$V = 1/nX^tX$ matrice de var-cov
$T = 1/nXX^t$

$\frac{1}{n}\sum(x_i^j)^2 = \left\|X^j\right\|_{D_p}^2 = var(X^j)$
Formules de transitions:
$u = \frac{1}{n\sqrt{\lambda}}X^tv$ tel que $V = \frac{1}{n}X^tv$ la projection des variables et donc V=$\sqrt{\lambda}u$
$v = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}Xu$ tel que$Y = Xu$ la projection des individus

Exemple: Six élèves ont obtenus les notes suivantes en trois matières:

	Français	**Maths**	**Histoire**
1	9	12	10
2	15	9	10
3	5	10	8
4	11	13	14
5	11	13	8
6	3	15	10

Calcul des moyennes:
$\overline{F} = \frac{1}{6}\sum f_i = 9$
$\overline{M} = 12$
$\overline{H} = 10$
Tableau centré

X=

	F-9	**M-12**	**H-10**
1	0	0	0
2	6	-3	0
3	-4	-2	-2
4	2	1	4
5	2	1	-2
6	-6	3	0

Calcul des écarts type
$\sigma_F = \sqrt{\frac{1}{6}(Fi - \overline{F})^2} = \sqrt{16} = 4$
$\sigma_M = 2$
$\sigma_H = 2$
Tableau centré et réduit

X=

	F-9/4	**M-12/2**	**H-10/2**
1	0	0	0
2	3/2	-3/2	0
3	-1	-1	-1
4	1/2	1/2	2
5	1/2	1/2	-1
6	-3/2	3/2	0

Calcule de la matrice de var-cov

$$V = X^t D_p X = 1/n X^t X = 1/6 \begin{pmatrix} 6 & -3 & 1 \\ -3 & 6 & 1 \\ 1 & 1 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 1/6 \\ -1/2 & 1 & 1/6 \\ 1/6 & 1/6 & 1 \end{pmatrix} = R$$

R=Matrice de corrélation

Remarque : lorsque l'ACP est normé, V devient matrice de corrélation.

montrer que $u1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $u2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1+\sqrt{3} \end{pmatrix}$ sont vecteurs propre de V

$u1$ est vecteur propre de V ssi $\exists \lambda \in R / Vu = \lambda u$.

$Vu = V \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 3/2u$

Donc u est vercteur propre de V assosié à la valeur propre 3/2,

$u1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ vecteur normé

$u2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1+\sqrt{3} \end{pmatrix}$, est vp de V associé à la valeur propre $\frac{3+\sqrt{3}}{4} = 1.183$

norme de $\|u2\| = \sqrt{\left(\sqrt{3}+1\right)^2 + 2} = \sqrt{6+2\sqrt{3}} = 3.0764$

$u2normé = \begin{pmatrix} 1/3.07 \\ 1/3.07 \\ (1+\sqrt{3})/3.07 \end{pmatrix}$:

Déduction de la troisième valeur propre:

on a

$tr(V) = \sum_1^3 \lambda_\alpha = 3/2 + \frac{3+\sqrt{3}}{4} + \lambda_3 = 3 \Rightarrow \lambda_3 = 3 - 3/2 - \frac{3+\sqrt{3}}{4} = \frac{3-\sqrt{3}}{4}$

on a $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3$,on considdère donc les deux plus grandes valeurs propres.

Projection des individus: u1 et u2 sont orthonormés.

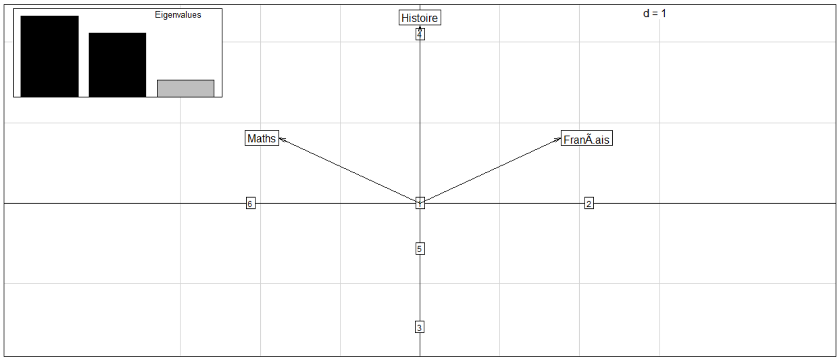
Sur l'axe1:

$Y1 = Xu1$

Sur l'axe1:

$Y2 = Xu2$

$$Y = X(u1, u2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3/2 & -3/2 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1/2 & 1/2 & 2 \\ 1/2 & 1/2 & -1 \\ -3/2 & 3/2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/3.07 \\ -1/\sqrt{2} & 1/3.07 \\ 0 & (1+\sqrt{3})/3.07 \end{pmatrix} =$$



$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & -2.12 \\ 0 & 1.56 \\ 0 & -0.56 \\ -3/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Projection des variables: Par formules de transition, on a

$V = 1/nX^t v = \sqrt{\lambda}u$

	$V_1 = \sqrt{\lambda_1}u_1$	$V_2 = \sqrt{\lambda_2}u_2$
F	$\sqrt{3}/2$	0.35
M	$-\sqrt{3}/2$	0.35
H	0	0.89

Qualité de représentation du 1er axe factoriel:

On calcul le pourcentage d'inertie de l'axe1:

$I1 = \frac{\lambda 1}{\sum \lambda} = \frac{3/2}{3} = 0.5$

l'axe 1 a une qualité de 50%; il représente 50% de l'information globale sur X.

$I2 = \frac{\lambda 2}{\sum \lambda} = \frac{\frac{3+\sqrt{3}}{4}}{3} = 0.394\,34$

l'axe 2 a une qualité de 39,43% complémentaire à l'axe1.

Pourcentage d'inertie du 1er plan factoriel (Axe1,Axe2)

$\mathrm{I}_{12} = \frac{\lambda 1 + \lambda 2}{\sum \lambda} = I1 + I2 = 0.5 + 0.39 = 0.89$

La qualité de représentation du plan factoriel est de 0.89 (Trés bonne qualité de représentation car $I_{12} > 0.8$.

Interprétation des axes: