5. Аппроксимация функций

Очень часто в практической работе возникает необходимость найти в явном виде функциональную зависимость (формулу) $y = \tilde{y}(x)$ между величинами x и y, которые заданы отдельными парами значений x_i, y_i (таблицей), например, полученными в результате измерений.

Задача восстановления аналитической функции по отдельным значениям называется аппроксимацией. Для получения единственного решения задачи аппроксимации необходимо

1. Задать общий вид аппроксимирующей функции, включающий неизвестные параметры (коэффициенты). Вид функции задается, исходя из формы распределения аппроксимируемых значений (расположения точек на графике), из предполагаемой функциональной зависимости, или просто в виде полинома некоторой степени;
2. Определить значения параметров на основе заданного критерия близости. Здесь существует два основных подхода – интерполяция и сглаживание.

5.1. Интерполяция

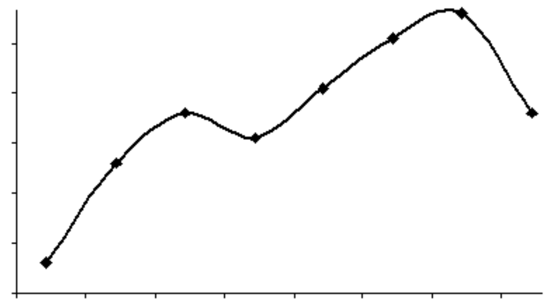

Рис. 5.1. График интерполирующей функции проходит через заданные точки.

Для задачи интерполяции критерий близости аппроксимирующей функции $y = \tilde{y}(x)$ к исходным данным x_i, y_i рассматривается как совпадение значений в заданных точках, называемых узлами интерполяции (рис. 5.1), т.е.

$$\tilde{y}(x_i) = y_i .$$

Если функция задана в виде полинома, то он называется интерполяционным полиномом и может быть записан, например, в форме Лагранжа или Ньютона.

5.1.1. Интерполяционный полином в форме Лагранжа

Пусть на некотором промежутке $[a; b]$ заданы n различных узлов x_1, x_2, x_3, …, x_n, а также значения некоторой функции y_1, y_2, y_3, …, y_n в этих узлах. Необходимо построить полином $P(x)$, проходящий через заданные точки, т.е.

$$P(x_i) = y_i$$

Интерполяционный полином Лагранжа имеет следующую формулу:

$$P(x) = L_{n-1}(x) = \sum_{i=1}^{n} y_i l_i(x) \tag{5.1}$$

где $l_i(x) = \dfrac{(x-x_1)...(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})...(x-x_n)}{(x_i-x_1)...(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})...(x_i-x_n)}$ – фундаментальные полиномы Лагранжа. Они удовлетворяют равенствам

$$l_k(x_i) = \begin{cases} 1, & i = k \\ 0, & i \neq k \end{cases} \qquad (5.2)$$

и зависят лишь от заданных узлов x_i, но не от значений интерполируемой функции y_i.

Пример 5.1. Пусть задана таблица:

Таблица 5.1

x_i	-1	0	$1/2$	1
y_i	0	2	$9/8$	0

Необходимо построить интерполяционный полином Лагранжа, проходящий через заданные точки

Решение. Полином Лагранжа имеет вид:

$$L_3(x) = y_1 l_1(x) + y_2 l_2(x) + y_3 l_3(x) + y_4 l_4(x) =$$

$$= 0 \cdot l_1(x) + 2l_2(x) + \frac{9}{8} l_3(x) + 0 \cdot l_4(x) = 2l_2(x) + \frac{9}{8} l_3(x)$$

Найдем фундаментальные полиномы Лагранжа:

$$l_2(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)(x_2-x_4)} = \frac{(x+1)(x-\frac{1}{2})(x-1)}{(0+1)(0-\frac{1}{2})(0-1)} = -2x^3 - x^2 - 2x + 1$$

$$l_3(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_4)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_4)} = \frac{(x+1)(x-0)(x-1)}{(\frac{1}{2}+1)(\frac{1}{2}-0)(\frac{1}{2}-1)} = -\frac{8}{3}x^3 + \frac{8}{3}x$$

Подставляя $l_i(x)$ в полином Лагранжа, находим:

$$L_3(x) = 2l_2(x) + \frac{9}{8} l_3(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$$

5.1.2. Интерполяционный полином в форме Ньютона

Интерполяционный полином Ньютона имеет вид:

$$N_{n-1}(x) = \Delta^0(x_1) + \Delta^1(x_1, x_2)(x-x_1) + \Delta^2(x_1, x_2, x_3)(x-x_1)(x-x_2) + ...$$
$$... + \Delta^{n-1}(x_1, x_2, ..., x_{n-1})(x-x_1)(x-x_2)...(x-x_{n-1}) \qquad (5.3)$$

где

$\Delta^0(x_i) = y_i$

$\Delta^1(x_i, x_k) = \dfrac{\Delta^0(x_i) - \Delta^0(x_k)}{x_i - x_k}$ - разделенная разность первого порядка,

$\Delta^2(x_i, x_j, x_k) = \dfrac{\Delta^1(x_i, x_j) - \Delta^1(x_j, x_k)}{x_i - x_k}$ - разделенная разность второго порядка,

$\Delta^3(x_i, x_j, x_l, x_k) = \dfrac{\Delta^2(x_i, x_j, x_l) - \Delta^2(x_j, x_l, x_k)}{x_i - x_k}$ – разделенная разность третьего порядка и т.д.

Пример 5.2. Построить интерполяционный полином в форме Ньютона, проходящий через точки, заданные таблицей 5.1.

Решение. Расчеты представим в виде таблицы.

Таблица 5.2

i	x_i	y_i	Δ^1	Δ^2	Δ^3
1	-1	$\boxed{0}$			
			$\boxed{2}$		
2	0	2		$\boxed{-5/2}$	
			$-7/4$		$\boxed{1}$
3	$1/2$	$9/8$		$-1/2$	
			$-9/4$		
4	1	0			

$$\Delta^1(1,2) = (y_1 - y_2)/(x_1 - x_2) = (0-2)/(-1-0) = 2$$
$$\Delta^1(2,3) = (y_2 - y_3)/(x_2 - x_3) = (2-9/8)/(0-1/2) = -7/4$$
$$\Delta^1(3,4) = (y_3 - y_4)/(x_3 - x_4) = (9/8-0)/(1/2-1) = -9/4$$
$$\Delta^2(1,2,3) = (\Delta^1(1,2) - \Delta^1(2,3))/(x_1 - x_3) = (2+7/4)/(-1-1/2) = -5/2$$
$$\Delta^2(2,3,4) = (\Delta^1(2,3) - \Delta^1(3,4))/(x_2 - x_4) = (-7/4+9/4)/(0-1) = -1/2$$
$$\Delta^3(1,2,3,4) = (\Delta^2(1,2,3) - \Delta^2(2,3,4))/(x_1 - x_4) = (-5/2+1/2)/(-1-1) = 1$$
$$N_3(x) = \Delta^0(1) + \Delta^1(1,2)(x - x_1) + \Delta^2(1,2,3)(x - x_1)(x - x_2) +$$
$$+ \Delta^3(1,2,3,4)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) =$$
$$= 0 + 2(x+1) - \frac{5}{2}(x+1)x + 1\cdot(x+1)x\left(x - \frac{1}{2}\right) = x^3 - 2x^2 - x + 2$$

Пример 5.3. Построить интерполяционный полином, проходящий через точки, заданные таблицей 5.1, используя программу Excel.

Порядок решения.

1) Ввести таблицу в рабочий лист Excel (обыкновенные дроби вводятся как формулы, т.е. **=9/8**). Выделить ячейки таблицы.
2) Вставить диаграмму: **Вставка** – **Диаграммы** – **Точечная** – **точечная с маркерами**. На рабочем листе появится график точек таблицы.
3) Вызвать контекстное меню (правой кнопкой мыши) одной из точек графика. Выбрать пункт «**Добавить линию тренда**».

4) Выбрать **Полиномиальную** аппроксимацию и установить степень полинома на единицу меньше числа точек, т.е. **3**.
5) Отметить «**показывать уравнение на диаграмме**».
6) Закрыть окно настроек. Появляется линия графика интерполирующей функции и соответствующая формула:

$$y(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$$

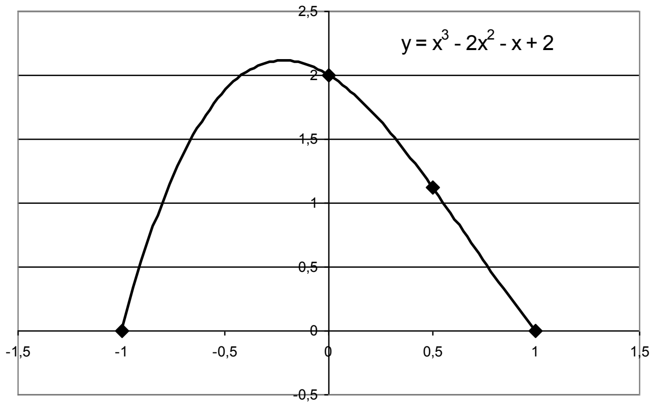

Рис. 5.2. Результаты интерполяции в программе Excel.

Интерполяционный полином определяется единственным образом независимо от метода его построения. Степень интерполирующего полинома на единицу меньше числа точек

Повышение степени интерполирующего полинома может приводить к появлению нежелательных «осцилляций» функции между узлами интерполяции. Поэтому сложные интерполяционные формулы имеет смысл применять для достаточно гладких функций, о которых известно, что характер изменения функций и производных примерно соответствует характеру изменения интерполирующих полиномов.

5.1.3. Сплайн-интерполяция

Сплайн-интерполяция предполагает представление интерполирующей функции в виде комбинации разных функций, соответствующих отрезкам между соседними узлами. На функции-сплайны накладываются условия непрерывности, т.е. совпадения значений для соседних сплайнов в узле. Условие непрерывности может касаться как функции, так и ее производных, в зависимости от сложности сплайна. Из условий непрерывности определяются коэффициенты сплайнов, которые и задают интерполирующую функцию в целом.

Простейший вид сплайн-интерполяции – ступенчатая интерполяция, функции-сплайны постоянны между узлами. Линейный сплайн непрерывен в узлах интерполяции, первая производная имеет разрывы, вторая и высшие производные не существуют. Для достижения более высокой точности интерполирования применяют полиномиальные сплайны более высоких степеней. Наиболее широкое применение получил кубический сплайн. Кубический сплайн на каждом отрезке между соседними узлами представляет собой полином 3-й степени, удовлетворяет условию непрерывности вместе со своей первой и второй производной.

Сплайн-интерполяция функции $y = y(x)$, заданной таблицей значений в узлах $(x_i;\ y_i)$, определяет набор фунций-сплайнов $f_i(x)$, аппроксимирующих $y(x)$ на интервалах $x_{i-1} \le x < x_i$, $i = 0,\ 1,\ 2,\ ...,\ n$.

i	x_i	y_i
0	x_0	y_0
1	x_1	y_1
2	x_2	y_2
...	...	...
n	x_n	y_n

$$y(x) = \begin{cases} f_1(x) & x_0 \le x < x_1 \\ f_2(x) & x_1 \le x < x_2 \\ \ldots & \ldots \\ f_n(x) & x_{n-1} \le x < x_n \end{cases}$$

Если применить кубические сплайны, то

$$f_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3. \tag{5.4}$$

Введем обозначения $h_i = x_i - x_{i-1}$,

тогда в пределах каждого из сплайнов $0 \le x - x_i < h_i$.

Из условия непрерывности функции $f(x)$ следует $2n$ уравнений:

$$f_i(x_{i-1}) = y_{i-1}$$

$$f_i(x_i) = y_i \qquad i = 1,\ 2,\ ...,\ n.$$

Или

$$a_i = y_{i-1} \tag{5.5}$$

$$a_i + b_i h_i + c_i h_i^2 + d_i h_i^3 = y_i \qquad i = 1,\ 2,\ ...,\ n. \tag{5.6}$$

Из условия непрерывности 1-й производной функции $f(x)$ следует $n-1$ уравнений:

$$f_i'(x_i) = f_{i+1}'(x_i) \qquad i = 1,\ 2,\ ...,\ n-1.$$

Т.к. $f_i' = b_i + 2c_i(x - x_{i-1}) + 3d_i(x - x_{i-1})^2$, то

$$b_i + 2c_i(x_i - x_{i-1}) + 3d_i(x_i - x_{i-1})^2 = b_{i+1} \qquad \text{или}$$

$$b_i + 2c_i h_i + 3d_i h_i^2 - b_{i+1} = 0 \qquad i = 1,\ 2,\ ...,\ n-1. \tag{5.7}$$

Из условия непрерывности 2-й производной функции $f(x)$ следует $n-1$ уравнений:

$$f_i''(x_i) = f_{i+1}''(x_i) \qquad i = 1,\ 2,\ ...,\ n-1.$$

Т.к. $f_i'' = 2c_i + 6d_i(x - x_{i-1})$, то

$$2c_i + 6d_i(x_i - x_{i-1}) = 2c_{i+1} \text{ или}$$

$$c_i + 3d_i h_i - c_{i+1} = 0 \qquad i = 1,\ 2,\ ...,\ n-1. \tag{5.8}$$

Получаем $2n+(n-1)+(n-1)=4n-2$ уравнения относительно $4n$ неизвестных. Оставшиеся два уравнения задают, фиксируя значения производных на концах кривой, например так:

$$f''(x_0)=0 \qquad f''(x_n)=0,$$

или

$$c_1=0 \tag{5.9}$$

$$c_n+3d_nh_n=0. \tag{5.10}$$

Полученные уравнения представляют собой систему линейных алгебраических уравнений относительно $4n$ неизвестных a_i, b_i, c_i, d_i, ($i=0,\ 1,\ \ldots,\ n$).

Эту систему можно привести к более удобному виду. Из условия (5.5) сразу можно найти все коэффициенты a_i. Далее из (5.8)-(5.10) получим

$$d_i=\frac{c_{i+1}-c_i}{3h_i},\quad i=1,2,\ldots,n-1,\quad d_n=-\frac{c_n}{3h_n}. \tag{5.11}$$

Подставим эти соотношения, а также значения $a_i=y_{i-1}$ в (5.6) и найдем отсюда коэффициенты

$$\begin{aligned} b_i&=\frac{y_i-y_{i-1}}{h_i}-\frac{h_i}{3}(c_{i+1}+2c_i),\qquad i=1,2,\ldots,n-1,\\ b_n&=\frac{y_n-y_{n-1}}{h_n}-\frac{2}{3}h_nc_n. \end{aligned} \tag{5.12}$$

Учитывая выражения (5.11) и (5.12), исключаем из уравнения (5.7) коэффициенты d_i и b_i. Окончательно получим следующую систему уравнений только для коэффициентов c_i:

$$c_1=0,\qquad c_{n+1}=0,$$

$$h_{i-1}c_{i-1}+2(h_{i-1}+h_i)c_i+h_ic_{i+1}=3\left(\frac{y_i-y_{i-1}}{h_i}-\frac{y_{i-1}-y_{i-2}}{h_{i-1}}\right), \tag{5.13}$$

$i=2,3,\ldots,n.$

Матрица этой системы трехдиагональная, т.е. ненулевые элементы находятся лишь на главной и двух соседних с ней диагоналях, расположенных сверху и снизу. Для ее решения целесообразно использовать метод прогонки. По найденным из системы (5.13) коэффициентам c_i легко вычислить коэффициенты $d_i,\ b_i$.

Пример 5.4. Построить кубический сплайн для функции $f(x)=\sin(\pi x)$ на отрезке [0; 2], используя разбиения отрезка $n=10$ частей. Найти значение в точке $x=0{,}48$.

Решение. В ячейках **A1:N1** запишем обозначения столбцов как в таблице.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
1	i	x	h	y	d1	a1	b1	c1	u	v	c	a	b	d		
2	0	0,000		0,000												
3	1	0,200	0,200	0,588							0	0,000	3,1387	-4,9954		
4	2	0,400	0,200	0,951	-3,368	0,000	0,800	0,200	-0,250	-4,210	-2,9972	0,588	2,5393	-3,0873		
5	3	0,600	0,200	0,951	-5,449	0,200	0,800	0,200	-0,267	-6,143	-4,8496	0,951	0,9699	-1E-07	0,08	0,9976
6	4	0,800	0,200	0,588	-5,449	0,200	0,800	0,200	-0,268	-5,652	-4,8496	0,951	-0,97	3,0873		
7	5	1,000	0,200	0,000	-3,368	0,200	0,800	0,200	-0,268	-2,997	-2,9972	0,588	-2,539	4,9954		
8	6	1,200	0,200	-0,588	0,000	0,200	0,800	0,200	-0,268	0,803	-3E-07	0,000	-3,139	4,9954		
9	7	1,400	0,200	-0,951	3,368	0,200	0,800	0,200	-0,268	4,297	2,99723	-0,588	-2,539	3,0873		
10	8	1,600	0,200	-0,951	5,449	0,200	0,800	0,200	-0,268	6,149	4,84962	-0,951	-0,97	3E-07		
11	9	1,800	0,200	-0,588	5,449	0,200	0,800	0,200	-0,268	5,653	4,84962	-0,951	0,9699	-3,0873		
12	10	2,000	0,200	0,000	3,368	0,200	0,800	0,000	0,000	2,997	2,99723	-0,588	2,5393	-4,9954		
13											0					

1) Построим таблицу значений функции.

В ячейки **A2:A12** запишем значение индекса i = **0, 1, …, 10**.

В ячейку **B2** запишем **0**, а в **B3** запишем **0,2**. Выделим **B2:B3** и маркером заполнения протянем вниз до **B12**.

В ячейку **C3** запишем формулу **=B3-B2** и маркером заполнения протянем вниз до **C12**.

В ячейку **D2** запишем формулу **=sin (3,1415926*B2)**, выделим **D2** и маркером заполнения протянем вниз до **D12**.

2) Вычислим коээфициенты системы 2.9.

В ячейку **E4** запишем формулу **=3*(D4-D3)/C4-3*(D3-D2)/C3** и маркером заполнения протянем вниз до **E12**.

В ячейку **F4** запишем **0**, в ячейку **F5** запишем **=C4** и маркером заполнения протянем вниз до **F12**.

В ячейку **G4** запишем формулу **=2*(C3+C4)** и маркером заполнения протянем вниз до **G12**.

В ячейку **H4** запишем формулу **=C4** и маркером заполнения протянем вниз до **H12**.

3) Вычислим прогоночные коэффициенты (прямой ход прогонки).

В ячейку **I4** запишем формулу **=H4/(F4*I3+G4)** и маркером заполнения протянем вниз до **I12**.

В ячейку **J4** запишем формулу **=(E4-F4*J3)/(F4*I3+G4)** и маркером заполнения протянем вниз до **J12**.

4) Вычислим коэффициенты сплайна (обратный ход прогонки).

В ячейки **K3** и **K13** запишем **0**. В ячейку **K12** запишем формулу **=I12*K13+J12** и маркером заполнения протянем вверх до **K4**.

В ячейку **L3** запишем формулу **=D2** и маркером заполнения протянем вниз до **L12**.

В ячейку **M3** запишем формулу **=(D3-D2)/C3-(K4+2*K3)*C3/3** и маркером заполнения протянем вниз до **M12**.

В ячейку **N 3** запишем формулу **=(K4-K3)/3/C3** и маркером заполнения протянем вниз до **N12**.

5) Вычислим значение сплайна.

Точка $x = 0{,}48$ попадает в отрезок [0,4; 0,6]. Следовательно, нужно использовать строку $i = 3$. Поэтому запишем в ячейку **O5** формулу **=0,48-0,4**, в ячейку **P5** формулу **=L5+M5*O5+K5*O5^2+N5*O5^3**.

Получим значение **0,9976**. Точное значение sin(0,48π)=0,998026…

Следовательно, погрешность равна 0,0004.

Пример 5.5. Найти значение функции $y(x)$, заданной таблично, в точке $x = 1{,}324$ с помощью кубического сплайна. Использовать подпрограмму-функцию, реализующую интерполяцию кубическими сплайнами на VBA в Excel (рис. 5.3).

x	1	1,1	1,2	1,4
y	1	0,7513	0,5787	0,3644

Порядок решения.

1) Вставить в проект VBA стандартный модуль: в главном меню редактора VBA выбрать Insert→Module.
2) Ввести подпрограмму-функцию spline3 (рис. 5.3) в стандартный модуль проекта VBA. Теперь функция spline3 доступна в табличном процессоре Excel через мастер функций.
3) Ввести данные таблицы в столбцы Excel. Ввести значение, для которого необходима интерполяция в ячейку **A7**.
4) Через мастер функций (или вводом текста) вставить функцию spline3 в ячейку **B7**. У функции spline3 два аргумента: первый – диапазон ячеек, содержащий таблицу данных **$A$2:$B$5**, второй – адрес ячейки, содержащий значение, для которого необходима интерполяция, т.е. **A7.**

	A	B
1	x	y
2	1	1
3	1,1	0,7513
4	1,2	0,5787
5	1,4	0,3644
6		
7	1,324	=spline3($A$2:$B$5;A7)

5) В ячейке **B7** получаем результат интерполяции **0,436284991**.

```
Function spline3(xy As Range, t As Double) As Double
  n = xy.Rows.Count
  ReDim a(n), b(n), c(n + 1), d(n)
  ReDim x(n) As Double, y(n) As Double, h(n) As Double
  ReDim a1(n), b1(n), c1(n), d1(n), u(n), v(n)
  For i = 1 To n
    x(i) = xy.Cells(i, 1).Value
    y(i) = xy.Cells(i, 2).Value
  Next
  For i = 1 To n
    h(i) = x(i) - x(i - 1)
  Next
  For i = 2 To n
    a1(i) = h(i - 1)
    b1(i) = 2 * (h(i - 1) + h(i))
    c1(i) = h(i)
    d1(i) = 3*((y(i)-y(i-1))/h(i)-  _
            (y(i-1)-y(i-2))/h(i-1))
  Next
  a1(2) = 0
  c1(n) = 0
  For i = 2 To n
    u(i) = -c1(i) / (a1(i)*u(i-1)+b1(i))
    v(i) = (d1(i)-a1(i)*v(i-1)) / (a1(i)*u(i-1)+b1(i))
  Next
  c(1) = 0
  c(n + 1) = 0
  For i = n To 2 Step -1
    c(i) = u(i) * c(i + 1) + v(i)
  Next
  For i = 1 To n
    a(i) = y(i-1)
    d(i) = (c(i + 1) - c(i)) / (3 * h(i))
    b(i) = (y(i)-y(i-1))/h(i)-h(i)/3*(c(i+1)+2*c(i))
  Next
  For k = 1 To n
    If x(k - 1) <= t And t <= x(k) Then GoTo L2
  Next
  L2: S = a(k) + b(k) * (t - x(k - 1)) + _
          c(k) * (t - x(k - 1)) ^ 2 + _
          d(k) * (t - x(k - 1)) ^ 3
  spline3 = S
End Function
```

Рис. 5.3. Подпрограмма-функция, реализующая интерполяцию кубическими сплайнами на VBA в Excel.

5.2. Сглаживание. Метод наименьших квадратов

Задача аппроксимации функции может ставиться, когда исходные данные содержат погрешности (рис. 5.4а), повторы (рис. 5.4б) или очень большое количество точек (рис. 5.4в). В этих случаях аппроксимация на основе интерполяции не имеет смысла или невозможна.

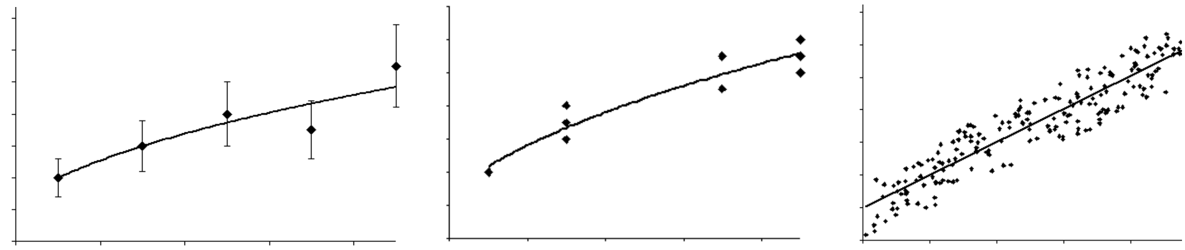
а) б) в)

Рис. 5.4. Аппроксимация функции сглаживанием.

Для задачи аппроксимации сглаживанием критерий близости аппроксимирующей функции $y = \tilde{y}(x)$ к исходным данным x_i, y_i рассматривается как минимальное отклонение значений в заданных точках. Количественно отклонение может быть оценено различными способами. Наибольшее распространение получил метод наименьших квадратов (МНК), согласно которому необходимо минимизировать сумму квадратов:

$$S = \sum_{i=1}^{n} (\tilde{y}(x_i, a) - y_i)^2 \to \min \tag{5.14}$$

где x_i, y_i – значения данных $\tilde{y}(x_i, a)$ – значение аппроксимирующей функции в точке x_i; n – число данных, a– незвестные параметры. Задача сводится к нахождению экстремума функции параметров $S(a)$.

Линейная аппроксимация. В случае линейной формулы $\tilde{y}(x) = ax + b$ сумма квадратов (5.14) принимает вид:

$$S(a,b) = \sum_{i=1}^{n} (ax_i + b - y_i)^2 \to \min \tag{5.15}$$

Функция (5.15) имеет минимум в точках, в которых частные производные от S по параметрам a и b обращаются в нуль, т.е.

$$\frac{\partial S(a,b)}{\partial a} = 0, \qquad \frac{\partial S(a,b)}{\partial b} = 0 \tag{5.16}$$

$$\sum_{i=1}^{n} 2(ax_i + b - y_i)x_i = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} 2(ax_i + b - y_i) = 0$$

$$a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$
$$a\sum_{i=1}^{n} x_i + bn = \sum_{i=1}^{n} y_i \qquad (5.17)$$

Решая систему уравнений (5.17), получим значения a и b уравнения $\tilde{y}(x) = ax + b$.

Пример 5.6. Подобрать аппроксимирующий полином первой степени $\tilde{y}(x) = ax + b$ для данных

Таблица 5.3.

x_i	0	1	2	4
y_i	0,2	0,9	2,1	3,7

Решение. Для удобства вычисленные значения расположим в таблице.

Таблица 5.4.

i	x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$
1	0	0,2	0	0,0
2	1	0,9	1	0,9
3	2	2,1	4	4,2
4	4	3,7	16	14,8
$\sum_{i=1}^{n}$	7	6,9	21	19,9

Система для определения коэффициентов имеет вид:

$$\begin{cases} 21a + 7b = 19{,}9 \\ 7a + 4b = 6{,}9 \end{cases} \qquad (5.18)$$

Решая систему (5.18), получим следующие значения параметров: $a = 0{,}894$, $b = 0{,}160$. Следовательно, искомый полином имеет вид:

$$\tilde{y}(x) = 0{,}894x + 0{,}160.$$

Полиномиальная аппроксимация. В случае выбора зависимости в виде полинома, например, 2-й степени $\tilde{y}(x) = ax^2 + bx + c$ и (5.14) принимает вид:

$$S(a,b,c) = \sum_{i=1}^{n} (ax_i^2 + bx_i + c - y_i)^2 \rightarrow \min \qquad (5.19)$$

Функция (5.19) имеет минимум в точках, в которых частные производные от S по параметрам a, b, c обращаются в нуль, т.е.:

$$\frac{\partial S(a,b,c)}{\partial a}=0, \qquad \frac{\partial S(a,b,c)}{\partial b}=0, \qquad \frac{\partial S(a,b,c)}{\partial c}=0 \qquad (5.20)$$

В результате дифференцирования и элементарных преобразований для определения параметров получают систему из трех линейных уравнений с тремя неизвестными:

$$2\sum_{i=1}^{n}(ax_i^2+bx_i+c-y_i)x_i^2=0$$

$$2\sum_{i=1}^{n}(ax_i^2+bx_i+c-y_i)x_i=0$$

$$2\sum_{i=1}^{n}(ax_i^2+bx_i+c-y_i)=0$$

Или

$$\begin{cases} a\sum_{i=1}^{n}x_i^4+b\sum_{i=1}^{n}x_i^3+c\sum_{i=1}^{n}x_i^2=\sum_{i=1}^{n}x_i^2y_i \\ a\sum_{i=1}^{n}x_i^3+b\sum_{i=1}^{n}x_i^2+c\sum_{i=1}^{n}x_i=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i \\ a\sum_{i=1}^{n}x_i^2+b\sum_{i=1}^{n}x_i+cn=\sum_{i=1}^{n}y_i \end{cases} \qquad (5.21)$$

Решая систему линейных уравнений (5.21), получим значения параметров a, b и c функции $\tilde{y}(x)=ax^2+bx+c$.

Пример 5.7. Используя МНК, построить зависимость вида $\tilde{y}(x)=ax^2+bx+c$, аппроксимирующую следующие табличные значения:

Таблица 5.5.

x_i	-2	-1	0	1	2
y_i	6	2	-1	-2	-1

Решение. Расчеты представим в виде таблицы.

Таблица 5.6.

i	x_i	y_i	x_i^2	x_i^3	x_i^4	x_iy_i	$x_i^2y_i$
1	-2	6	4	-8	16	-12	24
2	-1	2	1	-1	1	-2	2
3	0	-1	0	0	0	0	0
4	1	-2	1	1	1	-2	-2
5	2	-1	4	8	16	-2	-4
$\sum_{i=1}^{n}$	0	4	10	0	34	-18	20

Тогда система линейных уравнений (5.21) относительно значений a, b и c примет вид:

$$\begin{cases} 34a+0b+10c=20 \\ 0a+10b+0c=-18 \\ 10a+0b+5c=4 \end{cases} \qquad (5.22)$$

Решая систему (5.22), получим следующие значения параметров $a=0{,}857; b=-1{,}800;\ c=-0{,}914$. Таким образом, искомый полином имеет вид:

$$\tilde{y}(x)=0{,}857x^2-1{,}8x-0{,}914$$

Таблица 5.7.

i	x_i	y_i	$\tilde{y}(x_i)$	$(y_i-\tilde{y}(x_i))^2$
1	-2	6	6,114	0,012
2	-1	2	1,743	0,066
3	0	-1	-0,914	0,007
4	1	-2	-1,857	0,020
5	2	-1	-1,086	0,007
			$\sum$	0,112

Пример 5.8. Используя программу Excel, построить функцию вида $\tilde{y}(x)=ax^2+bx+c$, аппроксимирующую значения из таблицы 5.5:

Порядок решения.

6) Ввести таблицу в рабочий лист Excel (рис. 5.5). Выделить ячейки таблицы.
7) Вставить диаграмму: **Вставка** – **Диаграммы** – **Точечная** – **точечная с маркерами**. На рабочем листе появится график точек таблицы.

Рис. 5.5. Добавление линии тренда в точечную диаграмму.

8) Вызвать контекстное меню (правой кнопкой мыши) одной из точек графика. Выбрать пункт «**Добавить линию тренда**».
9) Выбрать «**Полиномиальная№** аппроксимация и установить степень полинома, равной **2** (рис. 5.6).
10) Отметить «**показывать уравнение на диаграмме**».

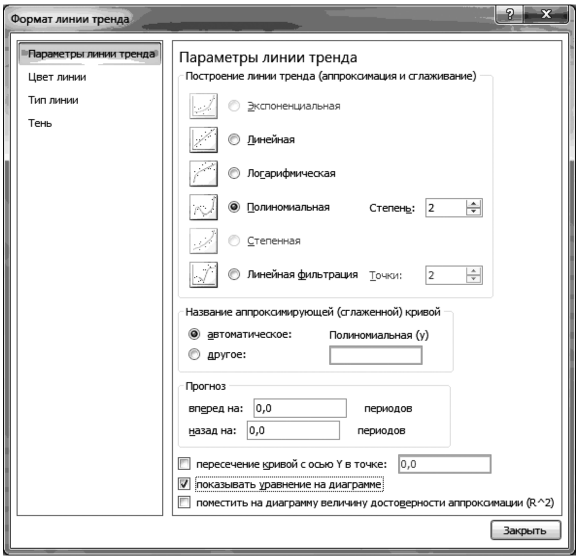

Рис. 5.6. Настройка параметров линии тренда.

11) Закрыть окно настроек. Появляется линия графика аппроксимирующей функции и соответствующая формула (рис. 5.7):

$$y(x) = 0{,}8571x^2 - 1{,}8x - 0{,}9143$$

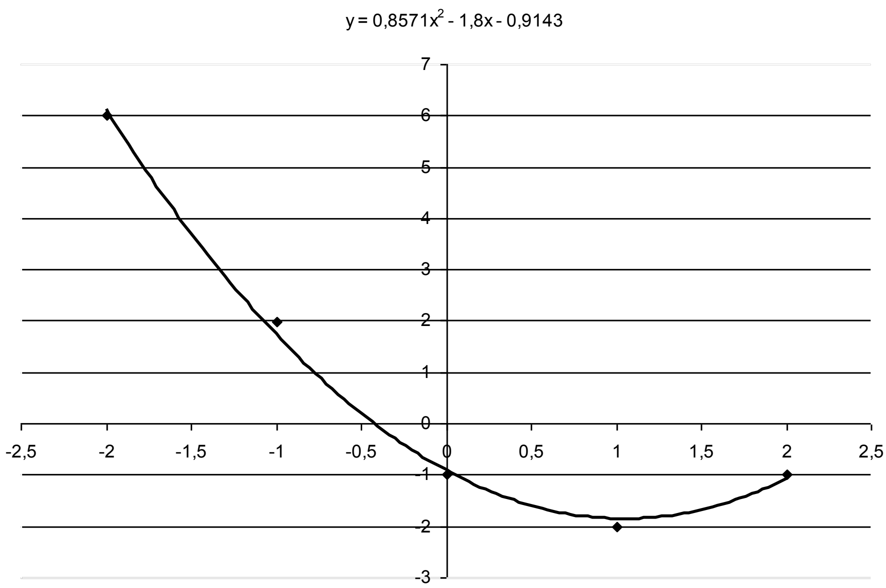

Рис. 5.7. Результаты аппроксимации.

Аппроксимация линеаризацией. Многие нелинейные функции, зависящие от двух параметров, можно линеаризовать путем замены переменных. Для этого необходимо подобрать такое преобразование исходной зависимости $y(x) = \varphi(x, a, b)$, в результате которого она приобретает линейный вид $Y = AX + B$. Далее решается задача линейной аппроксимации для новой зависимости, и вычисленные коэффициенты A и B пересчитываются в a и b.

Таблица 5.8.

Таблица замены переменых для метода линеаризации данных

№	Функция	Линеаризованная форма $Y = AX + B$	Замена переменных и констант			
			X	Y	a	b
1.	$y = \frac{a}{x} + b$	$y = a\frac{1}{x} + b$	$\frac{1}{x}$	y	A	B
2.	$y = \frac{a}{x+b}$	$y = \frac{-1}{b}(xy) + \frac{a}{b}$	xy	y	$-\frac{B}{A}$	$-\frac{1}{A}$
3.	$y = \frac{x}{ax+b}$	$\frac{1}{y} = b\frac{1}{x} + a$	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{y}$	B	A
4.	$y = a\ln x + b$	$y = a\ln x + b$	$\ln x$	y	A	B
5.	$y = be^{ax}$	$\ln y = ax + \ln b$	x	$\ln y$	A	e^B
6.	$y = bx^a$	$\ln y = a\ln x + \ln b$	$\ln x$	$\ln y$	A	e^B

Пример 5.9. Используя МНК, построить функцию вида $\tilde{y}(x) = bx^a$, аппроксимирующую следующие табличные значения:

Таблица 5.9.

x_i	1,5	2,5	3,3	4
y_i	9	31	66	108

Решение. Расчеты представим в виде таблицы.

Таблица 5.10.

i	x_i	y_i	$X_i = \ln x_i$	$Y_i = \ln y_i$	X_i^2	X_iY_i	$\tilde{y}(x_i)$
1	1,5	9	0,405	2,197	0,164	0,891	8,81
2	2,5	31	0,916	3,434	0,840	3,147	32,08
3	3,3	66	1,194	4,190	1,425	5,002	64,75
4	4	108	1,386	4,682	1,922	6,491	105,35
$\sum_{i=1}^{n}$			3,902	14,503	4,351	15,530	

Система для определения коэффициентов имеет вид:

$$\begin{cases} 4{,}351A + 3{,}902B = 15{,}530 \\ 3{,}902A + 4B = 14{,}503 \end{cases} \qquad (5.23)$$

Решая систему (5.23), получим следующие значения параметров: $A = 2{,}538$, $B = 1{,}15$.

Тогда (табл. 5.8) $a = A = 2{,}538$, $b = e^B = e^{1{,}15} = 3{,}158$.

Аппроксимирующая функция имеет вид:

$\tilde{y}(x) = 3{,}158x^{2{,}538}$

Аппроксимация произвольной функцией может быть выполнена в программе Excel с помощью модуля «Поиск решения».

Пример 5.10. Используя программу Excel, построить функцию, аппроксимирующую значения из таблицы:

Таблица 5.11.

x_i	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
y_i	0,3	0,7	1,4	1,9	1,3	0,5	0,3

Порядок решения.

1) Аппроксимирующая функция должна иметь экстремум в виде пика. Выберем следующую функцию, зависящую от трех параметров $\boldsymbol{a_i}$:

   $\tilde{y}(x) = a_1 e^{-\frac{(x-a_2)^2}{a_3}}$;

2) Ввести в ячейки **A2, B2, C2** (рис. 5.8) начальные значения параметров a_i, например **1 1 1**
3) В ячейки **A5:A11** – значения $\boldsymbol{x_i}$
4) В ячейки **B5:B11** – значения $\boldsymbol{y_i}$
5) В ячейку **C5** – формулу аппроксимирующей функции (на ячейки с параметрами абсолютные ссылки):

   =$A$2*EXP(-((A5-$B$2)^2)/$C$2)

6) Скопировать формулу в ячейки **C6:C11**
7) В ячейку **D5** – формулу квадрата разности: **=(B5-C5)^2**
8) Скопировать формулу в ячейки **D6:D11**
9) В ячейку **D12** – сумму квадратов: **=СУММ(D5:D11)**
10) Вызвать окно **Поиск решения**. В настройках указать:

    Установить целевую ячейку **$D$12**

    Равной **минимальному значению**

    Изменяя ячейки **$A$2:$C$2**

11) Нажать кнопку **Выполнить**.
12) Подтвердить сохранение найденного решения.

13) Рабочий лист изменился и содержит решение (рис. 5.8):

$a_1 = 1{,}81559$ $\quad a_2 = 2{,}450734$ $\quad a_3 = 0{,}968182$

Таким образом, аппроксимирующая данные табл. 5.11 функция имеет вид:

$$\tilde{y}(x) = 1{,}81559 e^{-\frac{(x-2{,}450734)^2}{0{,}968182}}$$

Графически результаты аппроксимации редставлены на рис. 5.9.

	A	B	C	D	E
1	a1	a2	a3		
2	1,815599	2,450734	0,968182		
3					
4	x	y	y~	квадрат разности	
5	1	0,3	0,206516	0,00873931	
6	1,5	0,7	0,713777	0,000189808	
7	2	1,4	1,471935	0,005174633	
8	2,5	1,9	1,811053	0,007911556	
9	3	1,3	1,329506	0,000870603	
10	3,5	0,5	0,582326	0,006777524	
11	4	0,3	0,15218	0,021850689	
12			сумма:	0,051514122	

Рис. 5.8. Аппроксимация данных нелинейной функцией с тремя параметрами с помощью программы Excel.

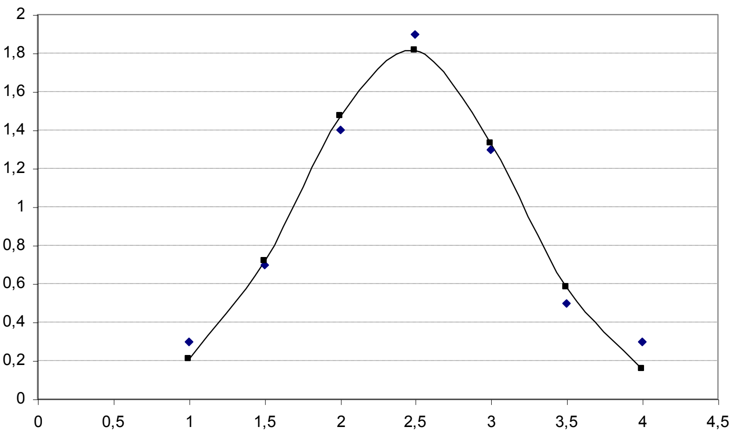

Рис. 5.9. Результаты аппроксимации функцией с тремя параметрами.

Точность аппроксимации можно оценить среднеквадратической ошибкой

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (\tilde{y}(x_i) - y_i)^2}{n}},$$

которая не должна превышать погрешность исходных данных (рис. 5.4а).

~~23.~~ $\begin{cases} \sin(x+1)+y=1{,}2 \\ 2x-\cos y=2 \end{cases}$

~~24.~~ $\begin{cases} x-\cos(y+1)=0 \\ y+2\sin x=-0{,}4 \end{cases}$

~~25.~~ $\begin{cases} \sin x-2y=2 \\ \cos(y+1)+x=0{,}72 \end{cases}$

~~26.~~ $\begin{cases} \cos(y-0{,}5)+x=2 \\ \sin x+2y=1 \end{cases}$

~~27.~~ $\begin{cases} \cos x+2y=1{,}5 \\ x-\sin(y-0{,}5)=1 \end{cases}$

~~28.~~ $\begin{cases} \sin(x+1)-2y=3 \\ x+\cos y=2 \end{cases}$

~~29.~~ $\begin{cases} \sin(x+0{,}5)+y=1{,}5 \\ \cos(y-2)-x=1 \end{cases}$

~~30.~~ $\begin{cases} \cos(x-1)+y=0{,}8 \\ x+4\cos y=2 \end{cases}$

~~31.~~ $\begin{cases} \dfrac{x^2}{m^2}+\dfrac{4y^2}{m^2}=1 \\ y=\dfrac{\sqrt{2}}{m}x^2 \end{cases}$

~~Начальное приближение~~

~~$(m/2;\ \ m/4)$~~

№5.1. Интерполяция

Построить интерполяционные полиномы Лагранжа и Ньютона по заданным точкам:

1.

x	1	3	4
y	1	2	1

2.

x	0	2	3
y	2	0	4

3.

x	-2	0	1
y	4	1	3

4.

x	0	2	3
y	4	1	5

5.

x	-1	4	5
y	2	1	3

6.

x	-2	1	4
y	1	4	1

7.

x	0	2	3
y	1	2	1

8.

x	2	3	5
y	1	0	1

9.

x	-1	2	5
y	4	3	4

10.

x	0	1	3
y	1	4	2

11.

x	-2	1	2
y	3	0	2

12.

x	2	3	4
y	1	0	2

13.

x	1	2	3
y	1	0	1

14.

x	1	2	3
y	3	2	4

15.

x	2	3	4
y	0	3	1

16.

x	-1	1	2
y	3	1	2

17.

x	1	3	4
y	4	1	5

18.

x	0	1	3
y	4	2	3

19.

x	-1	0	1
y	2	1	2

20.

x	-2	1	2
y	-3	0	-2

21.

x	1	3	5
y	-1	-2	-1

22.

x	1	2	3
y	-1	0	-1

23.

x	-2	0	1
y	-4	-1	-3

24.

x	2	3	4
y	0	-3	-1

25.

x	-1	4	5
y	-2	-1	-3

26.

x	1	3	4
y	-4	-1	-5

27.

x	0	2	3
y	-1	-2	-1

28.

x	0	2	3
y	-2	0	-4

27.

x	0	2	3
y	1	2	1

28.

x	0	2	3
y	2	0	4

29.

x	-1	0	1	m
y	$-1-m$	$-m$	$1-m$	$8-m$

m – вариант

№5.2. Интерполяция кубическими сплайнами

Найти значение функций заданных таблично при $x = 1{,}1$ с помощью кубического сплайна.

x_i	***1***	***2***	***3***	***4***	***5***	***6***	***7***	***8***	***9***	***10***
1,0	1,0	1,1	0,9	0,9	0,8	1,1	1,0	1,2	1,2	1,1
1,2	2,1	2,2	2,0	1,9	2,0	2,2	2,1	1,8	2,0	1,9
1,4	2,9	3,2	3,0	3,2	2,9	3,2	3,1	3,2	3,0	3,2
1,6	3,8	4,2	3,8	3,8	4,2	4,2	3,8	4,1	3,8	3,8
1,8	5,2	5,2	5,1	5,1	5,2	5,1	5,2	5,2	5,0	4,9
2,0	5,9	6,0	5,8	6,1	5,8	5,9	6,2	6,1	6,1	5,8

x_i	***11***	***12***	***13***	***14***	***15***	***16***	***17***	***18***	***19***	***20***
1,0	0,8	0,8	0,8	1,1	0,8	1,0	0,9	1,2	1,2	1,2
1,2	2,0	2,2	1,8	2,2	1,9	1,8	2,0	2,2	2,2	2,0
1,4	2,8	2,9	2,9	3,0	3,2	2,8	2,8	3,0	3,2	3,2
1,6	4,0	4,0	4,0	4,1	4,1	3,8	3,8	4,0	3,8	4,2
1,8	5,2	5,2	4,9	4,9	5,0	4,8	4,9	4,8	4,8	4,8
2,0	6,0	5,8	6,1	5,9	6,0	5,8	6,2	5,8	6,0	6,1

x_i	***21***	***22***	***23***	***24***	***25***	***26***	***27***	***28***	***29***	***30***
1,0	2,8	3,8	4,8	1,5	6,0	10,0	5,9	0,2	12	0,12
1,2	2,0	3,2	3,8	2,7	4,9	11,8	7,0	2,2	22	0,25
1,4	1,8	2,9	2,9	3,2	4,2	12,8	8,8	2,6	32	0,55
1,6	1,6	3,0	2,0	4,0	4,5	13,5	8,8	2,9	38	0,42
1,8	2,2	4,2	1,9	4,5	5,0	14,3	7,9	3,1	48	0,48
2,0	3,0	4,8	1,1	4,9	6,0	15,0	6,2	3,2	60	0,6

№5.3. Обработка результатов эксперимента

Методом наименьших квадратов найти зависимость между *x* и *y*:

1.

x	-1	0	1	2	4
y	-3	-1	1	3	7

2.

x	-2	2	3	4	5
y	-3	5	7	9	11

3.

x	1	2	3	5
y	4	5	6	8

4.

x	-2	-1	2	3	4
y	5	4	1	0	-1

5.

x	0	2	4	6
y	-2	4	10	16

6.

x	-1	0	1	2
y	-6	-1	4	9

7.

x	-1	0	1	2
y	-6	-1	4	9

8.

x	-2	1	2	3
y	-13	5	11	17

9.

x	-1	0	1	2	3
y	-4	-1	2	5	8

10.

x	-1	0	1	2	4
y	3	1	-1	-3	-7

11.

x	-1	2	3	4
y	1	7	9	11

12.

x	1	2	3	5
y	-4	-5	-6	-8

13.

x	-1	1	2	4
y	-4	0	2	6

14.

x	0	2	4	6
y	2	-4	-10	-16

15.

x	-1	0	1	3	4
y	1	3	5	9	11

16.

x	-2	2	3	4	5
y	3	-5	-7	-9	-11

17.

x	-1	1	2	3
y	5	-1	-4	-7

18.

x	-2	-1	2	3	4
y	-5	-4	-1	0	1

19.

x	-2	-1	1	3	4
y	-4	-1	5	11	14

20.

x	-1	0	1	2
y	6	1	-4	-9

21.

x	-2	-1	1	2	3
y	5	-2	4	7	10

22.

x	0	1	2	3
y	-2	-6	-10	-14

23.

x	-2	-1	2	3
y	-7	-2	13	18

24.

x	-1	0	1	2	3
y	4	1	-2	-5	-8

25.

x	-1	1	2	3
y	5	3	7	11

26.

x	-1	2	3	4
y	-1	-7	-9	-11

27.

x	-1	0	2	3
y	1	4	10	13

28.

x	-1	1	2	4
y	4	0	-2	-6

29.

x	-1	1	2	3
y	-7	-3	-1	1

30.

x	-1	0	1	2
y	-4	-3	0	4

31.

x	-2	1	2	3
y	2	8	10	12

32.

x	-1	0	1	3
y	-1	-1	1	11

33.

x	-2	-1	0	1
y	4	-1	-2	0

34.

x	0	1	2	3
y	-3	-2	1	5

35.

x	-2	-1	0	2
y	-1	-1	1	10

36.

x	1	2	3	4
y	-2	0	-2	-7

37.

x	-2	0	1	2
y	15	1	0	2

38.

x	-2	-1	0	1
y	5	2	1	1

39.

x	-3	-2	-1	0
y	-5	-6	-5	-3

40.

x	-2	-1	1	2
y	7	3	-1	3

41.

x	-2	-1	1	2	3
y	$4+\frac{3}{2}m$	$m+1$	$\frac{m}{2}$	1	$3-\frac{m}{2}$

~~№6. Численное интегрирование~~

~~Вычислить интеграл, используя квадратурные формулы прямоугольников, трапеций и парабол (Симпсона), при заданном числе интервалов~~ $\cancel{n}$~~:~~

~~1.~~ $\cancel{\int_{-2}^{4}(2x^2-\sqrt{x+2})dx}$ $\cancel{n=6}$

~~2.~~ $\cancel{\int_{-3}^{0}(5x^2+x+1)dx}$ $\cancel{n=6}$

~~3.~~ $\cancel{\int_{0}^{3}(3x^2-\sqrt{x})dx}$ $\cancel{n=6}$

~~4.~~ $\cancel{\int_{1}^{4}(x^3-\sqrt{x})dx}$ $\cancel{n=6}$

~~5.~~ $\cancel{\int_{1}^{4}(7+x-2x^2)dx}$ $\cancel{n=6}$

~~6.~~ $\cancel{\int_{0}^{3}(7x^2-3\sqrt{x})dx}$ $\cancel{n=6}$