6. Численное интегрирование

Требуется вычислить определенный интеграл:

$$I = \int_a^b f(x)dx \tag{6.1}$$

Выберем на отрезке интегрирования $[a, b]$ n различных узлов

$a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_{n-1} < x_n = b$

и интерполируем функцию $f(x)$ по ее значениям в этих узлах некоторым полиномом $P_m(x)$. Тогда определенный интеграл (6.1) приближенно можно вычислять по формуле

$$I = \int_a^b P_m(x)dx, \tag{6.2}$$

которая называется квадратурной формулой интерполяционного типа.

6.1. Метод прямоугольников

На каждом отрезке $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, 1, 2, ..., n-1$ функция $f(x)$ заменяется полиномом нулевой степени $P_0(x) = f(x_i)$.

Поэтому приближенно I вычисляется по формуле (см. рис. 6.1):

$$I = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)(x_{i+1} - x_i) \tag{6.3}$$

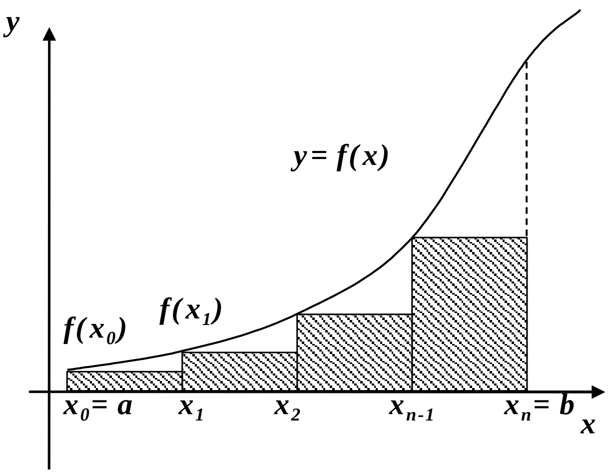

Рис. 6.1. Метод прямоугольников.

Для равноотстоящих узлов формула (6.3) имеет следующий вид:

$$I = h\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i), \quad h = x_{i+1} - x_i \tag{6.4}$$

Или

$$I = h\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \tag{6.5}$$

Формулу (6.4) называют формулой левых прямоугольников, а (6.5) - правых прямоугольников.

Программа вычисления интеграла методом прямоугольников представлена на рис. 6.2. Исходные данные: пределы интегрирования и число разбиений

	A	B
1	a	0
2	b	1
3	n	8
4		
5	I	1,227024
6		

```
Function f(x)
    f = Sqr(2 * x ^ 2 + 1)
End Function
Sub Integral()
    a = Cells(1, 2)
    b = Cells(2, 2)
    n = Cells(3, 2)
    h = (b - a) / n
    x = a
    S = 0
1   s = s + f(x) * h
    x = x + h
    If x < b Then GoTo 1
    Cells(5, 2) = s
End Sub
```

Рис. 6.2. Программа вычисления интеграла методом прямоугольников.

6.2. Метод трапеций

В этом методе на каждом отрезке $[x_i,\ x_{i+1}]$ функция $f(x)$ заменяется полиномом 1-й степени $P_1(x)$.

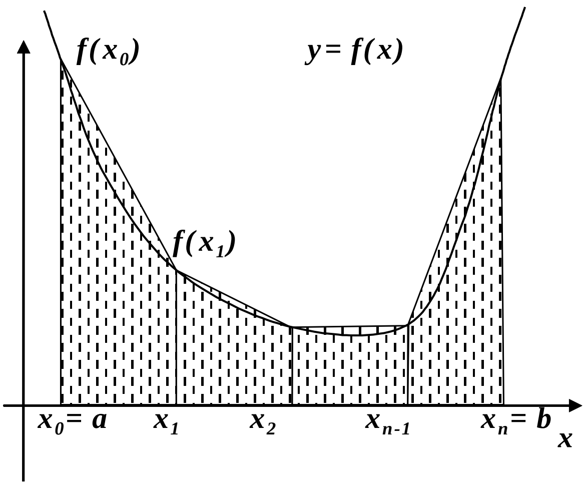

Рис. 6.3. Метод трапеций.

По формуле Лагранжа:

$$P_1(x)=f(x_i)\frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}+f(x_{i+1})\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i} \qquad (6.6)$$

Интегрируя $P_1(x)$ на отрезке $[x_i,\ x_{i+1}]$, получим:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} P_1(x)dx=\frac{1}{2}(f(x_i)+f(x_{i+1}))(x_{i+1}-x_i) \qquad (6.7)$$

Суммируя по всем i $(i=0, 1, 2, \ldots, n-1)$, получим формулу трапеций (см. рис. 6.3):

$$I=\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1}(f(x_i)+f(x_{i+1}))(x_{i+1}-x_i) \qquad (6.8)$$

Для равноотстоящих узлов x_0, $x_1=x_0+h$, …, $x_n=x_0+nh$ формула (6.8) принимает следующий вид:

$$I=\frac{h}{2}\sum_{i=0}^{n-1}(f(x_i)+f(x_{i+1})) \qquad (6.9)$$

или

$$I=h\left(\frac{f(a)+f(b)}{2}+\sum_{i=1}^{n-1}f(x_i)\right) \qquad (6.10)$$

Программа вычисления интеграла методом трапеций:
в программе, представленной на рис. 6.2, заменить отмеченные строки на следующие:

```
1   s = s + 0.5 * (f(x) + f(x + h)) * h
    x = x + h
```

6.3. Метод парабол (Симпсона)

Интервал $[a, b]$ разделим на $2n$ отрезков. Группируя узлы тройками x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, на каждом отрезке $[x_{i-1}, x_{i+1}]$ $i=1,3,\ldots,2n-1$ интерполируем функцию $f(x)$ полиномом 2-й степени $P_2(x)$

По формуле Лагранжа:

$$P_2(x)=f(x_{i-1})\frac{(x-x_i)(x-x_{i+1})}{(x_{i-1}-x_i)(x_{i-1}-x_{i+1})}+f(x_i)\frac{(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})}{(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})}+$$
$$+f(x_{i+1})\frac{(x-x_{i-1})(x-x_i)}{(x_{i+1}-x_{i-1})(x_{i+1}-x_i)}$$

Интегрируя $P_2(x)$ на отрезке $[x_{i-1},\ x_{i+1}]$, получим:

$$\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} P_2(x)dx=\frac{h}{3}[f(x_{i-1})+4f(x_i)+f(x_{i+1})] \qquad (6.11)$$

Суммируя формулу (6.11) по всем n отрезкам, получаем формулу для приближенного интегрирования (см. рис.6.4):

$$I = \frac{h}{3}\sum_{k=0}^{n-1}[f(x_{2k}) + 4f(x_{2k+1}) + f(x_{2k+2})] \quad (6.12)$$

или

$$I = \frac{h}{3}(f(a) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + ... + 4f(x_{n-1}) + f(b)) \quad (6.13)$$

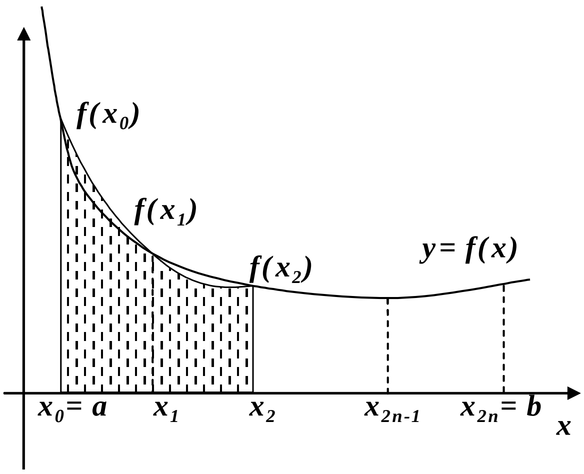

Рис. 6.4. Метод парабол.

Программа вычисления интеграла методом парабол (Симпсона): в программе, представленной на рис. 6.2, заменить отмеченные строки на следующие:

```
1    s = s + (f(x) + 4*f(x + h) + f(x + 2*h))*h/3
     x = x + 2*h
```

Оценка точности вычисления определенного интеграла.

Погрешность вычисления значения интеграла I_{2n} при числе шагов h, равном $2n$, определяется по формуле Рунге:

$$\Delta_{2n} = \frac{|I_{2n} - I_n|}{2^p - 1}$$

где I_n - значения интеграла при числе шагов, равном n,

p - порядок точности, равный 1 для формулы левых (правых) прямоугольников, 2 для формулы трапеций и 4 для формулы Симпсона.

Таким образом, интеграл вычисляется по выбранной формуле (прямоугольников, трапеций, парабол Симпсона) для последовательных значений числа шагов $N = n,\ 2n,\ 4n$, и т.д. Процесс вычислений заканчивается, когда для очередного значения N будет выполнено условие $\Delta_{2n} < \varepsilon$, где ε - заданная точность.

Пример 6.1. Вычислить определенный интеграл методами прямоугольников, трапеций и парабол:

$$I = \int_0^1 \sqrt{2x^2+1}\,dx$$

Решение. Выберем на отрезке интегрирования $[0; 1]$ $n = 8$ различных узлов

$$x_0 = a, \quad x_{i+1} = x_i + h$$

Шаг разбиения для равноотстоящих узлов определяем по формуле

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{8} = 0{,}125$$

Сравнивая формулы 6.4, 6.5, 6.10 и 6.13, обратим внимание, что определенный интеграл приближенно можно вычислять по формуле

$$I = h\sum_{i=0}^{n} c_i f(x_i) \tag{6.14}$$

где c_i - числовые коэффициенты, на которые умножаются значения функции в узлах $f(x_i)$:

$c_i = 1, 1, 1, ..., 1, 0$ - для метода левых прямоугольников;

$c_i = 0, 1, 1, ..., 1, 1$ - для метода правых прямоугольников;

$c_i = 0{,}5; 1; 1; ...; 1; 0{,}5$ - для метода трапеций;

$c_i = \frac{1}{3}; \frac{4}{3}; \frac{2}{3}; \frac{4}{3}; \frac{2}{3}; ..., \frac{2}{3}; \frac{4}{3}; \frac{1}{3}$ - для метода парабол

Вычислим значения функции в узлах (табл. 6.3).

Таблица 6.3

x_i	0	0,125	0,25	0,375	0,5	0,625	0,75	0,875	1
$f(x_i)$	1,000	1,016	1,061	1,132	1,225	1,335	1,458	1,591	1,732

Вычислим интеграл:

По формуле левых прямоугольников

$$I = 0{,}125(1{,}0 + 1{,}016 + 1{,}061 + 1{,}132 + 1{,}225 + 1{,}335 + 1{,}458 + 1{,}591) = 1{,}227$$

По формуле правых прямоугольников

$$I = 0{,}125(1{,}016 + 1{,}061 + 1{,}132 + 1{,}225 + 1{,}335 + 1{,}458 + 1{,}591 + 1{,}732) = 1{,}319$$

По формуле трапеций

$$I = 0{,}125(0{,}5 \cdot 1{,}0 + 1{,}016 + 1{,}061 + 1{,}132 + 1{,}225 +$$
$$+ 1{,}335 + 1{,}458 + 1{,}591 + 0{,}5 \cdot 1{,}732) = 1{,}273$$

По формуле парабол

$$I = \frac{0{,}125}{3}(1\cdot 1{,}0 + 4\cdot 1{,}016 + 2\cdot 1{,}061 + 4\cdot 1{,}132 + 2\cdot 1{,}225 +$$

$$+ 4\cdot 1{,}335 + 2\cdot 1{,}458 + 4\cdot 1{,}591 + 1\cdot 1{,}732) = 1{,}271$$

Пример 6.2. Вычислить с помощью программы Excel определенный интеграл методом трапеций

$$I = \int_0^1 \sqrt{2x^2+1}\,dx.$$

Порядок решения.

1) Ввести в ячейки **A1:F1** заголовки столбцов (рис. 6.5).
2) В ячейку **A2** – нижний предел интеграла $\boldsymbol{a}$ **0**
3) В ячейку **E2** – шаг разбиения $\boldsymbol{h = (b - a)/8}$ для $\boldsymbol{n = 8}$ **=(1-0)/8**
4) В ячейку **A3** – значение $\boldsymbol{x_1 = a + h}$ **0,125**
5) Выделить ячейки **A2:A3** и при помощи маркера заполнения ввести значения $\boldsymbol{x_i = a + ih}$ до $\boldsymbol{x = b = 1}$ в столбце **A**.
6) В ячейку **B2** – формулу $\boldsymbol{f(x)}$ **=КОРЕНЬ(2*A2^2+1)**
7) Выделить ячейку **B2** и при помощи маркера заполнения ввести значения $\boldsymbol{f(x_i)}$ в столбце **B**.
8) В ячейки **C2, C3, …** – коэффициенты $\boldsymbol{c_i = 0{,}5;\ 1;\ 1;\ \ldots;\ 1;\ 0{,}5}$
9) В ячейку **D2** – формулу $\boldsymbol{c_0 f(x_0)}$ **=B2*C2**
10) Выделить ячейку **D2** и при помощи маркера заполнения ввести значения $\boldsymbol{c_i f(x_i)}$ в столбце **D**.
11) В ячейке **D11** найти сумму чисел столбца **D**, используя кнопку **Автосумма** $\boxed{\Sigma}$.
12) В ячейке **F11** найти значение интеграла **=D11*E2**

	A	B	C	D	E	F	G
1	x	f(x)	c	cf	h	I	
2	0	1	0,5	0,5	0,125		
3	0,125	1,015505	1	1,015505			
4	0,25	1,06066	1	1,06066			
5	0,375	1,131923	1	1,131923			
6	0,5	1,224745	1	1,224745			
7	0,625	1,334635	1	1,334635			
8	0,75	1,457738	1	1,457738			
9	0,875	1,59099	1	1,59099			
10	1	1,732051	0,5	0,866025			
11				10,18222		1,272778	

Рис. 6.5. Вычисление определенного интеграла методом трапеций с помощью программы Excel.

27.

x	-1	0	2	3
y	1	4	10	13

28.

x	-1	1	2	4
y	4	0	-2	-6

29.

x	-1	1	2	3
y	-7	-3	-1	1

30.

x	-1	0	1	2
y	-4	-3	0	4

31.

x	-2	1	2	3
y	2	8	10	12

32.

x	-1	0	1	3
y	-1	-1	1	11

33.

x	-2	-1	0	1
y	4	-1	-2	0

34.

x	0	1	2	3
y	-3	-2	1	5

35.

x	-2	-1	0	2
y	-1	-1	1	10

36.

x	1	2	3	4
y	-2	0	-2	-7

37.

x	-2	0	1	2
y	15	1	0	2

38.

x	-2	-1	0	1
y	5	2	1	1

39.

x	-3	-2	-1	0
y	-5	-6	-5	-3

40.

x	-2	-1	1	2
y	7	3	-1	3

41.

x	-2	-1	1	2	3
y	$4+\frac{3}{2}m$	$m+1$	$\frac{m}{2}$	1	$3-\frac{m}{2}$

№6. Численное интегрирование

Вычислить интеграл, используя квадратурные формулы прямоугольников, трапеций и парабол (Симпсона), при заданном числе интервалов n:

1. $\int_{-2}^{4}(2x^2-\sqrt{x+2})dx$ $n=6$
2. $\int_{-3}^{0}(5x^2+x+1)dx$ $n=6$
3. $\int_{0}^{3}(3x^2-\sqrt{x})dx$ $n=6$
4. $\int_{1}^{4}(x^3-\sqrt{x})dx$ $n=6$
5. $\int_{1}^{4}(7+x-2x^2)dx$ $n=6$
6. $\int_{0}^{3}(7x^2-3\sqrt{x})dx$ $n=6$

7. $\int_{2}^{5}(2x^2-2-\sqrt{x})dx$ $n=6$

8. $\int_{0}^{3}(5x^2+\sqrt{x})dx$ $n=6$

9. $\int_{-2}^{2}(x^3+1)dx$ $n=8$

10. $\int_{0}^{4}(2x^2+1-\sqrt{x})dx$ $n=8$

11. $\int_{-2}^{2}(x^2+\sqrt{x+2}-1)dx$ $n=8$

12. $\int_{0}^{2}(x^2+2+\sqrt{x})dx$ $n=8$

13. $\int_{1}^{3}(3x^2-x-1)dx$ $n=8$

14. $\int_{-1}^{3}(x^3+2)dx$ $n=8$

15. $\int_{-2}^{2}(2x^2+1-\sqrt{x+4})dx$ $n=8$

16. $\int_{1}^{4}(2x^2-1{,}5\sqrt{x})dx$ $n=6$

17. $\int_{1}^{4}(7\sqrt{x}+2x^2)dx$ $n=6$

18. $\int_{0}^{3}(7x^2+3\sqrt{x})dx$ $n=6$

19. $\int_{2}^{5}(2x^2-2+\sqrt{x})dx$ $n=6$

20. $\int_{0}^{3}(5x^2-1+\sqrt{x})dx$ $n=6$

21. $\int_{3}^{6}(x^2+4+\sqrt{x})dx$ $n=6$

22. $\int_{2}^{6}(x^3+3)dx$ $n=8$

23. $\int_{0}^{3}(2x^2-1+\sqrt{x})dx$ $n=6$

24. $\int_{-2}^{2}(3x^2+2\sqrt{x+2})dx$ $n=8$

25. $\int_{-2}^{2}(x^2+2\sqrt{x+2})dx$ $n=8$

26. $\int_{-3}^{1}(x^2+2x-1{,}5)dx$ $n=6$

27. $\int_{-3}^{0}(3x^2+1+\sqrt{x+3})dx$ $n=6$

28. $\int_{0}^{3}(3x^2+5+\sqrt{x})dx$ $n=6$

29. $\int_{1}^{4}(7x+x^2-\sqrt{x})dx$ $n=6$

30. $\int_{0}^{3}(x^2-3\sqrt{x})dx$ $n=6$

31. $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{1+0{,}1m} e^{-\frac{x^2}{2}}dx$ $n=10$

32. $\int_{0}^{1}\frac{dx}{1+\sqrt{x}}$ $n=10$

33. $\int_{0}^{m}\sqrt{m^2-x^2}dx$ $n=10$

34. $\int_{0}^{m}\sqrt{x^2+1}\,dx$ $n=10$

35. $\int_{0}^{1}\frac{dx}{\sqrt{2x^2+1}}$ $n=10$

36. $\int_{0}^{1}\frac{\sqrt{x^2+m}}{1+\sqrt{x+m}}dx$ $n=10$