	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	n=	4	kmax=	10				x	r
2	10	1	0	0		5		1	
3	-2	9	1	0		-1		1	
4	0	0,1	4	-1		-5		1	
5	0	0	-1	8		40		1	

Рис. 3.8. Таблица исходных данных для решения системы линейных алгебраических уравнений итерационными методами на языке VBA

4. Численные методы решения систем нелинейных уравнений

Требуется решить систему нелинейных уравнений вида:

$$\begin{aligned} &F_1(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \\ &F_2(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \\ &\dots \\ &F_n(x_1, x_2, ..., x_n) = 0. \end{aligned} \tag{4.1}$$

4.1. Метод простой итерации (метод Якоби) для систем нелинейных уравнений

Систему нелинейных уравнений (4.1) после преобразований

$$x_i = x_i - F_i(x)/M_i, \qquad i = 1, 2, 3, ..., n$$

(здесь M_i определяются из условия сходимости), представим в виде:

$$\begin{aligned} &x_1 = f_1(x_1, x_2, ..., x_n) \\ &x_2 = f_2(x_1, x_2, ..., x_n) \\ &\dots \\ &x_n = f_n(x_1, x_2, ..., x_n) \end{aligned} \tag{4.2}$$

Из системы (4.2) легко получить итерационные формулы метода Якоби. Возьмем в качестве начального приближения какую-нибудь совокупность чисел $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, ..., x_n^{(0)}$. Подставляя их в правую часть (4.2) вместо переменных $x_1, x_2, ..., x_n$, получим новое приближение к решению исходной системы:

$$\begin{aligned} &x_1^{(1)} = f_1(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, ..., x_n^{(0)}) \\ &x_2^{(1)} = f_2(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, ..., x_n^{(0)}) \\ &\dots \\ &x_n^{(1)} = f_n(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, ..., x_n^{(0)}) \end{aligned} \tag{4.3}$$

Эта операция получения первого приближения $x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, ..., x_n^{(1)}$ решения системы уравнения (4.2) называется первым шагом итерации. Подставляя полученное решение в правую часть уравнения (4.2) получим следующее итерационное приближение: $x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, ..., x_n^{(2)}$ и т.д.:

$$x_i^{(k+1)} = f_i(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, ..., x_n^{(k)}), \qquad i = 1, 2, 3, ..., n. \tag{4.4}$$

Итерационный процесс можно считать законченным, если все значения переменных $(k+1)$-ой итерации, отличаются от значений соответствующих переменных предыдущей итерации, на величину по модулю меньшую заданной точности $\boldsymbol{\varepsilon}$, т.е. если:

$$\max_i |x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}| < \varepsilon \tag{4.5}$$

4.2. Метод Зейделя для систем нелинейных уравнений

Метод Зейделя отличается от метода Якоби тем, что вычисления ведутся не по формулам (3.4), а по следующим формулам:

$$\begin{aligned}
x_1^{(k+1)} &= f_1(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, ..., x_n^{(k)}) \\
x_2^{(k+1)} &= f_2(x_1^{(k+1)}, x_2^{(k)}, ..., x_n^{(k)}) \\
x_3^{(k+1)} &= f_3(x_1^{(k+1)}, x_2^{(k+1)}, ..., x_n^{(k)}) \\
&\dots \\
x_n^{(k+1)} &= f_n(x_1^{(k+1)}, x_2^{(k+1)}, ..., x_n^{(k+1)})
\end{aligned} \tag{4.6}$$

При решении систем нелинейных уравнений необходимо определить приемлемое начальное приближение. Для случая двух уравнений с двумя неизвестными начальное приближение находится графически.

Сходимость метода Зейделя (Якоби тоже) зависит от вида функции в (4.2), вернее она зависит от матрицы, составленной из частных производных:

$$F' = \begin{pmatrix} f'_{11} & f'_{12} & f'_{13} & \cdots & f'_{1n} \\ f'_{21} & f'_{22} & f'_{23} & \cdots & f'_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f'_{n1} & f'_{n2} & f'_{n3} & \cdots & f'_{nn} \end{pmatrix}, \tag{4.7}$$

где $f'_{ij} = \dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}$.

Итерационный процесс сходится, если сумма модулей каждой строки F' меньше единицы в некоторой окрестности корня:

$$|f'_{i1}| + |f'_{i2}| + |f'_{i3}| + ... + |f'_{in}| < 1, \quad i = 1, 2, 3, ..., n$$

или

$$\max_{1 \le i \le n} \sum_{j=1}^{n} | f'_{ij} | < 1$$

Пример 4.1. Найти решение системы методом Зейделя с точностью $\varepsilon = 0{,}001$:

$$\begin{aligned} &F(x, y) = 2\sin(x+1) - y - 0{,}5 = 0 \\ &G(x, y) = 10\cos(y-1) - x + 0{,}4 = 0 \end{aligned} \qquad (4.8)$$

Решение: Представим (4.8) в виде (4.5):

$$\begin{aligned} &x = f_1(x, y) = x - (2\sin(x+1) - y - 0{,}5)/M_1 \\ &y = f_2(x, y) = y - (10\cos(y-1) - x + 0{,}4)/M_2 \end{aligned} \qquad (4.9)$$

Задаем начальные приближения $x_0 = -1$, $y_0 = -0{,}7$.

Запишем достаточное условие сходимости и определяем M_1, M_2:

$$F' = \begin{pmatrix} f'_{1x} & f'_{1y} \\ f'_{2x} & f'_{2y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 2\cos(x+1)/M_1 & 1/M_1 \\ -1/M_2 & 1 + 10\sin(y-1)/M_2 \end{pmatrix}$$

$$|1 - 2\cos(x_0 + 1)/M_1| + |1/M_1| < 1$$
$$|-1/M_2| + |1 + 10\sin(y_0 - 1)/M_2| < 1$$

$$|1 - 2\cos(1+1)/M_1| + |1/M_1| < 1$$
$$|-1/M_2| + |1 + 10\sin(-0{,}7 - 1)/M_2| < 1$$

$$|1 - 2/M_1| + |1/M_1| < 1 \quad \text{и} \quad |-1/M_2| + |1 - 9{,}91665\ /M_2| < 1$$

Определяем частные значения $M_1 = 2$, $M_2 = 10$, которые удовлетворяют неравенствам

$$1 - 2/2 + 1/2 < 1 \quad \text{и} \quad 1/10 - 9{,}91665/10 < 1$$

Переходим к реализации итерационного процесса:

$$\begin{aligned} &x_{k+1} = x_k - (2\sin(x_k + 1) - y_k - 0{,}5)/2 \\ &y_{k+1} = y_k - (10\cos(y_k - 1) - x_k + 0{,}4)/10 \end{aligned}$$

$$x_1 = x_0 - (2\sin(x_0 + 1) - y_0 - 0{,}5)/2 =$$
$$= -1 - (2\sin(-1+1) + 0{,}7 - 0{,}5)/2 = -1{,}1$$

$$y_1 = y_0 - (10\cos(y_0 - 1) - x_0 + 0{,}4)/10 =$$
$$= -0{,}7 - (10\cos(-0{,}7 - 1) + 1{,}1 + 0{,}4)/10 = -0{,}72116$$

$$x_2 = x_1 - (2\sin(x_1 + 1) - y_1 - 0{,}5)/2 =$$
$$= -1{,}1 - (2\sin(-1{,}1 + 1) + 0{,}72116 - 0{,}5)/2 = -1{,}11075$$

$$y_2 = y_1 - (10\cos(y_1 - 1) - x_1 + 0{,}4)/10 =$$
$$= -0{,}72116 - (10\cos(-0{,}72116 - 1) + 1{,}11075 + 0{,}4)/10 = -0{,}72244$$

$$x_3 = x_2 - (2\sin(x_2+1) - y_2 - 0{,}5)/2 =$$
$$= -1{,}11075 - (2\sin(-1{,}11075+1) + 0{,}72244 - 0{,}5)/2 = -1{,}11145$$
$$y_3 = y_2 - (10\cos(y_2 - 1) - x_2 + 0{,}4)/10 =$$
$$= -0{,}72244 - (10\cos(-0{,}72244-1) + 1{,}11145 + 0{,}4)/10 = -0{,}72252$$

Определяем погрешность по формуле $\max\limits_{1\le i\le n} |x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}| < \varepsilon$:

$$|x_3 - x_2| = |-1{,}11145 + 1{,}11075| = 0{,}0007 < \varepsilon = 0{,}001$$

$$|y_3 - y_2| = |-0{,}72252 + 0{,}72244| = 0{,}00008 < \varepsilon = 0{,}001$$

Таким образом, имеем решение: $x^* = -1{,}1115$, $y^* = -0{,}7225$.

Программа, реализующая решение данной задачи, представлена на рис. 4.1. Исходные данные – начальные приближения x_0, y_0, множители M_1, M_2, точность ε и максимальное число итераций $\boldsymbol{n}$.

	A	B
1	x0	-1
2	y0	-0,7
3	M1	2
4	M2	10
5	e	0,001
6	n	10000
7	x	-1,1112
8	y	-0,72245

```
Sub program5()
  x = Cells(1, 2)
  y = Cells(2, 2)
  m1 = Cells(3, 2)
  m2 = Cells(4, 2)
  eps = Cells(5, 2)
  n = Cells(6, 2)
  For k = 1 To n
   xk = x-(2*Sin(x+1)-y-0.5)/m1
   yk = y-(10*Cos(y-1)-x+0.4)/m2
   If Abs(xk-x)<e And Abs(yk-y)< e Then
     Cells(7, 2) = xk
     Cells(8, 2) = yk
     End
   End If
   x = xk
   y = yk
  Next k
  MsgBox "решение не найдено"
End Sub
```

Рис. 4.1. Программа решения системы нелинейных уравнений методом Зейделя.

4.3. Метод Ньютона решения систем нелинейных уравнений

Основная идея метода Ньютона состоит в выделении из уравнений системы линейных частей, которые являются главными при малых приращениях аргументов. Это позволяет свести исходную задачу к решению последовательности систем линейных уравнений.

Рассмотрим систему двух нелинейных уравнений с двумя неизвестными вида:

$$\begin{aligned} F(x,y) &= 0 \\ G(x,y) &= 0 \end{aligned} \qquad (4.10)$$

Пусть известно некоторое приближение x_k, y_k корня x^*, y^*. Тогда поправки $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$, $\Delta y_k = y_{k+1} - y_k$ можно найти, решая систему:

$$\begin{aligned} F(x_k + \Delta x_k, y_k + \Delta y_k) &= 0 \\ G(x_k + \Delta x_k, y_k + \Delta y_k) &= 0 \end{aligned} \qquad (4.11)$$

Для этого разложим функции F, G в ряд Тейлора по Δx_k, Δy_k. Сохранив только линейные по Δx_k, Δy_k части, получим систему линейных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial F(x_k,y_k)}{\partial x}\Delta x_k + \frac{\partial F(x_k,y_k)}{\partial y}\Delta y_k &= -F(x_k,y_k) \\ \frac{\partial G(x_k,y_k)}{\partial x}\Delta x_k + \frac{\partial G(x_k,y_k)}{\partial y}\Delta y_k &= -G(x_k,y_k) \end{aligned} \qquad (4.12)$$

относительно неизвестных поправок Δx_k, и Δy_k. Решая эту систему линейных уравнений, определяем значения Δx_k, Δy_k.

Таким образом, решение системы уравнений по методу Ньютона состоит в построении итерационной последовательности:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k + \Delta x_k \\ y_{k+1} &= y_k + \Delta y_k \end{aligned} \qquad (4.13)$$

где Δx_k, Δy_k - решения систем линейных уравнений, вида (4.12) на каждом шаге итерации.

В методе Ньютона для обеспечения хорошей сходимости также важен правильный выбор начального приближения.

Пример 4.2. Найти решение системы (4.8) методом Ньютона с точностью $\varepsilon = 0{,}001$.

$$\begin{aligned} F(x,y) &= 2\sin(x+1) - y - 0{,}5 = 0 \\ G(x,y) &= 10\cos(y-1) - x + 0{,}4 = 0 \end{aligned} \qquad (4.13)$$

Решение. Начальные приближения $x_0 = -1$, $y_0 = -0{,}7$. Определим частные производные:

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = 2\cos(x+1); \qquad \frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = -1$$

$$\frac{\partial G(x,y)}{\partial x} = -1 \qquad \frac{\partial G(x,y)}{\partial x} = -10\sin(y-1)$$

и, используя (4.12), построим систему линейных уравнений относительно поправок

$$\begin{cases} 2\cos(x_k+1)\Delta x_k & -1\cdot\Delta y_k & = & -2\sin(x_k+1)+y_k+0,5 \\ -1\cdot\Delta x_k & -10\sin(y_k-1)\Delta y_k & = & -10\cos(y_k-1)-x_k+0,4 \end{cases}$$

Подставляя начальные приближения $x_0=-1$, $y_0=-0,7$ и решая систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 2\Delta x_0 & -\Delta y_0 & = & -0,2 \\ -\Delta x_0 & +9,9166\Delta y_0 & = & -0,116 \end{cases},$$

определяем поправки на первом шаге итерации

$$\Delta x_0=-0,1112\ ,\ \ \Delta y_0=-0,0225$$

Далее начальное приближение уточняем по формулам (4.13)

$$x_1=x_0+\Delta x_0=-1-0,1112=-1,1112$$
$$y_1=y_0+\Delta y_0=-0,7-0,0225=-0,7225$$

Подставляя результаты первой итерации $x_1=-1,1112$, $y_1=-0,7225$ и решая систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 1,9876\Delta x_1 & -\Delta y_1 & = & -5,5806\cdot 10^{-4} \\ -\Delta x_1 & +9,8852\Delta y_1 & = & 2,4576\cdot 10^{-5} \end{cases},$$

определяем поправки на втором шаге итерации

$$\Delta x_1=-2.945\cdot 10^{-4}\approx 0,0003,\ \ \Delta y_1=-2.73\cdot 10^{-5}\approx 0,00003$$

Далее x_1 и y_1 уточняем по формулам (4.12)

$$x_2=x_1+\Delta x_1=-1,1112-0,0003\approx -1,1115$$
$$y_2=y_1+\Delta y_1=-0,7225-0,00003\approx -0,7225$$

Определяем погрешность по формуле $\max\limits_{1\le i\le n}|x_i^{(k+1)}-x_i^{(k)}|<\varepsilon$:

$$|x_2-x_1|=|\Delta x_1|=0,0003<\varepsilon=0,001$$
$$|y_2-y_1|=|\Delta y_1|=0,00003<\varepsilon=0,001$$

Таким образом, имеем решение: $x^*=-1,1115$, $y^*=-0,7225$.

Программа, реализующая метод Ньютона для указанной задачи, представлена на рис. 4.2. Исходные данные – начальные приближения x_0, y_0, точность ε и максимальное число итераций n.

	A	B
1	x0	-1
2	y0	-0,7
3	e	0,001
4	n	10000
5	x	-1,11149
6	y	-0,72253
7		
8		

```
Sub program6()
 x = Cells(1, 2)
 y = Cells(2, 2)
 e = Cells(3, 2)
 n = Cells(4, 2)
 For k = 1 To n
  F = 2 * Sin(x + 1) - y - 0.5
  G = 10 * Cos(y - 1) - x + 0.4
  Fx = 2 * Cos(x + 1)
  Fy = -1
  Gx = -1
  Gy = -10 * Sin(y - 1)
  D = Fx * Gy - Gx * Fy
  Dx = (G * Fy - F * Gy) / D
  Dy = (F * Gx - G * Fx) / D
  xk = x + Dx
  yk = y + Dy
  If Abs(xk-x)< e And Abs(yk-y)< e Then
    Cells(5, 2) = xk
    Cells(6, 2) = yk
    End
  End If
  x = xk
  y = yk
 Next k
 MsgBox "решение не найдено"
 End
End Sub
```

Рис. 4.2. Программа, реализующая метод Ньютона на языке VBA.

Пример 4.3. Найти решение системы (4.8) с помощью программы Excel.

$$F(x,y) = 2\sin(x+1) - y - 0{,}5 = 0$$

$$G(x,y) = 10\cos(y-1) - x + 0{,}4 = 0$$

Порядок решения.

1) Подключить надстройку «Поиск решения» через *Кнопка «Офис»-Параметры Excel-Надстройки-Надстройки Excel-Перейти* (рис. 4.3);
2) Ввести в ячейки **A1, B1, C1, D1** заголовки столбцов (рис. 4.4а);
3) В ячейку **A2** – начальное приближение для $\boldsymbol{x}$: **– 1**
4) В ячейку **B2** – начальное приближение для $\boldsymbol{y}$: **– 0,7**
5) В ячейку **C2** – формулу $\boldsymbol{F(x,y)}$ **=2*SIN(A2+1)-B2-0,5**
6) В ячейку **D2** – формулу $\boldsymbol{G(x,y)}$ **=10*COS(B2-1)-A2+0,4**
7) Вызвать диалоговое окно «Поиск решения»: *Данные-Поиск решения* (рис. 4.5)

8) В качестве целевой ячейки указываем результат вычисления левой части одного из уравнений, например, $F(x, y)$, т.е. ячейку **С2**
9) Для решения уравнения значение $F(x, y) = 0$, поэтому выбираем переключатель «значение», а в соответствующее поле вводим **0**
10) Установив курсор в поле «Изменяя ячейки», выделяем ячейки неизвестных x, y, т.е. **А2: В2**
11) Остальные уравнения системы рассматриваются как дополнительные ограничения ($G(x, y) = 0$). Нажимаем кнопку «Добавить», отмечаем мышью ячейку **D2** и вводим **=0**
12) Нажимаем кнопку «Выполнить». Если решение найдено, появляется окно сообщения предложением сохранить найденное решение или восстановить исходные значения. Нажимаем кнопку ОК.
13) В ячейках **А2: В2** - решение системы (рис. 4.4б),

т.е $x = -1{,}111$, $y = -0{,}723$

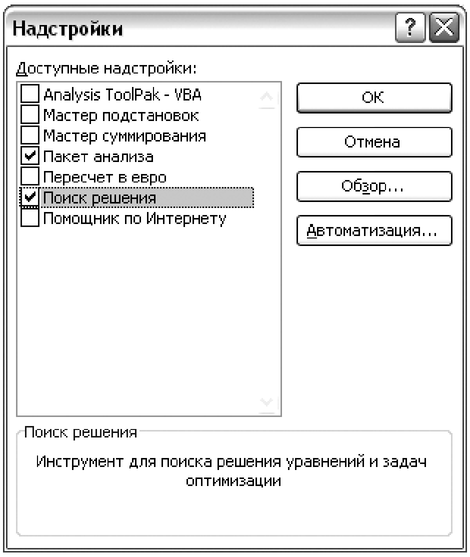

Рис. 4.3. Подключения надстройки «Поиск решения».

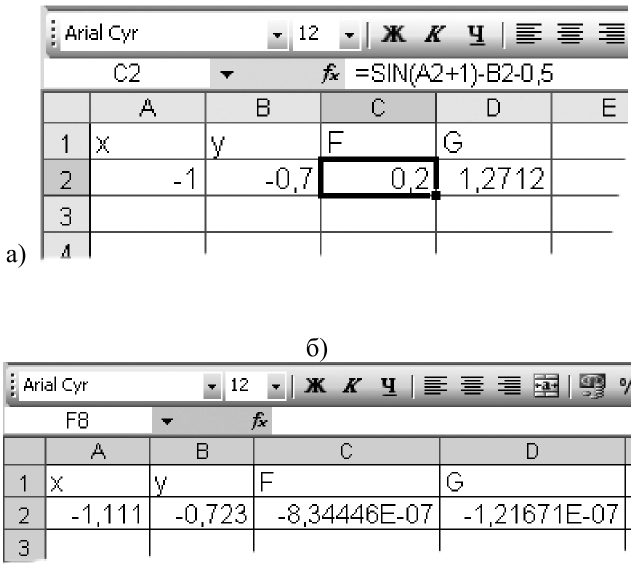

Рис. 4.4. Рабочий лист до и после выполнения поиска решения.

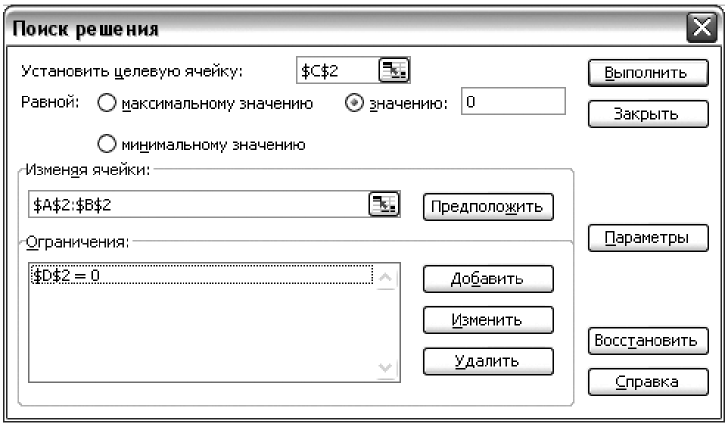

Рис. 4.5. Параметры окна «Поиск решения».

Задание к лабораторной работе № 4

Найдите решение заданной системы нелинейных уравнений с прикидкой точности результата с помощью эмпирического критерия:

а) методом простой итерации;

б) методом Ньютона или методом Зейделя;

в) с использованием одного из инструментальных средств.

Номер варианта	Система уравнений	Номер варианта	Система уравнений
1	$\begin{cases} x_2 - \sin x_1 = 0; \\ x_1^2 + x_2^2 = 1 \end{cases}$ $(x_1 > 0)$	11	$\begin{cases} x_2 - \sqrt{x_1 + 1} = 0; \\ x_1^4 - 2x_1^2 + x_2^2 - 2x_2 = -1 \end{cases}$ $(x_1 > 0)$
2	$\begin{cases} x_1 + 3\lg x_1 - x_2^2 = 0; \\ 2x_1^2 - x_1x_2 - 5x_1 = -1 \end{cases}$ $(x_1 > 0, x_2 > 0)$	12	$\begin{cases} x_2 - 0,5\ln(x_1 + 1) = 0; \\ x_1^2 + x_2^2 - 2x_2 = 0 \end{cases}$ $(x_1 > 0)$
3	$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1; \\ 2x_1^2 + x_2^2 - 4x_3 = 0; \\ 3x_1^2 - 4x_2 + x_3^2 = 0 \end{cases}$ $(x_1, x_2, x_3 > 0)$	13	$\begin{cases} \dfrac{x_1}{1 + 2x_1^2} - 2x_2 = 0; \\ x_1^2 + x_2^2 = 1 \end{cases}$ $(x_1 < 0)$
4	$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 = 1; \\ x_1^3 - x_2 = 0 \end{cases}$	14	$\begin{cases} e^{x_1} + 2x_2^2 = 4; \\ x_1^2 + 3x_2^2 = 0 \end{cases}$ $(x_1 > 0)$
5	$\begin{cases} x_1 + x_1^2 - 2x_2x_3 = 0,1; \\ x_2 - x_2^2 + 3x_1x_3 = -0,2; \\ x_3 + x_3^2 + 2x_1x_2 = 0,3 \end{cases}$	15	$\begin{cases} x_2 + 1,5\cos(x_1 - 1) = 1; \\ 0,6x_2^2 + 0,4x_1^2 = 1 \end{cases}$ $(x_2 > 0)$
6	$\begin{cases} x_1\cos x_1 - x_2 = 0; \\ x_1^2 + x_2^2 = 0 \end{cases}$ $(x_1 > 0)$	16	$\begin{cases} x_1 - \sin x_2 - \cos x_2 = 0,8; \\ x_2 - 0,02\sin x_1^2 - 0,4x_1 = 0 \end{cases}$
7	$\begin{cases} x_2 - 2x_1e^{-x_1} = 0; \\ x_1^2 + x_2^2 = 1 \end{cases}$ $(x_1 < 0)$	17	$\begin{cases} \mathrm{tg}(x_1x_2 + 0,2) - 2x_1 = 0; \\ 0,8x_1^2 + 2x_2^2 = 1 \end{cases}$ $(x_1 > 0)$
8	$\begin{cases} x_1^{2/3} + x_2^{2/3} = 1; \\ x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 = 0 \end{cases}$ $(x_2 < 0)$	18	$\begin{cases} \sin(0,5x_1 + x_2) - 1,2x_1 = 1; \\ x_1^2 + x_2^2 = 1 \end{cases}$ $(x_1 > 0)$
9	$\begin{cases} x_1 - 2\sin x_1 + x_2 = 1; \\ x_1^2 + x_2^2 = 1 \end{cases}$ $(x_1 > 0)$	19	$\begin{cases} \cos(x_1 - 2) + x_2 = 1; \\ \sin x_1 + 2x_2^2 = 1,5 \end{cases}$ $(x_1 > 0)$
10	$\begin{cases} x_1^2 + x_2 + x_3^2 = 1; \\ x_1^2 + 2x_2^2 - x_3 = 0; \\ 2x_1^2 + 2x_2^2 = 0 \end{cases}$ $(x_1, x_2 > 0, x_3 < 0)$	20	$\begin{cases} \sqrt{3}x_1 - 2\sin x_1^2 - 3\sqrt{2}x_2 = 0,5; \\ x_1^2 + 2x_2^2 = 1 \end{cases}$ $(x_1 > 0)$