

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
Санкт-Петербургский государственный политехнический университет  
Физико-механический факультет  
Кафедра гидроаэродинамики

Диссертация допущена к защите  
Зав. кафедрой, проф., д.ф.-м.н.  
" \_\_\_\_\_ Е.М. Смирнов  
" \_\_\_\_\_ 2012г.

Численное исследование течения в фильтре-циклоне  
ДИССЕРТАЦИЯ НА СОИСКАНИЕ УЧЕНОЙ СТЕПЕНИ МАГИСТРА ПО  
НАПРАВЛЕНИЮ 010600 – ПРИКЛАДНЫЕ МАТЕМАТИКА И ФИЗИКА

Выполнил студент гр. 6054/11  
Руководитель, к.ф.-м.н., доц.

Богданов Д.А.  
Поняев С.А.

Санкт-Петербург  
2012

# Содержание

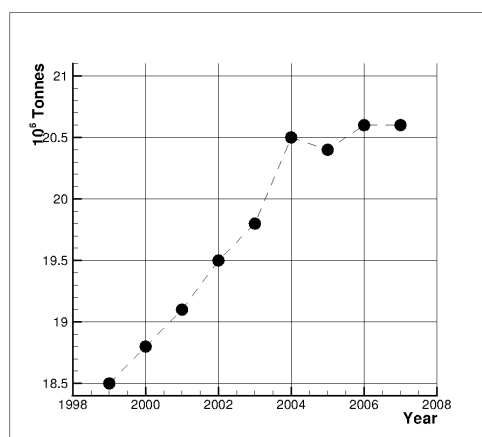
<b>Введение</b>	<b>2</b>
Актуальность проблемы . . . . .	2
Цели работы . . . . .	4
<b>1 Обзор существующих исследований</b>	<b>5</b>
1.1 Теоретические исследования . . . . .	6
Степень очистки . . . . .	7
Перепад давления . . . . .	13
1.2 Экспериментальные исследования . . . . .	14
1.3 Численные исследования . . . . .	15
<b>2 Численное моделирование</b>	<b>18</b>
2.1 Уравнения движения . . . . .	19
2.2 Модель турбулентности . . . . .	21
2.2.1 Введение поправки на кривизну линий тока . . . . .	26
2.3 Метод конечных объёмов . . . . .	30
<b>3 Результаты</b>	<b>35</b>
3.1 Валидация модели турбулентности с поправкой на кривизну линий тока . . . . .	35
3.2 Расчёт циклона . . . . .	41
<b>Заключение</b>	<b>51</b>

# Введение

## Актуальность проблемы

Задача очищения атмосферного воздуха от загрязняющих выбросов промышленных предприятий достаточно актуальна. Выбросы от стационарных источников вредных веществ в атмосферу городов и населенных пунктов, расположенных на территории северо-западного федерального округа, по данным Росстата за 2007 год, составили 2319000 тонн, в том числе твёрдых – 289400 тонн [30]. В некоторых отраслях промышленности доля выбросов пыли в атмосферу достигает 15% от общего числа получаемого продукта. Так, при изготовлении одной тонны цемента в воздух выбрасывается  $\approx 160$  кг цементной пыли [1].

Динамика изменения объёма выбросов твёрдых вредных веществ в атмосферу, согласно [30], (*рисунок 1*) имеет тенденцию к росту, что говорит о том, что решение проблемы инженерной защиты воздуха от вредных веществ останется актуальной и в ближайшем будущем.



**Рис. 1:** Динамика выбросов твёрдых вредных веществ в атмосферу

Для очищения воздуха от твёрдых примесей широкое распространение получили фильтры типа циклон. Циклон представляет собой инерционный пылеуловитель, в котором выделение частиц из воздуш-

ной среды происходит, в основном, под действием центробежной силы, возникающей при вращении воздушного потока в корпусе аппарата.

Запылённый воздух входит в циклон через тангенциальный патрубок и, приобретая вращательное движение, опускается винтообразно вниз вдоль внутренних стенок цилиндра и конуса. Небольшая часть этого потока, в котором сконцентрированы пылевые частицы, движется в непосредственной близости от стенок циклона и поступает через пылеотводящее отверстие в пылесборный бункер, где происходит осаждение и накопление пылевых частиц.

В центральной зоне циклона воздушный поток, освобождённый от пыли, поднимается винтообразно вверх и удаляется через выхлопную трубу наружу.

Вследствие вращательного движения воздушного потока в центральной зоне циклона (в конусе, выхлопной трубе и пылесборном бункере) наблюдается пониженное давление.[29]

В силу высокой степени закрученности потока, необходимо введение поправок в модели турбулентности для учёта кривизны линий тока. Кроме того, учитывая высокую концентрацию частиц в потоке, в инженерных расчётах необходимо учитывать не только влияние потока на частицы, но также и обратное влияние частиц на поток.

## Цели работы

1. Реализация  $k - \omega - SST$  модели турбулентности с поправкой на кривизну линий тока при помощи открытой интегрируемой платформы для численного моделирования задач механики сплошных сред OpenFOAM.
2. Реализация с использованием OpenFOAM солвера, имеющего в основе модель идеального газа и учитывающего при этом обратное влияние частиц на поток.
3. Численное моделирование циклона с учётом обратного влияния частиц на поток и поправки на кривизну линий тока к генерации турбулентности.

# 1 Обзор существующих исследований

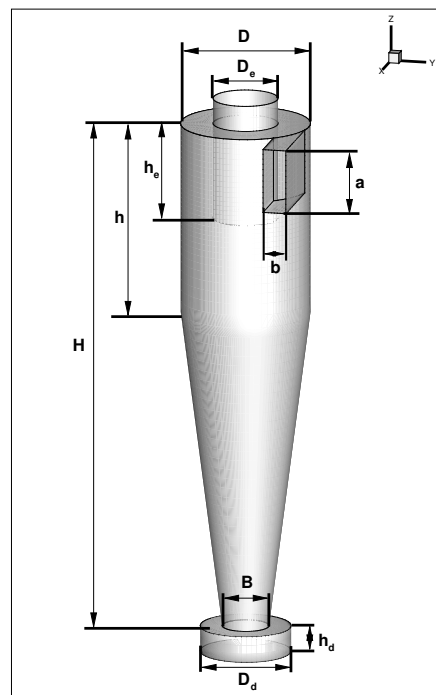
Циклоны используются для удаления твёрдых частиц из газовых потоков с конца 19 века. Простая конструкция, низкие затраты на производство и обслуживание, а также адаптивность к широкому диапазону рабочих параметров сделали циклоны одними из наиболее часто используемых промышленных фильтров.

Эффективность циклонов определяется степенью очистки воздуха  $\eta$ , равной отношению количества частиц данного диаметра, задержанных циклоном к полному числу частиц. В силу того, что принцип работы этих фильтров основан на инерциальных силах, они имеют низкую эффективность для частиц, диаметром менее  $5\mu m$ .

Существует огромное количество конфигураций, однако противоточные циклоны с тангенциальным входом (*рисунок 2*) чаще всего используются для очистки воздуха в промышленности. Такая конфигурация описывается девятью безразмерными параметрами (*таблица 1*), отнесёнными к масштабу длины  $D$ , характеризующему диаметр фильтра [5].

**Таблица 1:** Геометрия фильтра

Диаметр цилиндра,	$D$
Диаметр выходной трубы,	$D_e$
Высота входного канала,	$a$
Ширина входного канала,	$b$
Длина выходной трубы,	$h_e$
Полная высота фильтра,	$H$
Высота цилиндра,	$h$
Диаметр нижнего сечения фильтра,	$B$
Высота пылесборника,	$h_d$
Диаметр пылесборника,	$D_d$



**Рис. 2:** Схема фильтра

## 1.1 Теоретические исследования

Процесс взаимодействия частиц с несущей фазой очень хорошо описан в книге [20]. Указанная книга предоставляет в явном виде решение большого количества инженерных задач, связанных с течениями дисперсных сред. В конечном виде эти решения являются в большой степени приближёнными, применимы в ограниченном числе случаев и описывают, в основном, общие параметры системы, не давая информации о структуре течения несущей фазы, фокусируясь именно на описании частиц. Тем не менее, теоретические модели, сформулированные в этой книге охватывают широкий диапазон физических процессов, связанных с течениями жидкостей с дисперсными включениями, и могут

быть крайне полезны для математического описания таких течений.

## **Степень очистки**

Диргоу и Лейт [5] в своей статье систематизировали теоретические модели, применяемые для расчётов рабочих параметров системы, выделив три основных подхода к описанию циклонов.

### **I. Подход, основанный на времени полёта частиц**

Допустим, частица попадает в циклон на определённом расстоянии от оси фильтра. Частица должна переместиться из этого положения к стенке для того, чтобы быть отфильтрованной. Критический диаметр частицы это такой диаметр, при котором частица перемещается ровно на это расстояние за время пребывания в циклоне. Различные заключения о начальном положении частицы и времени пребывания приводят к различным приближённым решениям. Теория Лэппла [2] является наиболее часто используемым примером такого подхода. Предположим, что пыль, поступающая в циклон, равномерно распределена по всему входному сечению. Лэппл определил критический диаметр частиц для циклонов как диаметр, при котором, частицы, перемещаясь от середины входного сечения до стенки, за время пребывания в циклоне фильтруются с 50% эффективностью:

$$d_{50} = \sqrt{\frac{9\mu b}{2\pi\rho_p U_i C_d N_t}}, \quad (1)$$

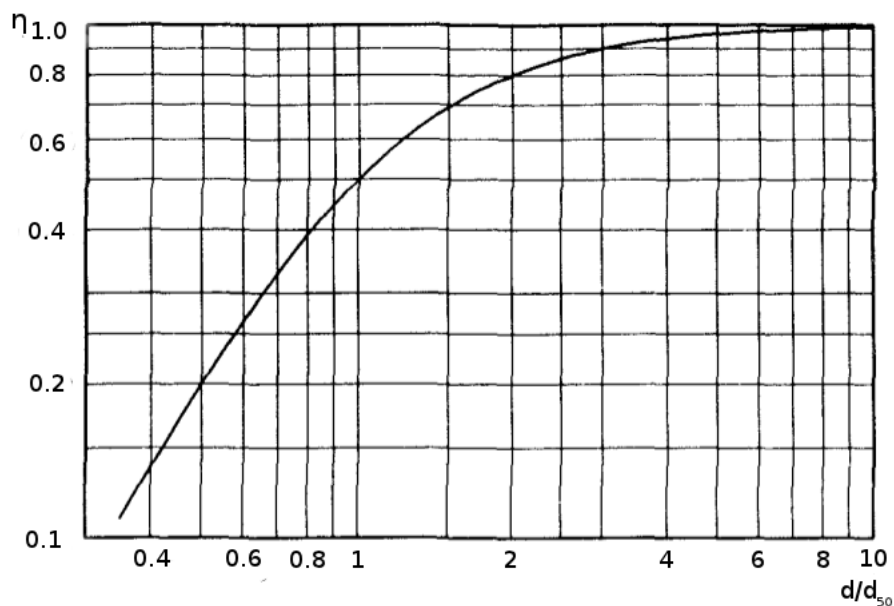
где  $\rho_p$  - плотность частиц,  $U_i$  - скорость газа на входе в циклон,  $\mu$  - динамическая вязкость воздуха,  $b$  - ширина входного сечения фильтра,



$C_d$  - коэффициент сопротивления.

Число оборотов  $N_t$ , которые совершает газ внутри фильтра, может быть рассчитано по формуле  $N_t = tU_i/\pi D$ , а время пребывания  $t$  равно отношению объёма циклона к объёмному расходу воздуха  $Q$  [10].

Эффективность для частицы произвольного диаметра  $d$  может быть определена из величины отношения этого диаметра к  $d_{50}$ . На *рисунке*



**Рис. 3:** Степень очистки в зависимости от  $d/d_{50}$

З показана степень очистки в зависимости от  $d/d_{50}$ , построенная на основе экспериментов Лэшпла. Теодоре и де Паола [24] предлагают для определения степени очистки воздуха использовать следующее соотношение, определённое на основе экспериментов Лэшпла:

$$\eta = \frac{1}{1 + (d/d_{50})^{-2}} \quad (2)$$

## II. Метод статичных частиц

При таком подходе критический диаметр определяется как диаметр частицы, при котором действующая на частицу центробежная сила полностью компенсируется силой сопротивления. Такие частицы должны бесконечно вращаться вокруг границы ядра фильтра, расположенного под выходным сечением. Сила сопротивления, действующая на более мелкие частицы, превышает центробежную силу так, что такие частицы пересекают эту границу и, поднимаясь вверх, вылетают из циклона. Более крупные частицы относятся к стенкам циклона и могут, таким образом, быть отфильтрованы. При таком определении критического диаметра, степень фильтрации растёт от нуля для частиц меньше критического диаметра до единицы для частиц, диаметром больше критического. На практике такое строгое разделение недостижимо из-за флуктуаций скорости, а эффективность для критического диаметра, в среднем, должна быть равной 50%.

Примером этого подхода может служить теория, предложенная в статье Барта [26]. Барт определил границы ядра циклона, как воображаемое продолжение стенок выходной трубы до нижнего сечения фильтра или стенок конуса. При таком определении границы, критическая скорость для осаждения статических частиц выражается формулой

$$U_{ts}^* = \frac{Qg}{2\pi h^* U_t^2} \quad (3)$$

Степень очистки для других диаметров частиц определяется через отношение критической скорости произвольных частиц к критической

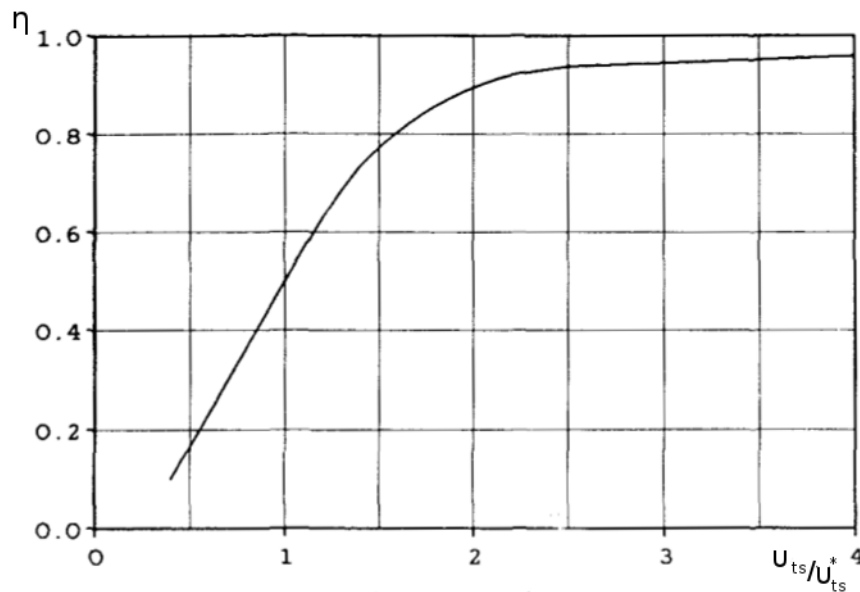
скорости статических частиц

$$\frac{U_{ts}}{U_{ts}^*} = \frac{\pi h^* U_t^2 \rho_p d^2}{9\mu Q}, \quad (4)$$

где  $h^*$  - высота ядра циклона, которая может быть найдена из геометрических соображений, а  $Q$  - расход воздуха через входное сечение фильтра. Тангенциальная скорость газа на границе ядра, определяет-ся, как

$$U_t = U_o \left( \frac{(D_e/2)(D-b)\pi}{2ab\alpha + h^*(D-b)\lambda\pi} \right), \quad (5)$$

где  $\lambda = 0.02$  - коэффициент трения,  $\alpha = 1 - 1.2(b/D)$ ,  $U_o$  - скорость газа в выходном сечении,  $a$  и  $b$  - соответственно, высота и ширина входного сечения [26]. На *рисунке 4* показана зависимость степени очистки



**Рис. 4:** Степень очистки в зависимости от  $U_{ts}/U_{ts}^*$

от  $U_{ts}/U_{ts}^*$ , построенная Бартом на основе экспериментальных результатов для нескольких конфигураций циклона. Кривая Барта хорошо

аппроксимируется выражением

$$\eta = \frac{1}{1 + (U_{ts}/U_{ts}^*)^{-3.2}} \quad (6)$$

### III. Прямой расчёт эффективности очистки

Последний подход позволяет рассчитать эффективность очистки для произвольного диаметра частиц и произвольной же конфигурации циклонов. Кривая степени очистки может быть определена без использования обобщённых кривых, основанных на критическом диаметре. Примерами такого подхода являются теория Лейта-Лихта [11] и теория Диецца [18].

Течение в промышленных циклонах на практике всегда является турбулентным. Модель Лейта-Лихта учитывает влияние турбулентности предполагая, что на любой высоте внутри циклона неосевшая пыль представляет собой равномерную смесь. Среднее время пребывания в циклоне определяется на основе его геометрических размеров и расходе воздуха. Итоговое выражение для степени очистки циклона выглядит следующим образом:

$$\eta = 1 - \exp[-2(C\Psi)^{1/(2n+2)}]. \quad (7)$$

Влияние свойств частиц и газа учитывается в модифицированном инерционном параметре  $\Psi$ .

$$\Psi = \frac{\rho_p d^2 U_i (n+1)}{18\mu D}. \quad (8)$$

Здесь  $C$  - безразмерный геометрический параметр, который зависит

только от конфигурации фильтра:

$$C = \frac{\pi D^2}{ab} \left[ 2 \left\{ 1 - \left( \frac{D_e}{D} \right)^2 \right\} \left( \frac{h_e}{D} - \frac{a}{2D} \right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{3} \left( \frac{h_e + l - h}{D} \right) \left( 1 + \frac{d_c}{D} + \frac{d_c^2}{D^2} \right) + \frac{h}{D} - \left( \frac{D_e}{D} \right)^2 \frac{l}{D} - \frac{h_e}{D} \right] \quad (9)$$

Истинная длина циклона,  $l$  определяется как максимальное расстояние, которое преодолевает вращающийся поток в зоне под выходной трубой.

$$l = 2.3 D_e \left( \frac{D^2}{ab} \right)^{1/3}. \quad (10)$$

Диаметр конуса на истинной длине определяется, как

$$d_c = D - \frac{(D - B)(h_e + l - h)}{H - h} \quad (11)$$

Если истинная длина превышает  $(H - h_e)$ ,  $l$  в уравнениях (9) и (11) заменяется на  $(H - h_e)$ .

Степень экспоненты,  $n = 0.5 \div 0.9$ , определяет изменение тангенциальной скорости в радиальном направлении:  $U_t r^n = const$ . Эмпирическая формула для определения  $n$  при произвольном диаметре циклона и заданной температуре газа выглядит следующим образом [19]:

$$n = 1 - [(1 - 0.67 D^{0.14})(T/283)^{0.3}] \quad (12)$$

Модель Диеца [18] является модифицированным вариантом модели Лейта-Лихта. Диец разделяет циклон на три региона – входной участок, область опускающегося течения и ядро циклона. Предполагается, что под действием турбулентности устанавливается равномерный в радиальном направлении профиль концентрации неотфильтрованных частиц внутри каждого региона. С учётом обмена частицами

между областью опускающегося течения и ядром циклона, для расчёта эффективности циклона предлагается формула

$$\eta = 1 - \left[ K_0 - \sqrt{K_1^2 + K_2^2} \right] \exp \left[ \frac{-\pi(2h_e - a)\rho_p d^2 U_i}{18\mu ab} \right], \quad (13)$$

где

$$K_0 = \frac{1}{2} \left[ 1 + \left( \frac{D_e}{D} \right)^{2n} \left( 1 + \frac{9\mu ab}{\pi\rho_p l d^2 U_i} \right) \right] \quad (14)$$

$$K_1 = \frac{1}{2} \left[ 1 - \left( \frac{D_e}{D} \right)^{2n} \left( 1 + \frac{9\mu ab}{\pi\rho_p l d^2 U_i} \right) \right] \quad (15)$$

$$K_2 = \left( \frac{D_e}{D} \right)^{2n}. \quad (16)$$

Как и в модели Лейта-Лихта,  $l$  должна быть заменена на  $(H - h_e)$ , если  $l > (H - h_e)$ . Величина  $n$  может быть вычислена по формуле (12).

## Перепад давления

Величина перепада давления, создаваемого циклоном, являясь показателем необратимых потерь энергии, имеет чрезвычайно важное значение, поскольку она непосредственно связана с эксплуатационными расходами. Перепад давления определяется, как разница давлений между входным и выходным сечениями фильтра [7]. Циклоны в этом плане имеют одну важную особенность, которая заключается в наличии радиальной компоненты скорости в выходном сечении фильтра, которая затрудняет определение статического давления в этой области. На практике, разница давлений между входной и выходной границей ниже, чем истинный перепад давления.

Обобщенный вариант формулы для определения давления представляет собой произведение числа Эйлера на скоростной напор:

$$\Delta P_{air-only} = \frac{16ab}{D_e^2} \left( \frac{\rho_g U_i^2}{2} \right). \quad (17)$$

Для слабо запылённых потоков уравнение записанное с использованием безразмерных геометрических параметров, предложенное Лэпплом является более надёжным:

$$\Delta P_{air-only} = \frac{16 \left( \frac{a}{D} \right) \left( \frac{b}{D} \right) \rho_g U_i^2}{\left( \frac{D_e}{D} \right)^2} = \frac{16 \left( \frac{a}{D} \right) \left( \frac{b}{D} \right)}{\left( \frac{D_e}{D} \right)^2} \left( \frac{\rho_g \left( \frac{Q}{ab} \right)^2}{2} \right). \quad (18)$$

Примечательно, что перепад давления сначала падает с увеличением концентрации дисперсных включений, а потом снова начинает расти, начиная с некоторой, достаточно большой, концентрации примесей [21]. Для определения перепада давления с учётом концентрации примеси используется уравнение Смольника [9]

$$\Delta P_{with-solids} = \Delta P_{air-only} (1 - 0.02c^{0.6}), \quad (19)$$

где  $c$  - концентрация твёрдых частиц на входе в циклон.

## 1.2 Экспериментальные исследования

Существует большое количество работ по экспериментальному исследованию течения с искривлёнными линиями тока. Среди них стоит выделить достаточно подробный эксперимент, приведённый в статье Монсона и др. [14]. Авторы статьи проводят численное и экспериментальное исследование турбулентного течения воздуха в U-образном

канале. Более детально рабочие параметры эксперимента описаны в разделе 3.1, в котором проводится сравнение результатов численных расчётов с данными, приведёнными Монсоном.

Экспериментальному моделированию циклонов также уделено немало внимания. Среди статей, в которых имеются экспериментальные данные по турбулентному течению в циклонах, можно, опять же, отметить работу Диргоу и Лейта [5], в которой опубликовано сопоставление экспериментальных данных о эффективности фильтров с теоретическими моделями, описанными в разделе 1.1. Заключение работы являются выводы о правильности приведённой теории. Экспериментальные данные для классической модели Стэйрманда могут быть найдены также в статье самого Стэйрманда [4].

Среди наиболее поздних работ, особенное внимание следует обратить на эксперимент, проведённый Обермайером [15] с применением лазерной доплеровской анемометрии. В работе представлены визуализации поля скорости в циклоне а также профили скорости в нескольких сечениях фильтра.

### **1.3 Численные исследования**

Численному моделированию течения в циклонах посвящено огромное количество инженерных исследований. В рассмотренных мною работах можно выделить два принципиально разных направления. Первое из них основано на введении тех или иных модификаций к конструкции циклона для увеличения эффективности очистки или уменьшения перепада давления. Второе – на использовании различных математи-



ческих моделей с целью более правильного описания течений. В некоторых работах просто представлены численные исследования циклона модели Stairmand без введения каких-либо поправок и модификаций как для конфигурации фильтра, так и для математических моделей, используемых для расчётов, но их мы не будем принимать к рассмотрению, а остановимся на исследованиях, направленных на повышение точности расчётов.

Как было сказано выше, течение в промышленных циклонах всегда является турбулентным. Основой правильного численного моделирования турбулентных потоков является выбор модели, которая учитывала бы специфические особенности исследуемого течения. В силу большой степени закрученности потока, течение в циклоне не может быть с достаточной степенью точности описано моделями турбулентной вязкости без введения в них определённых поправок для учёта кривизны линий тока. Тем не менее, во многих работах, особенно относящимся к более раннему периоду, в качестве базовой модели турбулентности выбираются именно модели турбулентной вязкости в силу относительно низких вычислительных затрат.

В последнее время проводится всё больше численных исследований, в которых турбулентность моделируется при помощи более сложных моделей Рейнольдсовых напряжений или вихреразрешающих методов. Есть также небольшое число работ, в которых, помимо использования сложных моделей турбулентности, учитывается также и обратное влияние частиц на поток. Примером такой работы может быть статья [6], в которой авторы используют как модель Рейнольдсовых напряжений,

так и метод моделирования крупных вихрей.

Тем не менее, такие расчёты являются достаточно дорогостоящими в плане вычислительных мощностей, и представляется разумным использовать различные модификации к моделям турбулентной вязкости для учёта особенностей конкретного класса течений. Одним из ярких примеров эффективности такого подхода может служить введение поправки на вращение и кривизну линий тока к модели Спалларта-Алмараса, введённая Шуром и Спаллартом в [23]. Эта же поправка, но в несколько изменённом виде используется, в статье [22] применительно к SST-модели турбулентности. Введение поправки даёт очевидный положительный результат для течений во вращающихся системах координат и сильно закрученных течений, в числе которых находятся и течения в циклонах.

## 2 Численное моделирование

### OpenFOAM

OpenFOAM — свободно распространяемый инструментарий для математических операций с полями (скалярными, векторными и тензорными). Будучи ориентированным, в основном, на задачи гидродинамики, OpenFOAM на сегодняшний день является одним из самых известных приложений с открытым кодом, предназначенных для FVM-вычислений.[16] Код OpenFOAM разработан в Великобритании в компании *OpenCFD*, и используется многими промышленными предприятиями более 12 лет. Свое название и идеологию построения код берет от своего предшественника, FOAM (Field Operation And Manipulation), код которого является закрытым и продолжает развиваться параллельно с OpenFOAM. Первоначально, программа предназначалась для прочностных расчетов и в результате многолетнего академического и промышленного развития на сегодняшний момент позволяет решать задачи динамики сжимаемых и несжимаемых сред с использованием RANS и LES подходов к моделированию турбулентности, включая как дозвуковые, так и сверхзвуковые задачи. Кроме того, OpenFOAM включает в себя большое количество уже готовых солверов для задач динамики жидкости и газа, гетерогенных сред и химически реагирующих смесей, а также задач механики деформируемого твёрдого тела.

В основе кода лежит набор библиотек, предоставляющих инструменты для решения систем дифференциальных уравнений в частных

производных. Рабочим языком кода является C++. В терминах данного языка большинство математических операторов в программном коде уравнений может быть представлено в удобочитаемой форме, а метод дискретизации и решения для каждого оператора может быть выбран уже пользователем в процессе расчёта. Таким образом, в коде полностью инкапсулируются и разделяются понятия расчетной сетки, дискретизации основных уравнений и методов решения алгебраических уравнений.

## 2.1 Уравнения движения

### Уравнение баланса массы

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho u_i) = 0 \quad (20)$$

### Уравнение баланса импульса

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_i u_j) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ijeff}}{\partial x_j} + S_{ui}, \quad (21)$$

где  $\tau_{ijeff}$  - тензор вязких напряжений, выражаемый по формуле

$$\tau_{ijeff} = \mu_{eff} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \mu_{eff} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \delta_{ij} \quad \mu_{eff} = \mu + \mu_t \quad (22)$$

### Уравнение баланса энтальпии

$$\frac{\partial \rho h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_j h) = \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( (\alpha + \alpha_t) \frac{\partial h}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left( \rho \frac{\vec{V}^2}{2} \right) - \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \rho u_j \frac{\vec{V}^2}{2} \right) + S_h, \quad (23)$$

где  $\alpha$  - коэффициент температуропроводности.

### Уравнение состояния

При расчётах течений сжимаемой жидкости используется модель идеального газа:

$$\frac{p}{\rho} = \frac{R}{M}T, \quad M = 28.966 \frac{kg}{mole} \quad (24)$$

### Зависимость вязкости от температуры

Зависимость вязкости от температуры для неизотермических течений выражается формулой Саттерленда.

$$\mu = \mu_0 \left( \frac{T}{T_0} \right)^{3/2} \frac{T_0 + S}{T + S}, \quad (25)$$

где  $\mu_0 = 1.716 \cdot 10^{-5} \frac{kg \cdot m}{s}$ ,  $T_0 = 273.11K$ , а  $S = 110.56K$ .

Для течений, температура в которых меняется слабо, вязкость полагается постоянной.

### Уравнение движения частиц

$$m_p \frac{d\vec{V}_p}{dt} = \frac{1}{2} \rho |\vec{V} - \vec{V}_p| (\vec{V} - \vec{V}_p) \frac{d_p^2 \pi}{4} C_D + m_p \vec{g} \frac{\rho_p - \rho}{\rho_p} + \vec{F}_{\nabla p}, \quad (26)$$

где  $m_p$  - масса частицы,  $\vec{V}_p$  - скорость частицы,  $\vec{V}$  - скорость жидкости,  $C_D$  - коэффициент сопротивления,  $\rho_l$  - плотность частицы,  $\rho$  - плотность несущей среды,  $\vec{F}_{\nabla p}$  - сила, обусловленная действием на частицу градиента давления.

## Влияние частиц на несущую фазу

В уравнениях баланса импульса (21) и энтальпии (23) присутствуют источниковые члены  $S_{ui}$  и  $S_h$ , которые, учитывают вклад дисперсных включений в балансовые соотношения. Согласно [25], сила, действующая со стороны частицы на единицу объёма жидкости, пропорциональна разнице импульсов частицы между моментом её появления в ячейке  $t_{in}$  и моментом выхода из ячейки  $t_{out}$ :  $m_p \left( (\vec{V}_p)_{t_{out}} - (\vec{V}_p)_{t_{in}} \right)$ . Влияние всех частиц, которые прошли через ячейку за время  $dt$ , запишется, как

$$S_{ui} = \frac{1}{V_{cell}dt} \sum_p m_p \left( (u_{ip})_{t_{out}} - (u_{ip})_{t_{in}} \right), \quad (27)$$

где  $p$  – номер частицы,  $V_{cell}$  – объём ячейки.

Источниковый член для уравнения энтальпии,

$$S_h = \rho c_p \frac{dm_p T_p}{dt}, \quad (28)$$

где  $c_p$  – теплоёмкость дисперсной фазы,  $T_p$  – температура частицы, рассчитывается из тех же соображений.

## 2.2 Модель турбулентности

Основой правильного численного моделирования течений сжимаемых сред является надёжная и стабильная модель турбулентности. Опыт использования моделей турбулентности показывает, что более сложные модели имеют не слишком большое преимущество над хорошо откалиброванными моделями турбулентной вязкости.

Модель турбулентной вязкости, тем не менее, должна удовлетворять ряду требований для того, чтобы правильно предсказать основные характеристики пограничного слоя. Основным требованием является то, что модель должна ограничивать завышенную генерацию турбулентности в застойных зонах, которая наблюдается в стандартных моделях с двумя уравнениями. В частности, для предсказания теплообмена эти нефизично высокие уровни турбулентности оказывают сильное влияние на скорость передачи тепла в пограничном слое. Для преодоления этого недостатка используются различные модификации стандартных формулировок моделей турбулентности, как то ограничитель генерации, предложенный Ментером (1994) или  $k - \varepsilon$  модель Като-Лаундера (1993).

Существенной особенностью пограничного слоя является его отрыв от поверхности при неблагоприятном градиенте давления. Отрыв имеет сильное влияние на характеристики турбулентности, а следовательно, и на теплообмен. SST-модель показала отличные возможности предсказания точек отрыва пограничного слоя и наиболее часто используется для анализа течений с теплообменом. Идея SST-модели состоит в сочетании лучших элементов  $k - \omega$  и  $k - \varepsilon$  моделей при помощи переключающей функции  $F_1$ , которая равна единице на твёрдой поверхности и нулю вне пограничного слоя. Таким образом, автоматически используется  $k - \omega$  модель Уилкокса в пристеночной области и  $k - \varepsilon$  для остальной части потока. Такой подход позволяет использовать эффективную модель Уилкокса в пристенных областях, не имея при этом потенциальных ошибок, связанных с чувствительностью моде-

ли Уилкокса в зоне свободного течения. В SST-модели также используется несколько отличное от традиционного выражение для определения турбулентной вязкости, которое может быть интерпретировано, как введение в формулу для  $\mu_t$  коэффициента  $c_\mu$ . Эта модификация необходима для того, чтобы правильно предсказать точку отрыва пограничного слоя под действием встречного градиента давления [13]. Формулировка SST-модели турбулентности, согласно [13] (но с учётом поправки на кривизну линий тока), следующая:

### Уравнение баланса кинетической энергии турбулентности

$$\frac{\partial \rho k}{\partial t} + \frac{\partial \rho U_j k}{\partial x_j} = \tilde{P}_k f_{rot} - \beta^* \rho k \omega + \frac{\partial}{\partial x_j} (\Gamma_k \frac{\partial k}{\partial x_j}), \quad (29)$$

где  $f_{rot}$  - поправочный коэффициент Шура-Спалларта к генерации турбулентности, учитывающий криволинейность потока, определяемый в 2.2.1.

### Уравнение баланса удельной скорости диссипации

$$\frac{\partial \rho \omega}{\partial t} + \frac{\partial U_j \omega}{\partial x_j} = \frac{\gamma}{\nu_t} P_k f_{rot} - \beta \rho \omega^2 + \frac{\partial}{\partial x_j} (\Gamma_\omega \frac{\partial \omega}{\partial x_j}) + (1 - F_1) 2 \rho \sigma_{\omega_2} \frac{1}{\omega} \frac{\partial k}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j}, \quad (30)$$

где

$$\Gamma_k = \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k}, \quad \Gamma_\omega = \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\omega}, \quad P_k = \tau_{ij} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \quad (31)$$

$$\tilde{P}_k = \min(P_k, c_1 \varepsilon), \quad \mu_t = \rho \frac{a_1 k}{\max(a_1 \omega, S \cdot F_2)}$$



Коэффициент  $\phi$  в модели представляет собой функцию от  $F_1$ :  $\phi = F_1\phi_1 + (1 - F_1)\phi_2$ , где  $\phi_1$  и  $\phi_2$  соответственно коэффициенты для  $k - \omega$  и  $k - \varepsilon$  моделей.

$$\sigma_{k1} = 1.176, \quad \sigma_{\omega1} = 2.0, \quad \gamma_1 = 0.5532 \quad \beta_1 = 0.075, \quad \beta^* = 0.09, \quad c_1 = 10,$$

$$\sigma_{k2} = 1.0, \quad \sigma_{\omega2} = 1.168, \quad \gamma_2 = 0.4403 \quad \beta_2 = 0.0828, \quad \beta^* = 0.09, \quad \kappa = 0.41$$

$$\begin{aligned} F_1 &= \tanh(\arg_1^4), \quad \arg_1 = \min \left[ \max \left( \frac{\sqrt{k}}{\beta^* \omega y}, \frac{500\nu}{y^2 \omega} \right), \frac{4\rho\sigma_{\omega2}k}{CD_{k\omega}y^2} \right] \\ CD_{k\omega} &= \max \left( 2\rho\sigma_{\omega2} \frac{1}{\omega} \frac{\partial k}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j}, 10^{-10} \right) \\ F_2 &= \tanh(\arg_2^2), \quad \arg_2 = \max \left( 2 \frac{\sqrt{k}}{\beta^* \omega y}, \frac{500\nu}{y^2 \omega} \right) \\ \tau_{ij} &= \mu_t \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial U_k}{\partial x_k} \right) - \frac{2}{3} \rho k \delta_{ij} \end{aligned} \tag{32}$$

### Турбулентный тепловой поток

По аналогии с тензором турбулентных напряжений, турбулентный тепловой поток моделируется при помощи турбулентной диффузии:

$$\overline{u'_j T'} = -\varepsilon \frac{\partial T}{\partial x_j} = -\frac{\nu_t}{Pr_t} \frac{\partial T}{\partial x_j}, \quad Pr_t = \frac{\nu_t}{\varepsilon_h} \tag{33}$$

Так, как число Прандтля является свойством вещества, турбулентное число Прандтля полагается постоянным исходя из аналогии между турбулентным теплопереносом и массопереносом. Экспериментальные и теоретические исследования показывают, что турбулентное число Прандтля примерно равно 0.9.

## Автоматические пристеночные функции

В силу того, что пристеночные функции некорректны в случае достаточно подробной сетки, желательно иметь возможность точно разрешать течение в вязком подслое, решая уравнения вплоть до твёрдой поверхности. Идея автоматических пристеночных функций состоит в том, что модель постепенно переходит от формулировки вязкого подслоя к пристеночным функциям в зависимости от подробности расчётной сетки. Уравнение переноса  $\omega$  крайне удачный выбор в этом плане, так как оно имеет аналитическое решение как для вязкого подслоя, так и для логарифмического региона. Таким образом, необходимо только определить общую зависимость, основанную на величине  $y^+$ .

Решение для  $\omega$  в вязком подслое и логарифмическом регионе:

$$\omega_{vis} = \frac{6\nu}{0.075y^2}, \quad \omega_{log} = \frac{1}{0.3\kappa} \frac{u_\tau}{y} \quad (34)$$

Это решение может быть переформулировано с учётом  $y^+$ :

$$u_\tau^{vis} = \frac{U_1}{y^+}, \quad u_\tau^{log} = \frac{U_1}{\frac{1}{\kappa} \ln(y^+) + C}, \quad u_\tau = \sqrt[4]{(u_\tau^{vis})^4 + (u_\tau^{log})^4} \quad (35)$$

а результирующая функция записана, как

$$\omega_1(y^+) = \sqrt{\omega_{vis}^2(y^+) + \omega_{log}^2(y^+)}. \quad (36)$$

Согласно [28], значение  $\omega$  на стенке определяется следующим образом:

$$\omega_w = 10 \frac{6\nu}{\beta_1 \Delta y_1^2} \quad (37)$$

а  $k_w = 0$ .

### 2.2.1 Введение поправки на кривизну линий тока

Наличие членов, явно учитывающих вклад вращения и кривизны линий тока в уравнениях моделей турбулентности цитируется как фундаментальное преимущество моделей Рейнольдсовых напряжений над более простыми моделями турбулентной вязкости [23]. Внесение эффективных изменений в более простые модели может, тем не менее, иметь широкое применение в силу того [27], что для большого класса вычислительных задач модели Рейнольдсовых напряжений пока не доведены до того состояния, в котором они показали бы свою высокую стабильность и точность расчётов [12].

Влияние вращения и кривизны линий тока на турбулентность проявляется наиболее сильно в двух предельных случаях. В тонких сдвиговых течениях с маленькой, по сравнению со скоростью сдвига, скоростью вращения или слабой кривизной линий тока, наблюдается значительное влияние этих эффектов на уровень турбулентных напряжений [17]. Другим крайним случаем является однородное сдвиговое течение во вращающейся области, в котором турбулентные пульсации затухают под влиянием сильного вращения [3]. Другой случай сильного вращения это течение в ядре свободного вихря, моделирование которого также даёт плохие результаты при использовании немодифицированных моделей турбулентности [8].

Для учёта влияния кривизны линий тока в моей работе используется поправка на кривизну линий тока, предложенная для модели Spalart-Almaras в [23] и переформулированная применительно к SST

модели в [22].

В указанной работе рассматривается сдвиговое течение с базовой скоростью, направленной по оси  $x$ , а все величины меняются, в основном, в направлении  $y$ . Пусть  $U(y)$  - профиль скорости, и пусть  $U_y > 0$  так что  $\omega_z < 0$ . Состредоточимся на проекции тензора Рейнольдсовых напряжений  $-\overline{u'v'}$ . Вращение с угловой скоростью  $\Omega$  вносит вклад  $2\Omega(\overline{u'^2} - \overline{v'^2})$  в эту величину. Если  $\overline{u'^2} > \overline{v'^2}$ , величина касательного напряжения возрастает, и наоборот. Таким образом, генерационный член возникает из-за достаточно тонких особенностей тензора Рейнольдсовых напряжений, которые, конечно, не учитываются в моделях турбулентной вязкости.

В случае криволинейности потока, аналогичный член появляется, если уравнения движения записать в криволинейной системе координат, ориентированной по направлению потока, что приводит к появлению “эффективной скорости вращения”, равной  $U/R$ , где  $R$  - радиус кривизны линий тока ( $R$  принимается положительной в случае вогнутых линий тока).  $U/R$  может быть записана, как  $\frac{\partial v}{\partial x}$ , причём  $v$  - скорость, направленная перпендикулярно к линиям тока, а  $x$  - направление движения.  $\frac{\partial v}{\partial x}$  не является Галилеевым инвариантом так как это частная производная по оси, сонаправленной с вектором скорости.

Неравнозначность  $\overline{u'^2} > \overline{v'^2}$  в тонком сдвиговом течении эквивалентна тому, что главные оси тензора Рейнольдсовых напряжений не сонаправлены с главными осями тензора сдвиговых деформаций. Таким образом, при вращении оси тензора напряжений опережают, или отстают от осей тензора скоростей деформации в зависимости от зна-

ка  $\Omega$ . Авторы статьи выдвигают следующую гипотезу: "под влиянием вращения (или кривизны линий тока) турбулентность усиливается, если главные оси тензора Рейнольдсовых напряжений опережают оси тензора скоростей деформации, и наоборот". Эта гипотеза обобщает эффекты вращения и кривизны, давая  $\Omega$  и  $U/R$  схожие роли.

В слабо закрученном тонком сдвиговом течении направление движения, направление главных осей тензора Рейнольдсовых напряжений и тензора скоростей деформации меняется с одинаковой скоростью,  $U/R$ . Оси тензора скоростей деформации инвариантны и могут быть использованы в простой модели турбулентности. Это приводит к фундаментальному соотношению,

$$\frac{D\alpha}{Dt},$$

где  $\alpha$  - угол между главными осями тензора скоростей деформации и осями системы координат. Будучи Лагранжевой производной величины, которая определена относительно инерциальной системы координат,  $D\alpha/Dt$  является Галилеевым инвариантом. В однородном вращающемся потоке с деформацией, не зависящей от времени,  $D\alpha/Dt = \Omega$ . В неоднородном потоке выражение гораздо сложнее, и, следуя авторам, для несжимаемого течения

$$\frac{D\alpha}{Dt} = \Omega + \frac{1}{2(S_{11}^2 + S_{12}^2)} \left[ S_{11} \frac{DS_{12}}{Dt} - S_{12} \frac{DS_{11}}{Dt} \right], \quad (38)$$

где  $S_{ij}$  – тензор скоростей деформации во вращающейся системе координат.  $S_{21}$  и  $S_{22}$  не присутствуют в формуле в силу симметричности тензора.

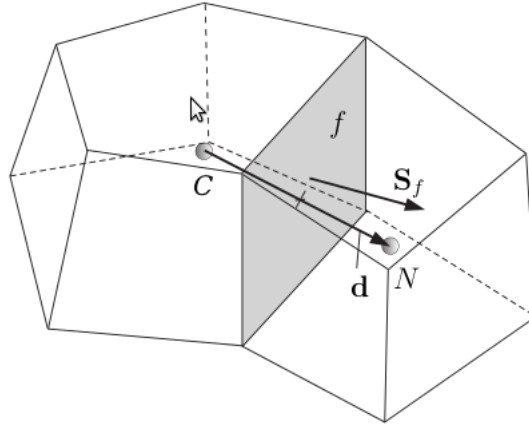
Промежуточные выкладки для трёхмерного случая слишком громоздки, поэтому, приведём только окончательный вариант поправки на кривизну линий тока, предложенный в [22], но без учёта вращения.

$$f_{r1}(r^*, \tilde{r}) = 2r^* \left( \frac{1 + C_{r1}}{1 + r^*} \right) [1 - C_{r3} \arctan(C_{r2}\tilde{r})] - C_{r1}, \quad (39)$$

$$\tilde{r} = 2\Omega_{ik}S_{kj} \frac{DS_{ij}}{Dt} \frac{1}{\Omega D^3}, \quad D^2 = \max(S^2, 0.09\omega^2), \quad (40)$$

$$S^2 = 2S_{ij}S_{ij}, \quad \Omega^2 = 2\Omega_{ij}\Omega_{ij}, \quad r^* = S/\Omega$$

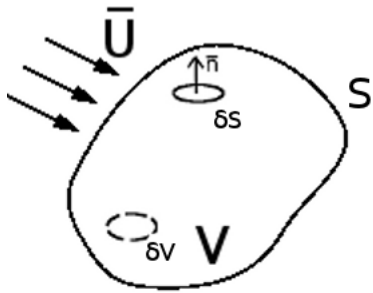
$$C_{r1} = 1, \quad C_{r2} = 2, \quad C_{r3} = 1, \quad f_{rot} = \max[\min(f_{r1}, 1.25), 0]$$



**Рис. 5:** Схематическое изображение двух соседних ячеек

### 2.3 Метод конечных объёмов

Перейдём от обсуждения определяющих уравнений непосредственно к методу конечных объёмов. Суть этого метода заключается в разбиении расчётной области на множество непересекающихся конечных объёмов (ячеек), для каждого из которых записывается интегральная формулировка законов сохранения.



Пусть через контрольный объём  $V$  (рисунк 6), ограниченный контрольной поверхностью  $S$ ,  $\vec{\delta S} = \vec{n}\delta S$ , проходит жидкость со скоростью  $\vec{U}$ . Выделим из объёма  $V$  бесконечно малый объём  $\delta V$ .

**Рис. 6:** Контрольный объём

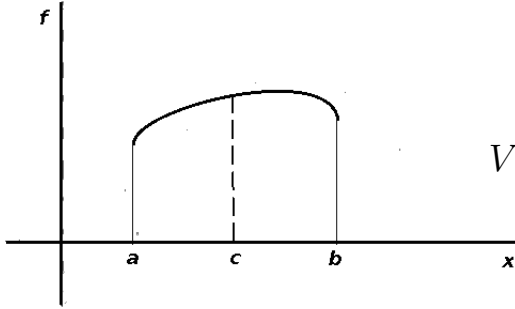
Рассмотрим скалярную величину  $\Phi$  - плотность распределения некоторой физической величины на единицу массы. Тогда, с учётом того,

что  $\rho\delta V = \delta m$ , в объёме  $\delta V$  содержится  $\rho\delta V\Phi$  этой физической величины. Уравнение сохранения для этой величины запишется, как

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho\Phi\delta V + \oint_S \left( \rho\vec{U}\Phi + \vec{q}_\Phi \right) \cdot \delta\vec{S} = \int_V \rho S_\phi \delta V, \quad (41)$$

где  $S_\Phi$  - суммарная плотность источников, а  $\vec{q}_\Phi$  - диффузионный поток. Это уравнение применяется к каждому контрольному объёму. Задача заключается в сведении уравнения (41) к процедуре алгебраического характера.

Введём точку  $C$  - центр ячейки (рисунок 5) и применим теорему о среднем к объёмному интегралу:



$$\int_a^b f dx \approx f(x_c) \cdot (b - a) \quad (42)$$

$$V \frac{\partial (\rho\Phi)_c}{\partial t} + \oint_S \left( \rho\vec{U}\Phi + \vec{q}_\Phi \right) \cdot \delta\vec{S} = V (\rho S_\Phi)_c \quad (43)$$

Пусть контрольная поверхность состоит из граней, то есть имеется ограниченный объект. Тогда

$$\oint \left( \rho\vec{U}\Phi + \vec{q}_\Phi \right) \cdot \delta\vec{S} = \sum_f \int_{S_f} \left( \rho\vec{U}\Phi + \vec{q}_\Phi \right) \cdot \delta\vec{S}, \quad (44)$$

где  $f$  - номер грани.

$$\int_{S_f} \left( \rho\vec{U}\Phi + \vec{q}_\Phi \right) \cdot \delta\vec{S} \approx \left( \rho\vec{U}\Phi + \vec{q}_\Phi \right)_f \cdot \vec{S}_f, \quad (45)$$



где индекс  $f$  в выражении  $\left(\rho\vec{U}\Phi + \vec{q}_\Phi\right)_f$  означает, что это значение вычисляется в центре грани, а  $\vec{S}_f = \vec{n}S_f$ . В итоге мы получаем алгебраическое выражение

$$V \frac{\partial (\rho\Phi)_c}{\partial t} + \sum_f \left(\rho\vec{U}\Phi + \vec{q}_\Phi\right)_f \cdot \vec{S}_f = V (\rho S_\Phi)_c \quad (46)$$

### Расчёт диффузионных потоков

$$\int_V \nabla \cdot (\Gamma \nabla \Phi) \delta V = \int_S \delta \vec{S} \cdot (\Gamma \nabla \Phi) = \sum_f \Gamma_f \vec{S}_f \cdot (\nabla \Phi)_f \quad (47)$$

### Расчёт ковективных потоков

$$\int_V \nabla \cdot (\rho \vec{U} \Phi) \delta V = \int_S \delta \vec{S} \cdot (\rho \vec{U} \Phi) = \sum_f \vec{S}_f \cdot (\rho \vec{U})_f \Phi_f = \sum_f F \Phi_f \quad (48)$$

Значение  $\Phi_f$  на грани ячейки может быть определено с использованием различных схем:

*Центральная схема (CD)*

$$\Phi_f = \beta \Phi_N + (1 - \beta) \Phi_C, \quad (49)$$

где  $\beta = \frac{|\vec{CM}|}{|\vec{CM}| + |\vec{NM}|}$  - коэффициент интерполяции, а точка  $M$  - центр грани  $f$ .

Для коррекции на скошенность ячеек, когда центр грани  $f$  не совпадает с пересечением грани  $f$  и вектора  $|\vec{CP}|$  (точка  $M'$ ), разложим  $\Phi_f$  в ряд Тейлора в окрестности точки  $M$  и удержим только первые два слагаемых:

$$\Phi_M = \Phi_{M'} + \nabla \Phi_{M'} \cdot \vec{M'M} + O\left(\left(M - M'\right)^2\right) \quad (50)$$

*Противопоточная схема (UD)*

$$\Phi_f = \begin{cases} \Phi_P, & \text{если } F \geq 0 \\ \Phi_N, & \text{если } F < 0 \end{cases} \quad (51)$$

*Смешанные схемы*

$$\Phi_f = (1 - \gamma) (\Phi_f)_{UD} + \gamma (\Phi_f)_{CD}, \quad (52)$$

где коэффициент  $\gamma$  меняется в зависимости от конкретной схемы.

### **Расчёт градиентов**

Значение градиента может быть вычислено двумя различными способами.

*Метод Гаусса*

Первый способ – использование достаточно простой формулы Гаусса:

$$\int_V \nabla \Phi \delta V = \int_S \delta \vec{S} \Phi = \sum_f \vec{S}_f \Phi_f \quad (53)$$

*Метод наименьших квадратов*

Второй – несколько более сложный метод наименьших квадратов, суть которого объясняется следующим образом: значение  $\Phi$  в точке  $C$  может быть экстраполировано в соседнюю ячейку с центром в точке  $N$  с использованием градиента в точке  $C$ . Экстраполированное значение в точке  $N$  сравнивается с актуальным значением в этой точке и рассчитывается ошибка в определении  $\Phi$ . Если мы теперь минимизируем сумму квадратов взвешенных ошибок во всех соседних ячейках

по отношению к градиенту, значение градиента будет аппроксимировано достаточно точно. Таким образом, вычислив сначала значение тензора

$$\mathbf{G} = \sum_N \omega_N^2 (C\vec{N}C\vec{N}), \quad (54)$$

где весовая функция  $\omega = 1/|C\vec{N}|$ , а индекс  $N$  означает суммирование по всем соседним граням, мы сможем вычислить значение градиента в точке  $C$ :

$$(\nabla\Phi)_C = \sum_N \omega_N^2 \mathbf{G}^{-1} \cdot (\Phi_N - \Phi_C). \quad (55)$$

## 3 Результаты

### 3.1 Валидация модели турбулентности с поправкой на кривизну линий тока

Эффективность поправки на кривизну линий тока к модели Менстера можно проверить, если сравнить результаты расчётов плоского течения в U-образном канале, выполненных при помощи модифицированной модели турбулентности, с экспериментальными данными Монсона и др., приведёнными в статье Монсона [14].

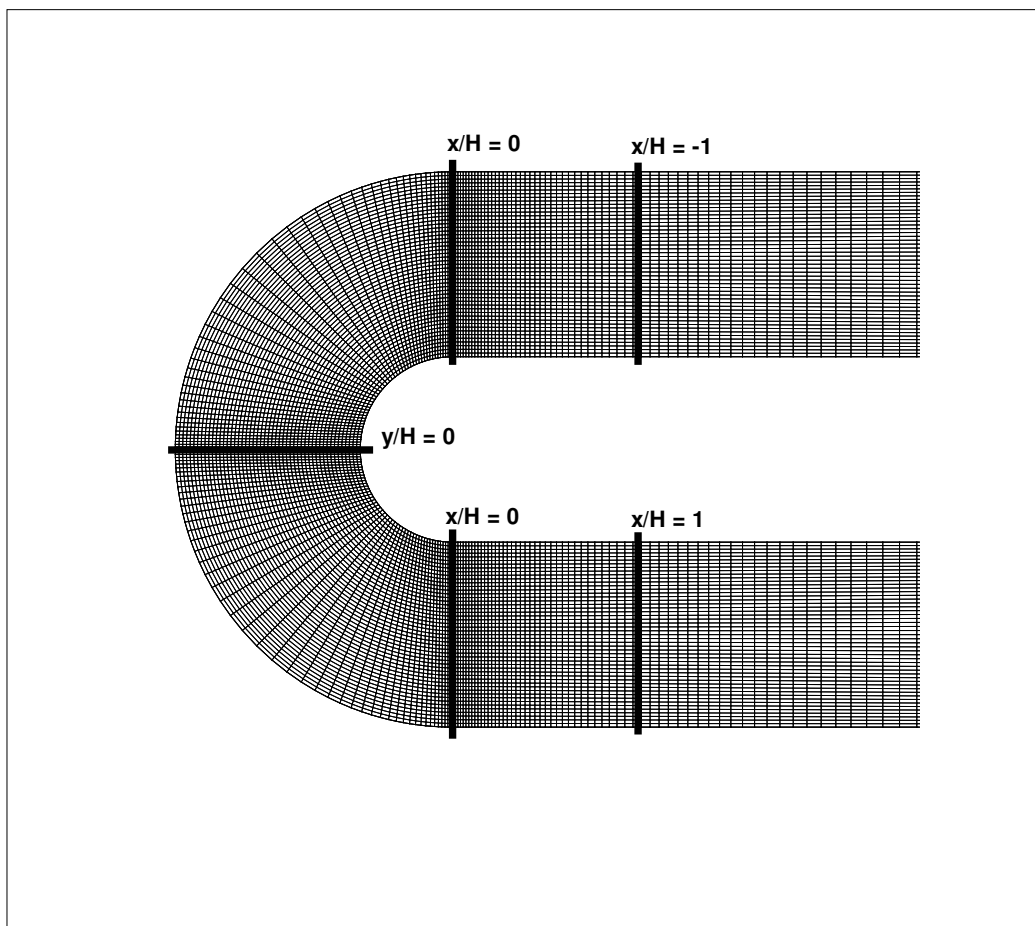
В *таблице 2* представлены геометрические параметры канала и граничные условия. Стенки полагаются адиабатическими, а на выходной границе задаётся постоянное статическое давление  $P_{out} = 1.15atm$ . На входной границе задаётся неоднородный профиль скорости и турбулентных характеристик, полученный из решения задачи о развитом турбулентном течении в плоском канале. При таких параметрах число Рейнольдса  $Re = 10^5$ .

**Таблица 2:** Геометрия канала

Высота	$H = 3.81cm$
Длина канала	$L = 10H$
Внутренний радиус	$R_i = 1.91cm$
Внешний радиус	$R_o = 5.72cm$
Ср. скорость на входе	$U_{in} = 30.1m/s$
Температура на входе	$T_{in} = 264K$

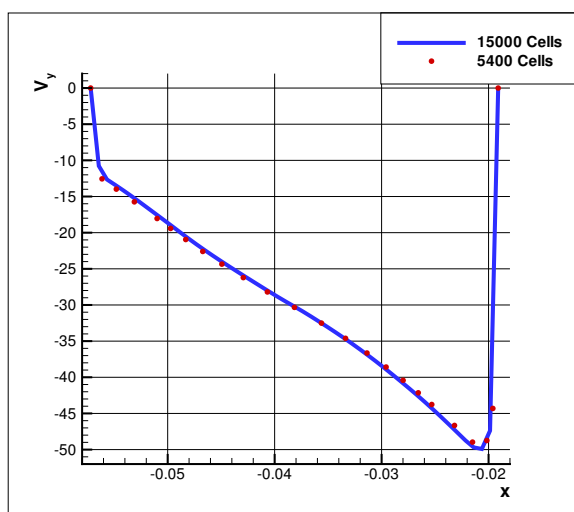


**Рис. 7:** Геометрия канала

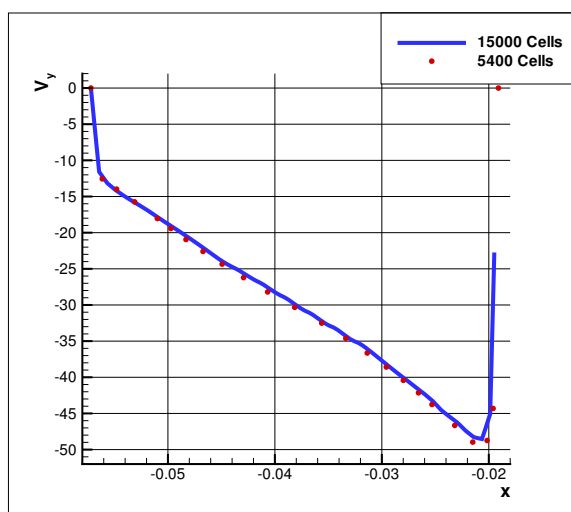


**Рис. 8:** Сетка расчётной области на участке поворота (15000 ячеек)

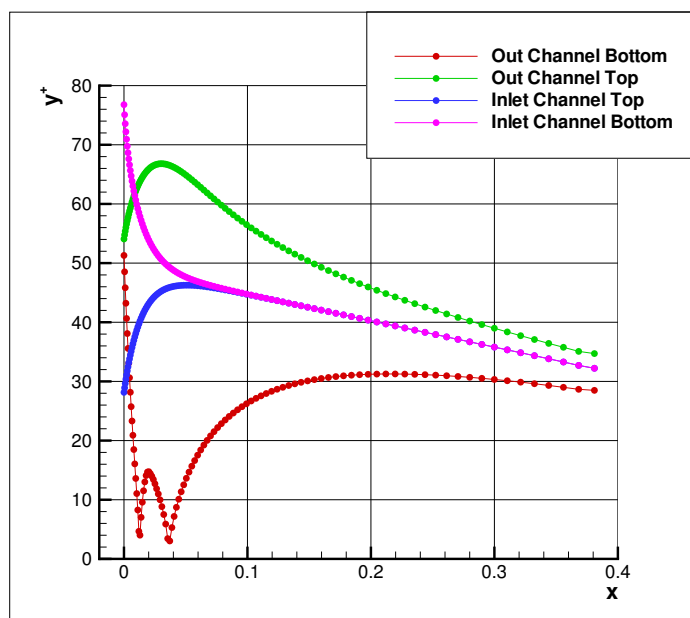
На *рисунках 9 и 10* показано сравнение решения на сетках 15000 ячеек и 5400 ячеек для поперечной компоненты скорости в сечении  $y = 0$ . Очевидно, решения практически совпадают, что говорит о том, что сетки в 15000 ячеек достаточно для получения адекватного решения. Результаты далее приводятся для этой сетки.



**Рис. 9:** Сравнение графиков  $U_y$  на сетках 5400 ячеек и 15000 ячеек (FLUENT)



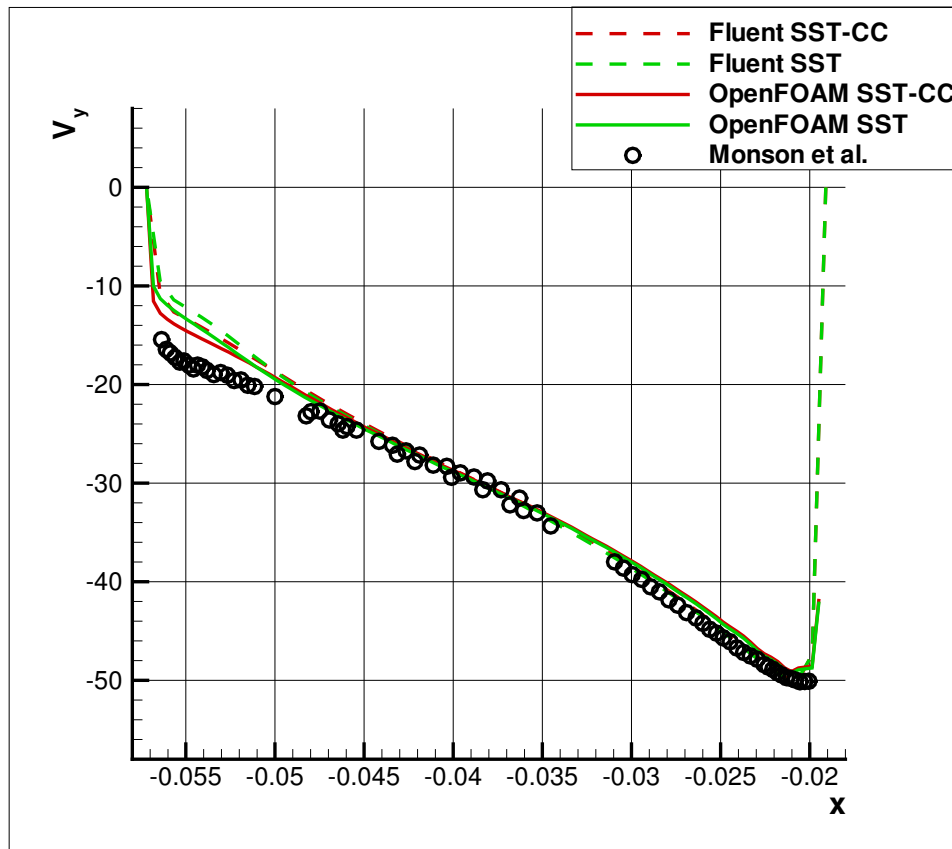
**Рис. 10:** Сравнение графиков  $U_y$  на сетках 5400 ячеек и 15000 ячеек (OpenFOAM)



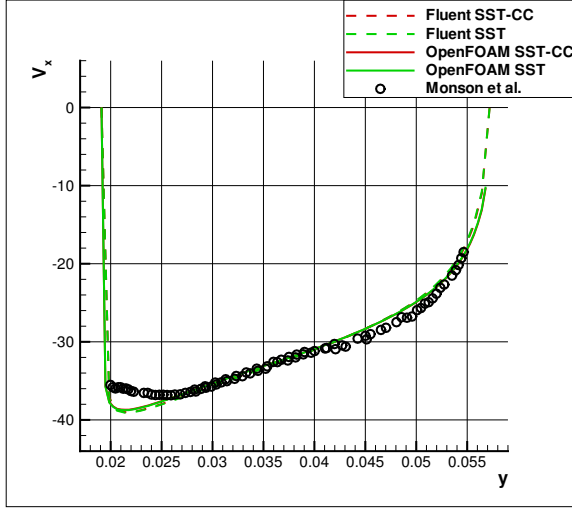
**Рис. 11:** Величина  $y^+$  первой пристенной ячейки на внешней и внутренней стенках

Величина  $y^+$  (рис. 11) для первой пристенной ячейки лежит в пределах  $10 \div 80$ , что вполне приемлемо для расчётов с использованием автоматических пристеночных функций.

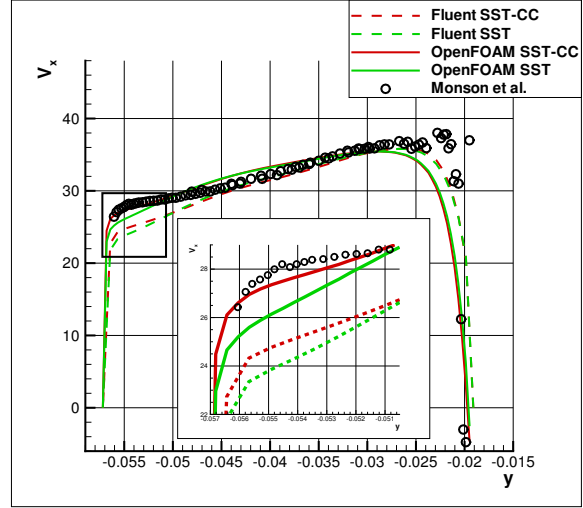
Перейдём теперь непосредственно к сравнению результатов расчёта с экспериментами Монсона и решением в Fluent с использованием встроенной в него поправки к модели Ментера для учёта кривизны линий тока. Для сравнения выбрано 5 поперечных сечений канала (рисунк 8) -  $x/H = -1$ ,  $x/H = 1$ ,  $x/H = 0$  (верхний канал),  $x/H = 0$  (нижний канал) и  $y/H = 0$ .



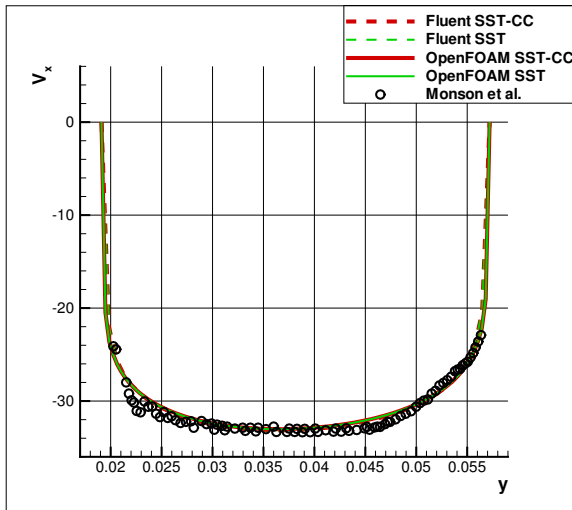
**Рис. 12:** Профиль поперечной скорости в сечении  $y/H = 0$



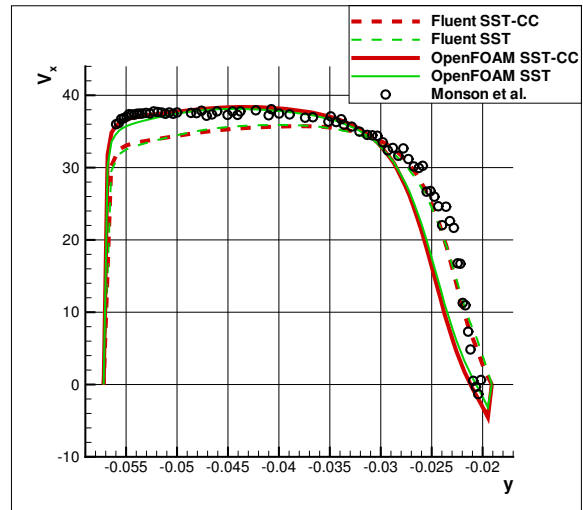
**Рис. 13:** Профиль продольной скорости в сечении  $x/H = 0$  (верхний канал)



**Рис. 14:** Профиль продольной скорости в сечении  $x/H = 0$  (нижний канал)



**Рис. 15:** Профиль продольной скорости в сечении  $x/H = -1$



**Рис. 16:** Профиль продольной скорости в сечении  $x/H = 1$



Для начала, стоит сказать, что профили продольной скорости на участке перед поворотом (*рисунки 13 и 15*), полученные в Fluent и OpenFOAM совпадают с точностью до толщины линии и очень хорошо соответствуют экспериментальному течению. Это говорит о том, что базовая модель Ментера, выбранная для введения поправки, правильно предсказывает течение на прямолинейном участке канала.

Из *рисунков 12, 14 и 16* видно, что профили скорости, полученные с использованием модифицированной модели Ментера гораздо ближе к экспериментальным данным в пристеночной области криволинейной части канала, чем решение, полученное с использованием стандартной модели. Поправка, при этом, как и следовало ожидать, не влияет на прямолинейное течение в зоне перед поворотом (*рисунки 13, 15*).

Влияние поправки сильнее всего заметно на выпуклой внутренней стенке, генерация турбулентности на которой в немодифицированной модели Ментера занижена. Надо заметить, что результаты, полученные с использованием OpenFOAM при этом лучше согласуются с экспериментами Монсона, чем результаты расчётов в Fluent. Это, однако же, несправедливо для вогнутой внешней стенки. Здесь результаты расчётов в Fluent, наоборот, ближе к экспериментальному профилю. Видно также, что на вогнутой стенке ни в Fluent, ни в OpenFOAM поправка практически не влияет на течение.

В целом, очевидно достаточно сильное положительное влияние введённой поправки, учитывающей кривизну линий тока, на результаты расчётов.

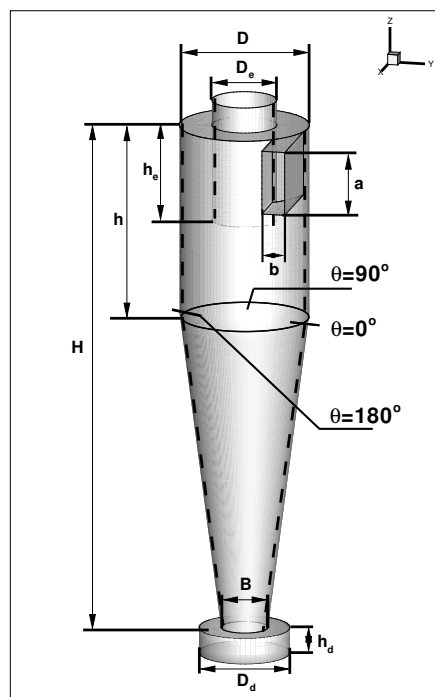
## 3.2 Расчёт циклона

### Постановка задачи

В задаче рассматривается турбулентное течение вязкого газа с дисперсными включениями в циклоне модели Stairmand с учётом влияния дисперсной фазы на исходное течение. Геометрические параметры циклона представлены в *таблице 3*.

**Таблица 3:** Геометрия фильтра

Диаметр цилиндра, $D$	$0.205m$
Диаметр выходной трубы, $D_e$	$0.5D$
Высота входного канала, $a$	$0.5D$
Ширина входного канала, $b$	$0.2D$
Длина выходной трубы, $h_e$	$0.75D$
Полная высота фильтра, $H$	$4.0D$
Высота цилиндра, $h$	$1.5D$
Диаметр нижнего сечения, $B$	$0.36D$
Высота пылесборника, $h_d$	$0.25D$
Диаметр пылесборника, $D_d$	$0.75D$



**Рис. 17:** Схема фильтра

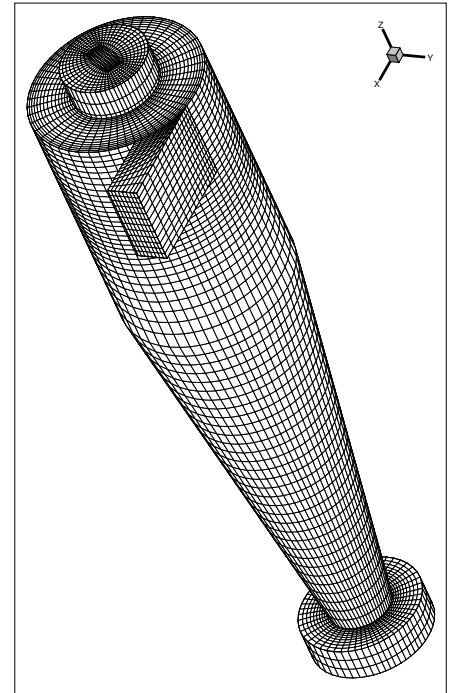
Течение исследуется для 4 различных скоростей на входе, а также для трёх разных порядков величины диаметра частиц. Граничные условия для задачи описаны в *таблице 4*, а на *рисунке 18* показана сетка расчётной области.

**Таблица 4:** Граничные условия

---

Скорость на входе, $U_{in} = 5, 10, 15, 20 m/s$
Температура на входе, $T_{in} = 300 K$
Температура частиц, $T_{pin} = T_{in}$
Скорость частиц на входе, $U_{pin} = U_{in}$
Давление на выходе, $P_{out} = 1 atm$
Тепловой поток на стенках, $q_w = 0$
Диаметр частиц, $d_p = 10^{-5} m, 10^{-6} m, 10^{-7} m$

---



**Рис. 18:** Сетка расчётной области

## Методические исследования

Для исследования сеточной сходимости решения, расчёты задачи с  $U_{in} = 20 m/s$  проводились на сетках 29380 ячеек, 96256 ячеек и 179552 ячейки. Сравнение профилей скорости вдоль двух отрезков, 1 :  $\{(0, 0, -0.3), (0.09, 0, -0.3)\}$  и 2 :  $\{(0, 0, -0.3), (0, 0.09, -0.3)\}$ , представлены на *рисунках 19 - 22*.

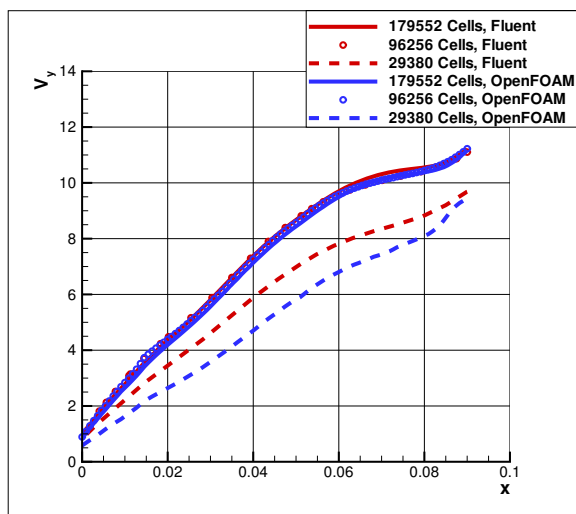


Рис. 19: Профили  $V_y$  вдоль прямой 1

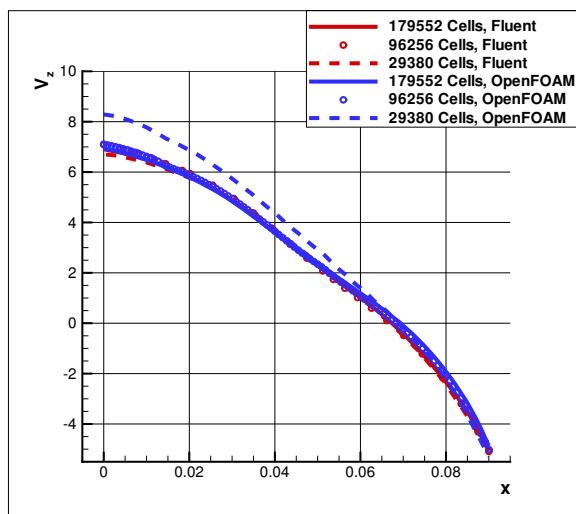


Рис. 20: Профили  $V_z$  вдоль прямой 1

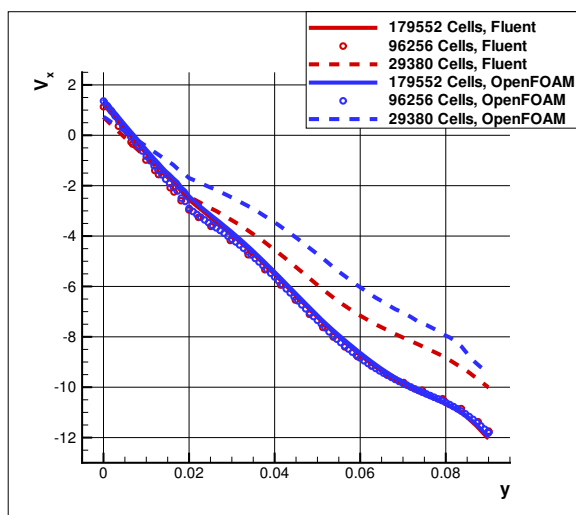


Рис. 21: Профили  $V_x$  вдоль прямой 2

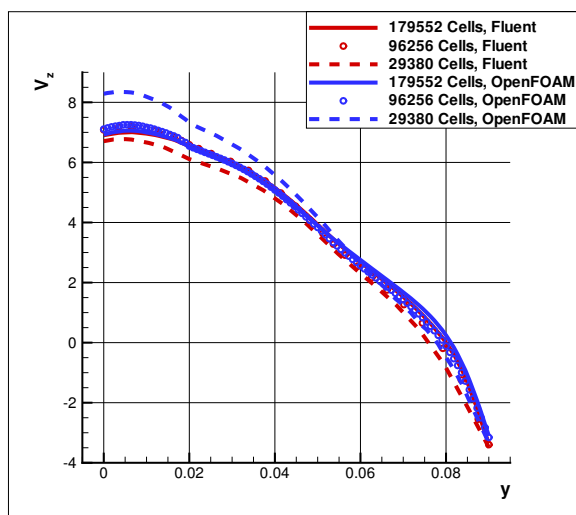
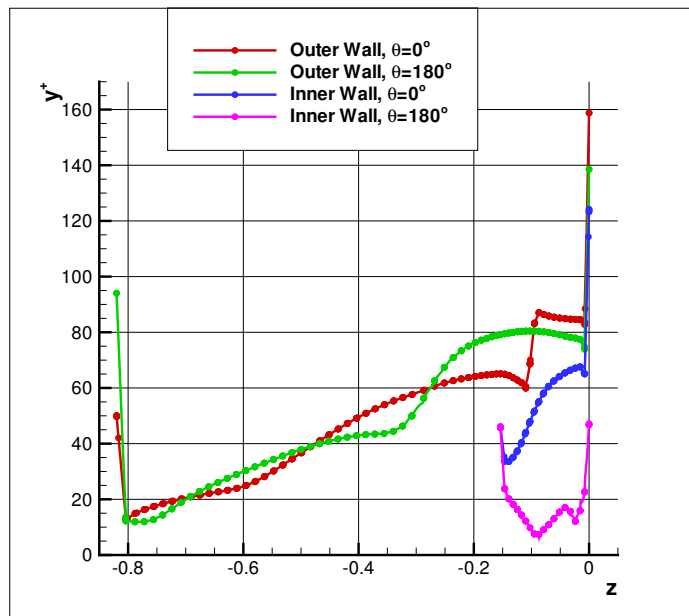


Рис. 22: Профили  $V_z$  вдоль прямой 2

Видно, что решение на самой грубой сетке (29380 ячеек) сильно отличается от решения на более подробных сетках. В то же время, решение на сетках 96256 ячеек и 179552 ячейки отличаются менее, чем на 5%, так что, сетки в 96256 ячеек вполне достаточно для получения сеточно-независимого решения. Кроме того, решения в Fluent и OpenFOAM хорошо соответствуют друг другу – профили скорости на *рисунках 19 - 22* для Fluent и OpenFOAM практически неотличимы для подробных сеток.



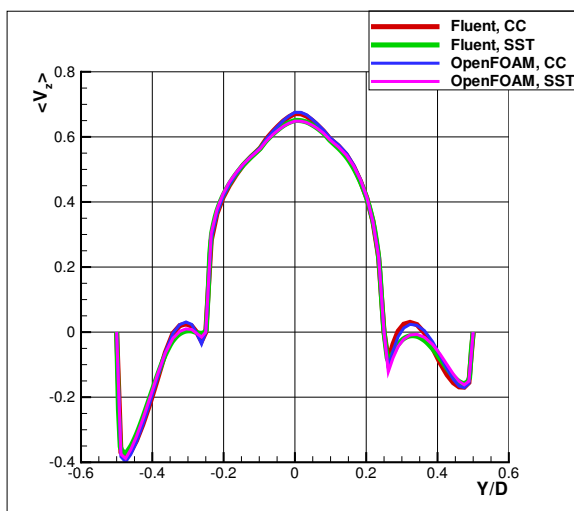
**Рис. 23:** Величина  $y^+$  первой пристенной ячейки на внешней и внутренней стенках циклона

На *рисунке 23*, проиллюстрировано распределение величины  $y^+$  первой пристенной ячейки, построенное вдоль образующих внешних и внутренних стенок, для углов  $\theta = 0^\circ$  и  $\theta = 180^\circ$  (отмечены на *рисунке 17* пунктирными линиями). Из графиков видно, что в большей части

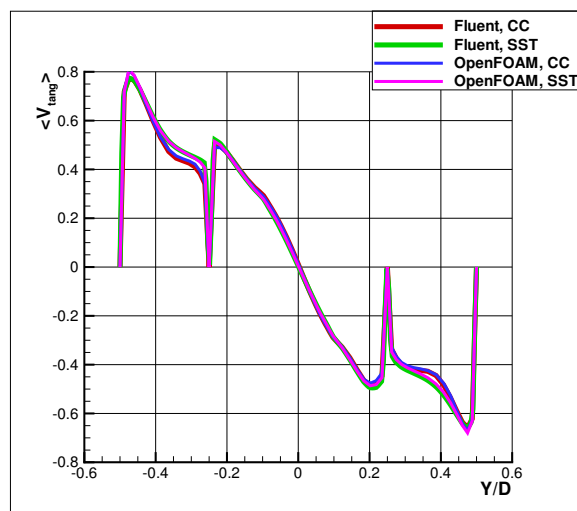
области величина  $y^+$  лежит в пределах  $10 \div 90$ , что вполне адекватно для использования модели Ментера с автоматическими пристеночными функциями.

Решение, полученное с использованием OpenFOAM достаточно хорошо согласуется с решением, полученным в Fluent как для стандартной модели Ментера, так и для модели с поправкой на кривизну линий тока, что можно видеть по сопоставленным на *рисунках 24 - 27* распределениям безразмерных осевой и тангенциальной составляющих скорости. Влияние поправки, как видно из первых двух рисунков, особенно сильно сказывается на течении вдоль выпуклых стенок выходной трубы. Такого результата и следовало ожидать в силу того, что модифицированная модель Ментера занижает генерацию турбулентности в этой области. Видно также, что решение с использованием поправки несколько изменило профили скорости вблизи границы ядра циклона и в его центре.

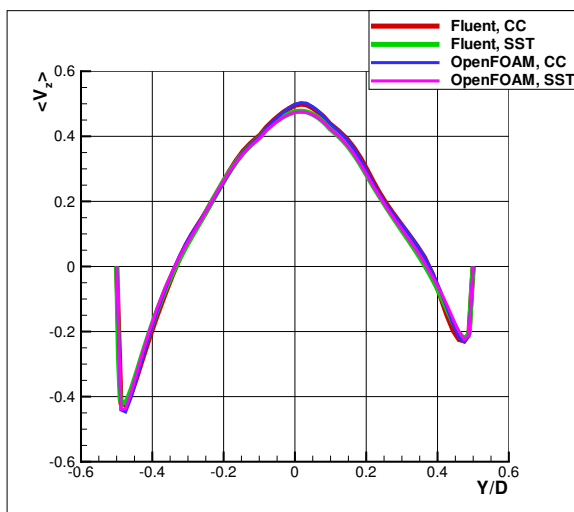
Расчёт течения при наличии частиц в циклоне (как, собственно, и предыдущие расчёты) выполнен с использованием имплементированного в OpenFOAM солвера, учитывающего влияние дисперсных включений на несущую фазу. Надо сказать, что анализ результатов (*рисунок 33*) показал, что для рассматриваемой задачи дисперсные включения слабо влияют на основной поток.



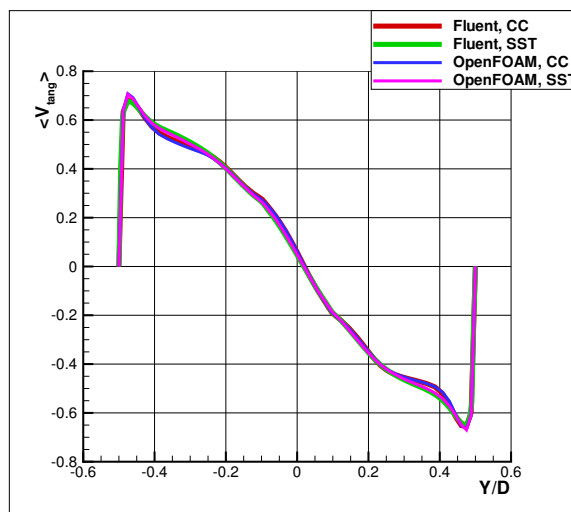
**Рис. 24:** Профили  $\langle V_z \rangle$  вдоль прямой  $Z/D = -0.75, x = 0$



**Рис. 25:** Профили  $\langle V_{tang} \rangle$  вдоль пр.  $Z/D = -0.75, x = 0$



**Рис. 26:** Профили  $\langle V_z \rangle$  вдоль прямой  $Z/D = -1, x = 0$



**Рис. 27:** Профили  $\langle V_{tang} \rangle$  вдоль пр.  $Z/D = -1, x = 0$

## Исследование эффективности циклона

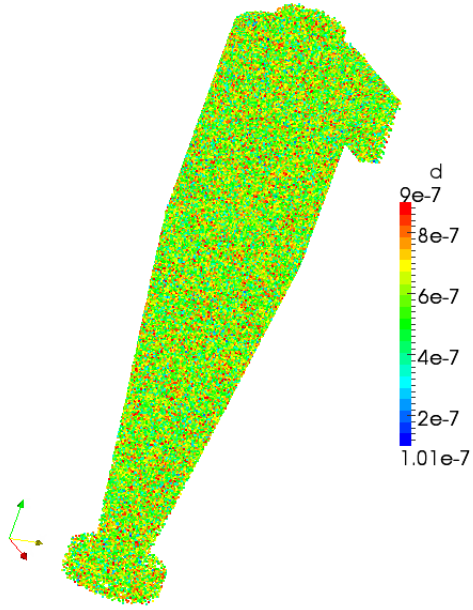
На *рисунках 28-31* показано распределение частиц в циклоне для разных диаметров частиц и разных входных скоростей потока через секунду после запуска. За это время в циклон поступило, при различных условиях задачи, от одного миллиона до двух миллионов частиц. По интенсивности распределения частиц в выходной трубе можно судить, что эффективность для частиц диаметром порядка  $10^{-5}m$  практически 100%, для частиц диаметром  $\sim 10^{-6}m$  она несколько меньше, а частицы диаметром  $\sim 10^{-7}m$  в очень большом количестве вылетают из циклона. Кроме того, на *рисунке 32* показано распределение частиц диаметром  $\sim 10^{-6}m$  в циклоне для 10 моментов времени.

Эффективность, рассчитанная из отношения количества вылетевших и запущенных частиц в численном эксперименте, для различных параметров представлена в сравнении с экспериментальными данными Диргоу и Лейта [5] в *таблице 5*.

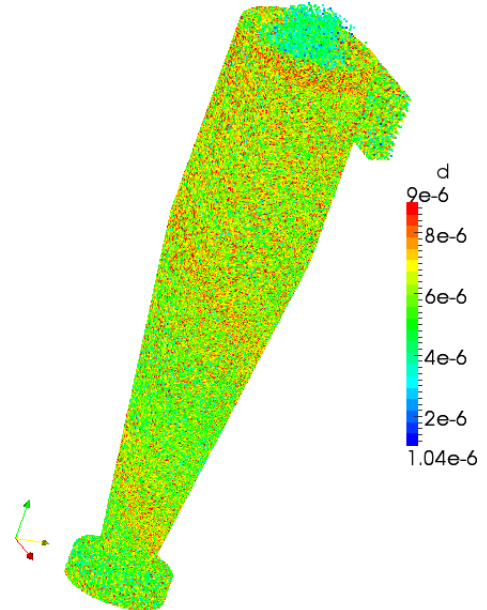
**Таблица 5:** Результаты для эффективности циклонов

Параметры течения	$\eta$ , численное исследование	$\eta$ , эксперимент
$U_{in} = 20m/s, d = 5 \cdot 10^{-5}m$	100%	100%
$U_{in} = 20m/s, d = 5 \cdot 10^{-6}m$	93%	90%
$U_{in} = 20m/s, d = 5 \cdot 10^{-7}m$	27%	10%
$U_{in} = 15m/s, d = 10^{-5}m$	80%	90%
$U_{in} = 10m/s, d = 10^{-5}m$	72%	85%
$U_{in} = 5m/s, d = 10^{-5}m$	75%	80%

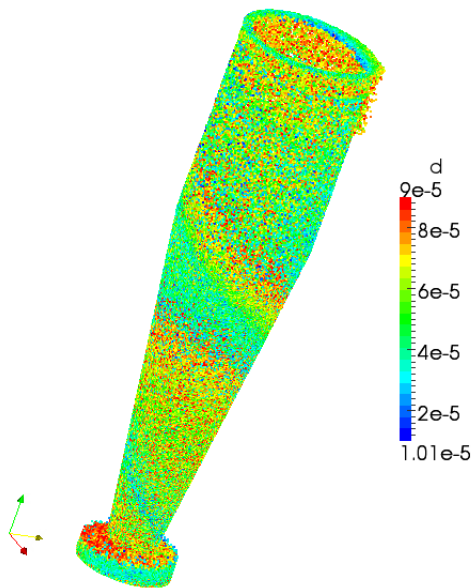




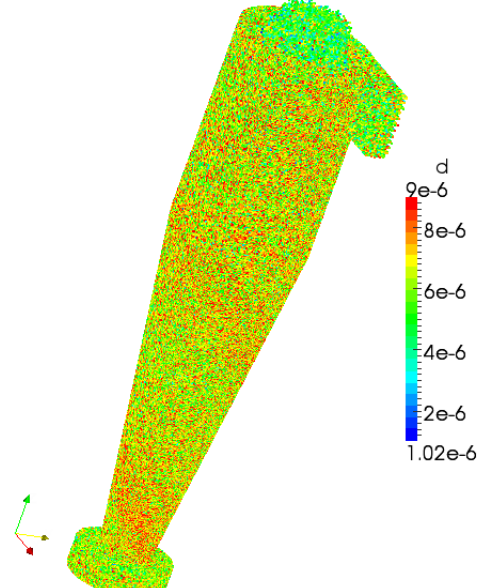
**Рис. 28:** Распределение частиц в циклоне для  $d \sim 10^{-7}$  и  $U_{in} = 20 \text{ m/s}$



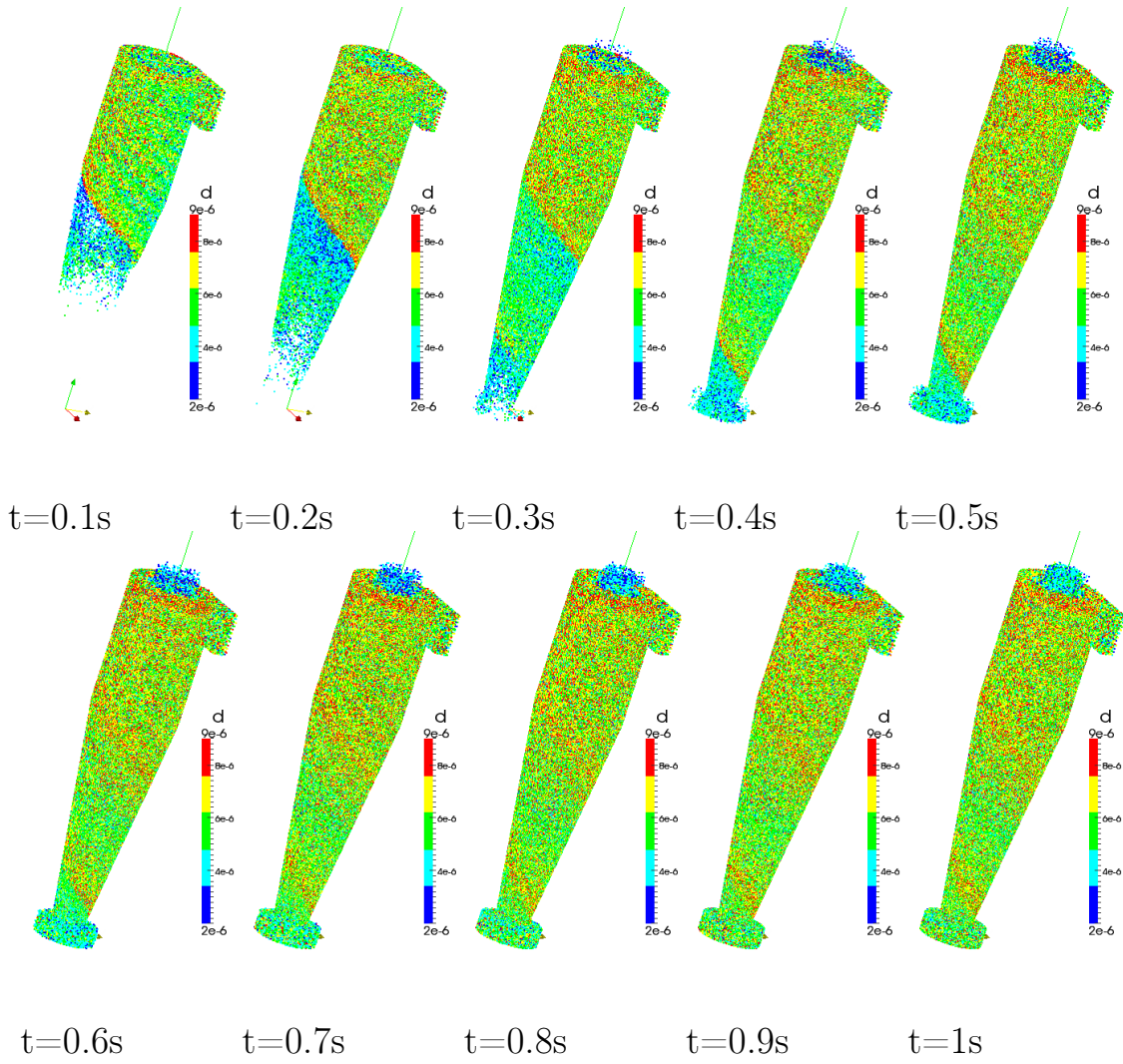
**Рис. 29:** Распределение частиц в циклоне для  $d \sim 10^{-6}$  и  $U_{in} = 20 \text{ m/s}$



**Рис. 30:** Распределение частиц в циклоне для  $d \sim 10^{-5}$  и  $U_{in} = 20 \text{ m/s}$



**Рис. 31:** Распределение частиц в циклоне для  $d \sim 10^{-5}$  и  $U_{in} = 10 \text{ m/s}$



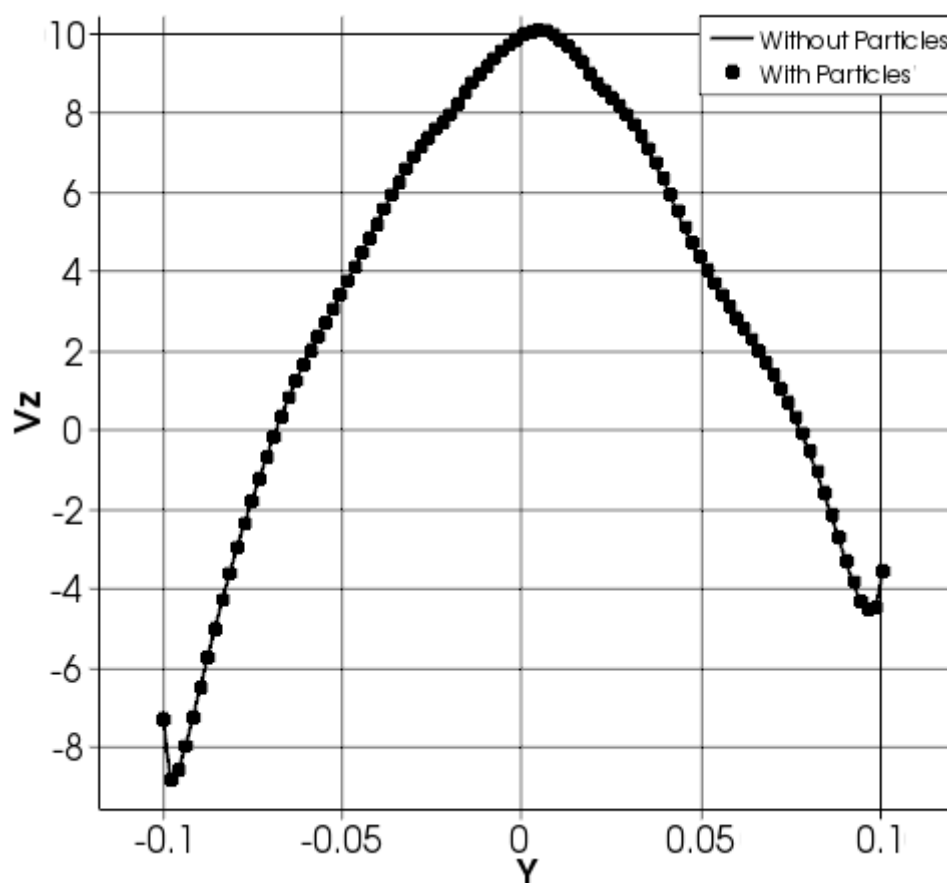
**Рис. 32:** Развитие течения дисперсных включений

Из *таблицы 5* видно, что полученные с использованием написанного солвера результаты достаточно хорошо согласуются с экспериментальными данными Диргоу и Лейта для степени очистки.

Очевидно, при уменьшении диаметра частиц, эффективность циклонов падает. При диаметре  $\sim 10^{-7}m$  почти три четверти частиц вылетают через выходную трубу вместе с потоком. При уменьшении скорости, эффективность фильтра так же падает, так как уменьшается центробежная сила, и, следовательно, частицы медленнее относятся к

стенке и не отсоединяются от основного потока. При уменьшении скорости график зависимости степени очистки от диаметра частиц смещается в сторону больших диаметров, что подтверждается как теорией и экспериментами, так и численными расчётами.

Описанные выше результаты говорят в пользу правильности имплементированного в OpenFOAM солвера, позволяющего рассчитывать турбулентные течения сжимаемого теплопроводящего газа с учётом обратного влияния частиц на основной поток.



**Рис. 33:** Влияние частиц на основное течение

## Заключение

В ходе исследования была рассмотрена задача о турбулентном течении газа с дисперсными включениями в фильтре-циклоне при разных значениях скорости потока и различных диаметрах частиц.

Для проведения расчётов в OpenFOAM был имплементирован поправочный коэффициент Шура-Спалларта для учёта влияния кривизны линий тока на турбулентные характеристики. Верификация модели производилась в разделе 3.1 на задаче о турбулентном течении воздуха в U-образном канале и показала явный положительный эффект на результаты расчётов по сравнению с немодифицированной SST-моделью. Результаты расчётов хорошо согласуются с экспериментальными данными Монсона.

Расчёт циклона, описанный в разделе 3.2 также показал положительное влияние введённой поправки на профили скорости.

Сравнение результатов расчётов, выполненных при помощи введённого в OpenFOAM солвера и Fluent показало отличное соответствие решений друг другу. Анализ влияния дисперсных включений на основной поток позволил заключить, что этим влиянием в исследуемой задаче, по большому счёту, можно пренебречь.

Проведено сравнение результатов расчётов с экспериментальными данными Диргоу и Лейта для степени очистки, которое показало хорошее согласие как с экспериментами, так и с теорией, которую эти эксперименты подтверждают. Показана эффективность циклонов для очищения газа от твёрдых частиц диаметром  $\sim 10^{-6}m$ . Выявлено, что

при уменьшении скорости течения, эффективность рассматриваемой конфигурации циклона заметно понижается. Такая же закономерность имеет место и при уменьшении диаметра частиц. Выяснено, что для фильтрации частиц, диаметром меньше  $\approx 10^{-7}m$ , циклон непригоден так как степень очистки при этом становится меньше 30%.

## Список литературы

- [1] Wilson A. Cement and concrete: Environmental considerations. *EBN*, 2(2), 1993.
- [2] Lapple C.E. Gravity and centrifugal separation. *Ind. Hyd. Q.*, 11:40, 1950.
- [3] Speziale C.G. Analytical methods for the development of reynolds-stress closures in turbulence. *Ann. Rev. Fluid Mech.*, 23:107–157, 1991.
- [4] Stairmand C.J. The design and performance of cyclone separators. *Trans. Inst. Chem. Eng.*, 1951.
- [5] Leith D. Dirgo J. Cyclone collection efficiency: comparison of experimental results with theoretical predictions. *Aerosol Sci. Tech.*, 4:410–415, 1985.
- [6] Lacor C. Elsayed K. Numerical modeling of the flow field and performance in cyclones of different cone-tip diameters. *Computers & Fluids*, 51:48–59, 2011.
- [7] Utikar R. et al. Hydrodynamic simulation of cyclone separators. *Computational Fluid Dynamics, Hyoung Woo Oh. (Ed.)*, pages 241 – 266, 2010.
- [8] Saffman P.G. Govindaraju S.P. Flow in a turbulent trailing vortex. *Phys. Fluids*, 1971.

- [9] Stein L.E. Hoffman A.C. Gas cyclones and swirl tubes. *Springer-Verlag*, 2002.
- [10] Tsai C.J. Kuo K.Y. On the theory of particle cutoff diameter and collection efficiency of cyclones. *Aerosol and Air Quality Research*, 1(1):47–56, 2001.
- [11] Licht W. Leith D. The collection efficiency of cyclone type particle collectors — a new theoretical approach. *A. I. Ch. E. Symp. Ser.*, 68:196–206, 1972.
- [12] Leschziner M.A. Lien F.S. Modeling 2d separation from a high lift aerofoil with a non-linear eddy-viscosity model and second-moment closure. *Aeronautical J.*, pages 125–144, April 1995.
- [13] Esch T. Menter F. Elements of industrial heat transfer prediction. *16th Brazilian Congress of Mechanical Engineering (COBEM)*, Nov. 2001.
- [14] McConnaughet P.K. Monson D.J., Seegmiller H.L. and Chen Y.S. Comparison of experiment with calculations using curvature-corrected zero and two equation turbulence models for a two-dimensional u-duct. *AIAA Paper*, 21(90-1484), 1990.
- [15] Woisetschläger J. Obermair S. and Staudinger G. Investigation of the flow pattern indifferent dust outlet geometries of a gas cyclone by laser doppler anemometry. *Powder Technol.*, 138:239–251, 2003.

- [16] OpenCFD. Официальный сайт openfoam. <http://www.openfoam.com>.
- [17] Bradshaw P. Effects of streamline curvature on turbulent flow. *AGARD-AG-169*, 1973.
- [18] Dietz P.W. Collection efficiency of cyclone separators. *A. I. Ch. E. Journal*, 27:888, 1981.
- [19] Alexander R. Fundamentals of cyclone design and operation. *Proc. Australas. Inst. Min. Metall. (New Series)*, 152-153:203, 1949.
- [20] Harker J.H. Richardson J.F. and Backhurst J.R. *Particle Technology and Separation Processes*, volume 2. Coulson and Richardson's CHEMICAL ENGINEERING, fifth edition, 2002.
- [21] Heumann W.L. Shrikant D. Harnessing the power of cyclone. *Chem. Eng. J.*, 118(5):34–43, 2011.
- [22] Menter F.R. Smirnov P.E. Sensitization of the sst turbulence model to rotation and curvature by applying the spalart–shur correction term. *Journ. of Turbomachinery*, 131(4), 2009.
- [23] Shur M.L. Spalart P.R. On the sensitization of turbulence models to rotation and curvature. *Aerosp. Sci. Technol.*, 15, 1997.
- [24] DePaola V. Theodore L. Predicting cyclone efficiency. *Air Pollut. Control Assoc.*, 30(10):1132–1133, 1980.
- [25] Aurelia Vallier. Tutorial icolagrangianfoam/solidparticle. *CFD With opensource software*, 3, 2010.



- [26] Barth W. Design and layout of the cyclone separator on the basis of new investigations. *Brenn. Warme Kraft*, 8:1–9, 1956.
- [27] Chambers T.L. Wilcox D.C. Sreamline curvature effects on turbulent boundary layers. *AZAA J.*, 15(4):574–580, 1977.
- [28] Гарбарук А.В. Конспект лекций дисциплины «Течения вязкой жидкости и модели турбулентности: методы расчета турбулентных течений». 2010.
- [29] Ужов В.Н. Циклоны НИИОГАЗ. Руководящие указания по проектированию, изготовлению, монтажу и эксплуатации. *Ярославль*, 1970.
- [30] Росстат. Загрязнение окружающей среды в субъектах РФ. <http://protown.ru/information/hide/2659.html>.