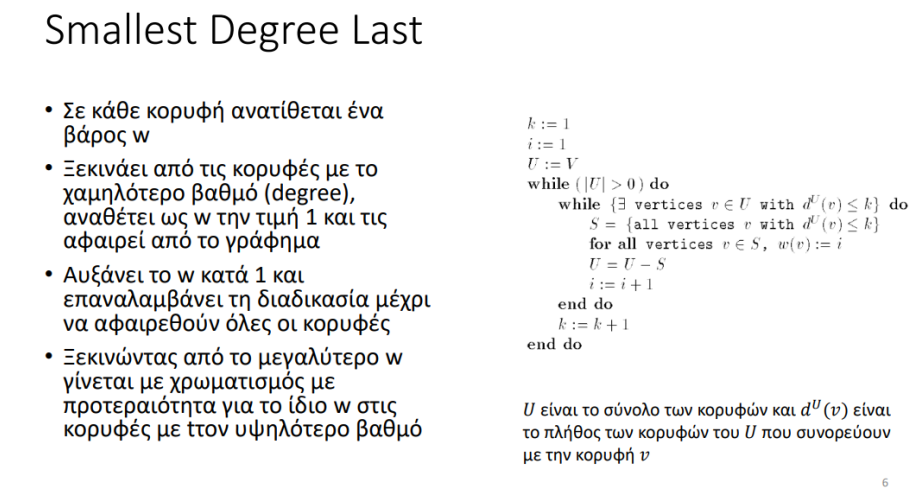
Περισσότερα δείτε από την πηγή των παραπάνω πληροφοριών: opengenus.org

Με την χρήση του αλγορίμου αυτού έγραψα ένα πρόγραμμα στην γλώσσα προγραμματισμού Python και με την βοήθεια των βιβλιοθηκών που έχει έφτασα στο αποτέλεσμα όπως αυτό είναι αναρτημένο στην σελίδα μου στο github

5.2 Smallest degree last

Από τον αλγόριθμο Άπληστου χρωματισμού Γραφήματος χρησιμοποιήθηκε η τεχνική του Smallest degree last

Πληροφορίες για την τεχνική αυτή:



5.3 NetworkX

Το NetworkX είναι ένα δωρεάν λογισμικό πακέτο, το οποίο χρησιμοποιείται στην Python για τη δημιουργία, τον χειρισμό και τη μελέτη της δομής, της δυναμικής και των λειτουργιών σύνθετων δικτύων.

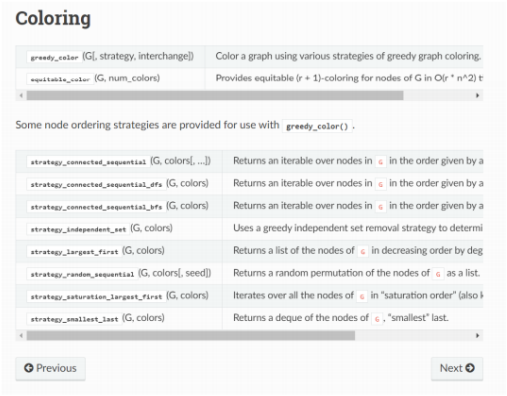
Δημιουργήθηκε τον Μάιο του 2002. Η αρχική έκδοση σχεδιάστηκε και γράφτηκε από τους Aric Hagberg, Dan Schult and Pieter Swart το 2002 και το 2003. Η πρώτη δημόσια κυκλοφορία ήταν τον Απρίλιο του 2005.

Το NeworkX χρησιμοποιήθηκε στην εργασία για να χρησιμοποιηθούν έτοιμες τεχνικές σε κώδικα για τον χρωματισμό γραφήματος.

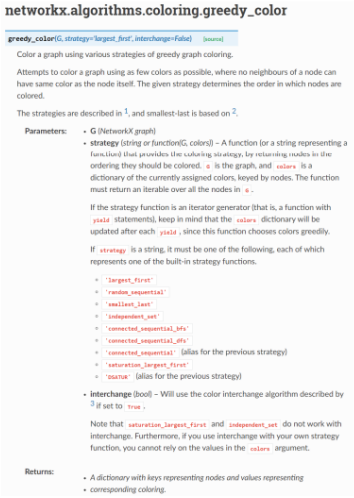
Στο πρόγραμμά μου η αποτελεσματικότερη τεχνική χρωματισμού γραφήματος με την χρήση του άπληστου αλγορίθμου ήταν η τεχνική smallest last.

Από τις τεχνικές αυτές όπως φαίνονται και στη παρακάτω εικόνα, αυτή που λειτούργησε καλύτερα για το δικό μου πρόβλημα ήταν η τεχνική του smallest last

Python - networkx



https://networkx.org/documentation/stable/reference/algorithms/generated/networkx.algorithms.coloring.greedy_color.html



6 Αποτελέσματα

Ως αποτέλεσμα της εργασίας και έχοντας χρησιμοποιήσει διαφορετικές στρατηγικές για την χρήση του άπληστου αλγορίθμου είναι η δημιουργία σε Python ενός προγράμματος που με ένα interface GUI επιλέγεται το αρχείο από μία λίστα των αρχείων που μας έχουν δοθεί, τα διαβάζει και φτάνει σε ένα σωστό αποτελέσματα (όπως του πίνακα 1) για 9 από τα 13 αρχεία .stu (δεν έβγαλα σωστά αποτελέσματα για τα car-f-92.stu, hec-s-92.stu, rye-s-93.stu, yor-f-83.stu).

Δεν κατάφερα να προχωρήσω την εργασία και να την ολοκληρώσω σε όλα όσα είχε ως ζητούμενα για αρκετούς προσωπικούς λόγους και κυρίως έλλειψης χρόνου.

7 Συμπεράσματα

7.1 Συμπέρασμα 1ο

Μόνο με την εφαρμογή της στρατηγικής smallest degree last του άπληστου αλγόριθμου μπορούν να επιλυθούν εννέα από τα δεκατρία αρχεία που μας έχουν δοθεί απο το torronto datasets με την χρήση του προγράμματός μου.

Τα οφέλη από την ενασχόληση με την εργασία ήταν, εκτός από την εμπέδωση της θεωρίας όπως μας παρουσιάστηκε από τον καθηγητή μας κ. Γκόγκο Χρήστο, η εξερεύνηση και κατάκτηση νέας γνώσης με αντικείμενα που δεν τα είχα συναντήσει στο παρελθόν όπως η python, github, visual studio code, LateX and Overleaf.

7.2 Συμπέρασμα 2ο

Αν μπορούσα να χρησιμοποιήσω προσεγγιστικούς αλγόριθμους θα είχα καλύτερα και πιο κοντινά αποτελέσματα στην εργασία.