7. Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений

Дифференциальными называются уравнения, в которых неизвестными являются функции, которые входят в уравнения вместе со своими производными.

$$F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0$$

Если в уравнение входит неизвестная функция только одной переменной, уравнение называется *обыкновенным*. Если нескольких – уравнением в *частных производных*.

Порядком дифференциального уравнения называют наивысший порядок производной, входящей в уравнение.

Решить дифференциальное уравнение, значит найти такую функцию $y = y(x)$, подстановка которой в уравнение обращала бы его в тождество.

Чтобы из уравнения n-го порядка получить функцию, необходимо выполнить ***n*** интегрирований, что дает n произвольных постоянных. Решение, выражающее функцию в явном виде, называется *общим решением*.

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, ...C_n)$$

Частным решением дифференциального уравнения называется общее решение, для которого указаны конкретные значения произвольных постоянных. Для определения произвольных постоянных необходимо задать столько условий, сколько постоянных, т.е. каков порядок уравнения. Эти условия обычно включают задание значений функции и ее производных в определенной точке, их называют *начальными условиями*,

$$y(x_0) = y_0 \quad y'(x_0) = y'_0 \qquad ... \quad y^{(n-1)}(x_0) = y^{(n-1)}{}_0$$

или значений функции в нескольких точках, т.е. *краевых условий*.

Задача нахождения частного решения дифференциального уравнения при заданных начальных условиях называется *задачей Коши*.

Задача нахождения частного решения дифференциального уравнения при заданных краевых условиях называется *краевой задачей*.

Наиболее распространенным и универсальным численным методом решения дифференциальных уравнений является *метод конечных разностей*. Метод включает следующие этапы

1) Замена области непрерывного изменения аргумента дискретным множеством точек, называемых узлами сетки;
2) Аппроксимация производных в узлах конечно-разностными аналогами;
3) Аппроксимация дифференциального уравнения системой линейных или нелинейных разностных уравнений;

4) Решение полученной системы разностных уравнений.

Разностные методы позволяют находить только частное решение. Результат численного решения дифференциального уравнения представляется в виде таблицы x_i, y_i. Аналитический вид решения $y = \varphi(x)$ может быть получен аппроксимацией.

7.1. Решение задачи Коши

7.1.1. Метод Эйлера

Одним из простейших разностных методов решения обыкновенного дифференциального уравнения является метод Эйлера.

Пусть требуется решить задачу Коши для уравнения первого порядка:

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0 \tag{7.1}$$

на отрезке $[a,\ b]$.

На данном отрезке выбираем некоторую совокупность точек $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$ с равностоящими узлами, т.е. $x_{i+1} - x_i = h$.

Конечно-разностная аппроксимация прозводной

$$y'(x_i) \approx \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y(x_{i+1}) - y(x_i)}{x_{i+1} - x_i} = \frac{y_{i+1} - y_i}{h}$$

Так как $y'(x_i) = f(x_i, y_i)$, получаем формулу Эйлера

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i), \quad i = 0, 1, \ldots, n-1, \tag{7.2}$$

с помощью которой значение сеточной функции y_{i+1} в любом узле x_{i+1} вычисляется по ее значению y_i в предыдущем узле x_i. На каждом шаге погрешность имеет порядок $O(h^2)$. В конце интервала погрешность $O(h^2)n \sim O(h^2)(b-a)/h \sim O(h)$, т.е. метод Эйлера имеет первый порядок точности. На рис. 7.1 дана геометрическая интерпретация метода Эйлера.

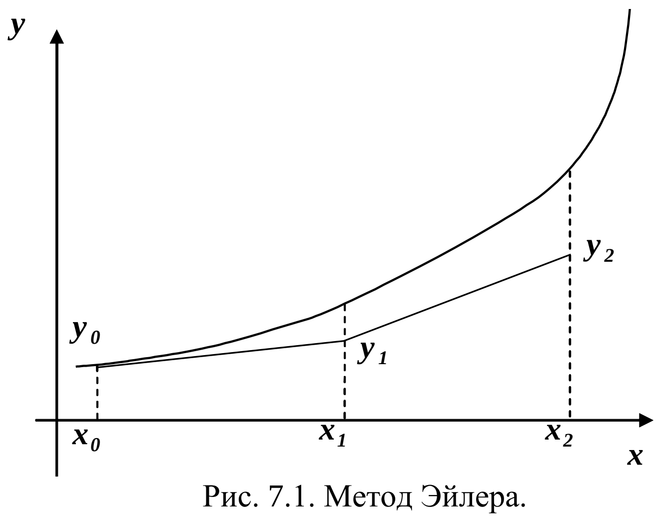


Рис. 7.1. Метод Эйлера.

Программа решения задачи Коши методом Эйлера дана на рис. 7.2.

	A	B	C	D	E
1	k	x	y	h	b
2	0	0	1	0,1	1,2
3	1	0,1	1,1		
4	2	0,2	1,211		
5	3	0,3	1,3361		
6	4	0,4	1,4787		
7	5	0,5	1,6426		
8	6	0,6	1,8318		
9	7	0,7	2,051		
10	8	0,8	2,3051		
11	9	0,9	2,5996		
12	10	1	2,9406		
13	11	1,1	3,3347		
14	12	1,2	3,7891		

```
Function f(x, y)
    f = x ^ 2 + y
End Function
Sub ODE()
    k = Cells(2, 1)
    x = Cells(2, 2)
    y = Cells(2, 3)
    h = Cells(2, 4)
    b = Cells(2, 5)
1   y = y + h * f(x, y)
    x = x + h
    k = k + 1
    Cells(2 + k, 1) = k
    Cells(2 + k, 2) = x
    Cells(2 + k, 3) = y
    If x < b Then GoTo 1
End Sub
```

Рис. 7.2. Программа решения задачи Коши методом Эйлера.

Пример 7.1. Решить задачу Коши методом Эйлера для дифференциального уравнения

$y' = x^2 + y, \quad y(0) = 1$ на отрезке $[0;\ 0{,}3]$ с шагом **0,1**

Решение. По формуле (6.2) вычислим значение y_1

$$y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0) = 1 + 0{,}1(0^2 + 1) = 1{,}1$$

Аналогично вычисляются последующие значения функции в узловых точках

$$y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1) = 1{,}1 + 0{,}1(0{,}1^2 + 1{,}1) = 1{,}211$$

$$y_3 = y_2 + hf(x_2, y_2) = 1{,}211 + 0{,}1(0{,}2^2 + 1{,}211) = 1{,}3361$$

Сеточную функцию записываем в виде таблицы

x	0	0,1	0,2	0,3
y	1	1,1	1,211	1,3361

7.1.2. Модифицированный метод Эйлера

Модифицированный метод Эйлера позволяет уменьшить погрешность на каждом шаге до величины $O(h^3)$ вместо $O(h^2)$ в обычном методе (7.2). Запишем разложение функции в ряд Тейлора в виде:

$$y_{i+1} = y_i + y_i'h + \frac{1}{2}y_i''h^2 + O(h^3) \tag{7.3}$$

Аппроксимируем вторую производную с помощью отношения конечных разностей:

$$y_i'' = \frac{y_{i+1}' - y_i'}{h}$$

Подставляя это соотношение в (6.3) и пренебрегая членами порядка $O(h^3)$, получаем:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1})] \tag{7.4}$$

Полученная схема является неявной, поскольку искомое значение $\boldsymbol{y_{i+1}}$ входит в обе части соотношения (7.4), но можно построить приближенное решение с использованием двух итераций.

Сначала по формуле Эйлера (7.2) вычисляют первое приближение $\boldsymbol{y_{i+1}}$

$$\tilde{y}_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i) \tag{7.5}$$

Затем находится уточненное окончательное значение

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, \tilde{y}_{i+1})] \tag{7.6}$$

Такая схема решения называется модифицированным методом Эйлера и имеет второй порядок точности.

Пример 7.2. Решить задачу Коши модифицированным методом Эйлера для дифференциального уравнения

$y' = x^2 + y, \quad y(0) = 1$ на отрезке $[0;\ 0{,}3]$ с шагом $0{,}1$

Решение. По формуле (6.5) вычислим первое приближение

$$\tilde{y}_1 = y_0 + hf(x_0, y_0) = 1 + 0{,}1(0^2 + 1) = 1{,}1$$

Используя формулу (6.6), находим окончательное значение в точке $x_1 = 0{,}1$

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{2}[f(x_0, y_0) + f(x_1, \tilde{y}_1)] = 1 + \frac{0{,}1}{2}(0^2 + 1 + 0{,}1^2 + 1{,}1) = 1{,}1055$$

Аналогично вычисляются последующие значения функции в узловых точках

$$\tilde{y}_2 = y_1 + hf(x_1, y_1) = 1{,}1055 + 0{,}1(0{,}1^2 + 1{,}1055) = 1{,}21705$$

$$y_2 = y_1 + \frac{h}{2}[f(x_1, y_1) + f(x_2, \tilde{y}_2)] =$$

$$= 1{,}1055 + \frac{0{,}1}{2}(0{,}1^2 + 1{,}1055 + 0{,}2^2 + 1{,}21705) = 1{,}224128$$

$$\tilde{y}_3 = y_2 + hf(x_2, y_2) = 1{,}224128 + 0{,}1(0{,}2^2 + 1{,}224128) = 1{,}350541$$

$$y_3 = y_2 + \frac{h}{2}[f(x_2, y_2) + f(x_3, \tilde{y}_3)] =$$

$$= 1{,}224128 + \frac{0{,}1}{2}(0{,}2^2 + 1{,}224128 + 0{,}3^2 + 1{,}350541) = 1{,}359361$$

Сеточную функцию записываем в виде таблицы

x	0	0,1	0,2	0,3
y	1	1,1055	1,224128	1,359361

Программа решения задачи Коши модифицированным методом Эйлера отличается от приведенной на рис. 7.2 заменой отмеченных строк на следующие:

```
1    y1 = y + h*f(x,y)
      y = y + h*(f(x,y)+f(x+h,y1))/2
```

Пример 7.3. Решить задачу Коши модифицированным методом Эйлера с помощью программы Excel для дифференциального уравнения

$y' = x^2 + y, \quad y(0) = 1$ на отрезке [0; 1] с шагом $0{,}1$.

	A	B	C	D	
1	x	y~	y	h	
2	0	1	1	0,1	
3	0,1	1,1	1,1055		
4	0,2	1,21705	1,2241275		
5	0,3	1,35054	1,3593609		
6	0,4	1,504297	1,5150438		
7	0,5	1,682548	1,6954234		
8	0,6	1,889966	1,9051928		
9	0,7	2,131712	2,1495381		
10	0,8	2,413492	2,4341896		
11	0,9	2,741609	2,7654795		
12	1	3,123027	3,1504048		

Рис. 7.3. Решение задачи Коши модифицированным методом Эйлера с помощью программы Excel.

Порядок решения.

1) Ввести в ячейки **A1:D1** заголовки столбцов (рис. 7.3).
2) В ячейку **A2** – x_0 **0**
3) В ячейки **B2** и **C2** – y_0 **1**
4) В ячейку **D2** – шаг интегрирования h **0,1**
5) В ячейку **A3** – значение $x_1 = x_0 + h$ **=A2+$D$2**
6) В ячейку **B3** – формулу $\tilde{y}_1 = y_0 + h(x_0^2 + y_0)$
=C2+$D$2*(A2^2+C2)

7) В ячейку **C3** – формулу $y_1 = y_0 + h((x_0^2 + y_0) + (x_1^2 + \widetilde{y}_1))/2$
=C2+$D$2*(A2^2+C2+A3^2+B3)/2
8) Выделить ячейки **A3:C3** и при помощи маркера заполнения ввести формулы в ячейки **A4:C4 … A13:C12**.
9) Столбцы **A** и **C** содержат решение.

7.1.3. Метод Рунге-Кутта

Формулы (6.5-6.6) можно представить в виде

$$y_{i+1} = y_i + (k_0 + k_1)/2$$

где

$$k_0 = hf(x_i, y_i),$$

$$k_1 = hf(x_i + h, y_i + k_0)$$

Такая формулировка модифицированного метода Эйлера представляет собой метод Рунге-Кутта второго порядка. На основе метода Рунге-Кутта могут быть построены разностные схемы разного порядка точности. Наиболее употребительной является следующая схема четвертого порядка:

$$y_{i+1} = y_i + (k_0 + 2k_1 + 2k_2 + k_3)/6 \qquad (7.7)$$

где

$$\begin{aligned} k_0 &= hf(x_i, y_i) \\ k_1 &= hf(x_i + h/2, y_i + k_0/2) \\ k_2 &= hf(x_i + h/2, y_i + k_1/2) \\ k_3 &= hf(x_i + h, y_i + k_2) \end{aligned} \qquad (7.8)$$

Таким образом, метод Рунге-Кутта требует на каждом шаге четырехкратного вычисления правой части уравнения. Однако это окупается повышенной точностью, что дает возможность проводить счет с относительно большим шагом.

Программа решения задачи Коши методом Рунге-Кутта отличается от приведенной на рис. 7.2 заменой отмеченных строк на следующие:

```
1    k0 = h*f(x, y)
     k1 = h*f(x + h/2, y + k0/2)
     k2 = h*f(x + h/2, y + k1/2)
     k3 = h*f(x + h, y + k2)
      y = y + (k0 + 2*k1 + 2*k2 + k3)/6
```

Пример 7.4. Решить задачу Коши методом Рунге-Кутта для дифференциального уравнения $y' = x^2 + y, \quad y(0) = 1$ на отрезке [0; 0,3] с шагом $0{,}1$.

Решение. По формулам (6.8) вычислим значения k_0, k_1, k_2, k_3:

$$k_0 = hf(x_0, y_0) = 0{,}1(0^2 + 1) = 0{,}1$$

$$k_1 = hf(x_0 + h/2, y_0 + k_0/2) = 0{,}1\left(\left(0 + \frac{0{,}1}{2}\right)^2 + 1 + \frac{0{,}1}{2}\right) = 0{,}10525$$

$$k_2 = hf(x_0 + h/2, y_0 + k_1/2) = 0{,}1\left(\left(0 + \frac{0{,}1}{2}\right)^2 + 1 + \frac{0{,}10525}{2}\right) = 0{,}105513$$

$$k_3 = hf(x_0 + h, y_0 + k_2) = 0{,}1\left((0 + 0{,}1)^2 + 1 + 0{,}105513\right) = 0{,}111551$$

Используя формулу (7.7), находим значение y_1 в точке $x_1 = 0{,}1$:

$$y_1 = y_0 + (k_0 + 2k_1 + 2k_2 + k_3)/6 =$$
$$= 1 + (0{,}1 + 2 \cdot 0{,}10525 + 2 \cdot 0{,}105513 + 0{,}111551)/6 = 1{,}105513$$

Аналогично вычисляются последующие значения функции в узловых точках

$$k_0 = hf(x_1, y_1) = 0{,}1(0{,}1^2 + 1{,}105513) = 0{,}111551$$

$$k_1 = hf(x_1 + h/2, y_1 + k_0/2) = 0{,}1\left(\left(0{,}1 + \frac{0{,}1}{2}\right)^2 + 1{,}05513 + \frac{0{,}111551}{2}\right) = 0{,}118379$$

$$k_2 = hf(x_1 + h/2, y_1 + k_1/2) = 0{,}1\left(\left(0{,}1 + \frac{0{,}1}{2}\right)^2 + 1{,}05513 + \frac{0{,}118379}{2}\right) = 0{,}11872$$

$$k_3 = hf(x_1 + h, y_1 + k_2) = 0{,}1\left((0{,}1 + 0{,}1)^2 + 1{,}05513 + 0{,}11872\right) = 0{,}126423$$

$$y_2 = y_1 + (k_0 + 2k_1 + 2k_2 + k_3)/6 =$$
$$= 1{,}105513 + (0{,}11151 + 2 \cdot 0{,}118379 + 2 \cdot 0{,}11872 + 0{,}126423)/6 = 1{,}224208$$

$$k_0 = hf(x_2, y_2) = 0{,}1(0{,}1^2 + 1{,}224208) = 0{,}126421$$

$$k_1 = hf(x_2 + h/2, y_2 + k_0/2) = 0{,}1\left(\left(0{,}2 + \frac{0{,}1}{2}\right)^2 + 1{,}224208 + \frac{0{,}126421}{2}\right) = 0{,}134992$$

$$k_2 = hf(x_2 + h/2, y_2 + k_1/2) = 0{,}1\left(\left(0{,}2 + \frac{0{,}1}{2}\right)^2 + 1{,}224208 + \frac{0{,}134992}{2}\right) = 0{,}13542$$

$$k_3 = hf(x_2 + h, y_2 + k_2) = 0{,}1\left((0{,}2 + 0{,}1)^2 + 1{,}224208 + 0{,}13542\right) = 0{,}144963$$

$$y_3 = y_2 + (k_0 + 2k_1 + 2k_2 + k_3)/6 =$$
$$= 1{,}224208 + (0{,}126421 + 2 \cdot 0{,}134992 + 2 \cdot 0{,}13542 + 0{,}144963)/6 = 1{,}359576$$

Сеточную функцию записываем в виде таблицы

x	0	0,1	0,2	0,3
y	1	1,105513	1,224208	1,359576

Оценка точности решения дифференциального уравнения

Для практической оценки погрешности решения дифференциального уравнения проводят вычисления с шагами h и $h/2$. За оценку погрешности решения, полученного с шагом $h/2$, принимают величину, равную

$$\Delta_{h/2} = \max_i \frac{\left|y_i^h - y_{2i}^{h/2}\right|}{2^p - 1}$$

где y_i^h - значение сеточной функции в i-й точке, вычисленное с шагом h;

p - порядок точности, равный 1 для метода Эйлера, 2 для модифицированного метода Эйлера и 4 для метода Рунге-Кутта 4-го порядка.

Для достижения заданной точности вычисления повторяют, последовательно уменьшая шаг. Процесс вычислений заканчивается, когда для очередного значения $h/2$ будет выполнено условие $\Delta_{h/2} < \varepsilon$, где ε - заданная точность.

7.2. Разностные методы решения краевой задачи

Линейная краевая задача имеет вид:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \tag{7.9}$$

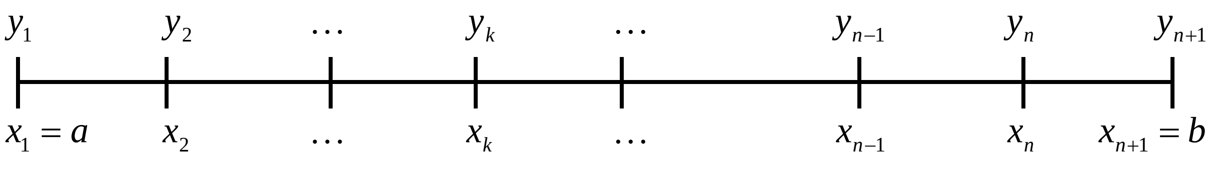
$$\begin{aligned} \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) &= \alpha_3 \\ \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) &= \beta_3 \end{aligned} \tag{7.10}$$

при $|\alpha_1| + |\alpha_2| \neq 0 \quad |\beta_1| + |\beta_2| \neq 0 \quad x \in [a;\, b]$.

Решение задачи (7.9)-(7.10) проводится в следующей последовательности:

1. ***Определение сетки.***

Отрезок $[a;\, b]$ делится на n частей:



$x_1 = a, \quad x_{k+1} = x_k + h, \quad h = \dfrac{b-a}{n}, \quad k = 1, 2, \dots n+1$

2. ***Определение сеточной функции*** $y_k = y(x_k)$**:**

$x_1 = a$	x_2	x_3	…	$x_{n+1} = b$
y_1	y_2	y_3	…	y_{n+1}

3. ***Аппроксимация уравнения*:**

Для каждой узловой точки x_k заменяем функции и производные в уравнениях 7.9-7.10 конечноразностными аналогами:

$y(x_k) = y_k$

$$k=1 \qquad y'_k = \frac{y_{k+1}-y_k}{h} \qquad \text{т.е.} \quad \alpha_1 y_1 + \alpha_2 \frac{y_2 - y_1}{h} = \alpha_3$$

$$k=2,\ldots,n \qquad y'_k = \frac{y_{k+1}-y_{k-1}}{2h} \qquad y''_k = \frac{y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}}{h^2} \tag{7.11}$$

$$k=n+1 \qquad y'_k = \frac{y_k - y_{k-1}}{h} \qquad \text{т.е.} \quad \beta_1 y_n + \beta_2 \frac{y_n - y_{n-1}}{h} = \beta_3$$

Получаем ситему $n+1$ линейных алгебраических уравнений для определения $n+1$ неизвестных величин y_k.

4. ***Решение СЛАУ.*** Система $n+1$ уравнений решается методом прогонки.

Пример 7.4. Решить краевую задачу методом конечных разностей с шагом $h = 0{,}1$:

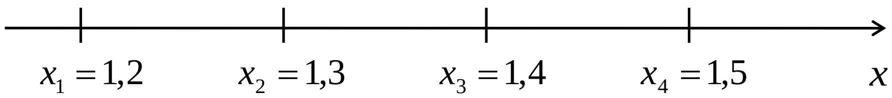
$$y'' - xy' + 2xy = 0{,}8$$

$$y(1{,}2) - 0{,}5y'(1{,}2) = 1$$

$$y'(1{,}5) = 2$$

Решение. Решение проводим в следующей последовательности:

1. Определение сетки:



x_1, x_4 - краевые точки, x_2, x_3 - внутренние точки.

2. Определение сеточной функции $y_k = y(x_k)$:

x_1	x_2	x_3	x_4
y_1	y_2	y_3	y_4

3. Аппроксимация уравнения:

при $x_1 = 1{,}2$ $\qquad y_1 - 0{,}5\dfrac{y_2 - y_1}{0{,}1} = 1$

при $x_2 = 1{,}3$ $\qquad \dfrac{y_3 - 2y_2 + y_1}{0{,}1^2} - 1{,}3\dfrac{y_3 - y_1}{2\cdot 0{,}1} + 2\cdot 1{,}3 y_2 = 0{,}8$

при $x_3 = 1{,}4$ $\qquad \dfrac{y_4 - 2y_3 + y_2}{0{,}1^2} - 1{,}4\dfrac{y_4 - y_2}{2\cdot 0{,}1} + 2\cdot 1{,}4 y_3 = 0{,}8$

при $x_4 = 1{,}5$ $\qquad \dfrac{y_4 - y_3}{0{,}1} = 2$

Получим систему четырех линейных алгебраических уравнений с четырьмя неизвестными y_1, y_2, y_3 и y_4:

$$y_1 - 5(y_2 - y_1) = 1$$
$$100\,(y_3 - 2y_2 + y_1) - 6{,}5(y_3 - y_1) + 2{,}6y_2 = 0{,}8$$
$$100\,(y_4 - 2y_3 + y_2) - 7(y_4 - y_2) + 2{,}8y_3 = 0{,}8$$
$$10(y_4 - y_3) = 2$$

или

$$\begin{cases} 6y_1 & -5y_2 & & & = & 1 \\ 106{,}5y_1 & -197{,}4y_2 & +93{,}5y_3 & & = & 0{,}8 \\ & 107y_2 & -197{,}2y_3 & +93y_4 & = & 0{,}8 \\ & & -10y_3 & +10y_4 & = & 2 \end{cases}$$

4. Решение системы методом прогонки.

Значения a_k, b_k, c_k, d_k записываем в виде таблицы.

Таблица 7.1

k	a_k	b_k	c_k	d_k
1	0	6	-5	1
2	106,5	-197,4	93,5	0,8
3	107	-197,2	93	0,8
4	-10	10	0	2

Прямой ход прогонки. Определяем прогоночные коэффициенты U_k и V_k $(k = 1,\ 2,\ 3, 4)$.

$$U_1 = -c_1 / b_1 = 5/6 = 0{,}833333$$
$$V_1 = d_1 / b_1 = 1/6 = 0{,}166667$$
$$U_2 = -c_2 /(a_2U_1 + b_2) = -93{,}5/(106{,}5 \cdot 0{,}833333 - 197{,}4) = 0{,}860561$$
$$V_2 = (d_2 - a_2V_1)/(a_2U_1 + b_2) =$$
$$= (0{,}8 - 106{,}5 \cdot 0{,}166667)/(106{,}5 \cdot 0{,}833333 - 197{,}4) = 0{,}156006$$
$$U_3 = -c_3 /(a_3U_2 + b_3) = -93/(107 \cdot 0{,}860561 - 197{,}2) = 0{,}884703$$
$$V_3 = (d_3 - a_3V_2)/(a_3U_2 + b_3) =$$
$$= (0{,}8 - 107 \cdot 0{,}156006)/(107 \cdot 0{,}860561 - 197{,}2) = 0{,}151186$$
$$U_4 = -c_4 /(a_4U_3 + b_4) = 0, \qquad \text{т.к. } c_4 = 0$$
$$V_4 = (d_4 - a_4V_3)/(a_4U_3 + b_4) =$$
$$= (2 + 10 \cdot 0{,}151186)/(10 - 10 \cdot 0{,}884703) = 3{,}045925$$

Обратный ход прогонки. Вычисляем y_k $(k = 4,\ 3,\ 2{,}1)$.

Поскольку $U_4 = 0$, то $y_4 = V_4 = 3{,}045925$.

$$y_3 = U_3 y_4 + V_3 = 0{,}884703 \cdot 3{,}045925 + 0{,}151186 = 2{,}845925$$
$$y_2 = U_2 y_3 + V_2 = 0{,}860561 \cdot 2{,}845925 + 0{,}156006 = 2{,}605098$$
$$y_1 = U_1 y_2 + V_1 = 0{,}833333 \cdot 2{,}605098 + 0{,}166667 = 2{,}337581$$

Сеточную функцию $y_k = y(x_k)$ записываем в виде таблицы

x_k	1,2	1,3	1,4	1,5
y_k	2,337581	2,605098	2,845925	3,045925

~~8. Задачи линейного программирования~~

~~Общая постановка задачи линейного программирования (ЛП) включает целевую функцию~~

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + ... + c_n x_n \to \max (\min) \qquad (8.1)$$

~~ограничения типа равенств~~

$$g_i = a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + ... + a_{in} x_n + b_i = 0 \qquad i = 1,\ 2,\ ...,\ k \qquad (8.2)$$

~~и ограничения типа неравенств~~

$$g_i = a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + ... + a_{in} x_n + b_i \le 0 \qquad i = k+1,\ k+2,\ ...,\ n \qquad (8.3)$$

~~В задачах ЛП в число ограничений очень часто входит условие положительности переменных:~~

$$x_i \ge 0, \qquad i = 1,\ 2,\ ...,\ n \qquad (8.4)$$

~~Обычно оно связано с тем, что~~ x_i ~~в этих задачах означает количество объектов~~ i~~-того типа (производимых, перевозимых, потребляемых и т.п.).~~

~~Графический метод решения задач линейного программирования~~

~~В случае двух переменных задачи ЛП могут быть решены графически. Пусть дана задача:~~

$$f(x_1, x_2) = c_1 x_1 + c_2 x_2 \to \max$$
$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 \le a_1$$
$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 \le a_2$$
$$\ldots$$
$$a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 \le a_m \qquad (8.5)$$

~~Введем на плоскости декартову прямоугольную систему координат и сопоставим каждой паре чисел~~ $(x_1,\ x_2)$ ~~точку плоскости с координатами~~ x_1 ~~и~~ x_2~~. Выясним, прежде всего, что будет представлять собой множество~~

~~37.~~ $\cancel{\int_0^1 \frac{\sqrt{x^2+m}}{\sqrt{x+1}}dx}$ $\cancel{n=10}$ ~~38.~~ $\cancel{\int_0^1 \frac{\sqrt{x^2+m}}{\sqrt{x}+1}dx}$ $\cancel{n=10}$

~~39.~~ $\cancel{\int_0^{\pi} x\sin x\,dx}$ $\cancel{n=10}$ ~~40.~~ $\cancel{\int_0^{\pi/2} x^2\cos x\,dx}$ $\cancel{n=10}$

№ 7.1. Решение задачи Коши для дифференциального уравнения первого порядка методом конечных разностей

Решить задачу Коши методом Эйлера, модифицированным методом Эйлера и методом Рунге-Кутта на заданном отрезке:

1.	$y' = 3+2x-y$	$y(0)=2$,	$x\in[0;\ 1]$,	$h=0{,}2$
2.	$y' = y-3x$	$y(1)=0$	$x\in[1;\ 2{,}2]$	$h=0{,}3$
3.	$y' = 1-x+y$	$y(1{,}1)=0$	$x\in[1{,}1;\ 1{,}6]$	$h=0{,}1$
4.	$y' = y-7x$	$y(3)=3$	$x\in[3;\ 5]$	$h=0{,}5$
5.	$y' = 5-y+x$	$y(1)=1$	$x\in[1;\ 5]$	$h=1$
6.	$y' = y-2x+3$	$y(0)=4$	$x\in[0;\ 1]$	$h=0{,}2$
7.	$y' = 4-x+2y$	$y(0)=1$	$x\in[0;\ 1{,}2]$	$h=0{,}3$
8.	$y' = -8+2x-y$	$y(1)=3$	$x\in[1;\ 3]$	$h=0{,}4$
9.	$y' = 2y-3x$	$y(4)=0$	$x\in[4;\ 6]$	$h=0{,}5$
10.	$y' = x-2y$	$y(-1)=1$	$x\in[-1;\ 2]$	$h=0{,}6$
11.	$y' = 7-xy$	$y(-2)=0$	$x\in[-2;\ 0]$	$h=0{,}5$
12.	$y' = 2x+y$	$y(2)=2$	$x\in[2;\ 3{,}5]$	$h=0{,}5$
13.	$y' = 5+x-y$	$y(2)=1$	$x\in[2;\ 4]$	$h=0{,}5$
14.	$y' = y+5x-1$	$y(0)=2$	$x\in[0;\ 3{,}2]$	$h=0{,}8$

15.	$y' = y - 5x + 1$	$y(0) = 2$	$x \in [0;\ 3{,}2]$	$h = 0{,}8$
16.	$y' = 1 - x + y$	$y(0) = 1$	$x \in [0;\ 2{,}5]$	$h = 0{,}5$
17.	$y' = y - 5x$	$y(-1) = 1$	$x \in [-1;\ 1]$	$h = 0{,}4$
18.	$y' = x + 2y$	$y(0) = -1$	$x \in [0;\ 2]$	$h = 0{,}4$
19.	$y' = x + y + 2$	$y(1) = 1$	$x \in [1;\ 3]$	$h = 0{,}5$
20.	$y' = 3x + 4y$	$y(2) = 1$	$x \in [2;\ 5]$	$h = 0{,}5$
21.	$y' = 3 + 2x + y$	$y(0) = 2$	$x \in [0;\ 1]$	$h = 0{,}2$
22.	$y' = 2y - x$	$y(1) = 0$	$x \in [1;\ 2{,}2]$	$h = 0{,}3$
23.	$y' = -x + y$	$y(1{,}1) = 0$	$x \in [1{,}1;\ 1{,}6]$	$h = 0{,}1$
24.	$y' = y - 7x + 2$	$y(3) = 3$	$x \in [3;\ 5]$	$h = 0{,}5$
25.	$y' = 5 - y + x$	$y(1) = 1$	$x \in [1;\ 5]$	$h = 1$
26.	$y' = y - 2x + 3$	$y(0) = 4$	$x \in [0;\ 1]$	$h = 0{,}2$
27.	$y' = 4 - x + 2y$	$y(0) = 1$	$x \in [0;\ 1{,}2]$	$h = 0{,}3$
28.	$y' = -8 + 2x - y$	$y(1) = 3$	$x \in [1;\ 3]$	$h = 0{,}4$
29.	$y' = 2y - 3x$	$y(4) = 0$	$x \in [4;\ 6]$	$h = 0{,}5$
30.	$y' = x^2 - 2y$	$y(-1) = 1$	$x \in [-1;\ 2]$	$h = 0{,}5$
31.	$y' = 5 - x - 2y$	$y(1) = 2$	$x \in [2;\ 4]$	$h = 0{,}5$
32.	$y' = y + 3x - 2$	$y(1) = 2$	$x \in [1;\ 2]$	$h = 0{,}2$
33.	$y' = y - 2x$	$y(1) = 2$	$x \in [1;\ 2{,}2]$	$h = 0{,}3$
34.	$y' = 1 - x + y$	$y(1{,}1) = 1$	$x \in [1{,}1;\ 1{,}6]$	$h = 0{,}1$
35.	$y' = y - 7x$	$y(3) = 1$	$x \in [3;\ 5]$	$h = 0{,}5$

№ 7.2. Решение краевой задачи для линейного дифференциального уравнения второго порядка методом конечных разностей

Используя метод конечных разностей, найти решение краевой задачи с шагом h=0,1:

1. $y'' + \frac{y'}{x} + 2y = x$
$y'(0,7) = 0,5$
$y'(1) = 1,2$

2. $y'' + 2y' - xy = x^2$
$y'(0,6) = 0,7$
$y'(0,9) = 1$

3. $y'' - xy' + 2y = x + 1$
$y'(0,9) = 2$
$y'(1,2) = 1$

4. $y'' - 3y' + \frac{y}{x} = 1$
$y'(0,4) = 2$
$y'(0,7) = 0,7$

5. $y'' + xy' + y = x + 1$
$y'(0,5) = 1$
$y'(0,8) = 1,2$

6. $y'' - 3y' - \frac{y}{x} = x + 1$
$y'(1,2) = 1$
$y'(1,5) = 0,5$

7. $y'' + 2y' - \frac{y}{x} = 3$
$y'(0,2) = 2$
$y'(0,5) = 1$

8. $y'' - \frac{y'}{2} + 3y = 2x^2$
$y'(1) = 0,6$
$y'(1,3) = 1$

9. $y'' + 1,5y' - xy = 0,5$
$y'(1,3) = 1$
$y'(1,6) = 3$

10. $y'' + 4y' - \frac{2}{x}y = \frac{1}{x}$
$y'(0,9) = 1$
$y'(1,2) = 0,8$

11. $y'' + 2xy' - y = 0,4$
$y'(0,3) = 1$
$y'(0,6) = 2$

12. $y'' - \frac{y'}{2} + \frac{4}{x}y = \frac{x}{2}$
$y'(1,3) = 0,3$
$y'(1,6) = 0,6$

13. $y'' - 0,5xy' + y = 2$
$y'(0,4) = 1,2$
$y'(0,7) = 1,4$

14. $y'' - \frac{y'}{x} - 0,4y = 2x$
$y'(0,9) = 1,7$
$y'(0,6) = 0,6$

15. $y'' + \frac{2}{x} y' - 3y = 2$

$y'(0{,}8) = 1{,}5$

$y'(1{,}1) = 3$

16. $y'' - 2xy' - 2y = 0{,}6$

$y'(2) = 1$

$y'(2{,}3) = 1{,}5$

17. $y'' + 2xy' + y = 1$

$y'(0{,}5) = 1$

$y'(0{,}8) = 3$

18. $y'' - \frac{1}{2x} y' + 0{,}8y = 2$

$y'(2) = 1$

$y'(1{,}7) = 2$

19. $y'' - 3xy' + 2y = 1{,}5$

$y'(0{,}7) = 1{,}3$

$y'(1) = 2$

20. $y'' - \frac{y'}{3} + xy = 2$

$y'(1) = 1$

$y'(0{,}7) = 1{,}6$

21. $y'' - \frac{2}{x} y' - 0{,}4y = 4x$

$y'(0{,}9) = 1{,}5$

$y'(0{,}6) = 0{,}6$

22. $y'' + 2y' - \frac{1}{x} y = \frac{2}{x}$

$y'(1{,}1) = 0{,}8$

$y'(0{,}8) = 1$

23. $y'' - xy' - 4y = 0{,}6$

$y'(2) = 1$

$y'(2{,}3) = 3$

24. $y'' - \frac{y'}{4} + \frac{2}{x} y = \frac{x}{2}$

$y'(1{,}3) = 0{,}6$

$y'(1{,}6) = 0{,}3$

25. $y'' - \frac{2}{x} y' + 0{,}8y = x$

$y'(2) = 1$

$y'(1{,}7) = 2$

26. $y'' + \frac{y'}{x} + 2y = x$

$y'(0{,}7) = 0{,}5$

$y'(1) = 1{,}2$

27. $y'' - \frac{y'}{2} + xy = 4$

$y'(1) = 1{,}5$

$y'(0{,}7) = 2$

28. $y'' - xy' + 2y = x + 1$

$y'(0{,}9) = 2$

$y'(1{,}2) = 1$

29. $y'' + xy' + y = x + 1$

$y'(0{,}5) = 1$

$y'(0{,}8) = 1{,}2$

30. $y'' + 2y' - \frac{y}{x} = 3$

$y'(0{,}2) = 2$

$y'(0{,}5) = 1$