Bølgelikningen numerisk Løsning

Fra sentraldifferansen får vi:

$$u_{xx}(x,y,t) = \frac{u(x+h,y,t) - 2u(x,y,t) + u(x-h,y,t)}{h^2}$$

$$u_{yy}(x,y,t) = \frac{u(x,y+h,t) - 2u(x,y,t) + u(x,y-h,t)}{h^2}$$

$$u_{tt}(x,y,t) = \frac{u(x,y,t+k) - 2u(x,y,t) + u(x,y,t-k)}{k^2}$$

Sentraldifferansen er en svært enkel metode å finne den deriverte. Det vil derfor være større feilmargin i denne løsningen en om vi hadde brukt f.eks. en lengre taylorutvikling.

Her kan vi sette inn i bølgelikninge a i et homogent medium, fordi noe annet virker veldig slitsomt.

Siden mediumet bølgen propegerer gjennom er homogent kan man bruke laplace-operatoren isteden for nabla prikkprodukt $\nabla \cdot (c^2 \nabla u)$

$$u_{tt}(x,y,t) = c^2 \Delta u(x,y,t) + f(x,y,t)$$

Dette er en eventuell tvungen bevegelse det ser vi bort ifra

Bølgelikningen ser da slik ut numerisk:

$$u_{k+1} - 2u_{ijk} + u_{k-1} = \frac{c^2k^2}{h^2}\left(u_{i+1} - 2u_{ijk} + u_{i-1} + u_{j+1} - 2u_{ijk} + u_{j-1}\right)$$

$$u_{k+1} = \frac{c^2k^2}{h^2}\left(u_{i+1} + 4u_{ijk} + u_{i-1} + u_{j+1} + u_{j-1}\right) + 2u_{ijk} - u_{k-1}$$

i = skritt x j = skritt y k = skritt tid

Dette kan man smacke rett inn i python

Stabilitetskriterier

Det finnes en del forskjellige stabilitetskriterier. Von neumann, Courant-Fredrichs-Lewy osv.

Etter endeløs research bestemte vi for å bruke CFL metoden.

Denne metoden ser slik ut:

$$C = \frac{u_x \Delta t}{\Delta x} + \frac{u_y \Delta t}{\Delta y} \le C_{max}$$

I vårt til felle er:

$\Delta x = \Delta y = h$ og $\Delta t = k$

Vi har også satt det slik at bølgefarten i begge retninger er lik.

Derfor vil den nye løsningen se slik ut.

Courant tall   Bølgefart

$$C = \frac{2ck}{h} \le C_{max}$$

Courant tallet er en dimensjonsløs verdi som bestemmes av løsnings-metoden.

Vi bruker en eksplisitt metode. Derfor må courant tallet være maksimum 1.