3. Методы решения систем линейных алгебраических уравнений

Методы решения систем уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ .... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad (3.1)$$

делятся на точные (прямые) и приближенные (итерационные). Прямые методы позволяют в предположении отсутствия ошибок округления получить точное решение задачи за конечное число арифметических действий. Итерационные методы основаны на использовании повторяющегося процесса и позволяют получить решение в результате последовательных приближений.

3.1. Метод Гаусса

Этот метод является одним из наиболее распространенных прямых методов решения систем линейных алгебраических уравнений. В основе метода Гаусса лежит идея последовательного исключения неизвестных.

Рассмотрим систему из трех уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{aligned} &\mathrm{I}: && a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ &\mathrm{II}: && a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ &\mathrm{III}: && a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{aligned} \qquad (3.2)$$

Система уравнений (3.2) приводится к эквивалентной системе с треугольной матрицей:

$$\begin{aligned} &\mathrm{I}: && a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ &\mathrm{II}': && a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 = b'_2 \\ &\mathrm{III}'': && a''_{33}x_3 = b''_3 \end{aligned} \qquad (3.3)$$

Достигается это при помощи цепочки элементарных преобразований, при которых из каждой строки вычитаются некоторые кратные величины расположенных выше строк.

Процесс приведения системы (3.2) к системе (3.3) называется прямым ходом, а нахождение неизвестных x_1, x_2, x_3 из системы (3.3) называется обратным ходом.

Прямой ход исключения: Исключаем x_1 из уравнений (II) и (III) системы (3.2). Для этого умножаем уравнение (I) на $d_1 = -a_{21}/a_{11}$ и складываем со вторым, затем умножаем на $d_2 = -a_{31}/a_{11}$ и складываем с третьим.

В результате получаем следующую систему:

$$\begin{aligned} \mathrm{II}': &\quad a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 = b'_2 \\ \mathrm{III}': &\quad a'_{32}x_2 + a'_{33}x_3 = b'_3 \end{aligned} \qquad (3.4)$$

Из полученной системы (3.4) исключаем x_2. Для этого, умножая новое уравнение на $d_3 = -a'_{32}/a'_{22}$ и складывая со вторым уравнением, получим уравнение:

$$\mathrm{III}'': \quad a''_{33}x_3 = b''_3 \qquad (3.5)$$

Взяв из каждой системы (3.2), (3.4) и (3.5) первые уравнения, получим систему уравнений с треугольной матрицей.

Обратный ход: Из уравнения (III″) находим $x_3 = b''_3 / a''_{33}$. Из уравнения (II′) находим $x_2 = b'_2 - a'_{23}x_3$. Из уравнения (I) находим $x_1 = b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3$. Коэффициенты a_{11}, a'_{22} называются ведущими элементами 1-го и 2-го шагов исключения неизвестных. Они должны быть отличны от нуля. Если они равны нулю, то, меняя местами строки, необходимо на их место вывести ненулевые элементы.

Аналогичным путем методом Гаусса решаются системы n уравнений с n неизвестными.

Пример 3.1. Решить систему уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 10 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = -1 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 11 \end{cases}$$

Решение: Удалить члены с x_1 из 2-го и 3-го уравнений можно, вычитая из 2-й строки 1-ую, умноженную на 2, а из 3-й - первую, умноженную на 3:

$$\begin{aligned} x_1 + 4x_2 + 3x_3 &= 10 \\ -7x_2 - 7x_3 &= -21 \\ -13x_2 - 8x_3 &= -19 \end{aligned}$$

2-я строка делится на -7:

$$\begin{aligned} x_1 + 4x_2 + 3x_3 &= 10 \\ x_2 + x_3 &= 3 \\ 13x_2 + 8x_3 &= 19 \end{aligned}$$

2-я строка умножается на 13 и вычитается из 3-й:

$$\begin{aligned} x_1 + 4x_2 + 3x_3 &= 10 \\ x_2 + x_3 &= 3 \\ -5x_3 &= -20 \end{aligned}$$

3-я строка делится на -5:

$$x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 10$$
$$x_2 + x_3 = 3$$
$$x_3 = 4$$

Процедура обратного хода дает решение:

$x_3 = 4$;

$x_2 = 3 - x_3 = -1$;

$x_1 = 10 - 4x_2 - 3x_3 = 10 - 4\cdot(-1) - 3\cdot 4 = 10 + 4 - 12 = 2$

Пример 3.2. Решить систему уравнений методом Гаусса с помощью программы на языке VBA в Excel:

$$\begin{cases} 13x_1 & -2x_2 & +x_3 & -4x_4 & = & 8 \\ 2x_1 & & -3x_3 & +5x_4 & = & -7 \\ 4x_1 & -x_2 & +3x_3 & +9x_4 & = & 1 \\ 7x_1 & -5x_2 & +11x_3 & -4x_4 & = & -5 \end{cases}$$

Порядок решения.

1) Ввести матрицу $\boldsymbol{A}$ и вектор $\boldsymbol{B}$ в рабочий лист Excel (рис. 3.1).

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	13	-2	1	-4		8		1,767019
2	2	0	-3	5		-7		9,807512
3	4	-1	3	9		1		2,702465
4	7	-5	11	-4		-5		-0,48533
5								

Рис. 3.1. Решение системы линейных уравнений методом обратной матрицы с помощью программы Excel.

2) Ввести код программы (рис. 3.2) в модуль листа. В качестве значения переменной n указать число уравнений.
3) Выполнить программу. В столбце H содержится решение системы:

$x_1 = 1{,}767019$; $x_2 = 9{,}807512$; $x_3 = 2{,}702465$; $x_4 = -0{,}48533$.

3.2. Метод обратной матрицы

Систему (3.1) можно представить в матричном виде как $AX = B$,

где $$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_n \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

Решение можно выразить, используя умножение на матрицу A^{-1}, обратную к A:

$$A^{-1}AX = A^{-1}B, \qquad X = A^{-1}B$$

```
Sub Gauss()
    n = 4
    ReDim a(1 To n, 1 To n + 2)
    For i = 1 To n
        For j = 1 To n
            a(i, j) = Cells(i, j)
        Next j
        a(i, n + 1) = Cells(i, n + 2)
    Next i
    For i = 1 To n - 1
        If Abs(a(i, i)) < 0.00000001 Then
            For k = i + 1 To n
                If Abs(a(k, i)) > 0.00000001 Then
                    For j = 1 To n + 1
                        tmp = a(i, j)
                        a(i, j) = a(k, j)
                        a(k, j) = tmp
                    Next j
                    Exit For
                End If
            Next k
        End If
        If Abs(a(i, i)) > 0.00000001 Then
            For k = i + 1 To n
                f = -a(k, i) / a(i, i)
                For j = i To n + 1
                    a(k, j) = a(k, j) + f * a(i, j)
                Next j
            Next k
        End If
    Next i
    For i = n To 1 Step -1
        tmp = a(i, n + 1)
        For k = i + 1 To n
            tmp = tmp - a(i, k) * a(k, n + 2)
        Next k
        a(i, n + 2) = tmp / a(i, i)
    Next i
    For i = 1 To n
        Cells(i, n + 4) = a(i, n + 2)
    Next i
End Sub
```

Рис.3.2. Программа решения системы линейных алгебраических уравнений методом Гаусса на языке VBA.

Пример 3.3. Решить систему уравнений из примера 3.2 методом обратной матрицы с помощью программы Excel:

	A	B	C	D	E	F	G
1	A					B	
2	13	-2	1	-4		8	
3	2	0	-3	5		-7	
4	4	-1	3	9		1	
5	7	-5	11	-4		-5	
6							
7	1/A					X	
8	0,098005	-0,09214	0,071009	-0,0534	X1=	1,767019	
9	0,201878	-0,85446	0,403756	-0,3615	X2=	9,807512	
10	0,019366	-0,31162	0,163732	-0,04049	X3=	2,702465	
11	-0,02758	0,049883	0,069836	-0,00293	X4=	-0,48533	

Рис. 3.3. Решение системы линейных уравнений методом обратной матрицы с помощью программы Excel.

Порядок решения.

4) Ввести матрицу $\boldsymbol{A}$ и вектор $\boldsymbol{B}$ в рабочий лист Excel (рис. 3.3).
5) Выделить ячейки для хранения обратной матрицы 4×4; например, ячейки **A8:D11**.
6) Вызвать мастер функций, в категории «Математические» выбрать функцию вычисления обратной матрицы **МОБР**. В диалоговом окне аргументов функции заполнить поле ввода «Массив» - указать диапазон ячеек матрицы $\boldsymbol{A}$ - в нашем случае **A2:D5**. Нажать кнопку OK. В первой ячейке выделенного под обратную матрицу диапазона (**A8**) появится число.
7) Чтобы получить всю обратную матрицу, нажать клавишу F2 для перехода в режим редактирования, а затем одновременно клавиши Ctrl+Shift+Enter. В ячейках **A8:D11** появятся значения обратной матрицы $\boldsymbol{A}^{-1}$.
8) Выделить ячейки для хранения вектора-столбца $\boldsymbol{X}$ 4×1; например, ячейки **F8:F11**.
9) Вызвать мастер функций, в категории «Математические» выбрать функцию матричного умножения **МУМНОЖ**. В диалоговом окне аргументов функции в поле ввода «Массив1» указать диапазон ячеек матрицы $\boldsymbol{A}^{-1}$ - в нашем случае **A8:D11**, в поле ввода «Массив2» указать диапазон ячеек вектора $\boldsymbol{B}$ - в нашем случае **F2:F5**. Нажать кнопку OK. В первой ячейке выделенного под результат диапазона (**F8**) появится число.

10) Чтобы получить весь вектор $\boldsymbol{X}$, нажать клавишу F2 для перехода в режим редактирования, а затем одновременно клавиши Ctrl+Shift+Enter. В ячейках **F8:F11** появятся значения решения системы уравнений:

$x_1 = 1{,}767019$; $x_2 = 9{,}807512$; $x_3 = 2{,}702465$; $x_4 = -0{,}48533$

3.3. Метод прогонки

Применяется для решения систем уравнений с трехдиагональной (ленточной) матрицей. Такая система уравнений записывается в виде:

$$a_i x_{i-1} + b_i x_i + c_i x_{i+1} = d_i \qquad i = 1, 2, 3, ..., n, \tag{3.6}$$
$$a_1 = 0, \quad c_n = 0.$$

Является частным случаем метода Гаусса и состоит из прямого и обратного хода. Прямой ход состоит в исключении элементов матрицы системы (3.6), лежащих ниже главной диагонали. В каждом уравнении останется не более двух неизвестных и формулу обратного хода можно записать в следующем виде:

$$x_i = U_i x_{i+1} + V_i, \qquad i = n, n-1, ..., 1 \tag{3.7}$$

Уменьшим в формуле (3.7) индекс на единицу: $x_{i-1} = U_{i-1} x_i + V_{i-1}$ и подставим в (3.6):

$$a_i (U_{i-1} x_i + V_{i-1}) + b_i x_i + c_i x_{i+1} = d_i$$

Выразим x_i:

$$x_i = -\frac{c_i}{a_i U_{i-1} + b_i} x_{i+1} + \frac{d_i - a_i V_{i-1}}{a_i U_{i-1} + b_i} \tag{3.8}$$

Сравнивая (3.7) и (3.8), получим:

$$U_i = -\frac{c_i}{a_i U_{i-1} + b_i} \quad V_i = \frac{d_i - a_i V_{i-1}}{a_i U_{i-1} + b_i} \qquad i = 1, 2, 3, ..., n \tag{3.9}$$

Поскольку $a_1 = 0$, то

$$U_1 = -\frac{c_1}{b_1}, \qquad V_1 = \frac{d_1}{b_1} \tag{3.10}$$

Теперь по формулам (3.9) и (3.10) можно вычислить прогоночные коэффициенты U_i и V_i ($i = 1, 2, 3, ..., n$). Это прямой ход прогонки. Зная прогоночные коэффициенты, по формулам (3.7), можно вычислить все x_i ($i = n, n-1, ..., 1$) (обратный ход прогонки). Поскольку $c_n = 0$, то $U_n = 0$ и $x_n = V_n$. Далее вычисляем x_{n-1}, x_{n-2}, ..., x_2, x_1.

Пример 3.4. Решить систему уравнений методом прогонки:

$$\begin{cases} 10x_1 + x_2 = 5 \\ -2x_1 + 9x_2 + x_3 = -1 \\ 0{,}1x_2 + 4x_3 - x_4 = -5 \\ - x_3 + 8x_4 = 40 \end{cases}$$

Решение. Коэффициенты записываем в виде таблицы 3.1.

Таблица 3.1

i	a_i	b_i	c_i	d_i
1	0	10	1	5
2	-2	9	1	-1
3	0,1	4	-1	-5
4	-1	8	0	40

Прямой ход прогонки. По формулам (3.9) и (3.10) определяем прогоночные коэффициенты U_i и V_i ($i = 1, 2, 3, 4$).

$$U_1 = -c_1 / b_1 = -1/10 = -0{,}1$$

$$V_1 = d_1 / b_1 = 5/10 = 0{,}5$$

$$U_2 = -c_2 /(a_2U_1 + b_2) = -1/(2 \cdot 0{,}1 + 9) = -0{,}1087$$

$$V_2 = (d_2 - a_2V_1)/(a_2U_1 + b_2) = (-1 + 2 \cdot 0{,}5)/(2 \cdot 0{,}1 + 9) = 0$$

$$U_3 = -c_3 /(a_3U_2 + b_3) = 1/(-0{,}1 \cdot 0{,}1087 + 4) = 0{,}2507$$

$$V_3 = (d_3 - a_3V_2)/(a_3U_2 + b_3) = (-5 - 0{,}1 \cdot 0)/(-0{,}1 \cdot 0{,}1087 + 4) = -1{,}2534$$

$$U_4 = -c_4 /(a_4U_3 + b_4) = 0, \qquad \text{т.к. } c_4 = 0$$

$$V_4 = (d_4 - a_4V_3)/(a_4U_3 + b_4) = (40 - 1 \cdot 1{,}2534)/(-1 \cdot 0{,}2507 + 8) = 5$$

Обратный ход прогонки. По формулам (3.7) вычисляем все x_i ($i = 4, 3, 2, 1$). Поскольку $U_4 = 0$, то $x_4 = V_4 = 5$.

Далее вычисляем:

$$x_3 = U_3x_4 + V_3 = 0{,}2507 \cdot 5 - 1{,}2534 = 0{,}0001 \approx 0$$

$$x_2 = U_2x_3 + V_2 = -1{,}1087 \cdot 0{,}0001 + 0 = -0{,}0001 \approx 0$$

$$x_1 = U_1x_2 + V_1 = 0{,}1 \cdot 0{,}0001 + 0{,}5 = 0{,}5001 \approx 0{,}5$$

Вычисляем невязки $r_i = d_i - a_ix_{i-1} - b_ix_i - c_ix_{i+1}$ ($i = 1, 2, 3, 4$)

$$r_1 = d_1 - b_1x_1 - c_1x_2 = 5 - 10 \cdot 0{,}5 - 1 \cdot 0 = 0$$

$$r_2 = d_2 - a_2x_1 - b_2x_2 - c_2x_3 = -1 + 2 \cdot 0{,}5 - 9 \cdot 0 - 0 = 0$$

$$r_3 = d_3 - a_3 x_2 - b_3 x_3 - c_3 x_4 = -5 - 0{,}1 \cdot 0 - 4 \cdot 0 + 1 \cdot 5 = 0$$
$$r_4 = d_4 - a_4 x_3 - b_4 x_4 = 40 + 1 \cdot 0 - 8 \cdot 5 = 0$$

На рис. 3.4 приведена программа решения системы линейных алгебраических уравнений методом прогонки на языке VBA.

	A	B	C	D	E	F	G
1	a	b	c	d	n	x	r
2	0	10	1	5	4	0,5	0
3	-2	9	1	-1		0	0
4	0,1	4	-1	-5		0	0
5	-1	8	0	40		5	0

```
Sub program4()
n = Cells(2, 5)
ReDim a(n),b(n),c(n),d(n),u(n),v(n),x(n+1),r(n)
For i = 1 To n
  a(i) = Cells(i + 1, 1)
  b(i) = Cells(i + 1, 2)
  c(i) = Cells(i + 1, 3)
  d(i) = Cells(i + 1, 4)
  u(i) = -c(i)/(a(i)*u(i-1)+b(i))
  v(i) = (d(i)-a(i)*v(i-1))/(a(i)*u(i-1)+b(i))
Next i
For i = n To 1 Step -1
    x(i) = u(i)*x(i+1)+v(i)
Next i
For i = 1 To n
    r(i) = d(i)-a(i)*x(i-1)-b(i)*x(i)-c(i)*x(i+1)
    Cells(i + 1, 6) = x(i)
    Cells(i + 1, 7) = r(i)
Next i
End Sub
```

Рис.3.4. Программа решения системы линейных алгебраических уравнений методом прогонки на языке VBA.

Пример 3.5. Решить систему уравнений из примера (3.4) методом прогонки с помощью программы Excel.

Порядок решения.

1) Ввести в ячейки **A1:G1** заголовки столбцов (рис. 3.5).
2) В ячейки **A3:D6** – коэффициенты a_i, b_i, c_i, d_i. Строки выше и ниже данных оставить пустыми.

3) В ячейку **E3** – формулу U_1 **=-C3/(A3*E2+B3)**
4) В ячейку **F3** – формулу V_1 **=(D3-A3*F2)/(A3*E2+B3)**
5) В ячейку **G3** – формулу x_1 **=G4*E3+F3**
6) Выделить ячейки **E3:G3** и скопировать формулы в соседние ячейки **E4:G4** … **E6:G6** при помощи маркера заполнения.
7) В ячейках **G3:G6** появятся значения решения системы уравнений.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	a	b	c	d	u	v	x	
2								
3	0	10	1	5	-0,1	0,5	0,5	
4	-2	9	1	-1	-0,1087	0	0	
5	0,1	4	-1	-5	0,250681	-1,25341	0	
6	-1	8	0	40	0	5	5	
7								

Рис. 3.5. Решение системы линейных алгебраических уравнений методом прогонки с помощью программы Excel.

3.4. Метод простой итерации (метод Якоби)

Суть вычислений итерационными методами состоит в следующем: расчет начинается с некоторого заранее выбранного приближения $x^{(0)}$ (начального приближения). Вычислительный процесс, использующий матрицу A, вектор B системы (3.1) и $x^{(0)}$, приводит к новому вектору $x^{(1)}$:

$$x_i^{(1)} = \frac{1}{a_{ii}}(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(0)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(0)}), \qquad i = 1, 2, 3, \ldots, n \tag{3.11}$$

Затем процесс повторяется, только вместо $x^{(0)}$ используется новое значение $x^{(1)}$. На $k+1$-м шаге итерационного процесса получают:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}), \quad i = 1, 2, 3, \ldots, n \tag{3.12}$$

При выполнении некоторых заранее оговоренных условий процесс сходится при $k \to \infty$. Сходимость метода простой итерации обеспечивается при выполнении условия преобладания диагональных элементов матрицы A:

$$\sum_{i \neq j} |a_{ij}| < |a_{ii}|, \qquad i = 1, 2, 3, \ldots, n \tag{3.13}$$

Заданная точность достигается при выполнении условия:

$$\max_i |x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}| < \varepsilon \tag{3.14}$$

Пример 3.6. Преобразовать систему уравнений (3.15) к виду, пригодному для построения итерационного процесса методом Якоби и выполнить три итерации.

$$\begin{aligned} 7x_1 + 4x_2 - x_3 &= 7 \\ 2x_1 + 6x_2 + 3x_3 &= -2 \\ -x_1 + x_2 + 4x_3 &= 4 \end{aligned} \qquad (3.15)$$

Решение. Достаточное условие сходимости (3.13) выполняется, поэтому начальное приближение может быть любым.

$$|a_{12}| + |a_{13}| = 4 + 1 < |a_{11}| = 7$$
$$|a_{21}| + |a_{23}| = 2 + 3 < |a_{22}| = 6$$
$$|a_{31}| + |a_{32}| = 1 + 1 < |a_{33}| = 4$$

В i-ом уравнении все члены, кроме x_i, переносятся в правую часть:

$$\begin{aligned} x_1 &= (7 - 4x_2 + x_3)/7 \\ x_2 &= (-2 - 2x_1 - 3x_3)/6 \\ x_3 &= (4 + x_1 - x_2)/4 \end{aligned} \qquad (3.16)$$

Задается начальное приближение $x^{(0)} = (x_1^{(0)};\ x_2^{(0)};\ x_3^{(0)})$, которое подставляется в правую часть (3.16). Если $x_1^{(0)} = 0$, $x_2^{(0)} = 0$, $x_3^{(0)} = 0$, то результаты первой итерации:

$$x_1^{(1)} = (7 - 4 \cdot 0 + 0)/7 = 1$$
$$x_2^{(1)} = (-2 - 2 \cdot 0 - 3 \cdot 0)/6 = -1/3 = -0{,}333$$
$$x_3^{(1)} = (4 + 0 - 0)/4 = 1$$

Результаты первой итерации $x^{(1)} = (x_1^{(1)};\ x_2^{(1)};\ x_3^{(1)})$ подставляют в правую часть (2.16) и получают результаты второй итерации:

$$x_1^{(2)} = (7 - 4 \cdot (-0{,}333) + 1)/7 = 4/3 = 1{,}333$$
$$x_2^{(2)} = (-2 - 2 \cdot 1 - 3 \cdot 1)/6 = -7/6 = -1{,}167$$
$$x_3^{(2)} = (4 + 1 - (-0{,}333))/4 = 4/3 = 1{,}333$$

Результаты второй итерации $x^{(2)} = (x_1^{(2)};\ x_2^{(2)};\ x_3^{(2)})$ подставляют в правую часть (2.16) и получают результаты третьей итерации:

$$x_1^{(3)} = (7 - 4 \cdot (-1{,}167) + 1{,}333)/7 = 1{,}857$$
$$x_2^{(3)} = (-2 - 2 \cdot 1{,}333 - 3 \cdot 1{,}333)/6 = -1{,}444$$
$$x_3^{(3)} = (4 + 1{,}333 - (-1{,}167))/4 = 1{,}625$$

Определяют достигнутую точность

$$|x_1^{(3)} - x_1^{(2)}| = |1{,}857 - 1{,}333| = 0{,}524$$
$$|x_2^{(3)} - x_2^{(2)}| = |-1{,}444 + 1{,}167| = 0{,}278$$
$$|x_3^{(3)} - x_3^{(2)}| = |1{,}625 - 1{,}333| = 0{,}292$$
$$\max_i |x_i^{(3)} - x_i^{(2)}| = 0{,}524$$

	A	B	C
1	x1	x2	x3
2	0,00	0,00	0,00
3	1,00	-0,33	1,00
4	1,33	-1,17	1,33
5	1,86	-1,44	1,63
6	2,06	-1,76	1,83
7	2,27	-1,93	1,96
…	…	…	…
20	2,66	-2,34	2,25
21	2,66	-2,35	2,25
22	2,66	-2,35	2,25

Рис. 3.6. Решение системы линейных алгебраических уравнений методом Якоби с помощью программы Excel

Пример 3.7. Решить систему уравнений методом Якоби с помощью программы Excel с точностью $\varepsilon = 0{,}01$:

$$\begin{aligned} 7x_1 + 4x_2 - x_3 &= 7 \\ 2x_1 + 6x_2 + 3x_3 &= -2 \\ -x_1 + x_2 + 4x_3 &= 4 \end{aligned}$$

Порядок решения.

1) Представить систему в виде (3.16);
2) Ввести в ячейки **A1:C1** заголовки столбцов (рис. 3.6);
3) В ячейки **A2:C2** – начальное приближение **0, 0, 0**;
4) В ячейку **A3** – формулу $\boldsymbol{x}_1$ **=(7-4*B2+C2)/7**
5) В ячейку **B3** – формулу $\boldsymbol{x}_2$ **=(-2-2*A2-3*C2)/6**
6) В ячейку **C3** – формулу $\boldsymbol{x}_3$ **=(4+A2-B2)/4**
7) Выделить столбцы **A, B, C**, вызвать контекстное меню **Формат ячеек**, установить формат **числовой** и указать число десятичных знаков, соответствующее необходимой точности, т.е. **2**;
8) Выделить ячейки **A3:C3** и скопировать формулы в соседние ячейки расположенных ниже строк **A4:C4, A5:C5** и т.д. при помощи маркера заполнения. Каждая новая строка содержит результаты очередного приближения;
9) Продолжать копирование, пока результат не перестанет меняться;
10) Ячейки **A21, B21, C21** содержат решение системы уравнений, соответствующее заданной точности.

Приближенное решение системы с точностью $\varepsilon = 0{,}01$:

$x_1 = 2{,}66$, $x_2 = -2{,}35$, $x_2 = 2{,}25$

3.5. Метод Зейделя

В методе Зейделя при нахождении $(k+1)$-ой компоненты используются уже найденные компоненты этой же итерации с меньшими номерами, т.е. последовательность итераций задается формулой:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)}\right),\ i = 1, 2, 3, \ldots, n \qquad (3.17)$$

Сходимость и точность достигаются условиями (3.13) и (3.14).

Пример 3.8. Задать итерационный процесс Зейделя для нахождения решений системы уравнений (3.15).

Решение. Достаточное условие сходимости (3.13) выполняется, поэтому начальное приближение может быть любым.

Используя (3.16) получим:

$$x_1^{(k+1)} = (7 - 4x_2^{(k)} + x_3^{(k)})/7$$

$$x_2^{(k+1)} = (-2 - 2x_1^{(k+1)} - 3x_3^{(k)})/6$$

$$x_3^{(k+1)} = (4 + x_1^{(k+1)} - x_2^{(k+1)})/4$$

После задания начального приближения, например, $x^{(0)} = (0;\ 0;\ 0)$ выражение для первой итерации имеет вид:

$$x_1^{(1)} = (7 - 4 \cdot 0 + 0)/7 = 1$$

$$x_2^{(1)} = (-2 - 2 \cdot 1 - 3 \cdot 0)/6 = -0{,}667$$

$$x_3^{(1)} = (4 + 1 + 0{,}667)/4 = 1{,}417$$

Результаты первой итерации подставляют в правую часть и получают результаты второй итерации:

$$x_1^{(2)} = (7 - 4 \cdot (-0{,}667) + 1{,}417)/7 = 1{,}583$$

$$x_2^{(2)} = (-2 - 2 \cdot 1{,}583 - 3 \cdot 1{,}417)/6 = -1{,}569$$

$$x_3^{(2)} = (4 + 1{,}583 - (-1{,}569))/4 = 1{,}788$$

Результаты второй итерации подставляют в правую часть и получают результаты третьей итерации:

$$x_1^{(3)} = (7 - 4 \cdot (-1{,}569) + 1{,}788)/7 = 2{,}152$$

$$x_2^{(3)} = (-2 - 2 \cdot 2{,}152 - 3 \cdot 1{,}788)/6 = -1{,}945$$

$$x_3^{(3)} = (4 + 2{,}152 - (-1{,}945))/4 = 2{,}024$$

Погрешность решения:

$$|x_1^{(3)} - x_1^{(2)}| = |2{,}152 - 1{,}583| = 0{,}469$$

$$|x_2^{(3)} - x_2^{(2)}| = |-1{,}945 + 1{,}569| = 0{,}376$$

$$|x_3^{(3)} - x_3^{(2)}| = |2{,}024 - 1{,}788| = 0{,}236$$

$$\max_i |x_i^{(3)} - x_i^{(2)}| = 0{,}469$$

Пример 3.9. Решить систему уравнений из примера 3.4 итерационными методами на VBA и оценить погрешность.

Порядок решения.

1) Ввести код программы (рис. 3.7) в модуль листа. Удалить помеченные строки, не соответствующие выбранному методу решения.

```
Sub Iter()
  n = Cells(1, 2)
  kmax = Cells(1, 4)
  ReDim a(n, n), b(n), x(n), r(n)
  ReDim y(n)                                      'Якоби
  For i = 1 To n
    For j = 1 To n
      a(i, j) = Cells(i + 2, j)
    Next j
    b(i) = Cells(i + 2, n + 2)
    x(i) = Cells(i + 2, n + 4)
  Next i
  For k = 1 To kmax
    For i = 1 To n
      s = 0
      For j = 1 To n
        s = s + a(i, j) * x(j)
      Next j
      x(i) = x(i) + (b(i) - s) / a(i, i)    'Зейдель
      y(i) = x(i) + (b(i) - s) / a(i, i)    'Якоби
    Next
    x = y                                         'Якоби
  Next
  For i = 1 To n
    s = 0
    For j = 1 To n
      s = s + a(i, j) * x(j)
    Next j
    r(i) = b(i) - s
    Cells(i + 2, n + 4) = x(i)
    Cells(i + 2, n + 5) = r(i)
  Next
End Sub
```

Рис. 3.7. Программа решения системы линейных алгебраических уравнений итерационными методами на языке VBA

2) Ввести число уравнений n, максимальное число итераций $k_{\max}$, матрицу $\boldsymbol{A}$ и вектор $\boldsymbol{B}$ в рабочий лист Excel (рис. 3.8).
3) Ввести начальное приближение в столбец H, например $x_1 = 1;\ x_2 = 1;\ x_3 = 1;\ x_4 = 1$.
4) Выполнить программу. В столбце H содержится решение системы: $x_1 = 1{,}767019\ ;\ x_2 = 9{,}807512\ ;\ x_3 = 2{,}702465\ ;\ x_4 = -0{,}48533$.
5) В столбце I содержатся невязки. Если они велики, повторить расчет, увеличив $k_{\max}$.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	n=	4	kmax=	10				x	r
2	10	1	0	0		5		1	
3	-2	9	1	0		-1		1	
4	0	0,1	4	-1		-5		1	
5	0	0	-1	8		40		1	

Рис. 3.8. Таблица исходных данных для решения системы линейных алгебраических уравнений итерационными методами на языке VBA

4. Численные методы решения систем нелинейных уравнений

Требуется решить систему нелинейных уравнений вида:

$$\begin{aligned} &F_1(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \\ &F_2(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \\ &\dots \\ &F_n(x_1, x_2, ..., x_n) = 0. \end{aligned} \tag{4.1}$$

4.1. Метод простой итерации (метод Якоби) для систем нелинейных уравнений

Систему нелинейных уравнений (4.1) после преобразований

$$x_i = x_i - F_i(x)/M_i, \qquad i = 1, 2, 3, ..., n$$

(здесь M_i определяются из условия сходимости), представим в виде:

$$\begin{aligned} &x_1 = f_1(x_1, x_2, ..., x_n) \\ &x_2 = f_2(x_1, x_2, ..., x_n) \\ &\dots \\ &x_n = f_n(x_1, x_2, ..., x_n) \end{aligned} \tag{4.2}$$

Из системы (4.2) легко получить итерационные формулы метода Якоби. Возьмем в качестве начального приближения какую-нибудь совокупность чисел $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, ..., x_n^{(0)}$. Подставляя их в правую часть (4.2) вместо переменных $x_1, x_2, ..., x_n$, получим новое приближение к решению исходной системы:

$$\begin{aligned} &x_1^{(1)} = f_1(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, ..., x_n^{(0)}) \\ &x_2^{(1)} = f_2(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, ..., x_n^{(0)}) \\ &\dots \\ &x_n^{(1)} = f_n(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, ..., x_n^{(0)}) \end{aligned} \tag{4.3}$$

Эта операция получения первого приближения $x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, ..., x_n^{(1)}$ решения системы уравнения (4.2) называется первым шагом итерации. Под-

№3. Решение систем линейных алгебраических уравнений

а) Решить систему уравнений методом Гаусса или обратной матрицы:

1. $\begin{cases} 4x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 2 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 2 \\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 + 3x_4 = -1 \\ 4x_1 + 5x_2 + 4x_3 - 4x_4 = 8 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 1 \\ 2x_1 + 3x_3 + x_4 = 4 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 3 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 3 \\ 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 + x_4 = 3 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + 2x_4 = 5 \end{cases}$

4. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 4x_4 = 7 \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 9 \end{cases}$

5. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0 \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$

6. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 3 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 3 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \end{cases}$

7. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = -1 \\ 4x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 1 \\ 6x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 4 \end{cases}$

8. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 1 \\ 4x_1 + 7x_2 + 6x_3 + 2x_4 = 2 \end{cases}$

9. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 = -1 \end{cases}$

10. $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 1 \\ 4x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 1 \\ 6x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 5 \end{cases}$

11. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 5 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 5 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 4 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 3 \end{cases}$

12. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 1 \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 = 2 \\ 2x_1 + 6x_2 + x_3 + 3x_4 = 5 \\ 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 3 \end{cases}$

13. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 3 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 5x_3 - x_4 = 1 \end{cases}$

14. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 3 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 5 \\ 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 7 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + 4x_4 = 8 \end{cases}$

15. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + 8x_3 + 4x_4 = 2 \\ 3x_1 + 4x_2 + 10x_3 + 6x_4 = 3 \end{cases}$

16. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 4x_4 = 1 \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 1 \end{cases}$

17. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 2 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 3 \\ 3x_1 + 5x_2 + 7x_3 + 7x_4 = 4 \end{cases}$

18. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 2 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 3 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = 2 \end{cases}$

19. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 2 \\ 3x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 4x_4 = 2 \\ 4x_1 + 7x_2 + 6x_3 + 4x_4 = 0 \end{cases}$

20. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 = -1 \\ 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 4x_4 = -4 \\ 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 5x_4 = -5 \end{cases}$

21. $\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 8 \\ 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 3x_4 = 5 \\ 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 4 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 4 \end{cases}$

22. $\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 6 \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 = 5 \\ 2x_1 + 6x_2 + x_3 + 3x_4 = 8 \\ 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 7 \end{cases}$

23. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_4 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 5x_3 - x_4 = 1 \end{cases}$

24. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 3 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 5 \\ 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 7 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + 4x_4 = 8 \end{cases}$

25. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + 8x_3 + 4x_4 = 2 \\ 3x_1 + 4x_2 + 10x_3 + 6x_4 = 3 \end{cases}$

26. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 1 \\ 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 4x_4 = -1 \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 1 \end{cases}$

27. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 2 \\ x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 3x_4 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 5x_4 = 3 \\ 3x_1 - 5x_2 + 7x_3 + 7x_4 = 4 \end{cases}$

28. $\begin{cases} 5x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 2 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 5 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 4 \\ x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$

29. $\begin{cases} 7x_1 + x_2 + x_3 = 7 \\ x_1 + 5x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 + 3x_4 = -1 \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 5x_4 = -2 \end{cases}$

30. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 2 \\ 2x_1 + 2x_2 - 5x_3 + x_4 = -3 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 2 \end{cases}$

б) Решить СЛАУ итерационными методами с точностью 0,01 при заданном начальном приближении (0,7m; 1; 2; 0,5):

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 3m \\ x_1 - 4x_2 + x_3 - x_4 = m - 6 \\ -x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 = 15 - m \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - 5x_4 = m + 2 \end{cases}$$

m – вариант

в) Решить систему уравнений методом прогонки (или итерационным методом с точностью 0,01):

1. $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 = 1 \\ -x_1 + 2x_2 - 0{,}5x_3 = 0 \\ x_2 - 3x_3 - x_4 = 2 \\ x_3 + 2x_4 = 2 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 = 5 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 6 \\ 3x_2 + 9x_3 + 6x_4 = 25 \\ 2x_3 + 4x_4 = 5 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 4x_1 + x_2 = 5 \\ x_1 + 3x_2 - 2{,}5x_3 = 2 \\ 1{,}5x_2 - 5x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_3 + 4x_4 = 7 \end{cases}$

4. $\begin{cases} 7x_1 - 2x_2 = 5 \\ -2x_1 + 12x_2 + 4x_3 = 8 \\ x_2 - 6x_3 + x_4 = 2 \\ 3x_3 + 5x_4 = 4 \end{cases}$

5. $\begin{cases} 1{,}5x_1 + 0{,}5x_2 = 3{,}2 \\ -x_1 + 2x_2 - 0{,}4x_3 = -1 \\ 2{,}5x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 4 \\ x_3 + 3x_4 = 7 \end{cases}$

6. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 = 5 \\ x_1 + 4x_2 - x_3 = 3 \\ -x_2 + 5x_3 + x_4 = 12 \\ x_3 + 2x_4 = 6 \end{cases}$

7. $\begin{cases} 6x_1 + 3x_2 = 4 \\ x_1 - 7x_2 - x_3 = -4 \\ x_2 + 4x_3 - x_4 = 3 \\ 2x_3 - 7x_4 = 1 \end{cases}$

8. $\begin{cases} 2{,}5x_1 + 1{,}5x_2 = 8{,}4 \\ -2x_1 + 4x_2 - x_3 = 4 \\ x_2 + 6x_3 - x_4 = 5{,}6 \\ 2x_3 + 5x_4 = 7 \end{cases}$

9. $\begin{cases} 1{,}25x_1 - 0{,}2x_2 = 2{,}3 \\ -1{,}7x_1 + 2{,}87x_2 - x_3 = 4 \\ 1{,}4x_2 + 4{,}7x_3 - 2x_4 = 3{,}5 \\ -x_3 + 5x_4 = 1{,}4 \end{cases}$

10. $\begin{cases} 3x_1 + 2{,}3x_2 = 2 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 = 3{,}2 \\ 2{,}2x_2 + 4x_3 - x_4 = 6 \\ 5x_3 + 7x_4 = 5 \end{cases}$

11. $\begin{cases} 10x_1 - 4x_2 = 8 \\ x_1 + 2x_2 - 0{,}2x_3 = 5{,}5 \\ x_2 - 7x_3 + x_4 = 2 \\ -2x_3 + 5x_4 = -1 \end{cases}$

12. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 4 \\ x_1 - 8x_2 + x_3 = -1 \\ x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 2 \\ x_3 + 2x_4 = 6 \end{cases}$

13. $\begin{cases} 6x_1 + 3x_2 = 7 \\ x_1 - 2x_2 + 0{,}3x_3 = 4{,}3 \\ 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 3 \\ -x_3 + 4x_4 = 8 \end{cases}$

14. $\begin{cases} x_1 - 0{,}2x_2 = 2 \\ -3x_1 + 6{,}2x_2 + x_3 = 4{,}2 \\ -x_2 + 4x_3 - x_4 = 2{,}3 \\ x_3 + 2x_4 - 0{,}3x_5 = 2 \\ x_4 + 2x_5 = 3{,}4 \end{cases}$

15. $\begin{cases} x_1 + 0{,}5x_2 = 3 \\ 2x_1 - 5x_2 + x_3 = 1 \\ x_2 + 8x_3 - 2x_4 = 5 \\ 1{,}5x_3 - 6x_4 = 4 \end{cases}$

16. $\begin{cases} -3x_1 + 1{,}2x_2 = -1{,}7 \\ 2x_1 - 5x_2 + x_3 = -2 \\ 1{,}1x_2 + 4x_3 - x_4 = 3 \\ 5x_3 + 9x_4 + 2x_5 = 11 \\ -2x_4 + 6{,}5x_5 = 2 \end{cases}$

17. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 9 \\ -x_1 - 5x_2 + 3x_3 = -18 \\ -2x_2 + 7x_3 + 4x_4 = -6 \\ 3x_3 + 5x_4 = -6 \end{cases}$

18. $\begin{cases} 38x_1 + 2x_2 = 6{,}2 \\ -x_1 + 8x_2 + 2{,}3x_3 = 5{,}1 \\ x_2 - 2x_3 + x_4 = -2 \\ 1{,}3x_3 + 2x_4 + 0{,}5x_5 = 3 \\ -0{,}8x_4 + 2{,}1x_5 = 3{,}2 \end{cases}$

19. $\begin{cases} 2{,}5x_1 + 0{,}8x_2 = 3{,}3 \\ 1{,}2x_1 + 3x_2 + x_3 = 4 \\ 1{,}1x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 2{,}1 \\ 2x_3 + 5{,}2x_4 + x_5 = 6 \\ 2x_4 + 3x_5 = 3 \end{cases}$

20. $\begin{cases} -7x_1 + 2x_2 = -5 \\ x_1 - 12x_2 - 4x_3 = -8 \\ -x_2 + 6x_3 - x_4 = -2 \\ 3x_3 + 5x_4 = 4 \end{cases}$

21. $\begin{cases} 3x_1 + 2{,}2x_2 = 4{,}8 \\ x_1 - 4x_2 + x_3 = -1 \\ 2x_2 - 7x_3 + 2{,}5x_4 = 0{,}5 \\ -1{,}2x_3 + 6x_4 + x_5 = 6{,}1 \\ 2x_4 + 3{,}5x_5 = 3 \end{cases}$

22. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 = 5 \\ -x_1 - 4x_2 + x_3 = -3 \\ x_2 - 5x_3 - x_4 = -12 \\ x_3 + 2x_4 = 6 \end{cases}$

23. $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + 0{,}5x_3 = 0 \\ -x_2 + 3x_3 + x_4 = -2 \\ x_3 + 2x_4 = 2 \end{cases}$

24. $\begin{cases} 6x_1 + 3x_2 = 4 \\ -x_1 + 7x_2 + x_3 = 4 \\ x_2 + 4x_3 - x_4 = 3 \\ -2x_3 + 7x_4 = -1 \end{cases}$

25. $\begin{cases} 4x_1 + x_2 = 5 \\ x_1 + 3x_2 - 2{,}5x_3 = 2 \\ 1{,}5x_2 - 5x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_3 + 4x_4 = 7 \end{cases}$

26. $\begin{cases} 1{,}25x_1 - 0{,}2x_2 = 2{,}3 \\ -1{,}7x_1 + 2{,}87x_2 - x_3 = 4 \\ 1{,}4x_2 + 4{,}7x_3 - 2x_4 = 3{,}5 \\ -x_3 + 5x_4 = 1{,}4 \end{cases}$

27. $\begin{cases} 1{,}5x_1 + 0{,}5x_2 = 3{,}2 \\ x_1 - 2x_2 + 0{,}4x_3 = 1 \\ -2{,}5x_2 - 5x_3 + 2x_4 = -4 \\ x_3 + 3x_4 = 3 \end{cases}$

28. $\begin{cases} -10x_1 + 4x_2 = -8 \\ x_1 + 2x_2 - 0{,}2x_3 = 5{,}5 \\ -x_2 + 7x_3 - x_4 = -2 \\ 2x_3 - 5x_4 = 1 \end{cases}$

29. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 = 5 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 6 \\ 3x_2 + 9x_3 + 6x_4 = 25 \\ 2x_3 + 4x_4 = 5 \end{cases}$

30. $\begin{cases} 6x_1 + 3x_2 = 7 \\ -x_1 + 2x_2 - 0{,}3x_3 = -4{,}3 \\ 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 3 \\ x_3 - 4x_4 = -8 \end{cases}$

31. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 5 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 = m - 1 \\ -x_2 + 4x_3 - x_4 = 4m - n - 1 \\ x_3 + 2x_4 = m + 2n \end{cases}$

32. $\begin{cases} 10x_1 + x_2 = m + 5 \\ -2x_1 + 9x_2 + x_3 = n + 9m - 1 \\ 0{,}1x_2 + 4x_3 - x_4 = 4n + 0{,}1m - 5 \\ -x_3 + 8x_4 = -n + 40 \end{cases}$

m – вариант

n – номер группы