Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών

Μάθημα: Σχεδίαση Συστημάτων Αυτομάτου Ελέγχου

2^{η} σειρά Ασκήσεων

Εργασία: Ανεστραμμένο Εκκρεμές

Ονοματεπώνυμο : Σταυρακάκης Δημήτριος

ΑΜ : 03112017

Εξάμηνο : 10^{o}

Μας δίνεται μια περιγραφή του ανεστραμμένου εκκρεμούς το οποίο μελετήθηκε και στο εργαστήριο ως πείραμα:

$$\dot{x}_{o\lambda} = \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \\ \dot{x} \\ \ddot{x} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \\ x \\ \dot{x} \end{bmatrix} + Bu \quad , \quad \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = C \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \\ x \\ \dot{x} \end{bmatrix}$$

Όπου:

```
A =

         0    1.0000         0         0
   20.6000         0         0         0
         0         0         0    1.0000
   -0.5000         0         0         0
```

```
B =

         0
   -1.0000
         0
    0.5000
```

```
C =

     1     0     0     0
     0     0     1     0
```

```
D =

     0
     0
```

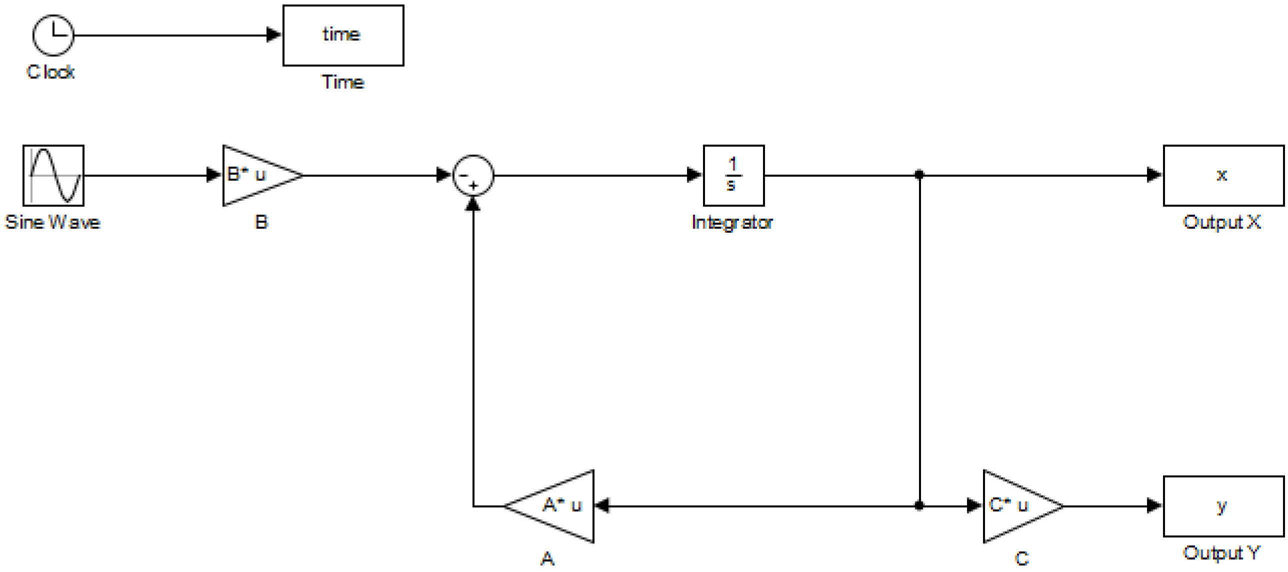
θ: η γωνιακή θέση της ράβδου σε rad

x: απόσταση του βαγονιού από κάποιο σημείο αναφοράς σε m

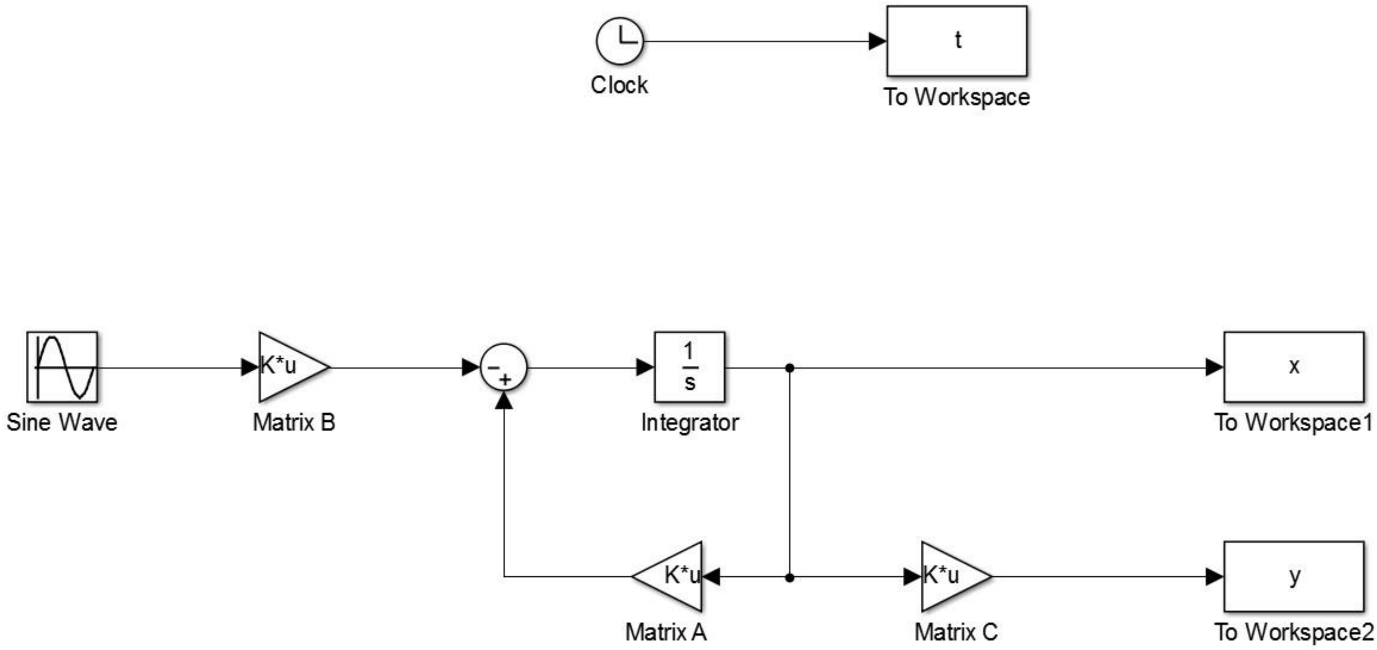
u: είσοδος ελέγχου σε N

$[y_1 \;\; y_2]^T$: το διάνυσμα εξόδου

Ερώτημα 1



Ξεκινώντας, θα δημιουργήσουμε μια προσομοίωση του συστήματος μας με σύστημα ανοιχτού βρόχου, το οποίο υλοποιούμε με τη βιβλιοθήκη Simulink του Matlab. Στο παραπάνω σχήμα χρησιμοποιήσαμε τη γραμμική ανάδραση, με την οποία στην ουσία επιτυγχάνουμε να τοποθετούνται 2 από τους πόλους «κοντά» στον φανταστικό άξονα και οι υπόλοιποι να βρίσκονται σε θέση, όπου να μην ασκούν σημαντική επιρροή στο σύστημά μας. Αυτό που επιθυμούμε είναι οι τιμές των συνιστωσών να φτάσουν και να παραμείνουν στην τιμή 0.015. Ακόμη θέλουμε ζ=0.5 για τους 2 πρωτεύοντες (κύριους) πόλους του κλειστού. Με βάση αυτά, εκτελούμε την προσομοίωση στο Matlab δίνοντας αρχική συνθήκη το διάνυσμα $[-0.2 \quad -0.06 \quad 0.01 \quad 3]^T$. Ετσί επιχειρούμε να βρούμε την τιμή του K.



Τώρα υλοποιούμε το παραπάνω σύστημα στο Simulink βάζοντας τις τιμές που μας δίνονται στην εκφώνηση στους πίνακες A,B,C και D. Με αυτό το σύστημα θα έχουμε Full State Feedback. Αφού λοιπόν τα κάνουμε όλα αυτά, υπολογίζουμε τον πίνακα ελεγξιμότητας του συστήματός μας.

Ο υπολογισμός αυτός μπορεί να γίνει είτε από τον ορισμό του πίνακα ελεγξιμότητας (δηλαδή στην περίπτωσή μας : Cnt_Matrix=[B AB A^2B A^3B])

Στη συνέχεια παραθέτω τα αποτελέσματα που έλαβα για τον πίνακα ελεγξιμότητας:

```
Cnt_Matrix =

         0   -1.0000         0  -20.6000
   -1.0000         0  -20.6000         0
         0    0.5000         0    0.5000
    0.5000         0    0.5000         0
```

```
Det =

   96.0400

Det is ~= 0  so we have a Controllable System
```

Με βάση τις τιμές που μας έδωσε το matlab κι επειδή det(Cnt_Matrix) ~=0 , το σύστημα είναι ελέγξιμο και επομένως έχουμε τη δυνατότητα να κάνουμε την τόποθέτηση των 4 πόλων στις θέσεις που είναι επιθυμητές με βάση αυτά που θέλουμε να επιτύχουμε. Τους μη επικρατούντες πόλους , τους οποίους κατ'ουσίαν δε λαμβάνω υπόψη μου τους τοποθετώ στο 1500 και 3000 αντίστοίχως. Τώρα, γνωρίζοντας ότι επιθυμούμε τη γρήγορη και σημαντική μείωση της επίδρασης των επικρατούντων πόλων και λαμβάνοντας υπόψη ότι ο χρόνος αποκατάστασης ισούμε το το 1,5% της τελικής τιμής της απόκρισης(κριτήριο για το χρόνο αποκατάστασης):

$$T_s = \frac{4}{\zeta \cdot \omega_n} \Rightarrow \omega_n = 4$$

Επομένως, με απλούς υπολογισμούς, οι επικρατούντες πόλοι θα είναι στις ακόλουθες θέσεις:

$$P1 = -\zeta \cdot \omega_n + j \cdot \omega_n \cdot \sqrt{(1-\zeta^2)}$$

$$P2 = -\zeta \cdot \omega_n - j \cdot \omega_n \cdot \sqrt{(1-\zeta^2)}$$

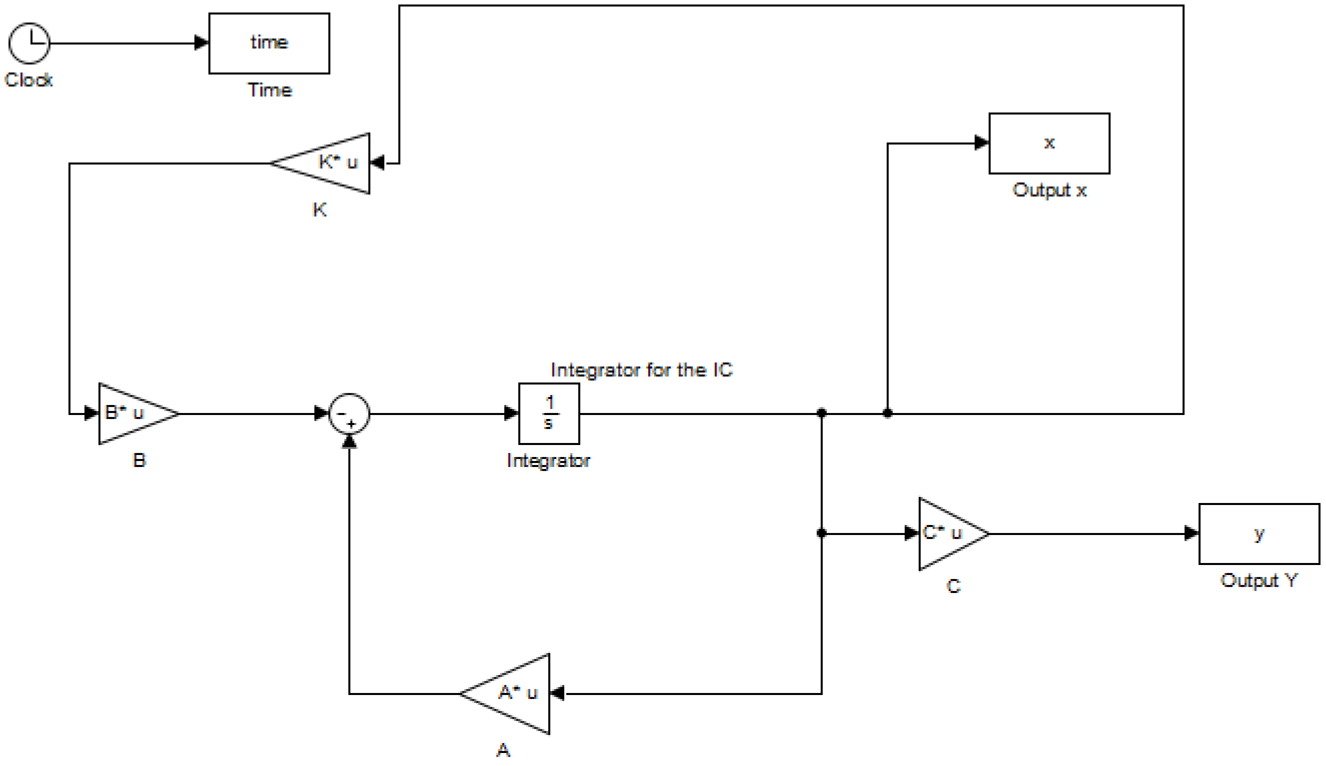
Με βάση αυτόν τον τύπο το matlab μας δίνει:

```
>> pole_1 = pole_1_real+1i*pole_1_im

pole_1 =

  -2.0000 + 3.4640i
```

```
>> pole_2 = pole_2_real+1i*pole_2_im

pole_2 =

  -2.0000 - 3.4640i
```

Επομένως στο Matlab ορίζω
```
poles=[pole_1_real+1i*pole_1_im,pole_2_real+1i*pole_2_im,-1500,-3000];
```
και με χρήση της συνάρτησης place(A,B,poles) προκύπτει:

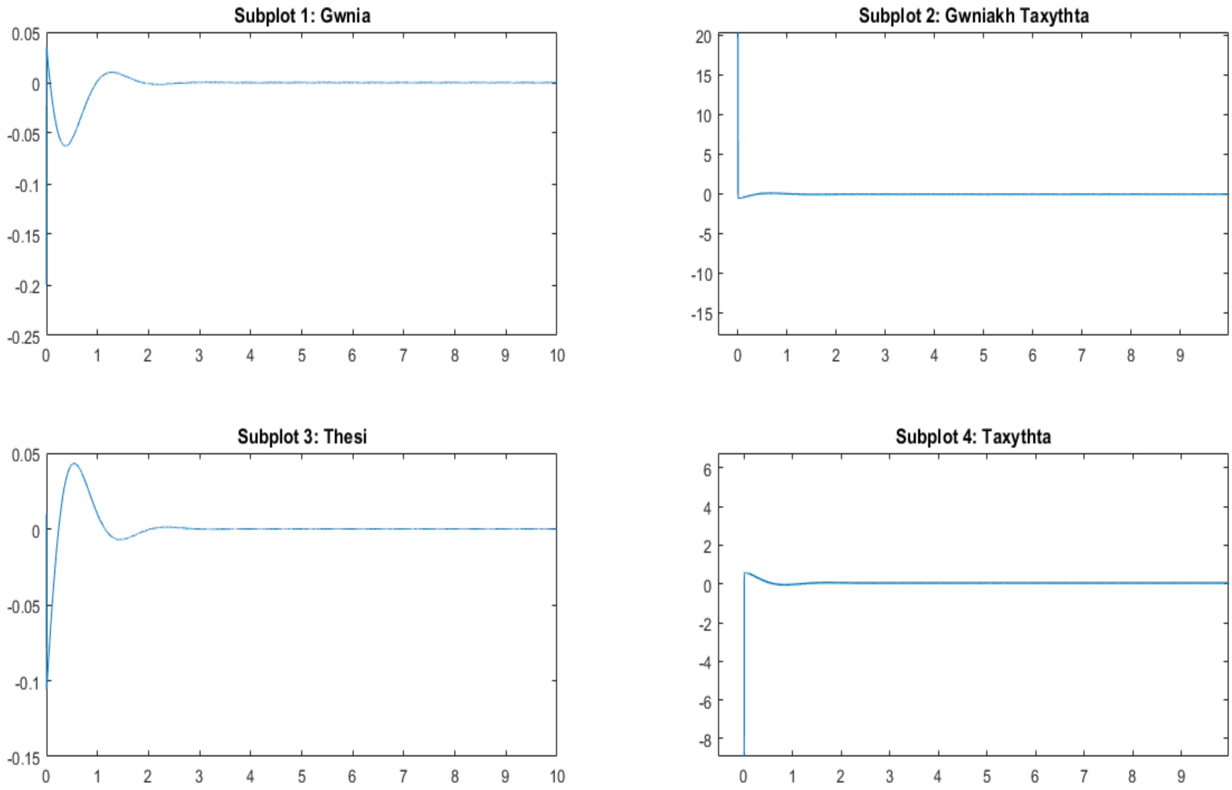
```
K =

   1.0e+06 *

  -8.1913   -0.9265   -7.3466   -1.8441
```

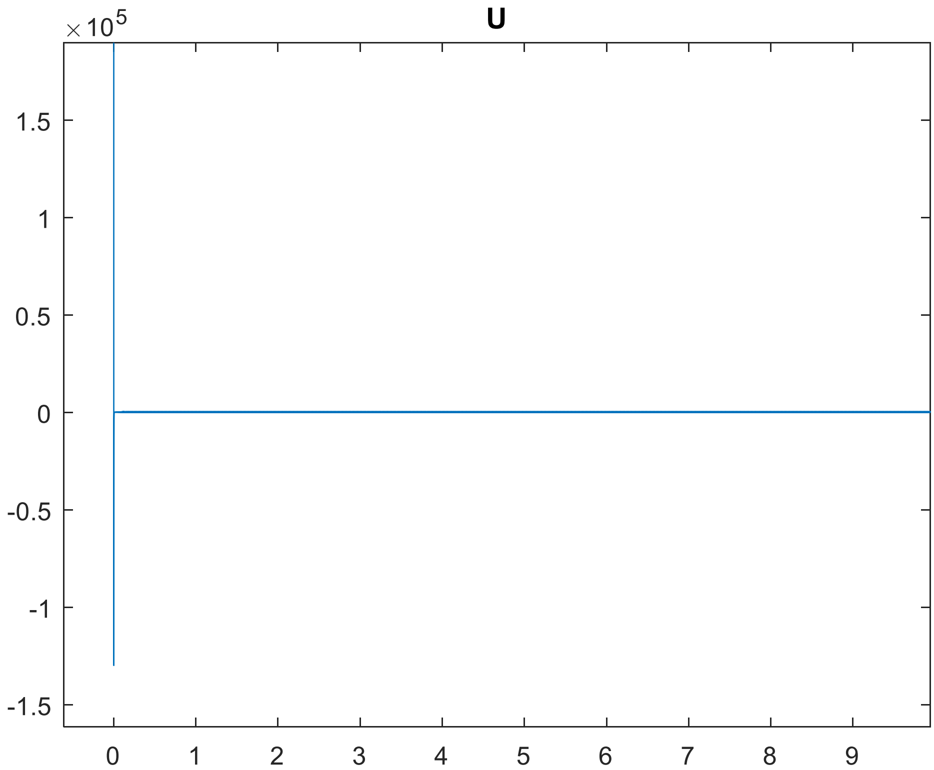


Το ανωτέρω σχήμα απεικονίζει το Σύστημα Κλειστού Βρόχου μετά το State Feedback

Αφού λοιπόν τρέξουμε την προσομοίωση και περάσουμε στο workspace τις μεταβλητές που φαίνονται στο σχήμα μας, με κατάλληλα plots λαμβάνουμε τα ακόλουθα αποτελέσματα για τα μεγέθη που αφορούν το σύστημά μας:

Οι γραφικές παραστάσεις 2 και 4 έχουν υποστεί zoom.





Ερώτημα 2

$$J = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} (x_{o\lambda}(t)^T x_{o\lambda}(t) + u^2(t))dt$$

Επιθυμούμε στο ερώτημα αυτό να βρούμε μια νέα τιμή του K , τέτοια ώστε η παραπάνω μετρική να ελαχιστοποιείται.

Για να το βρούμε αυτό το K εργαζόμαστε όπως φαίνεται παρακάτω:

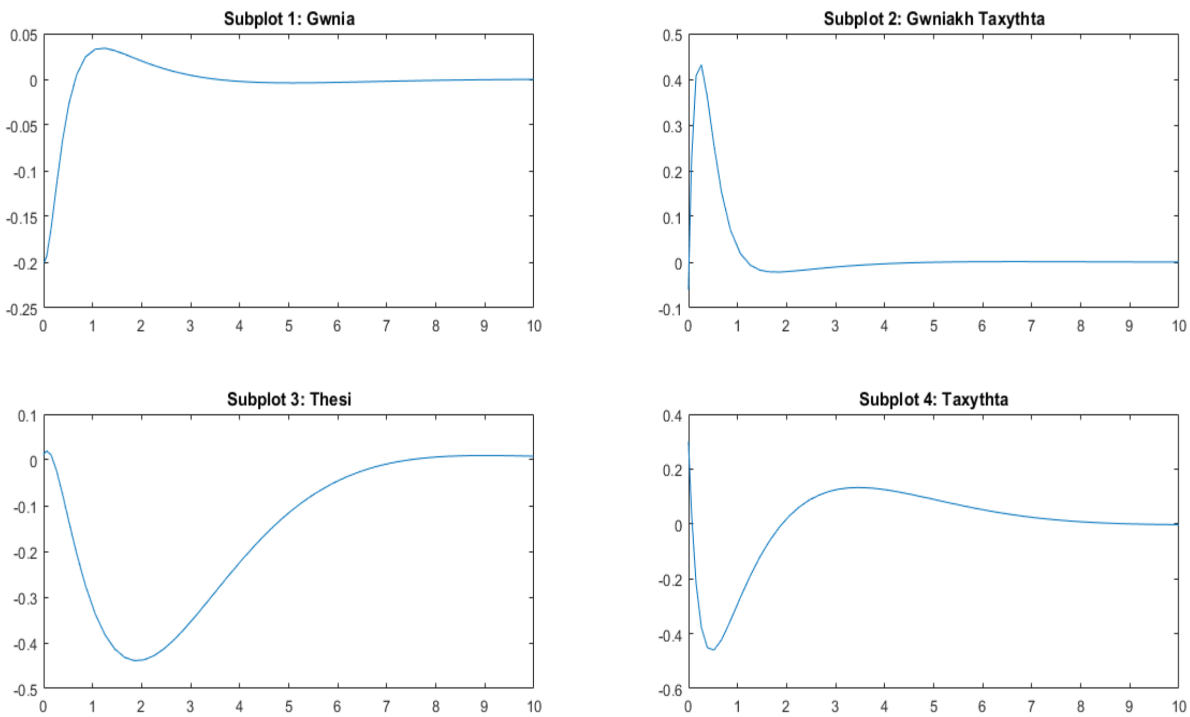
$$Q = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} (\mu\varepsilon\ \mu\varepsilon\gamma\varepsilon\theta o\varsigma\ 4 * 4)$$

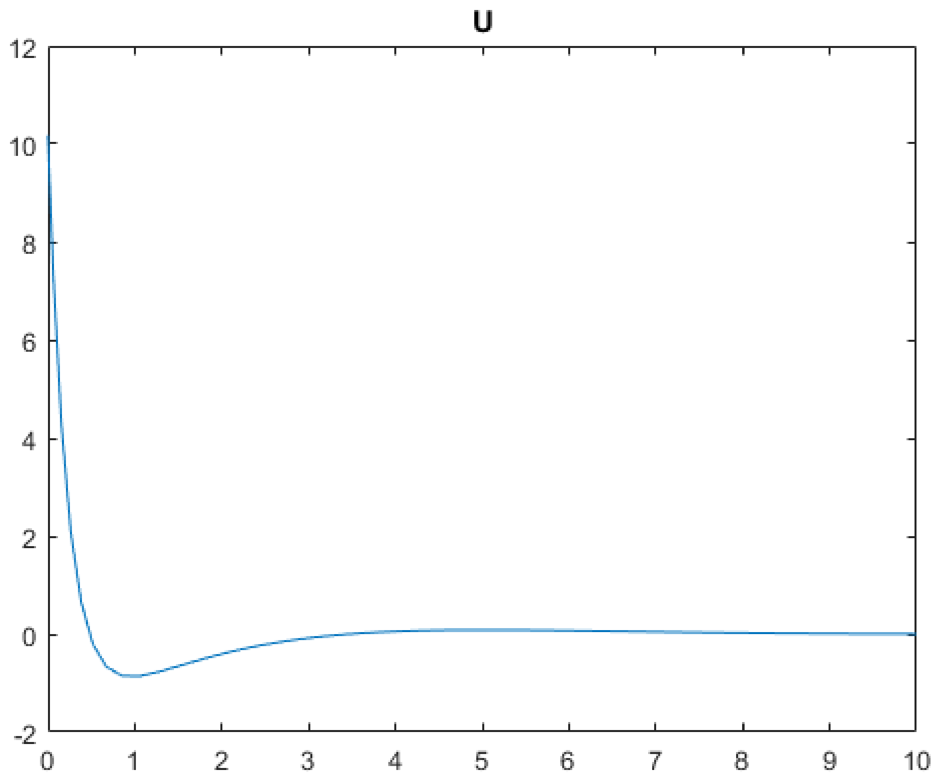
R=1

Και με χρήση της `[K_new,S,E] = lqr(A,B,Q,R);`
του Matlab βρίσκουμε:

```
K_new =

  -51.4839  -11.4425   -1.0000   -2.6643
```

(τα plots έγιναν με αντίστοιχο τρόπο που εξηγήθηκε στο προηγούμενο ερώτημα, απλά για τη νέα τιμή του K)



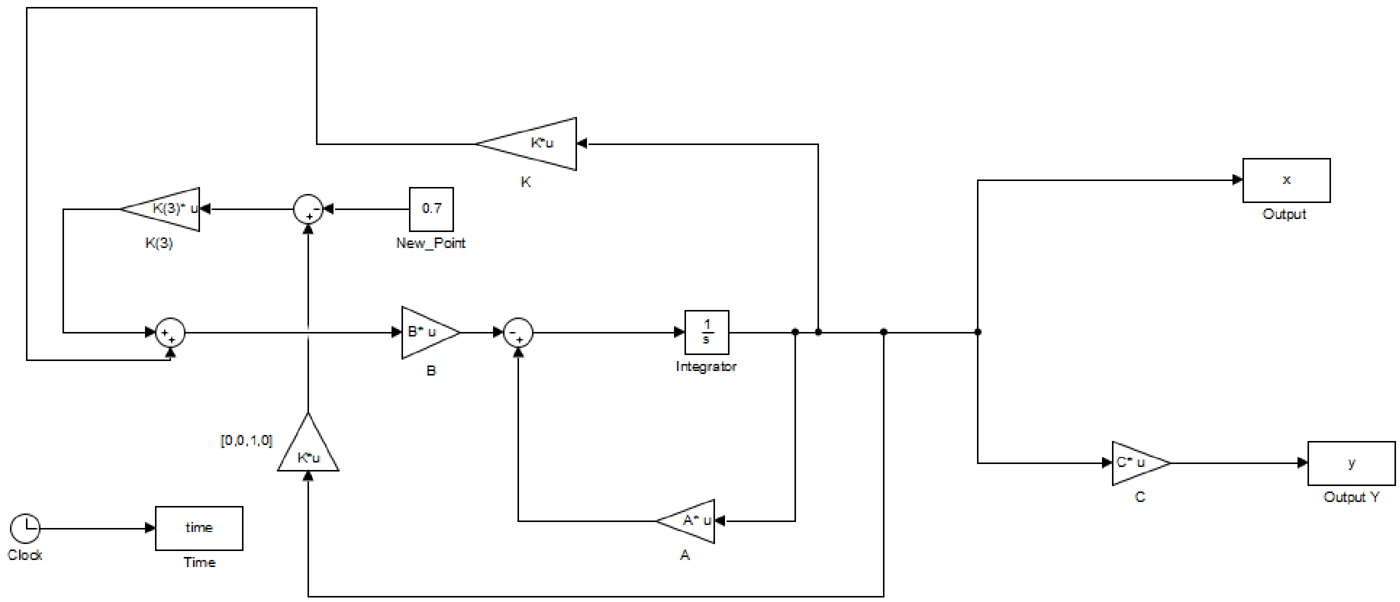


Ερώτημα 3

Στο ερώτημα αυτό, ζητείται το σύστημά μας να βρεθεί στην θέση 0.7. Αν κάνουμε αλλαγή μεταβλητής σε σχέση με το 1ο ερώτημα, θέτοντας x3 → x3-0.7 το πρόβλημα (το είχαμε αναφέρει και στο εργαστήριο) ανάγεται στο πρόβλημα του 1ου ερωτήματος (δηλαδή επιθυμούμε το σύστημα να επιστρέψει στην αρχική του θέση, η οποία όμως σε αυτό το ερώτημα είναι μετατοπισμένη κατά 0.7). Για το λόγο αυτό, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την τιμή του K που υπολογίσαμε στο 1ο ερώτημα. Έτσι στην ουσία το σύστημά μας, θα επιστρέφει στην αρχική του μηδενική θέση, όμως με την αλλαγή μεταβλητής στην πραγματικότητα αυτή η αρχική θέση είναι η θέση που εμείς επιθυμούμε να το φέρουμε.

Με βάση την ανωτέρω επεξήγηση λοιπόν, θα εφαρμόσω τα παρακάτω:

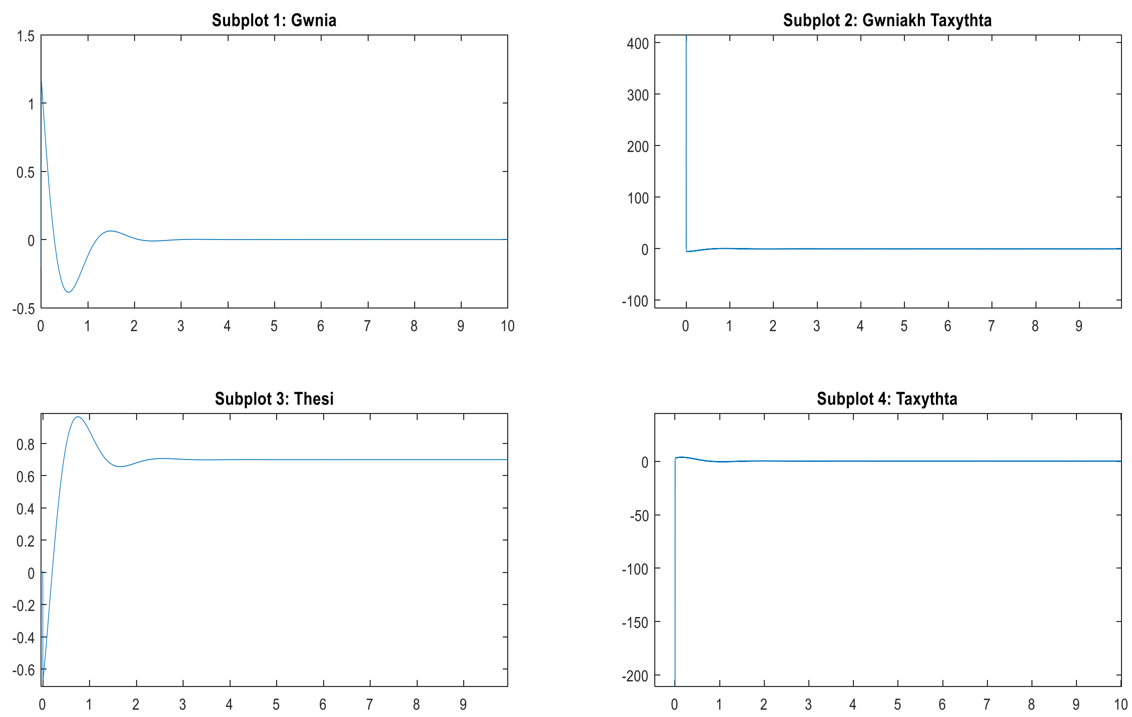
1. Πολλαπλασιάζω το state με [0 0 1 0] για να πάρω το x3
2. Αλλάζω τη μεταβλητή x3 αφαιρώντας 0.7 (για να θεωρεί το σύστημα μου τώρα ως αρχική μηδενική θέση, τη θέση 0.7)
3. Πολλαπλασιάζω με το 3ο στοιχείο του K (K(3))
4. Το υπόλοιπο state πολλαπλασιάζεται με [K(1),K(2),0,K(4)]



Το παραπάνω σύστημα υλοποιεί τα βήματα που περιγράψαμε προηγουμένως.

Στη συνέχεια φαίνεται το plot της θέσης. Παρατηρούμε ότι όντως το σύστημά μας ισορροπεί στη θέση x=0.7 , ωστόσο μπορούμε να δούμε ότι αρχικά υπήρξε κίνηση προς την αντίθετη κατεύθυνση γεγονός που μας κάνει να συμπεράνουμε ότι πρόκειται για σύστημα ελαχίστης φάσης.

Αυτό που αξίζει να σημειωθεί είναι πως στο ερώτημα αυτό η ισχύς του κινητήρα που βρίσκεται στο σύστημά μας είναι προφανώς μεγαλύτερη, αφού εξαρτάται άμεσα από τις παραμέτρους της θέσης. (πρέπει να κρατάει το σώμα σε εκείνο το σημείο που επιθυμούμε).



Ερώτημα 4

Το ερώτημα αυτό διαφοροποιείται καθώς θεωρούμε μετρήσιμη την έξοδο του συστήματος αλλά όχι το Χολ. Επομένως, προκειμένου να επιτύχουμε Full State Feedback θα πρέπει να πάρουμε τον πίνακα της παρατηρισιμότητας, να αγνοήσουμε τις αρχικές συνθήκες και να εκτιμήσουμε το Χολ με απαίτηση να έχουμε μηδενικό σφάλμα για αυτό. Για δική μας διευκόλυνση, θεωρούμε μηδενικό διάνυσμα αρχικών συνθηκών. Επίσης, για να μπορέσουν να γίνουν αυτά που επιθυμούμε, πρέπει το σύστημά μας να είναι παρατηρήσιμο. Για το λόγο αυτό με το Matlab υπολογίζουμε τον πίνακα παρατηρισιμότητας με βάση τον ορισμό του.

Έχουμε λοιπόν:

```
Obs_Matrix = [C;C*A;C*A^2;C*A^3]
```

```
Obs_Matrix =

    1.0000         0         0         0
         0         0    1.0000         0
         0    1.0000         0         0
         0         0         0    1.0000
   20.6000         0         0         0
   -0.5000         0         0         0
         0   20.6000         0         0
         0   -0.5000         0         0
```

Παίρνουμε την κατάλληλη συνθήκη

```
Crucial = Length(A)-rank(Ob) ;
```

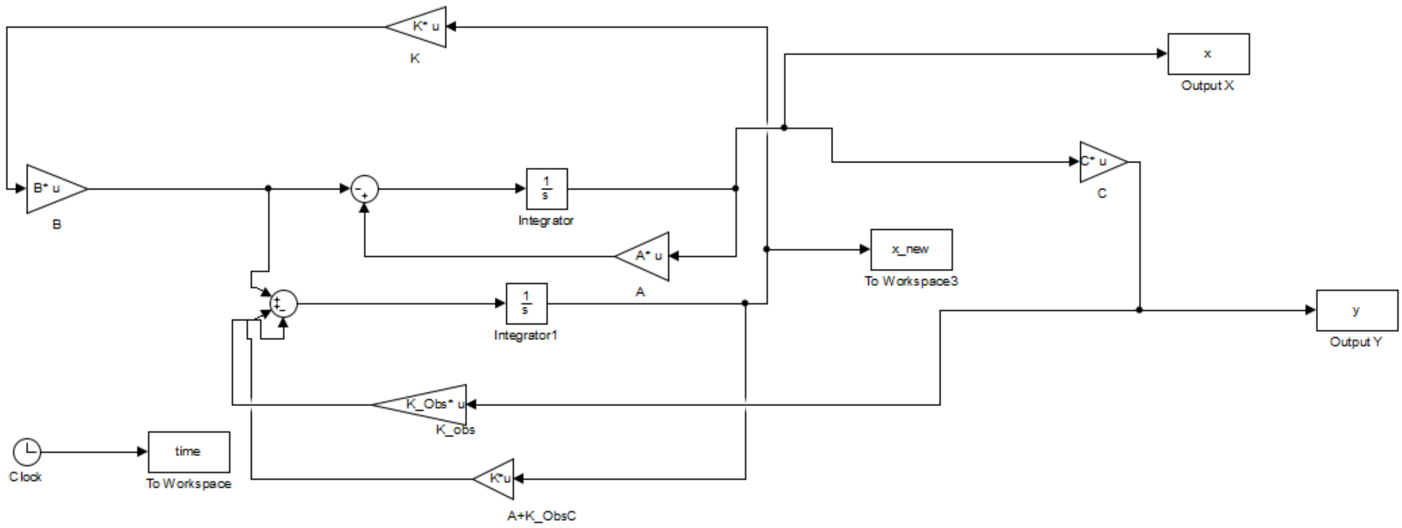
```
Crucial =

     0

we have an Observable System
```

Και βλέπουμε λοιπόν ότι το σύστημά μας είναι παρατηρήσιμο.

Τώρα, όπως και στο 1ο ερώτημα, κάνουμε τοποθέτηση πόλων και παίρνουμε:

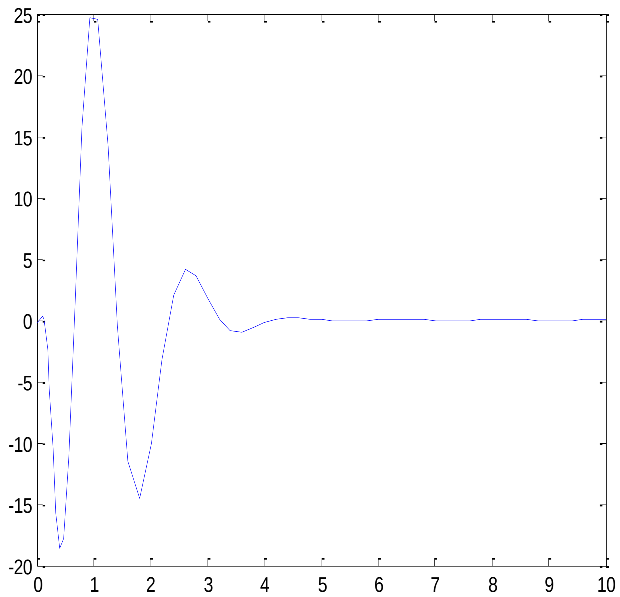
```
K_Obs=place(A',C',poles)';
```

```
K_obs =

   1.0e+03 *

    0.0310    2.3040
   -0.3246    5.7600
         0         0
         0         0
```

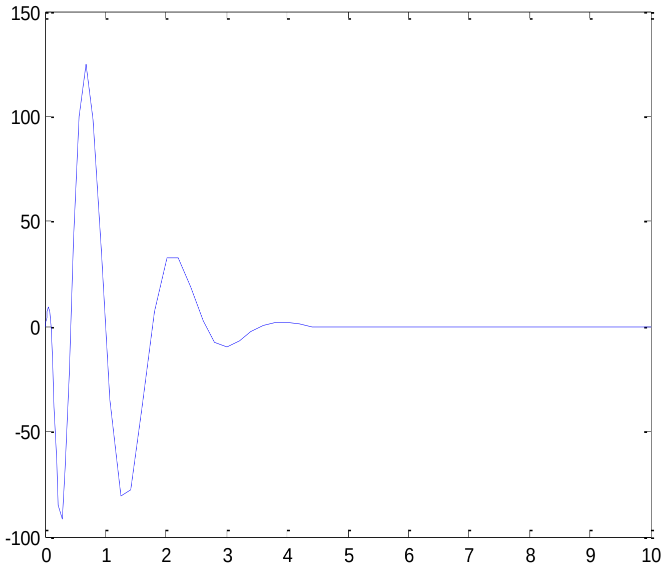


Τα plots που προκύπτουν με βάση την προσομοίωση του παραπάνω μοντέλου που κάνει όσα αναφέραμε είναι τα παρακάτω:

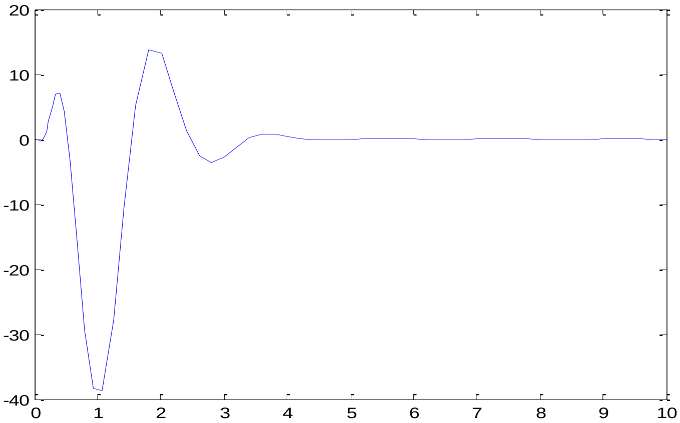
Γωνία του Βαγονιού



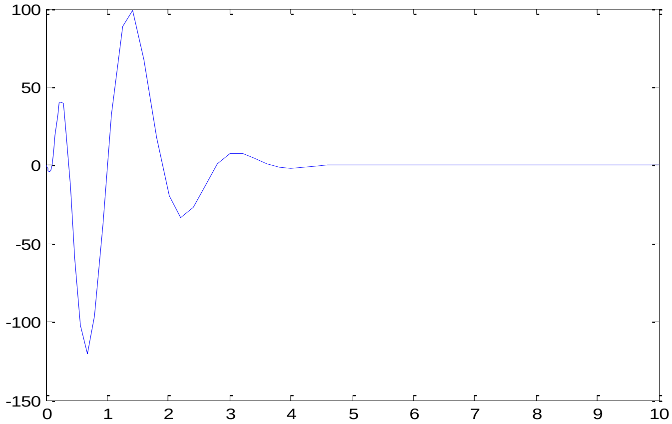
Γωνιακή Ταχύτητα Βαγονιού



Θέση Βαγονιού



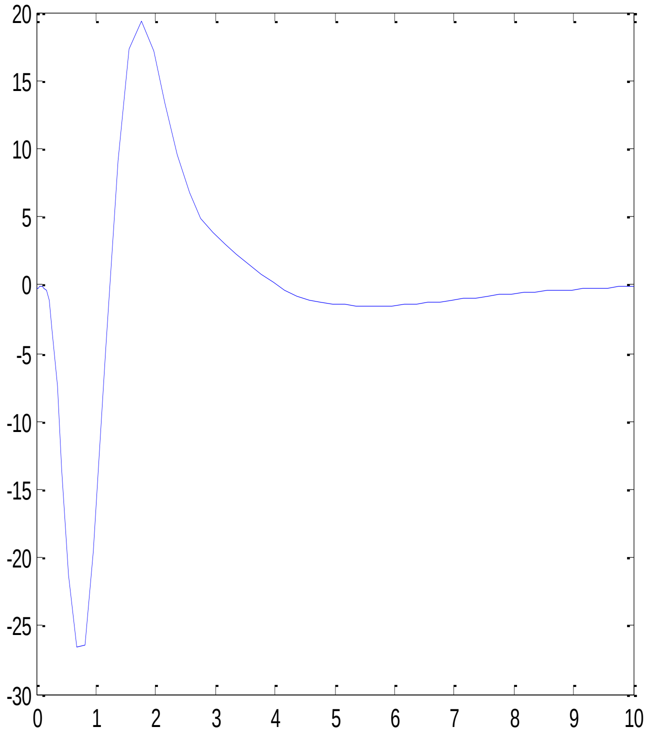
Ταχύτητα Βαγονιού



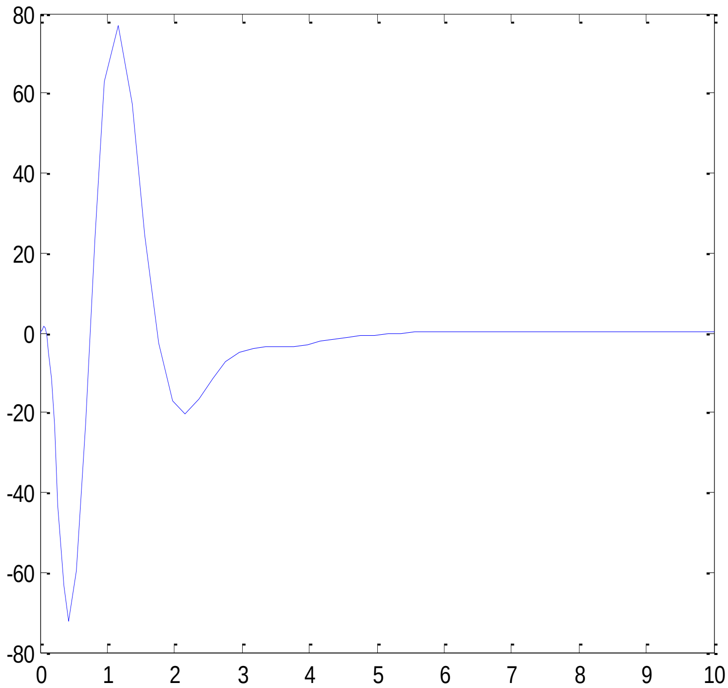
Βλέπουμε πως παρατηρείται σχετικά μεγάλο Overshoot. Αυτό δεν πρέπει να μας παραξενεύει καθώς οφείλεται στο γεγονός ότι αμελήσαμε – θεωρήσαμε μηδενικές στην πράξη- τις αρχικές μας συνθήκες.

Επαναλαμβάνοντας το 2^{o} για γνωστό LQR κέρδος παίρνουμε τις παρακάτω αποκρίσεις:

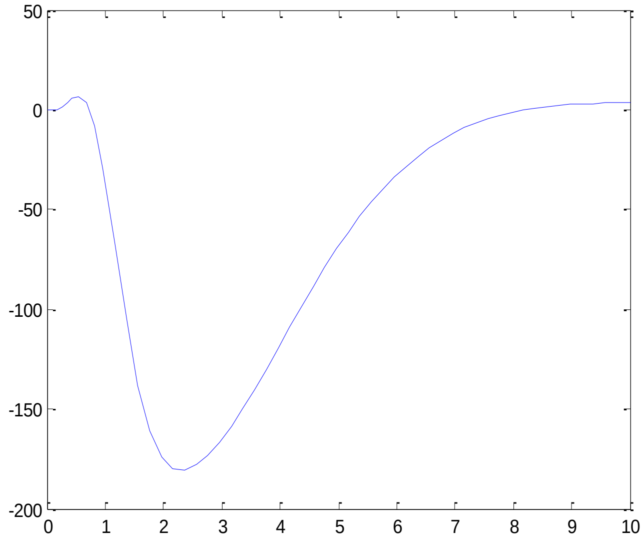
Γωνία



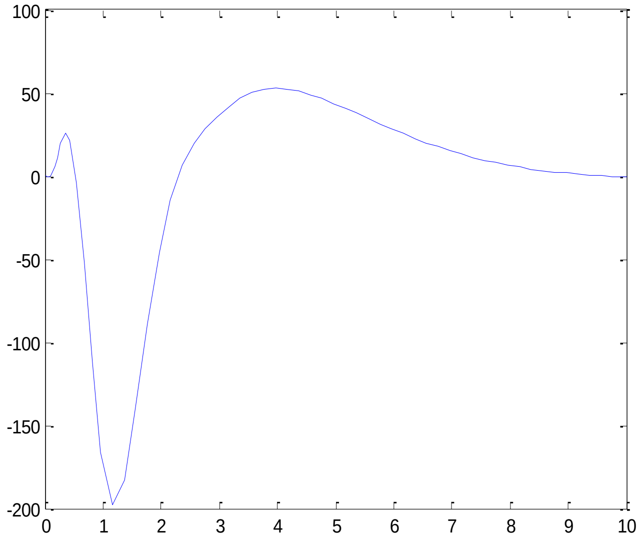
Γωνιακή Ταχύτητα



Θέση



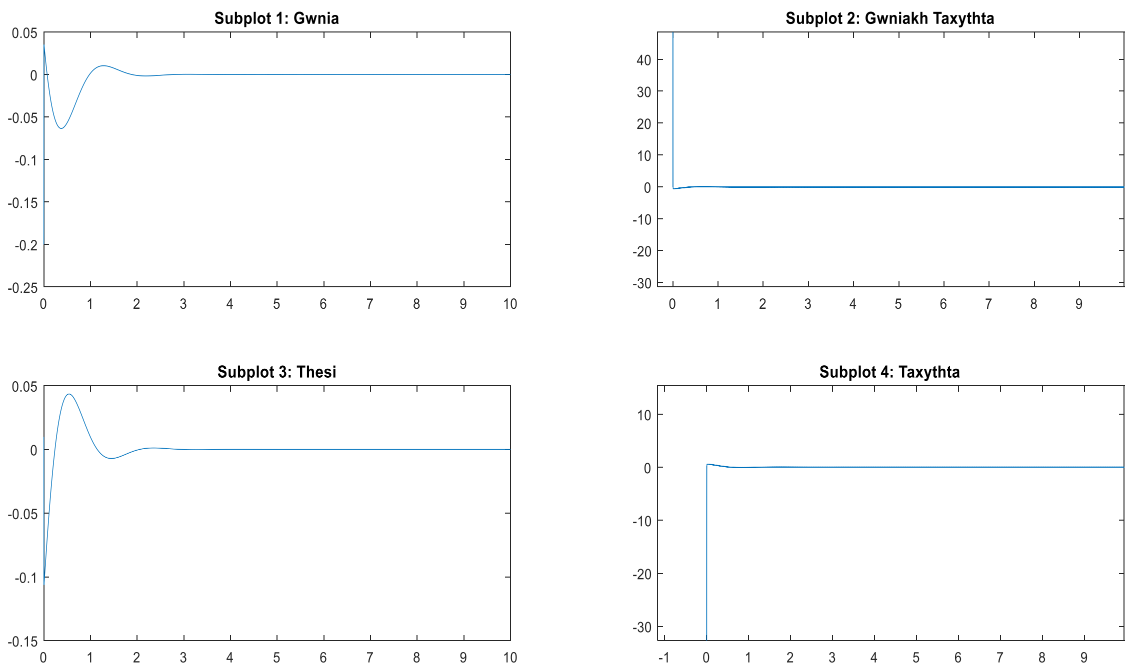
Ταχύτητα



Ενώ πάλι η γνώση των Α.Σ. από των παρατηρητή θα έφερνε αποτελεσματα εντυπωσιακά κοντινά στα επιθυμητά και άρα σημαντικά μικρότερο σφάλμα.

Ερώτημα 5

Στο 5^{ο} και τελευταίο ερώτημα της άσκησης αυτής, θα μελετήσουμε τη ευρωστία του συστήματος. Με πιο απλά λόγια, θα δούμε πως επηρεάζει την απόκριση του συστήματός μας μια μικρή μεταβολή στον πίνακα που το περιγράφει, όπως αυτή δίνεται στην αρχή. Η ευρωστία ενός συστήματος εκφράζει και εξαρτάται στην ουσία, από το πόσο ευσταθές είναι ένα σύστημα. Επομένως αφού τρέξαμε ξανά την προσομοίωση με αλλαγές όπως υποδεικνύει η εκφώνηση λάβαμε τα παρακάτω στις εξόδους που παρακολουθούμε:



Είμαστε λοιπόν στην ευχάριστη θέση να παρατηρήσουμε ότι το σύστημά μας παρά τις μεταβολές που του κάναμε συνέχισε να δίνει σχεδόν τις ίδιες αποκρίσεις με το αρχικό. Επομένως μπορούμε να συμπεράνουμε ότι είναι «αρκετά» ευσταθές και δεν επηρεάζεται από μικρές αλλαγές . (με άλλα λόγια είναι εύρωστο (robust))