

竞赛常用知识手册

《中等数学》资料室

数论部分

1 整除

1. 定义

对于整数 a 、 b ($b \neq 0$), 存在整数 q , 满足 $a = bq$ 就叫做 a 能被 b 整除, 记作 $b|a$. 其中 a 叫做 b 的倍数, b 叫做 a 的约数(因数).

若 $b \neq \pm 1$, 则 b 叫做 a 的真约数.

若 a 不能被 b 整除, 则记作 $b \nmid a$.

如果 $a^t|b$, $a^{t+1} \nmid b$, $t \in \mathbf{N}$, 记作 $a^t||b$.

2. 关于整除的一些简单性质

(1) $b|0$, $\pm 1|a$, $a|a$ ($a \neq 0$).

(2) 若 $b|a$, $a \neq 0$, 则 $1 \leq |b| \leq |a|$.

(3) 若 $c|b$, $b|a$, 则 $c|a$.

(4) 若 $b|a$, $c \neq 0$, 则 $bc|ac$.

(5) 若 $c|a$, $c|b$, 则 $c|(ma + nb)$ ($m, n \in \mathbf{Z}$).

(6) 若 $\sum_{i=1}^k a_i = 0$, b 能整除 a_1, a_2, \dots, a_k 中的 $k-1$ 个, 则 b 能整除另一个.

2 同余

1. 定义

设 m 为正整数, 若整数 a 和 b 被 m 除的余数相同, 则称 a 和 b 对模 m 同余, 记作 $a \equiv b \pmod{m}$.

2. 基本性质

(1) $a \equiv b \pmod{m} \Leftrightarrow m|(b-a)$.

(2) $a \equiv b \pmod{m} \Leftrightarrow b = km + a$ ($k \in \mathbf{Z}$).

(3) $a \equiv a \pmod{m}$.

(4) 若 $a \equiv b \pmod{m}$, 则 $b \equiv a \pmod{m}$.

(5) 若 $a \equiv b \pmod{m}$, $b \equiv c \pmod{m}$, 则 $a \equiv c \pmod{m}$.

(6)若 $a \equiv b \pmod{m}$, $c \equiv d \pmod{m}$, 则 $a \pm c \equiv b \pm d \pmod{m}$, $ac \equiv bd \pmod{m}$, $a^n \equiv b^n \pmod{m}$.

(7)若 $ac \equiv bc \pmod{m}$, $(c, m) = d$, 则 $a \equiv b \pmod{\frac{m}{d}}$. 其中符号 (c, m) 表示 c 与 m 的最大公约数.

特别地, 当 $(c, m) = 1$ 时, 若 $ac \equiv bc \pmod{m}$, 则 $a \equiv b \pmod{m}$.

3. 同余类

由关于模 m 同余的数组成的集合, 每一个集合叫做关于模 m 的同余类(或叫做关于模 m 的剩余类).

由于任何整数被 m 除的余数只能是 $0, 1, \dots, m-1$ 这 m 种情形, 所以, 整数集可以按对模 m 同余的关系分成 m 个子集: A_0, A_1, \dots, A_{m-1} .

其中 $A_i = \{qm + i | m \text{ 为模}, q \in \mathbf{Z}\}$, $i = 0, 1, \dots, m-1$.

所有的 $A_i (i = 0, 1, \dots, m-1)$ 满足 $\bigcup_{i=0}^{m-1} A_i = \mathbf{Z}$, $\bigcap_{i=0}^{m-1} A_i = \emptyset$.

4. 完全剩余系

从模 m 的 m 个同余类 A_0, A_1, \dots, A_{m-1} 中, 每一类 A_i 取一数 a_i , 则 a_0, a_1, \dots, a_{m-1} 叫做模 m 的一个完全剩余系(简称模 m 的完系).

最简单的模 m 的完全剩余系是 $0, 1, \dots, m-1$, 也叫做模 m 的最小非负完系.

显然 m 个相继整数构成模 m 的一个完系.

3 质数与合数

1. 一个大于1的整数, 如果只有1和它本身作为它的约数, 这样的正整数叫做质数(也叫素数); 如果除了1和它本身之外还有其他的正约数, 这样的正整数叫做合数.

1既不是质数也不是合数. 因此, 正整数集 $\mathbf{Z}_+ = \{1\} \cup \{\text{质数}\} \cup \{\text{合数}\}$.

2. 大于1的整数的所有真约数中, 最小的正约数一定是质数.

3. 合数 a 的最小质约数不大于 \sqrt{a} .

4. 质数有无穷多个.

5. 不存在这样的整系数多项式 $f(n) = \sum_{i=0}^m a_i n^i$, 使得对任意的自然数 n , $f(n)$ 都是质数.

6. 威尔逊(Wilson)定理

p 为质数的充分必要条件是 $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$.

4 质因数分解

1. 质因数分解定理(整数的唯一分解定理)

每一个大于1的整数都能分解成质因数连乘积的形式, 且如果把这些质因数按照由小到大的顺序排列(相同因数的乘积写成幂的形式), 这种分解方法是唯一的.

2. 整数 $n(n > 1)$ 的标准分解式为 $n = \prod_{i=1}^m p_i^{\alpha_i}$. 其中 p_i 为质数, α_i 为正整数, $i = 1, 2, \dots, m$.

3. 约数个数定理

设 $d(n) = \sum_{d|n} 1$ 表示大于1的整数 n 的所有正约数的个数, n 的标准分解式为 $n = \prod_{i=1}^m p_i^{\alpha_i}$, 则

$$d(n) = \prod_{i=1}^m (1 + \alpha_i).$$

4. 约数和定理

设 $\sigma(n) = \sum_{d|n} d$ 表示大于1的整数 n 的所有正约数的和, n 的标准分解式为 $n = \prod_{i=1}^m p_i^{\alpha_i}$, 则

$$\sigma(n) = \prod_{i=1}^m \frac{p_i^{\alpha_i+1} - 1}{p_i - 1}.$$

5. 在 $n!$ 的标准分解式中, 质因数 p 的方幂为 $\sum_{r=1}^{\infty} \left[\frac{n}{p^r} \right]$. 其中记号 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数.

5 公约数和公倍数

1. 公约数和最大公约数

(1)若 $c|a_1, c|a_2, \dots, c|a_n$, 则 c 称为 a_1, a_2, \dots, a_n 的公约数.

a_1, a_2, \dots, a_n 的所有公约数中最大的一个称为 a_1, a_2, \dots, a_n 的最大公约数. 记作 (a_1, a_2, \dots, a_n) .

(2)若 a_1, a_2, \dots, a_n 的标准分解式为 $a_1 = \prod_{i=1}^m p_i^{\alpha_i}, a_2 = \prod_{i=1}^m p_i^{\beta_i}, \dots, a_n = \prod_{i=1}^m p_i^{\delta_i}$, 其中 p_i 为质数, $\alpha_i, \beta_i, \dots, \delta_i$ 为非负整数, $i = 1, 2, \dots, m$, 则 $(a_1, a_2, \dots, a_n) = \prod_{i=1}^m p_i^{t_i}$, 其中 $t_i = \min\{\alpha_i, \beta_i, \dots, \delta_i\}$.

(3)如果 a 是 b 的倍数, 那么 a 和 b 的公约数的集合与 b 的约数集合相等.

(4)如果 a 是 b 的倍数, 则 $(a, b) = b$.

(5)设 a 和 b 是不同时等于1的正整数, 且 $d = ax_0 + by_0$ 是形如 $ax + by$ (x, y 是整数)的整数中的最小正整数, 则 $d = (a, b)$.

(6)正整数 a 和 b 的公约数集合与它们的最大公约数的约数集合相等.

(7)设 m 是任意正整数, 则 $(am, bm) = (a, b)m$.

(8)设 n 是 a 和 b 的一个公约数, 则 $\left(\frac{a}{n}, \frac{b}{n}\right) = \frac{(a, b)}{n}$.

(9)设正整数 a 和 $b(a > b)$ 满足等式 $a = bq + r, 0 \leq r < b, q, r \in \mathbf{Z}$. 则 $(a, b) = (b, r)$.

由此可得到求 a, b 最大公约数的辗转相除法.

设 $a = bq_1 + r_1, 0 \leq r_1 < b$.

若 $r_1 = 0$, 则 $(a, b) = b$.

若 $r_1 \neq 0$, 则又可用 r_1 去除 b 得 $b = r_1 q_2 + r_2, 0 \leq r_2 < r_1$.

若 $r_2 = 0$, 则 $(a, b) = (b, r_1) = r_1$.

若 $r_2 \neq 0$, 再用 r_2 去除 r_1 得 $r_1 = r_2 q_3 + r_3, 0 \leq r_3 < r_2$.

如此继续下去, 由于 $b > r_1 > r_2 > r_3 > \cdots$ 以及 $r_i (i = 1, 2, \cdots)$ 是非负整数, 则一定在进行到某一次时, 例如第 $n+1$ 次得到 $r_{n+1} = 0$. 但由于 $r_n \neq 0$, 则有 $(a, b) = (b, r_1) = (r_1, r_2) = \cdots = (r_{n-1}, r_n) = r_n$.

用此法还可以求(5)中形如 $ax + by$ 的最小正整数 $d = ax_0 + by_0$.

2. 公倍数和最小公倍数

(1)若 $a_1|b, a_2|b, \cdots, a_n|b$, 则 b 称为 a_1, a_2, \cdots, a_n 的公倍数. a_1, a_2, \cdots, a_n 的所有公倍数中最小的一个称为 a_1, a_2, \cdots, a_n 的最小公倍数. 记作 $[a_1, a_2, \cdots, a_n]$.

(2)若 a_1, a_2, \cdots, a_n 的标准分解式为 $a_1 = \prod_{i=1}^m p_i^{\alpha_i}, a_2 = \prod_{i=1}^m p_i^{\beta_i}, \cdots, a_n = \prod_{i=1}^m p_i^{\delta_i}$, 其中 p_i 为质数, $\alpha_i, \beta_i, \cdots, \delta_i$ 为非负整数, $i = 1, 2, \cdots, m$, 则 $[a_1, a_2, \cdots, a_n] = \prod_{i=1}^m p_i^{r_i}$, 其中 $r_i = \max\{\alpha_i, \beta_i, \cdots, \delta_i\}$.

(3) a_1, a_2, \cdots, a_n 的最小公倍数是它们的任一公倍数的约数.

$$(4)[a, b] = \frac{ab}{(a, b)}.$$

6 互质数、费马小定理和孙子定理

1. 互质数

(1)若 $(a_1, a_2, \cdots, a_n) = 1$, 就叫做 a_1, a_2, \cdots, a_n 互质(也叫做互素). 这 n 个数叫互质数(互素数).

特别地, 1和任何整数互质; 相邻两个整数互质; 相邻两个奇数互质; 对质数 p , 若 p 不能整除 a , 则 p 与 a 互质.

(2)若 $(a, b) = 1$, 则 $(a \pm b, a) = 1, (a \pm b, ab) = 1$.

(3)若 $(a, b) = 1, a|bc$, 则 $a|c$.

(4)若 $a|c, b|c, (a, b) = 1$, 则 $ab|c$.

(5)若 $(a, b) = 1$, 则 $(b, ac) = (b, c)$.

(6)若 $(a, b) = 1, c|a$, 则 $(c, b) = 1$.

(7)若 $(a, b) = 1$, 则 $(a, b^k) = 1$.

(8)若 a_1, a_2, \cdots, a_m 中的每一个与 b_1, b_2, \cdots, b_n 中的每一个互质, 则 $(a_1 a_2 \cdots a_m, b_1 b_2 \cdots b_n) = 1$.

2. 欧拉函数

定义: 小于 m 且与 m 互质的正整数的个数叫做欧拉(Euler)函数, 记作 $\varphi(m)$.

若 $m = \prod_{i=1}^n p_i^{\alpha_i}$, 则 $\varphi(m) = m \prod_{i=1}^n \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)$.

其中 p_i 是质数, α_i 是正整数 ($i = 1, 2, \dots, n$).

当 m 为质数时, $\varphi(m) = m - 1$.

性质:

(1) $\varphi(m)$ 是积性函数, 即 $(a, b) = 1$, 则 $\varphi(a)\varphi(b) = \varphi(ab)$.

(2) 若 p 是质数, 则 $\varphi(p) = p - 1$, $\varphi(p^k) = p^k - p^{k-1}$.

(3) 设 $m = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$, 则 $\varphi(m) = m \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{p_k}\right)$.

(4) 设 $d_1, d_2, \dots, d_{T(m)}$ 是 m 的所有正约数, 则 $\sum_{i=1}^{T(m)} \varphi(d_i) = m$.

3. 欧拉定理和费马小定理

(1) 欧拉定理

设 $m \geq 2$, 且 $(a, m) = 1$, $\varphi(m)$ 为欧拉函数, 则 $a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$.

(2) 费马(Fermat)小定理

设 p 是质数, 且 $(a, p) = 1$, 则 $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.

注: 费马小定理是欧拉定理当 m 为质数时的特例.

4. 孙子定理

设 m_1, m_2, \dots, m_k 是 k 个两两互质的正整数. 则同余式组

$$x \equiv b_1 \pmod{m_1},$$

$$x \equiv b_2 \pmod{m_2},$$

.....

$$x \equiv b_k \pmod{m_k}$$

有唯一解 $x \equiv M'_1 M_1 b_1 + M'_2 M_2 b_2 + \cdots + M'_k M_k b_k \pmod{M}$.

其中 $M = m_1 m_2 \cdots m_k$, $M_i = \frac{M}{m_i}$, $i = 1, 2, \dots, k$, $M'_i M_i \equiv 1 \pmod{m_i}$, $i = 1, 2, \dots, k$.

注: 孙子定理又叫中国剩余定理.

7 奇数和偶数

1. 若一个整数能被2整除, 则这个整数叫偶数; 若一个整数被2除余1, 则这个整数叫奇数.

奇数集合和偶数集合都是以2为模的同余类.

2. 奇数个奇数的和(或差)是奇数, 偶数个奇数的和(或差)是偶数.

任意多个偶数的和(或差)为偶数.

一个奇数与一个偶数的和(或差)是奇数.

两个整数的和与差在相同的奇偶性.

3. 任意多个奇数的积是奇数.

若任意多个整数中至少有一个偶数, 则它们的积是偶数.

8 完全平方数

1. 若 a 是整数, 则 a^2 叫做 a 的完全平方数.

2. 完全平方数的个位数只能是0, 1, 4, 5, 6, 9.

3. 奇数的平方的十位数是偶数.

4. 个位数是5的平方数, 其十位数是2, 百位数是偶数.

5. 如果一个完全平方数的个位数是6, 那么它的十位数是奇数.

6. 偶数的平方能被4整除; 奇数的平方被4除余1.

7. 偶数的平方被8除余0或4; 奇数的平方被8除余1.

8. 若一个整数能被3整除, 则这个数的平方能被3整除; 若一个整数不能被3整除, 则这个数的平方被3除余1.

9. 若一个整数能被5整除, 则这个数的平方能被5整除; 若一个整数不能被5整除, 则这个数的平方被5除余+1或-1.

10. 把完全平方数的各位数码相加, 如果所得到的和不是一位数, 再把这个和的各位数码相加, 直到和是一位数为止, 这个一位数只能是0, 1, 4, 7, 9.

11. 两个相邻完全平方数之间不可能有完全平方数.

12. 完全平方数的所有正约数个数为奇数, 并且反过来也成立.

13. 如果质数 p 是一个完全平方数的约数, 那么 p^2 也是这个完全平方数的约数.

9 整数的可除性特征

1. 一个整数能被2整除的充分必要条件是这个数的个位数是偶数.

2. 一个整数能被4整除的充分必要条件是这个数的末两位数能被4整除.

3. 一个整数能被5整除的充分必要条件是这个数的个位数是0或5.

4. 一个整数能被3整除的充分必要条件是这个数的各位数字之和能被3整除.

5. 一个整数能被9整除的充分必要条件是这个数的各位数字之和能被9整除.

6. 一个整数能被11整除的充分必要条件是这个数的奇位数字之和与偶位数字之和的差能被11整除.

7. 一个整数能被 $10n - 1$ (n 为正整数)整除的充分必要条件是把这个数的个位数截去之后, 再加上这个个位数的 n 倍, 它的和能被 $10n - 1$ 整除, 即把 A 写成 $A = 10x + y$, $y \in \{0, 1, \dots, 9\}$, 则 $(10n - 1)|A \Leftrightarrow (10n - 1)|(x + ny)$.

由此可判断整数 A 能否被9, 19, 29, 39, \dots 整除.

8. 一个整数能被 $10n + 1$ (n 为正整数)整除的充分必要条件是把这个数的个位数截去之后, 再减去这个个位数的 n 倍, 它的差能被 $10n + 1$ 整除. 即把 A 写成 $A = 10x + y$, $y \in \{0, 1, \dots, 9\}$, 则 $(10n + 1)|A \Leftrightarrow (10n + 1)|(x - ny)$.

由此可判断整数 A 能否被11, 21, 31, 41, \dots 整除.

10 十进制记数法

1. 数 A 的十进制表示为 $A = \sum_{i=1}^n a_i 10^i$, 其中 $a_i \in \{0, 1, \dots, 9\}$, $i = 0, 1, \dots, n-1$, $a_n \in \{1, 2, \dots, 9\}$.

2. A 的 n 次幂的个位数等于 A 的个位数的 n 次幂的个位数, 即 $A^n \equiv a_0^n \pmod{10}$.

3. A^n 的个位数以4为周期循环出现.

4. A 与它的各位数字之和 $S(A) = \sum_{i=0}^n a_i$ 关于模9同余, 即 $A \equiv \sum_{i=0}^n a_i \pmod{9}$.

5. A 的各位数字之和 $S(A) = \sum_{i=0}^n a_i$ 满足 $S(A+B) \leq S(A) + S(B)$, $S(AB) \leq S(A)S(B)$.

6. 若 a 和 b 为任意非负整数, 则 $\frac{1}{2^a \times 5^b}$ 的小数展开式是有限的.

7. 若 $\frac{1}{n}$ 具有有限小数展开式, 则 $n = 2^a \times 5^b$, 其中 a, b 为非负整数.

8. 在 $\frac{1}{n}$ 的十进制小数展开式中, 循环节长不大于 $n-1$.

9. 若 $(n, 10) = 1$, 则 $\frac{1}{n}$ 的循环节长为 r , r 是满足 $10^r \equiv 1 \pmod{n}$ 的最小正整数.

11 k 进制记数法

1. 设 $k \geq 2$ 为任一整数(称为基), 则任一十进制整数 A 可唯一地用基 k 表示, 即可写成如下的形式: $A = d_0 + d_1 k + d_2 k^2 + \dots + d_n k^n = \sum_{i=0}^n d_i k^i$. 其中 $d_i \in \{0, 1, \dots, k-1\}$, $i = 0, 1, \dots, n-1$, $d_n \in \{1, 2, \dots, k-1\}$.

2. A 的 k 进制表示可记为 $A = (d_n d_{n-1} \dots d_1 d_0)_k$.

3. 设 B 为正的纯小数, 则 B 可以唯一地用基 k 表示, 即可写成如下的形式: $B = d_{-1} k^{-1} + d_{-2} k^{-2} + \dots + d_{-n} k^{-n} + \dots$ 其中 $d_{-i} \in \{0, 1, \dots, k-1\}$, $i = 1, 2, \dots, n, \dots$

注: 若 B 为有限小数, 则上式为有限项; 若 B 为无限小数, 则上式为无限项.

12 不定方程

1. 二元一次不定方程 $ax + by = c$

(1) 不定方程 $ax + by = c$ (a, b, c 为整数) 有整数解的充分必要条件是 $(a, b) | c$.

(2) 若 $(a, b) = 1$, 且 (x_0, y_0) 是不定方程 $ax + by = c$ 的一组整数解, 则 $x = x_0 + bt, y = y_0 - at$ (t 是整数) 是方程的全部整数解.

2. 不定方程 $x^2 + y^2 = z^2$ 的整数解

(1) 若 $x = a, y = b, z = c$ (a, b, c 为正整数) 是方程 $x^2 + y^2 = z^2$ 的一组解, 且 $(a, b) = 1$, 就称这组解为方程的一组基本解.

(2) 若 $x = a, y = b, z = c$ 为方程 $x^2 + y^2 = z^2$ 的一组基本解, 则 a 和 b 中恰有一个为偶数, c 为奇数.

(3) 设 $x = a, y = b, z = c$ 为方程 $x^2 + y^2 = z^2$ 的一组基本解, 且假定 a 是偶数, 则存在正整数 m 和 n , $m > n, (m, n) = 1$, 且 $m \not\equiv n \pmod{2}$, 使得 $a = 2mn, b = m^2 - n^2, c = m^2 + n^2$.

(4) 若 $a = 2mn, b = m^2 - n^2, c = m^2 + n^2$, 则 a, b, c 是 $x^2 + y^2 = z^2$ 的一组解; 如果还有 $m > n > 0, (m, n) = 1$ 和 $m \not\equiv n \pmod{2}$, 则 a, b, c 就是方程的一组基本解.

3. 佩尔(Pell)方程

(1) 方程 $x^2 - dy^2 = 1$ (d 为给定的正整数), 叫做佩尔方程.

(2) 无论 d 取什么值, $x = \pm 1, y = 0$ 是佩尔方程的解, 这组解称为佩尔方程的平凡解.

(3) 设 $d > 0$ 是一个非平方数, 则佩尔方程 $x^2 - dy^2 = 1$ 有无穷多个不同的整数解.

(4) 设 $n > 0, (x_1, y_1)$ 是佩尔方程 $x^2 - dy^2 = 1$ 的一个解, 又设 x_n 与 y_n 由下式定义 $(x_1 - \sqrt{d}y_1)^n = x_n + \sqrt{d}y_n$, 则 (x_n, y_n) 是佩尔方程 $x^2 - dy^2 = 1$ 的一个解.

13 整点

在平面直角坐标系中, 横、纵坐标均为整数的点叫做整点, 整点也叫格点. 类似地, 可定义空间直角坐标系中的整点.

1. 整点多边形的面积公式

顶点都在整点上的简单多边形(即不自交的多边形), 其面积为 S , 多边形内的整点数为 N , 多边形边上的整点数为 L , 则 $S = N + \frac{L}{2} - 1$.

2. 正方形内的整点

(1) 各边均平行于坐标轴的正方形, 如果内部不含整点, 它的面积最大是 1.

(2) 内部不含整点的正方形面积, 最大是 2.

(3) 内部只含一个整点的最大正方形面积是 4.

3. 圆内整点问题

设 $A(r)$ 表示区域 $x^2 + y^2 \leq r^2$ 上的整点数, r 是正实数, 则

$$A(r) = 1 + 4[r] + 4 \sum_{1 \leq s \leq r} [\sqrt{r^2 - s^2}]$$

$$\text{或 } A(r) = 1 + 4[r] + 8 \sum_{1 \leq s \leq \frac{r}{\sqrt{2}}} [\sqrt{r^2 - s^2}] - 4 \left[\frac{r}{\sqrt{2}} \right]^2.$$

其中, $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数.

此外, 当 r 充分大时, 区域 $x^2 + y^2 \leq r^2$ 上的格点数 $A(r)$ 接近于 πr .

4. 不存在整点正三角形.

5. 当 $n \geq 5$ 时, 不存在整点正 n 边形.

14 函数 $[x]$

1. 定义

设 $x \in \mathbf{R}$, 则 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数.

2. 函数 $[x]$ 的性质

(1) $y = [x]$ 的定义域为实数集 \mathbf{R} , 值域为整数集 \mathbf{Z} .

(2) $x = [x] + r$, $0 \leq r < 1$.

(3) $x - 1 < [x] \leq x < [x] + 1$.

(4) $y = [x]$ 是广义增函数, 即当 $x_1 \leq x_2$ 时, $[x_1] \leq [x_2]$ 成立.

(5) 设 $n \in \mathbf{Z}$, 则 $[n + x] = n + [x]$.

(6) $\left[\sum_{i=1}^n x_i \right] \geq \sum_{i=1}^n [x_i]$.

(7) 对正实数 x_1, x_2, \dots, x_n 有 $\left[\prod_{i=1}^n x_i \right] \geq \prod_{i=1}^n [x_i]$.

特别地, 对正数 x 及正整数 n 有 $[x^n] \geq [x]^n$, $[x] \geq [\sqrt[n]{x}]^n$.

(8) 对正实数 x, y 有 $\left[\frac{y}{x} \right] \leq \frac{[y]}{[x]}$.

(9) 设 n 为正整数, 则 $\left[\frac{x}{n} \right] = \left[\frac{[x]}{n} \right]$.

(10) 对整数 x , 有 $[-x] = -[x]$; 对非整数 x , 有 $[-x] = -[x] - 1$.

(11) 对正整数 m 和 n , 不大于 m 的 n 的倍数共有 $\left[\frac{m}{n} \right]$ 个.

(12) 函数 $\{x\}$ 定义为实数 x 的正的纯小数部分, 即 $\{x\} = x - [x]$.

$y = \{x\}$ 还有如下一些性质:

(i) $\{x\} \in [0, 1)$.

(ii) $\{x\}$ 是以1为最小正周期的周期函数.

(iii) $\{n+x\} = \{x\}$ (n 为整数).

(13) 设 $p \in \mathbf{N}$, 满足 $2^\lambda | (2^p)!$ 的 λ 的最大值为 $M = 2^p - 1$.

由(11)知 $M = \left\lfloor \frac{2^p}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2^p}{2^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2^p}{2^3} \right\rfloor + \cdots = 2^{p-1} + 2^{p-2} + \cdots + 2 + 1 = 2^p - 1$.

15 阶数与原根

1. 阶数定义

当 $(a, m) = 1$, 有最小正整数 λ , 使 $a^\lambda \equiv 1 \pmod{m}$, 且 $a^k \not\equiv 1 \pmod{m}$, $0 < k < m$, 则 λ 叫做 a 关于 m 的阶数.

由欧拉定理得 $\lambda \leq \varphi(m)$, $\lambda | \varphi(m)$.

2. 原根定义

如果 $\lambda = \varphi(m)$, 叫做 a 关于模 m 的阶数是 $\varphi(m)$, 此时, a 叫做 m 的原根.

3. 阶数 λ 的性质

(1) 如果 a 关于 m 的阶数是 λ , 那么 $a^0, a^1, \dots, a^{\lambda-1}$ 中, 任两数关于模 m 不同余.

(2) 若 λ 是关于 m 的阶数, 则满足 $a^t \equiv 1 \pmod{m}$ 的 t , 都有 $\lambda | t$.

几何部分

1 平面几何

1.1 三角形的性质

设 $\triangle ABC$ 的三边长分别为 a, b, c , 三个内角分别为 A, B, C , 内切圆、外接圆和三个旁切圆的半径分别为 r, R, r_1, r_2, r_3 , 半周长为 p , 三条高线长分别为 h_a, h_b, h_c , 三条中线长分别为 m_a, m_b, m_c , 三条角平分线长分别为 t_a, t_b, t_c , $\angle A$ 的外角平分线长为 t'_a , 边 BC 上的斜高为 h , 斜高与 BC 的夹角为 α , 面积为 S . 内心、外心、重心、垂心分别为 I, O, G, H , 三个旁心分别为 I_1, I_2, I_3 .

1.1.1 正弦定理

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R.$$

1.1.2 余弦定理

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A, b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B, c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C.$$

1. 1. 3 三角形的面积公式

$$(1) S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c;$$

$$(2) S = \frac{1}{2}ab \sin C = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2}ca \sin B = \frac{1}{2}ah \sin \alpha;$$

$$(3) S = \frac{abc}{4R} = 2R^2 \sin A \cdot \sin B \cdot \sin C = \frac{R^2}{2}(\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C);$$

$$(4) S = \frac{a^2 \sin B \cdot \sin C}{2 \sin(B+C)} = \frac{b^2 \sin C \cdot \sin A}{2 \sin(C+A)} = \frac{c^2 \sin A \cdot \sin B}{2 \sin(A+B)};$$

$$(5) \text{海伦(Heron)公式 } S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)};$$

$$(6) S = r^2 \left(\cot \frac{A}{2} + \cot \frac{B}{2} + \cot \frac{C}{2} \right);$$

$$(7) S = pr = (p-a)r_1 = (p-b)r_2 = (p-c)r_3.$$

1. 1. 4 若两个三角形相似, 则面积比等于相似比的平方; 若两个三角形有一条边相等, 则面积比等于对应边上高的比或斜高的比; 若两个三角形有一条高相等, 则面积比等于高对应的边的比.

$$1. 1. 5 \quad r = 4R \sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2};$$

$$r_1 = 4R \sin \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B}{2} \cdot \cos \frac{C}{2};$$

$$r_2 = 4R \cos \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \cos \frac{C}{2};$$

$$r_3 = 4R \cos \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2};$$

$$r_1 + r_2 + r_3 = r + 4R.$$

$$1. 1. 6 \quad \angle BIC = 90^\circ + \frac{\angle A}{2}, \angle CIA = 90^\circ + \frac{\angle B}{2}, \angle AIB = 90^\circ + \frac{\angle C}{2}, \angle BI_1C = 90^\circ - \frac{\angle A}{2}, \angle CI_2A = 90^\circ - \frac{\angle B}{2}, \angle AI_3B = 90^\circ - \frac{\angle C}{2}.$$

1. 1. 7 由顶点 A 、 B 、 C 引出的内切圆的切线长分别为 $p-a$ 、 $p-b$ 、 $p-c$; 所对角内的旁切圆的切线长为 p ; 点 B 、 C 到 $\angle A$ 内的旁切圆的切线长分别为 $p-c$ 、 $p-b$; 点 C 、 A 到 $\angle B$ 内的旁切圆的切线长分别为 $p-a$ 、 $p-c$; A 、 B 到 $\angle C$ 内的旁切圆的切线长分别为 $p-b$ 、 $p-a$.

1. 1. 8 若 AI 与 $\triangle ABC$ 的外接圆交于点 D , 则 $DI = DB = DC = DI_1$, 即 I 、 B 、 C 、 I_1 四点共圆, 圆心为 D ; 若在线段 AD 及其延长线上存在点 I' 、 I'_1 , 满足 $DI' = DB = DC = DI'_1$, 则 I' 、 I'_1 分别为 $\triangle ABC$ 的内心和 $\angle A$ 内的旁心.

$$1. 1. 9 \quad \angle BOC = 2\angle A, \angle COA = 2\angle B, \angle AOB = 2\angle C.$$

1. 1. 10 阿基米德(Archimedes)定理

三角形三条中线交于一点 G (重心), 且 G 到顶点的距离等于这个顶点向对边所作中线长的 $\frac{2}{3}$.

1. 1. 11 帕普斯(Pappus)定理(中线公式)

$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}, m_b = \frac{1}{2}\sqrt{2c^2 + 2a^2 - b^2}, m_c = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}.$$

$$1.1.12 \quad t_a = \frac{2}{b+c}\sqrt{bcp(p-a)}, t_b = \frac{2}{c+a}\sqrt{cap(p-b)}, t_c = \frac{2}{a+b}\sqrt{abp(p-c)}.$$

$$1.1.13 \quad t'_a = \frac{2}{|b-c|}\sqrt{bc(p-b)(p-c)}.$$

$$1.1.14 \quad \angle BHC = 180^\circ - \angle A, \angle CHA = 180^\circ - \angle B, \angle AHB = 180^\circ - \angle C.$$

1.1.15 锐角三角形的垂心是其垂足三角形的内心; 钝角三角形的垂心是其垂足三角形的旁心; 锐角三角形的三个顶点是其垂足三角形的旁心.

$$1.1.16 \quad \triangle BHC, \triangle CHA, \triangle AHB \text{ 的外接圆半径都等于 } R.$$

1.1.17 卡诺(Carnot)定理

$\triangle BHC, \triangle CHA, \triangle AHB$ 的垂心分别为 A, B, C .

$$1.1.18 \quad \text{设 } AH \text{ 交 } BC \text{ 于点 } D, \text{ 交 } \triangle ABC \text{ 的外接圆于点 } K, \text{ 则 } HD = DK.$$

$$1.1.19 \quad \text{设 } AH, BH, CH \text{ 分别交 } BC, CA, AB \text{ 于 } D, E, F, \text{ 则 } AH \cdot HD = BH \cdot HE = CH \cdot HF.$$

$$1.1.20 \quad \text{设边 } BC \text{ 的中点为 } L, \text{ 则 } AH \parallel OL, \text{ 且 } AH = 2OL = 2R \cos A.$$

1.2 多边形的性质

$$1.2.1 \quad n \text{ 边形内角和等于 } (n-2)\pi.$$

1.2.2 四边形面积公式

(1) 矩形

$$S = ab (a, b \text{ 分别为矩形的邻边的长});$$

(2) 平行四边形

$$S = ah = ab \sin \theta (a, b \text{ 分别为平行四边形的邻边的长, } \theta \text{ 是这两条边的夹角, } h \text{ 为底边 } a \text{ 上的高});$$

(3) 梯形

$$S = \frac{1}{2}(a+b)h (a, b \text{ 分别为上、下底的长, } h \text{ 为高});$$

(4) 任意四边形

$$S = \frac{1}{2}mn \sin \varphi (m, n \text{ 分别为两条对角线的长, } \varphi \text{ 为对角线的夹角});$$

(5) 贝利契纳德(Bretschneider)面积公式

$$S = \frac{1}{4}\sqrt{4m^2n^2 - (a^2 - b^2 + c^2 - d^2)^2} (m, n \text{ 分别为两条对角线的长, } a, b, c, d \text{ 为四条边的长});$$

(6) 圆内接四边形

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)} (p \text{ 为半周长, } a, b, c, d \text{ 为四条边的长});$$

(7)圆外切四边形

$$S = \sqrt{abcd} \sin \frac{A+C}{2} (a, b, c, d \text{ 为四条边的长});$$

(8)双心四边形(既有内切圆又有外接圆的四边形)

$$S = \sqrt{abcd} (a, b, c, d \text{ 为四条边的长}).$$

1.2.3 贝利契纳德关于四边形的余弦定理

设 a, b, c, d 为四条边的长, m, n 分别为两条对角线的长, 则有 $m^2n^2 = a^2c^2 + b^2d^2 - 2abcd \cos(A+C)$.

1.2.4 在周长一定的 n 边形的集合中, 正 n 边形的面积最大.

1.2.5 在周长一定的简单闭曲线的集合中, 圆的面积最大.

1.2.6 在面积一定的 n 边形的集合中, 正 n 边形的周长最小.

1.2.7 在面积一定的简单闭曲线的集合中, 圆的周长最小.

1.3 重要定理和极值

(1)梅涅劳斯(Menelaus)定理

一直线与 $\triangle ABC$ 的三边 BC, CA, AB 或延长线分别交于点 X, Y, Z . 则 $\frac{AZ}{ZB} \cdot \frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} = 1$.

(2)梅涅劳苦定理的逆定理

设 X, Y, Z 分别是 $\triangle ABC$ 的三边 BC, CA, AB 或延长线上的点. 若 $\frac{AZ}{ZB} \cdot \frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} = 1$, 则 X, Y, Z 三点共线(梅涅劳苦线).

(3)塞瓦(Ceva)定理

设 P 为 $\triangle ABC$ 内一点, 直线 AP, BP, CP 分别与边 BC, CA, AB 或交于点 D, E, F . 则 $\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1$.

(4)塞瓦定理的逆定理

设 D, E, F 分别是 $\triangle ABC$ 的三边 BC, CA, AB 上的点. 若 $\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1$, 则 AD, BE, CF 三线交于一点(塞瓦点).

(5)托勒密(Ptolemy)定理

若四边形 $ABCD$ 为圆内接四边形, 则有 $AB \cdot CD + BC \cdot DA = AC \cdot BD$.

(6)托勒密定理的逆定理

若四边形 $ABCD$ 满足 $AB \cdot CD + BC \cdot DA = AC \cdot BD$, 则四边形 $ABCD$ 为圆内接四边形.

(7)广义托勒密定理

在四边形 $ABCD$ 中, 有 $AB \cdot CD + BC \cdot DA \geq AC \cdot BD$, 等号成立的条件当且仅当四边形 $ABCD$ 为圆内接四边形.

(8)西姆松(Simson)定理

设 $\triangle ABC$ 外接圆上任意一点 P 在三边 BC 、 CA 、 AB 上的投影为 D 、 E 、 F . 则 D 、 E 、 F 在一条直线(西姆松线)上.

(9)西姆松定理的逆定理

设 $\triangle ABC$ 所在平面上一点 P 在三边 BC 、 CA 、 AB 上的投影为 D 、 E 、 F . 若 D 、 E 、 F 三点共线, 则 P 在 $\triangle ABC$ 的外接圆上.

(10)费马(Fermat)问题

到 $\triangle ABC$ 三顶点距离之和最小的点——费马点 F . 当 $\triangle ABC$ 的最大角小于 120° 时, 点 F 关于三边 BC 、 CA 、 AB 的张角均为 120° ; 当 $\triangle ABC$ 的最大角大于 120° 时, 点 F 即为最大角的顶点.

(11)到 $\triangle ABC$ 三顶点距离的平方和最小的点——重心 G .

卡诺(Carnot)定理 若 G 为 $\triangle ABC$ 的重心, P 为 $\triangle ABC$ 所在平面上任意一点, 则 $PA^2 + PB^2 + PC^2 = GA^2 + GB^2 + GC^2 + 3PG^2 \geq GA^2 + GB^2 + GC^2$;

莱布尼兹(Leibnitz)公式 若 G 为 $\triangle ABC$ 的重心, P 为 $\triangle ABC$ 所在平面上任意一点, 则 $PA^2 + PB^2 + PC^2 = 3PG^2 + \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2)$, 其中 a 、 b 、 c 分别为 $\triangle ABC$ 的三边边长.

(12) $\triangle ABC$ 内到三边距离之积最大的点——重心 G .

1. 4 几何变换

1. 4. 1 合同变换

在平面到其自身的映射下, 对于任意两点 A 、 B 及其像 A' 、 B' , 总有 $AB = A'B'$, 这个映射叫做合同变换.

(1)平移变换: 把图形 F 上的所有点都按一定方向移动一定距离 d , 形成图形 F' , 则由 F 到 F' 的变换叫做平移变换, 记为 $T(\boldsymbol{v})$, \boldsymbol{v} 表示有向线段, 说明平移的方向和平移的距离.

(2)旋转变换: 将平面图形 F 绕这平面内的一个定点 O 旋转一个定角 α (逆时针为正)而形成图形 F' , 把 F 变为 F' 的这种变换称为旋转变换, 记为 $R(O, \alpha)$.

当 $\alpha = \pi$ 时为半周旋转, 又叫中心反射或中心对称变换, 即点对称.

(3)对称变换(反射变换): 把平面图形 F 变到关于直线 l 成轴对称的图形 F' , 这样的变换叫做关于直线 l 的对称(反射)变换, 记为 $U(l)$.

1. 4. 2 相似变换

在平面到其自身的映射下, 对于任意两点 A 、 B 及其像 A' 、 B' , 如果总有 $A'B' = kAB(k > 0)$, 这个映射叫做相似变换.

(1)位似变换: 设 O 为一个定点, 对于图形 F 中的任意一点 P , 如果它的像 P' 在射线 OP (或反向延长线)上, 并且总有 $OP' = kOP(k \neq 0)$, 这种映射叫做以 O 为位似中心、 k 为位似比的位似变换, 记为 $H(O, k)$.

(2)位似旋转变换: 设 O 为一个定点, $k(k > 0)$ 为常数, θ 为有向角, 对于图形 F 中的任意一点 P , 射线 OP 绕点 O 旋转角 θ , 在射线上存在一点 P' , 有 $OP' = kOP$, 把由点 P 到 P' 点的变换叫做以点 O 为位似旋转中心、旋转角为 θ 、位似比为 k 的位似旋转变换, 记为 $S(O, \theta, k)$.

1. 4. 3 性质

(1)如果图形 F 到图形 F' 是一个平移变换, 则存在对称变换, 经过连续两次对称变换, 可使 F 变到 F' . 其中两对称轴 l_1 和 l_2 与平移方向垂直, 一轴的位置可以任意选定, 而另一轴与前一轴的距离等于对应点移动距离的一半.

(2)如果图形 F 到图形 F' 是一个旋转变换, 则存在对称变换, 经过连续两次对称变换, 可使 F 变到 F' . 其中两对称轴 l_1 和 l_2 通过旋转中心, 一轴的位置可以任意选定, 而另一轴与前一轴的夹角等于旋转角的一半.

(3)对于不同的旋转中心, 连续进行两次旋转变换 $R(O_1, \theta_1)$ 、 $R(O_2, \theta_2)$, 如果 $\theta_1 + \theta_2 \neq 2\pi$, 则可用一次旋转变换 $R(O, \theta_1 + \theta_2)$ 来代替, 旋转中心 O 是分别过 O_1 、 O_2 的直线 l 、 m 的交点, 其中 O_1O_2 与 l 的夹角为 $\frac{\theta_1}{2}$, m 与 O_1O_2 的夹角为 $\frac{\theta_2}{2}$.

(4)对于不同的位似中心, 连续进行两次位似变换 $H(O_1, k_1)$ 、 $H(O_2, k_2)$, 则可以用一次位似变换

$$H(O, k_1 k_2)$$

来代替, 位似中心 O 是任意一点 M 与经两次位似变换后的对应点 M'' 的连线和 O_1O_2 的交点 O .

1. 5 凸图形和覆盖

1. 5. 1 凸多边形: 如果一个多边形内部任意两点的连线也在这个多边形内部, 则称此多边形为凸多边形.

1. 5. 2 凸图形: 如果图形 F 内任意两点 A 、 B 的连线段上的每一点都在图形 F 内, 则称图形 F 为凸图形.

1. 5. 3 凸包: 包含点集 M 的最小凸图形称为点集 M 的凸包. 凸包实际上是一个包含点集 M 的最小凸多边形.

定理 有限点的凸包存在且唯一.

1. 5. 4 直径: 点集的直径是满足下面条件的一个正数 d :

点集中任意两点的距离都不超过 d , 而对于比 d 小的任何正数 d' , 点集中至少有两点的距离要超过 d' .

特别地, 对于有限点集和闭区域, 其直径就是任意两点间距离的最大值.

1.5.5 覆盖: 如果图形 F 的任何一点都属于 n 张纸片 G_1, G_2, \dots, G_n 中之一, 则称图形 F 被 G_1, G_2, \dots, G_n 覆盖; 如果无论怎样放置 G_1, G_2, \dots, G_n 都至少有 F 中的一个点不能被这 n 纸片中的任一个所包含, 则称 G_1, G_2, \dots, G_n 盖不住 F .

1.5.6 性质

(1) $F \subseteq F$.

(2) 若 $G_1 \subseteq G, G_2 \subseteq G_1$, 则 $G_2 \subseteq G$.

(3) 若 $G_1 \supseteq F, G_2 \supseteq F$, 则 $G_1 \cap G_2 \supseteq F$.

(4) 如果纸片 G 能覆盖区域 F , 则 $S(G) \geq S(F)$, 其中 $S(X)$ 代表区域 X 的面积, 下同.

1.5.7 重叠原理

(1) 两个凸 n 边形相似并且对应顶点依顺时针次序相同, 则其中边长较小的那个凸 n 边形纸片一定能被边长较大的那个覆盖;

(2) 如果能在平面上找到一点 O , 使得点集 F 中的每一点与 O 的距离都不超过某个定长 r , 则 F 必可被一个半径为 r 的圆纸片覆盖.

(3) A, B 为定点, α 为定角, 若点集 F 中的每一点 P 都在 AB 同侧, 且与 A, B 所成视角 $\angle APB \geq \alpha$, 则点集 F 能被以 AB 为弦、含定角 α 为弓形角的一个弓形纸片 G 所覆盖.

(4) 如果 G 与 F 都是平面区域, 且 $S(F) > S(G)$, 则 G 必不能覆盖 F .

(5) 一个直径为 d 的点集 F 不能被直径小于 d 的点集 G 所覆盖.

(6) 在长为1的线段上放置某些线段, 这些线段的长度之和大于1, 则这些线段中至少有两段是有公共点的.

(7) 如果在半径为1的圆上放置某些圆弧, 这些圆弧的长度之和大于 2π , 则这些圆弧中至少有两段具有公共点.

(8) 假定有 n 张纸片, 它们的面积分别是 S_1, S_2, \dots, S_n , 把它们嵌入到一个面积为 S 的平面区域中, 如果 $S_1 + S_2 + \dots + S_n > S$, 则至少有两张纸片发生重叠.

(9) 设面积为 S 的图形 G 中包含有图形 G_1, G_2, \dots, G_n , 它们的面积分别为 S_1, S_2, \dots, S_n . 如果图形 G 的每一点都至多被 G_i 中的 k 个所覆盖, 则 $S_1 + S_2 + \dots + S_n \leq kS$; 若 $S_1 + S_2 + \dots + S_n > kS$, 则 G 中至少存在一点被 $\{G_i\}$ 中的 $k+1$ 个所覆盖.

2 立体几何

2.1 多面角: 有公共端点并且任意三线不在同一平面内的 n 条射线, 以及相邻两条射线间的平面部分所组成的图形, 叫做多面角. 组成多面角的射线叫做多面角的棱, 这些射线的公共端点 S 叫做多面角的

顶点, 相邻两棱间的平面部分叫做多面角的面, 相邻两棱组成的角叫做多面角的面角, 相邻两个面组成的二面角叫做多面角的二面角. 三面角的两个面角的和大于第三个面角, 多面角各面角的和小于 360° .

2.2 欧拉(Euler)定理: 若简单多面体的顶点数为 V , 面数为 F , 棱数为 E , 则有 $V + F - E = 2$.

3 解析几何

3.1 直线方程

(1)法线式: $x \cos \alpha + y \sin \alpha = p$, 其中 p 为由原点向直线所引的垂线长, α 为该垂线与 x 轴正向所成的角.

(2)极坐标方程: $r(a \cos \theta + b \sin \theta) - c = 0$, 其中 $a = \cos \alpha$, $b = \sin \alpha$, $c = p$, p 为由原点向直线所引的垂线长, α 为该垂线与 x 轴正向所成的角.

(3)直线束(或直线系)方程: 已知两条直线的方程分别为 $l_1 = 0$, $l_2 = 0$, 则过这两条直线的交点或与这两条直线都平行的所有直线方程为 $\lambda l_1 + \mu l_2 = 0$.

3.2 三角形的面积公式: 设三角形的三个顶点的坐标按逆时针排列的顺序分别为

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3),$$

$$\text{则该三角形的面积为 } S = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

3.3 圆锥曲线的切线和法线

(1)过圆 $x^2 + y^2 = R^2$ 上一点 (x_0, y_0) 的切线方程为

$$x_0 x + y_0 y = R^2;$$

过圆 $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$ 上一点 (x_0, y_0) 的切线方程为

$$(x_0 - a)(x - a) + (y_0 - b)(y - b) = R^2.$$

(2)过抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 上一点 (x_0, y_0) 的切线方程、法线方程分别为

$$\frac{y + y_0}{2} = ax_0 x + \frac{b(x + x_0)}{2} + c; \quad y - y_0 = -\frac{1}{2ax_0 + b}(x - x_0).$$

(3)过椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 上一点 (x_0, y_0) 的切线方程、法线方程分别为

$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1; \quad \frac{a^2 x}{x_0} - \frac{b^2 y}{y_0} = a^2 - b^2.$$

(4)过双曲线上一点 (x_0, y_0) 的切线方程、法线方程分别为

$$\frac{x_0x}{a^2} - \frac{y_0y}{b^2} = 1; \quad \frac{a^2x}{x_0} + \frac{b^2y}{y_0} = a^2 + b^2.$$

3.4 圆的幂和根轴

(1)以 $O(a, b)$ 为圆心, 半径为 R 的圆的方程为 $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$, 点 $P(x_1, y_1)$ 关于圆 O 的圆幂为 $PO^2 - R^2 = (x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2 - R^2$.

(2)关于两个圆的等幂的点的轨迹称为这两个圆的根轴(或等幂轴), 根轴是一条垂直于两个圆的连心线的直线.

若已知两个圆的方程为 $C_1 = 0, C_2 = 0$, 且二次项的系数为1, 则关于这两个圆的根轴为 $C_1 - C_2 = 0$.

组合部分

1 排列与组合

1.1 加法原理与乘法原理

加法原理 做一件事, 完成它可以分成 n 类方法, 在第一类办法中有 m_1 种不同的方法, 在第二类办法中有 m_2 种不同的方法, \dots , 在第 n 类办法中有 m_n 种不同的方法, 则完成这件事共有 $m_1 + m_2 + \dots + m_n$ 种不同的方法.

乘法原理 做一件事, 完成它需要分成 n 个步骤, 做第一步有 m_1 种不同的方法, 做第二步有 m_2 种不同的方法, \dots , 做第 n 步有 m_n 种不同的方法, 则完成这件事共有 $m_1 \times m_2 \times \dots \times m_n$ 种不同的方法.

1.2 排列与组合

1.2.1 排列

(1)无重排列 从 n 个不同元素中有序且不重复地选取 $k(1 \leq k \leq n)$ 个元素, 称为从 n 个不同元素中取出 k 个元素的一个无重排列, 简称为 k -排列. 所有这样的排列个数记作 A_n^k , $A_n^k = n(n-1)\dots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$.

当 $k = n$ 时, 得到 n 个不同元素的全排列公式 $A_n^n = n(n-1)\dots 2 \cdot 1 = n!$.

(2)重复排列 从 n 个不同元素中有序且可重复地选取 $k(k \geq 1)$ 个元素, 称为从 n 个不同元素的一个 k -可重排列. 所有这样的排列数为 n^k .

(3)不全相异元素的全排列 设 n 个元素可分为 k 个组, 同一组的元素彼此相同, 不同组间的元素不相同. 设 k 个组的元素个数依次为 $n_1, n_2, \dots, n_k(n_1 + n_2 + \dots + n_k = n)$, 则这 n 个元素的全排列称为不全相异元素的全排列, 其排列数为 $\frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_k!}$.

(4)圆周排列 从 n 个不同元素中(无重复地)取出 $k(1 \leq k \leq n)$ 个元素排在一个圆周上, 称为 n 个不同元素的一个 k -圆排列. 如果一个 k -圆排列旋转可以得到另一个 k -圆排列, 则认为这两个圆周排列相同. n 个不同元素的 k -圆排列数为

$$\frac{A_n^k}{k} = \frac{n!}{k \cdot (n-k)!}.$$

特别地, 当 $k = n$ 时, n 个不同元素组成的圆周排列的总数为 $(n-1)!$.

(5)错位排列 集合 $\{1, 2, \dots, n\}$ 的一个排列 $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ 中, 如果 $a_i \neq i, i = 1, 2, \dots, n$, 则称这种排列为一个错位排列(也称更列). 错位排列的个数为

$$D_n = n! \left[1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \dots + (-1)^n \frac{1}{n!} \right].$$

1.2.2 组合

(1)无重组合 从 n 个不同元素中无序且不重复地选取 $k(1 \leq k \leq n)$ 个元素, 称为 n 个不同元素中取出 k 个元素的一个(无重)组合, 简称为 k -组合. 所有这样的组合数记作 C_n^k , 则

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

(2)重复组合 从 n 个不同元素中无序但可重复地选取 $k(k \geq 1)$ 个元素, 称为 n 个不同元素的一个 k -可重组合. n 个不同元素的一个 k -可重组合数为 C_{n+k-1}^k .

(3)不定方程 $x_1 + x_2 + \dots + x_n = m$ 的正整数解 (x_1, x_2, \dots, x_n) 的个数为 C_{m-1}^{n-1} .

(4)不定方程 $x_1 + x_2 + \dots + x_n = m$ 的非负整数解 (x_1, x_2, \dots, x_n) 的个数为 C_{m+n-1}^m .

1.3 组合恒等式

$$(1) C_n^r = C_n^{n-r};$$

$$(2) C_n^r + C_n^{r+1} = C_{n+1}^{r+1};$$

$$(3) C_n^r = \frac{n}{r} C_{n-1}^{r-1};$$

$$(4) C_n^r C_r^m = C_n^m C_{n-m}^{r-m};$$

$$(5) C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n = 2^n;$$

$$(6) C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + \dots + (-1)^n C_n^n = 0;$$

$$(7) C_n^0 + C_{n+1}^1 + C_{n+2}^2 + \dots + C_{n+k}^k = C_{n+k+1}^k;$$

$$(8) \text{范德蒙恒等式 } C_m^0 C_n^k + C_m^1 C_n^{k-1} + C_m^2 C_n^{k-2} + \dots + C_m^k C_n^0 = C_{m+n}^k.$$

2 对应与计数

一一对应 设 A 、 B 是两个有限集合, f 是 A 到 B 的一个映射. 如果 f 既是单射, 又是满射, 那么, 称 f 为一一对应(或双射).

如果两个集合 A 和 B 之间存在一个一一对应 f , 那么, 集合 A 和 B 的元素个数相等, 即 $|A| = |B|$.

设 A 、 B 是两个有限集合, f 是 A 到 B 的一个映射. 如果 f 是单射, 那么, $|A| \leq |B|$.

设 A 、 B 是两个有限集合, f 是 A 到 B 的一个映射. 如果 f 是满射, 那么, $|A| \geq |B|$.

容斥原理 设 S_1, S_2, \dots, S_n 是个集合, 则

$$\begin{aligned} & |S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_n| \\ &= \sum_{1 \leq i \leq n} |S_i| - \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} |S_{i_1} \cap S_{i_2}| + \dots + (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} |S_{i_1} \cap \dots \cap S_{i_k}| + \dots + (-1)^{n-1} |S_1 \cap \dots \cap S_n|. \end{aligned}$$

容斥原理的对偶形式: 设 S_1, S_2, \dots, S_n 是 S 的子集, 则

$$\begin{aligned} & |\overline{S_1} \cap \overline{S_2} \cap \dots \cap \overline{S_n}| \\ &= |S| - \sum_{1 \leq i \leq n} |S_i| + \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} |S_{i_1} \cap S_{i_2}| - \dots + (-1)^k \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} |S_{i_1} \cap \dots \cap S_{i_k}| + \dots + (-1)^n |S_1 \cap \dots \cap S_n|. \end{aligned}$$

夫妇入座问题 $n(n \geq 3)$ 对夫妇围圆桌就坐, 男女交错, 且夫妇不相邻的坐法为

$$\sum (-1)^r \frac{2n}{2n-r} C_{2n-r}^r (n-r)! = n! - \frac{2n}{2n-1} C_{2n-1}^1 (n-1)! + \frac{2n}{2n-2} C_{2n-2}^2 (n-2)! - \dots + 2(-1)^n.$$

装错信封问题 $n(n \geq 3)$ 封信, 各配一个信封全部装错的个数为

$$D_n = n! \left[1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \dots + (-1)^n \frac{1}{n!} \right].$$

卡特兰(Catalan)数之一 一个售货亭前排队着 $2n$ 个人等候购物. 假定他们都购买价值五元的同一货物, 其中 n 个人持整张的5元钱, n 个人持整张的10元钱, 而售货员开始时没有零钱可找. 则有

$$\frac{1}{n+1} C_{2n}^n$$

种排队方法, 可使售货员能依次顺利出售货物, 而不出现找钱找不出钱的尴尬局面.

卡特兰数之二 用在凸 n 边形内部互不相交的对角线将凸 n 边形分成 $n-2$ 个三角形的剖分种数为

$$\frac{1}{n-1} C_{2n-4}^{n-2}.$$

卡特兰数之三 $2n$ 个点均匀分布在一圆周上, 能用 n 条互不相交的弦两两配对的方法数为

$$\frac{1}{n+1} C_{2n}^n.$$

福比尼(Fubini)原理 设 $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$, $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$, $S \subseteq A \times B$, 记

$$S(a_i, \cdot) = \{(a_i, b) \in S | b \in B, S(\cdot, b_j) = \{(a, b_j) \in S | a \in A\}.$$

则

$$|S| = \sum_{a \in A} |S(a, \cdot)| = \sum_{b \in B} |S(\cdot, b)|.$$

3 抽屉原理

抽屉原理1 如果把 $n+1$ 件东西任意放入 n 个抽屉, 那么, 必定有一个抽屉里至少有两件东西.

抽屉原理2 如果把 m 件东西任意放入 n 个抽屉, 那么, 必定有一个抽屉里至少有 k 件东西, 这里

$$k = \begin{cases} \frac{m}{n}, & \text{当 } m \text{ 是 } n \text{ 的倍数时;} \\ \left[\frac{m}{n} \right] + 1, & \text{当 } m \text{ 不是 } n \text{ 的倍数时.} \end{cases}$$

其中, $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数.

抽屉原理3 如果把无穷多个东西放入 n 个抽屉, 那么, 至少有一个抽屉里有无穷多个东西.

Erdős-Szekeres定理 任意给定由 k 个互不相等的实数 a_1, a_2, \dots, a_k 所组成的数列, 其中 $k > mn$ (m, n, k 均为正整数). 如果其中每一个递减子数列至多含 m 项, 那么, 一定存在由多于 n 项所组成的上升子数列.

4 极端原理

最小数原理1 设 M 是正整数集合的一个非空子集, 则 M 中必有最小数.

最小数原理2 设 M 是实数集的一个有限的非空子集, 则 M 中必有最小数.

最大数原理 设 M 是实数集的一个有限的非空子集, 则 M 中必有最大数.

5 母函数

5.1 介绍

母函数也叫生成函数, 它的基本思想很巧妙, 即为了获得一个数列 $\{a_k\}$, 就用一个幂级数

$$g(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$$

来整体地、形式地表示这个数列(当然有时是有限项). 而 $g(x)$ 又是可以通过其他途径求得简单的有限项的表达式; 或是通过建立若干母函数之间的运算(通常是乘积), 赋予其明显的计数意义, 然后再计算结果展开求其系数.

母函数提供了一种“桥梁作用”，它把一种困难的计算转化成等价的然而却简单不少的计算.

设 a_0, a_1, a_2, \dots 是一个数列, 称级数 $g(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$ 为给定数列的母函数.

5.2 几个常用的级数展开式

$$(1) \frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{+\infty} x^k, |x| < 1;$$

$$(2) \frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k x^k, |x| < 1;$$

$$(3) (1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{+\infty} C_\alpha^n x^n, \alpha \in \mathbf{R}, \text{ 其中 } C_\alpha^n = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}, \text{ 规定 } C_\alpha^0 = 1.$$

6 图论

6.1 图的基本概念

由若干个不同的顶点与连接其中某些顶点的线段(称为边)所组成的图形称为图. 通常用 G 表示图, 且 V 表示所有顶点的集合, E 表示所有边的集合, 并且记成 $G(V, E)$. 图 G 中顶点的个数 $|V|$ 称为图 G 的阶. 当 $|V|$ 和 $|E|$ 都是有限的, 称为有限图.

如无特别说明, 一般的图都是无向的简单图(即不含多重边和点与自身相连的环的有限图). 若一个图中某两点之间连了一条边, 则称这两点是相邻的, 否则就是不相邻的.

在一个简单图中, 每一点 v 出发的边的条数 k 称为该点的度, 记作 $\deg v = k$, k 分别等于0、1时, 称 v 为孤立点、悬挂点(或端点); 度为偶(奇)数的点称为偶(奇)顶点. 如果一个简单图的全部 n 个点中任何两点间恰好连有一条边, 那么, 称该图为完全图, 记为 K_n , 此处显然有 $|E| = \frac{1}{2}n(n-1)$.

如果一图中每一点的度正好都是 r , 那么, 称图 G 是 r 正则图(一般如无特别说明, 便称 G 为正则图), 此时, 可记为 $\deg G = r$.

显然, 若 G 是完全图 K_n , 则 $\deg G = n-1$.

欧拉定理 一个图 G 中各个顶点的度之和是其边数的2倍.

由此可知:

(1) 每一个图中奇顶点的个数是偶数.

(2) 一定各有一顶点的度 $\geq (\leq) \frac{2 \times \text{边数}}{\text{顶点数}}$.

在图 G 中, 一个由不同的边组成的序列: e_1, e_2, \dots, e_m , 如果其中边 $e_i = (v_{i-1}, v_i) (i = 1, 2, \dots, m)$, 则称这个序列是从 v_0 到 v_m 的链. 数 m 称为这条链的长度, v_0 与 v_m 称为这条链的端点, 这条链记为 $v_0 v_1 \cdots v_m$.

图 G 中任何两个顶点 u 和 v 之间的最短长度, 称为它们的距离, 记为 $d(u, v)$. 显然, 距离满足非负性、对称性和三角不等式.

一个图中所有的距离中的最大值, 称为此图的直径. 完全图的直径是1.

如果图 G 中任意两个顶点 u 和 v , 都有一条从 u 到 v 的链, 称这个图是连通图. 不连通的图中, 每一个连通的子图称为一个支.

设 $v_0v_1\cdots v_m$ 是一条链, 若 v_0 与 v_m 重合, 则称这条链为一个圈, 同样可以定义圈的“长度”.

如果图 G 中存在一条链, 它经过图上各顶点一次且仅仅一次, 则称这条链为哈密顿链; 如果这种链是一个圈, 则叫作哈密顿圈.

定理1 若一个图中每一点的度都不小于2, 则该图必定有圈.

定理2 G 是一个 $n(n \geq 3)$ 阶简单图. 若对每一对不相邻的顶点 u, v , 都有 $d(u) + d(v) \geq n - 1$, 则 G 有哈密顿链.

定理3(Ore) G 是一个 $n(n \geq 3)$ 阶简单图. 若对每一对不相邻的顶点 u, v , 都有 $d(u) + d(v) \geq n$, 则 G 必有哈密顿圈.

定理4(Ore) G 是一个有 n 个顶点、 m 条边的简单图. 若 $n \geq 3, m \geq \frac{1}{2}(n^2 - 3n + 6)$, 则图 G 必有哈密顿圈.

定理5(Dirac) G 是一个 $n(n \geq 3)$ 阶简单图, 若对每一个顶点 u , 都有 $d(u) \geq \frac{n}{2}$, 则图 G 一定存在哈密顿圈.

定理6(Pósa) G 是一个 $n(n \geq 3)$ 阶简单图. 若对每一个 $m, 1 \leq m < \frac{1}{2}(n - 1)$, 度不超过 m 的点的个数少于 m , 且若对奇数的 n , 度至多等于 $\frac{1}{2}(n - 1)$ 的点的数目不超过 $\frac{1}{2}(n - 1)$, 则 G 有哈密顿圈.

无圈的连通图称为树. 若干棵树组成一森林.

定理7 树的顶点数=边数+1, 且至少有两个悬挂点(度为1的顶点).

树可称为最小的连通图, 因为边数减去1, 图就不连通了; 而边数增加1, 就会有圈出现. 由此可见, 树是研究图论问题的一个较好的出发点.

定理8 一个图是树, 当且仅当任何两个顶点之间恰好存在一条道路(链).

如果一个图 G 中可以找到一条链或通道正好通过每条边一次, 则称这个图为欧拉图, 也就是能够一笔画的图.

欧拉一笔画定理 有限图 G 可一笔画的充要条件是: G 连通, 并且奇顶点的个数为0或2, 当且仅当奇顶点的个数为0时, G 的一笔链是一个圈.

此外, 图的可平面性, 也是一个值得一提的内容.

如果一个图及其一切与之同构的图中, 至少有一个能画在平面上使得它的边仅在端点处相交, 则称这个图为平面图. 这个平面图的边把图分成若干块不连通的区域.

定理9(欧拉定理的平面形式) 如果一个连通平面图 G 有 v 个顶点、 e 条边、 f 个区域, 则 $v - e + f = 2$ (若整个图外部那个唯一的无界面也算一块区域的话, 否则 $v - e + f = 1$).

定理10 一个连通的平面简单图 G 有 $v(v \geq 3)$ 个顶点、 e 条边, 则 $e \leq 3v - 6$.

两个图 G_1 、 G_2 称为同构的, 如果它们的顶点数相同, 而且存在一个一一映射 $f: G_1 \rightarrow G_2$, 使得 G_1 中的任意两个顶点 A 、 B , 它们相邻或不相邻, 当且仅当 $f(A)$ 、 $f(B)$ 相邻或不相邻.

如果两个图共用一些顶点, 而它们的边集合不相交, 两图之并又是一个完全图, 则称这两个图中的每一个是另一个图的补图. 如果一个图与它的补图同构, 则称其为自补图.

6.2 拉姆赛(Ramsey)定理

拉姆赛定理最普及的说法是:

世界上任意六个人中, 必有三个人, 两两认识或两两不认识.

用 k 种颜色 c_1, c_2, \dots, c_k 去染完全图 K_n 的边, 每条边只染其中一种颜色, 这样得到的完全图 K_n 称为 k 色完全图 K_n .

定理1 2色完全图 K_6 中, 至少有2个同色三角形.

定理2 3色完全图 K_{17} 中至少有3个同色三角形.

当 n 充分大时, k 色完全图 K_n 中必然会出现同色三角形, 使得每一个 k 色完全图 K_n 都含有同色三角形的最小 n 记为 r_k , 称为拉姆赛数.

定理3 (1)对每个正整数 $k(k \geq 2)$, 拉姆赛数 r_k 存在, 并且 $r_k \leq (r_{k-1} - 1) + 2$;

(2)对一切正整数 k , 都有 $r_k \leq 1 + 1 + k + (k - 1) + \dots + \frac{k!}{2!} + \frac{k!}{1!} + k!$.

设完全图 K_n 的每条边被染为红、蓝两色, 对固定的正整数 p, q , 当 n 充分大时, 2色完全图 K_n 中就必然会出现红色 K_p , 或者蓝色 K_q . 把满足上述性质的最小 n 记为 $r(p, q)$, $r(p, q)$ 也称为拉姆赛数.

定理4(Erdős) 当 $p \geq 2, q \geq 2$ 时, 拉姆赛数满足: $r(p, q) \leq r(p - 1, q) + r(p, q - 1)$.

定理5(Erdős-Szekeres) 当 $p \geq 2, q \geq 2$ 时, $r(p, q) \leq C_{p+q-2}^{p-1}$.

许尔(Schur)定理 对任意给定的正整数 k , 存在数 n_0 , 使得只要 $n \geq n_0$, 则将 $\{1, 2, \dots, n\}$ 任意 k 染色后, 必有同色的 $x, y, z \in \{1, 2, \dots, n\}$, 满足 $x + y = z$. 这里 x, y 不一定不同.

6.3 极图理论

定理1(Turán) n 个点的图中若无三角形, 则其最多含有 $\left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$ 条边.

定理2(Erdős) 图 G 有 $n(n \geq 5)$ 个顶点, $n + 4$ 条边, 则图 G 中含有两个无公共边的圈.

定理3 当 $n \geq 6$ 时, n 个顶点, $3n - 5$ 条边的图 G 中含有两个不相交的圈.

定理4 n 个点的图中若无长度为 n 的圈, 则其最多含有 $1 + \frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ 条边.

定理5(Mantel) 图 G 有 n 个顶点, m 条边, 则图 G 中至少有 $\frac{4m}{3n} \left(m - \frac{n^2}{4} \right)$ 个三角形.

定理6 设图 G 有 $n(n > 5)$ 个顶点, 则 G 中的三角形个数与 G 的补图中的三角形个数的和不少于 $\frac{1}{24}n(n-1)(n-5)$.

代数部分

1 集合

1.1 集合、元素、交集、并集、补集、空集、集合相等

1.2 差集

集合 A 和 B 的差集 $A \setminus B$ 是集合 A 的子集, 差集定义为 $A \setminus B = \{x | x \in A \text{ 且 } x \notin B\}$. $A \setminus B$ 也可记为 $A - B$.

如果 $B \subseteq A$, 则 $A \setminus B = \complement_A B$.

1.3 积集(也叫直积)

集合 $A \times B$ 叫做集合 A 和 B 的直积(也叫积集).

直积定义为 $A \times B = \{(x, y) | x \in A, y \in B\}$.

1.4 对称差集

定义 $(A - B) \cup (B - A)$ 为 A 、 B 的对称差集, 记为 $A \triangle B$, 即 $A \triangle B = (A - B) \cup (B - A) = \{x | x \in A \text{ 或 } x \in B, \text{ 但 } x \notin A \cap B\}$.

$A \triangle B$ 可用韦恩图表示, 即图1中的阴影部分.

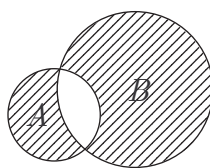


图 1

1.5 摩尔根法则

设 I 为全集, $A \subseteq I, B \subseteq I$. 则 $\complement_I(A \cup B) = (\complement_I A) \cap (\complement_I B)$, $\complement_I(A \cap B) = (\complement_I A) \cup (\complement_I B)$.

1.6 集合的并、交、差、对称差的运算关系

- (1) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;
- (2) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;
- (3) $(A - B) \cap C = (A \cap C) - (B \cap C)$;
- (4) $(A - B) - C = A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$;
- (5) $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$;
- (6) $C \cap (A \triangle B) = (C \cap A) \triangle (C \cap B)$;
- (7) $A \cup (A \triangle B) = A \cup B$.

1.7 有限集的子集个数

n 元集合有 2^n 个子集.

1.8 数集的最小数原理

原理1 设 M 是自然数集的一个非空子集, 则 M 中必有最小数.

原理2 设 M 是实数集的一个有限非空子集, 则 M 中必有最小数, 也必有最大数.

1.9 有限集合 A 的元素的个数叫做该集合的阶, 记为 $\text{Card}A$ (或 $|A|$, 或 $n(A)$).

1.10 容斥原理

设集合 $A = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_m$. 则有

$$|A| = \sum_{1 \leq i \leq m} |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq m} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \leq i < j < k \leq m} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \cdots + (-1)^{m-1} |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_m|.$$

当 A_1, A_2, \cdots, A_m 两两不相交时, 则是加法公式 $|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_m| = |A_1| + |A_2| + \cdots + |A_m|$.

1.11 子集类

1.11.1 C 类

设 Q 是一个 n 阶集合, 记作 $Q = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$.

由 Q 的所有子集构成的子集类叫做 C 类, 即 C 类包括了 Q 的所有子集: $A_1, A_2, \cdots, A_{2^n}$. 记作 $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \cdots, A_{2^n}\}$.

可以将 Q 和 C 类 \mathcal{A} 中的元素排成一类, 使得每两个相邻者的元素都仅差1个.

1.11.2 R 类

设 Q 是一个 n 阶集合, $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \cdots, A_k\}$ 是它的一个子集类. 如果对某个 $2 \leq r \leq k-1$, 有

- (1) $A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_r} \neq \emptyset$, 其中 $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_r \leq k$;
- (2) $A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_r} \cap A_{i_{r+1}} = \emptyset$, 其中 $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_{r+1} \leq k$.

则称 \mathcal{A} 是 Q 的一个指数为 r 的 R 类.

R 类的每个子集的阶数不小于 C_{k-1}^{r-1} .

1. 11. 3 K 类

设 Q 是一个 n 阶集合, $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \dots, A_k\}$ 是它的一个子集类. 如果 \mathcal{A} 中的任何两个不同子集 A_i, A_j 都有 $A_i \not\subset A_j$, 且 $A_j \not\subset A_i$, 则称 \mathcal{A} 是一个 K 类.

n 阶集合 Q 的 K 类中, 阶数最高者为 $C_n^{\lceil \frac{n}{2} \rceil}$ 阶.

2 函数

2. 1 函数的值域(或最值)的求法

求函数的值域可利用函数的单调性或配方法、判别式法、反求法、换元法、不等式法、图像法、导数法等.

2. 2 函数的性质

2. 2. 1 有界性

设 D 为函数 $f(x)$ 定义域的子集. 若存在常数 M , 使对所有的 $x \in D$, 有 $f(x) \leq M$ (或 $f(x) \geq M$), 则称 $f(x)$ 在 D 上有上(或下)界, 并称 M 为其一个上(或下)界.

若 $f(x)$ 在 D 上既有上界又有下界, 则称 $f(x)$ 为 D 上的有界函数.

对有界函数, 必存在正数 M , 使对所有的 $x \in D$, 恒有 $|f(x)| \leq M$.

在 $f(x)$ 的所有上界中, 若存在一个最小的, 则这个最小上界为 $f(x)$ 在 D 上的上确界, 记作 $\sup(f(x))$.

在 $f(x)$ 的所有下界中, 若存在一个最大的, 则这个最大下界为 $f(x)$ 在 D 上的下确界, 记作 $\inf(f(x))$.

如函数 $y = ax^2 + bx + c$, 当 $a > 0$ 时, 有下界, 且下确界为 $\frac{4ac - b^2}{4a}$; 当 $a < 0$ 时, 有上界, 且上确界为 $\frac{4ac - b^2}{4a}$.

又如 $y = \sin x$ 与 $y = \cos x$ 为有界函数, 其上、下界为 ± 1 .

2. 2. 2 单调性

设 D 为函数 $f(x)$ 定义域的一个子区间, 对任意 $x_1, x_2 \in D$, 且 $x_1 < x_2$.

若 $f(x_1) < f(x_2)$, 则称 $f(x)$ 是 D 上的(严格)增函数;

若 $f(x_1) > f(x_2)$, 则称 $f(x)$ 是 D 上的(严格)减函数.

关于函数的单调性有如下规律:

(1)若函数 $y = f(x)$ 在区间 D 上单调递增(减), 且 D 上的值域为 E , 则 $y = f(x)$ 在 D 上必有反函数 $y = f^{-1}(x)$, 且反函数在 E 上也单调递增(减).

(2) 设 $f(x)$ 、 $g(x)$ 在集合 D 上有相同的单调性, 则

(i) $f(x) + g(x)$ 是单调函数, 且与 $f(x)$ 、 $g(x)$ 的单调性相同;

(ii) 若 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 D 上恒为正(或恒为负), 则 $f(x)g(x)$ 是单调函数, 且与 $f(x)$ 、 $g(x)$ 的单调性相同(或相反).

(3) 复合函数的单调性. 若函数 $u = g(x)$ 在 D_g 上有定义, 且为单调函数, $y = f(u)$ 在 D_f 上有定义且为单调函数, $g(x)$ 的值域为 G , 且 $G \cap D_f \neq \emptyset$, 则当 $u = g(x)$ 与 $y = f(u)$ 的增减性相同(或相反)时, 复合函数 $y = f(g(x))$ 在定义域上是增(减)函数.

一般地, 若讨论的复合函数是有限层的, 且每层均有意义, 并且是单调的, 则其中减函数的层数为偶数时, 复合函数是增函数, 减函数的层数为奇数时, 复合函数是减函数.

(4) 判断单调性的方法有定义法、图像法, 对可导函数可用求导数法.

(5) 在数学竞赛中, 函数的单调性通常用来讨论函数值的大小, 解方程、不等式或极值问题, 也用来解决参数范围问题.

2.2.3 对称性

(1) 函数的奇偶性: 设函数 $f(x)$ 的定义域 D 是关于原点对称的集合. 若对所有的 $x \in D$, 有 $f(-x) = f(x)$, 则称 $f(x)$ 为偶函数; $f(-x) = -f(x)$, 则称 $f(x)$ 为奇函数.

偶函数的图像关于 y 轴($x = 0$)对称; 奇函数的图像关于原点($(0, 0)$ 对称).

(2) 广义偶(奇)函数: 对于定义在实数集 \mathbf{R} 上的函数, 若存在常数 a , 使得 $f(a+x) = f(a-x)$, 则称 $f(x)$ 为广义偶函数; $f(a+x) = -f(a-x)$, 则称 $f(x)$ 为广义奇函数.

广义偶函数的图像关于直线 $x = a$ 成轴对称; 广义奇函数的图像关于点 $(a, 0)$ 成中心对称.

(3) 关于对称性有下列性质:

(i) 任一定义在 \mathbf{R} 上的函数 $f(x)$, 总能表示为一个奇函数 $g(x)$ 与一个偶函数 $h(x)$ 的和, 即 $f(x) = g(x) + h(x)$, 其中, $g(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$, $h(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}$.

(ii) $f(a+x) = f(a-x)$ 也可表示为 $f(x) = f(2a-x)$ 或 $f(-x) = f(2a+x)$;

$f(a+x) = -f(a-x)$ 也可表示为 $f(x) = -f(2a-x)$ 或 $f(-x) = -f(2a+x)$.

(iii) 若将函数 $f(x)$ ($x \in \mathbf{R}$) 的图像关于直线 $x = a$ 对称得到 $F(x)$ 的图像, 则 $F(x)$ 的表达式为 $F(x) = f(2a-x)$.

若将函数 $f(x)$ ($x \in \mathbf{R}$) 的图像关于点 $(a, 0)$ 对称得到 $F(x)$ 的图像, 则 $F(x)$ 的表达式为 $F(x) = -f(2a-x)$.

2.2.4 周期性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D , 若存在非零常数 t , 使 $f(x)$ 满足:

(1) 对于所有的 $x \in D$, 有 $x + t \in D$;

(2) $f(x + t) = f(x)$.

则称 $f(x)$ 为周期函数, 常数 t 为它的一个周期.

关于函数周期性有下列性质:

(1) 定义域 D 至少有一端无界.

(2) 若 t 是 $f(x)$ 的周期, 则 nt ($n \in \mathbf{Z}$)也是 $f(x)$ 的周期.

(3) $f(x)$ 可以没有正周期, 也可以没有负周期, 有正周期的函数可以没有最小正周期.

(4) 设 $\lambda \neq 0$. 对函数 $f(x)$ 定义域 D 中的任一 x , 满足下列条件之一:

(i) $f(x + \lambda) = -f(x)$;

(ii) $f(x + \lambda) = \frac{1}{f(x)}$;

(iii) $f(x + \lambda) = -\frac{1}{f(x)}$;

(iv) $f(x + \lambda) = \frac{f(x) + 1}{f(x) - 1}$;

(v) $f(x + \lambda) = \frac{1 - f(x)}{1 + f(x)}$;

(vi) $f(x + \lambda) = f(x - \lambda)$;

(vii) $f(x)$ 为奇函数, 且 $f(\lambda + x) = -f(\lambda - x)$;

(viii) $f(x)$ 为偶函数, 且 $f(\lambda + x) = f(\lambda - x)$.

则 $f(x)$ 是以 2λ 为一个周期的周期函数.

(5) 设 $\lambda \neq 0$, 对函数 $f(x)$ 定义域 D 中的任一 x , 满足下列条件之一:

(i) $f(x + \lambda) = -f(x - \lambda)$;

(ii) $f(x)$ 为奇函数, 且 $f(\lambda + x) = f(\lambda - x)$;

(iii) $f(x)$ 为偶函数, 且 $f(\lambda + x) = -f(\lambda - x)$;

(iv) $f(x + \lambda) = \frac{1 + f(x)}{1 - f(x)}$;

(v) $f(x + \lambda) = \frac{f(x) - 1}{f(x) + 1}$.

则 $f(x)$ 是以 4λ 为一个周期的周期函数.

2. 2. 5 周期性与对称性的关系

$f(x)$ 在 \mathbf{R} 上定义.

(1)若 $f(a+x) = f(a-x)$ 且 $f(b+x) = f(b-x)$, 即 $f(x)$ 有两条对称轴 $x = a, x = b$, 则 $f(x)$ 为周期函数, 其中一个周期为 $2|b-a|$.

(2)若 $f(a+x) = -f(a-x)$ 且 $f(b+x) = -f(b-x)$, 即 $f(x)$ 有两个对称中心 $(a, 0)$ 和 $(b, 0)$, 则 $f(x)$ 为周期函数, 其中一个周期为 $2|b-a|$.

(3)若 $f(a+x) = f(a-x)$ 且 $f(b+x) = -f(b-x)$, 即 $f(x)$ 有一条对称轴和一个对称中心, 则 $f(x)$ 为周期函数, 其中一个周期为 $4|b-a|$.

2.2.6 凹凸性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D .

若对任意的 $x_1, x_2 \in D$, 且 $\alpha \in [0, 1]$, 有 $f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \leq \alpha f(x_1) + (1-\alpha)f(x_2)$, 则称 $f(x)$ 在 D 上是下凸的;

若对任意的 $x_1, x_2 \in D$, 且 $\alpha \in [0, 1]$, 有 $f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \geq \alpha f(x_1) + (1-\alpha)f(x_2)$, 则称 $f(x)$ 在 D 上是上凸的.

当 $\alpha = \frac{1}{2}$ 时, 上面的式子可表示为 $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$ 和 $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \geq \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$.

2.3 函数的迭代和不动点

2.3.1 函数的迭代

设 $f(x)$ 是定义在 D 上且取值于 D 上的函数, 记 $f^{(0)}(x) = x$, $f^{(1)}(x) = f(x)$, $f^{(2)}(x) = f(f(x))$, \dots , $f^{(n)}(x) = f(f^{(n-1)}(x))$, 则称 $f^{(n)}(x)$ 为 $f(x)$ 在 D 上的 n 次迭代, n 为迭代指数.

若 $f(x)$ 有反函数 $f^{-1}(x)$, 则 $f^{(n)}(x)$ 的反函数为 $f^{-1}(x)$ 的 n 次迭代, 记作 $f^{(-n)}(x)$.

2.3.2 迭代周期

若存在自然数 $n(n \geq 2)$, 使 $f^{(n+1)}(x) = f(x)$, 则称 $f(x)$ 为迭代周期函数, 其迭代周期为 n .

迭代函数的迭代周期的集合是 \mathbf{N}_+ 的一个无穷子集, 其中, 必有最小正整数 n_0 , 使 $f(f^{(n_0)}(x)) = f(x)$, 则称 n_0 为 $f(x)$ 的基本迭代周期.

若 n_0 为 $f(x)$ 的基本迭代周期, 则 n 是 $f(x)$ 的迭代周期的充要条件是 $n_0|n$.

2.3.3 函数迭代的简单举例

(1) $f(x) = x + c$, 则 $f^{(n)}(x) = x + nc$, $f^{(-n)}(x) = x - nc$.

(2) $f(x) = ax$, 则 $f^{(n)}(x) = a^n x$, $f^{(-n)}(x) = \frac{1}{a^n} x$.

(3) $f(x) = ax^2$, 则 $f^{(n)}(x) = a^{2^{n-1}} x^{2^n}$, $f^{(-n)}(x) = a^{-2^{n-1}} x^{2^{-n}}$.

$$(4) f(x) = ax + b, \text{ 则 } f^{(n)}(x) = a^n \left(x - \frac{b}{1-a} \right) + \frac{b}{1-a}, f^{(-n)}(x) = \frac{1}{a^n} \left(x - \frac{b}{1-a} \right) + \frac{b}{1-a}.$$

$$(5) f(x) = x^3, \text{ 则 } f^{(n)}(x) = x^{3^n}, f^{(-n)}(x) = x^{3^{-n}}.$$

2.3.4 函数 $f(x)$ 的不动点

$f(x) = x$ 的根称为 $f(x)$ 的不动点.

(1)若 x_0 是 $f(x)$ 不动点, 那么, $f^{(n)}(x_0) = x_0$, 即 x_0 也是 $f^{(n)}(x)$ 的不动点.

(2)若 $f^{(n)}(x_0) = x_0$, 则称 x_0 为 $f(x)$ 的 n -不动点.

若存在最小的 $n \in \mathbf{N}_+$, 使 $f^{(n)}(x_0) = x_0$, 则称 x_0 为 $f(x)$ 的 n -周期点.

(3)若 $k|n$, 且 x_0 是 $f(x)$ 的 k -不动点, 则 x_0 是 $f(x)$ 的 n -不动点.

(4)若 x_0 既是 $f(x)$ 的 k -不动点, 又是 $f(x)$ 的 n -不动点, 则 x_0 是 $f(x)$ 的 (k, n) -不动点, 这里 (k, n) 是 k 与 n 的最大公约数.

2.4 函数方程

含有未知函数的等式叫做函数方程. 寻求函数方程的解或证明函数方程无解的过程叫做解函数方程.

解函数方程常用方法有代换法、赋值法、待定系数法、递归法、柯西法和数学归纳法.

3 多项式

3.1 关于多项式的基本概念

(1)形如 $f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 (a_n \neq 0)$ 的表达式称为关于 x 的一元 n 次多项式. 其中, 非负整数 n 称为 $f(x)$ 的次数, 记作 $\deg f$.

当系数 $a_i (i = 0, 1, \cdots, n)$ 分别取整数、有理数、实数、复数时, 多项式 $f(x)$ 依次称为整系数、有理系数、实系数、复系数多项式.

(2)对于两个多项式 $f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i, h(x) = \sum_{i=0}^k b_i x^i$, 有 $\deg(f \pm h) \leq \max\{\deg f, \deg h\}, \deg(fh) \leq \deg f + \deg h$.

(3)对于 n 元多项式 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, 如果对于任意的 $i, j (1 \leq i < j \leq n)$, 都有

$$f(x_1, \cdots, x_i, \cdots, x_j, \cdots, x_n) = f(x_1, \cdots, x_j, \cdots, x_i, \cdots, x_n),$$

则称这个多项式为对称多项式.

(4) $\sigma_1 = \sum_{j=1}^n x_j, \sigma_2 = \sum_{1 \leq j_1 < j_2 \leq n} x_{j_1} x_{j_2}, \cdots, \sigma_i = \sum_{1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_i \leq n} x_{j_1} x_{j_2} \cdots x_{j_i}, \cdots, \sigma_n = x_1 x_2 \cdots x_n$ 叫做 n 元初等对称多项式.

3.2 关于多项式的常用定理

3.2.1 多项式恒等定理

定理1 两个多项式 $f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$, $h(x) = \sum_{k=0}^m b_k x^k$ 恒等的充要条件是 $n = m$ 且 $a_k = b_k (k = 0, 1, \dots, n)$.

3.2.2 带余除法定理

定理2 对于给定的多项式 $f(x)$ 、 $g(x)$, 其中, $g(x) \neq 0$, 存在唯一的多项式 $q(x)$ 及 $r(x)$, 使得 $f(x) = g(x)q(x) + r(x)$, 其中, $r(x)$ 是零多项式或 $\deg r(x) < \deg g(x)$.

若 $r(x) = 0$, 则称 $g(x)$ 整除 $f(x)$, 记作 $g(x) | f(x)$, $g(x)$ 叫做 $f(x)$ 的因式. 否则, 记作 $g(x) \nmid f(x)$.

3.2.3 余数定理

定理3 多项式 $f(x)$ 除以 $x - a$ 的余数为 $f(a)$.

3.2.4 因式定理

定理4 $f(a) = 0$ 的充要条件是 $x - a$ 是 $f(x)$ 的因式.

3.2.5 有理根定理

定理5 若既约分数 $\frac{q}{p} ((p, q) = 1, p, q \in \mathbf{Z}, p \neq 0)$ 是整系数多项式的一个有理根, 则 $p | a_n, q | a_0$.

3.2.6 不可约多项式判别法(Eisenstein判别法)

设 $f(x)$ 是一个整系数多项式, 如果一个质数 p 满足 $p \nmid a_n, p | a_k (k = 0, 1, \dots, n-1), p^2 \nmid a_0$, 那么, $f(x)$ 在有理数集上不可约.

3.2.7 代数基本定理

定理6 任何 $n (n \geq 1)$ 次多项式至少有一个复数根.

推论 任何 $n (n \geq 1)$ 次多项式有且仅有 n 个复根 (k 重根按 k 个根计算).

3.2.8 唯一分解定理

定理7 如果不考虑因式的顺序, 则每一个非常的复系数多项式 $f(x)$ 可唯一分解为 $f(x) = A(x - \alpha_1)^{m_1} (x - \alpha_2)^{m_2} \cdots (x - \alpha_t)^{m_t}$ 的形式, 其中, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_t$ 为多项式 $f(x)$ 的所有不同的复根, m_1, m_2, \dots, m_t 是它们的重数.

3.2.9 韦达定理

定理8 设方程 $a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n = 0 (a_0 \neq 0)$ 的 n 个复根为 x_1, x_2, \dots, x_n , 则有 $\sigma_j = (-1)^j \frac{a_j}{a_0} (j = 1, 2, \dots, n)$. 其中, σ_j 为初等对称多项式, 定义见3.2.3.

3.2.10 牛顿公式

设 $\sigma_j (j = 1, 2, \dots, n)$ 为初等对称多项式, 规定 $\sigma_0 = 1$, 记等幂和 $S_k = \sum_{i=1}^n x_i^k (k = 0, 1, \dots)$, 则

(1) 当 $k > n$ 时, $\sum_{i=0}^n (-1)^i \sigma_i S_{k-i} = 0$;

(2) 当 $1 \leq k \leq n$ 时, $\sum_{i=0}^k (-1)^i \sigma_i S_{k-i} = 0$.

3. 2. 11 拉格朗日插值公式

在复数集上的任何一个次数不超过 n 的多项式都可唯一的表示为

$$f(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\cdots(x_0-x_n)}f(x_0) + \frac{(x-x_0)(x-x_2)\cdots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\cdots(x_1-x_n)}f(x_1) + \cdots + \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\cdots(x_n-x_{n-1})}f(x_n),$$

其中, x_1, x_2, \cdots, x_n 两两不同.

拉格朗日插值公式可简化为
$$f(x) = \sum_{i=0}^n \left(f(x_i) \cdot \prod_{\substack{0 \leq j \leq n \\ j \neq i}} \frac{x-x_j}{x_i-x_j} \right).$$

数列

4. 1 一般数列

设 $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$. 则 $a_n = \begin{cases} S_1, & n = 1; \\ S_n - S_{n-1}, & n \geq 2. \end{cases}$

4. 2 等差数列

设公差为 d , 则 $a_n = a_1 + (n-1)d$, $S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d$ 或 $S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$.

4. 3 高阶等差数列

4. 3. 1 定义

给定一个数列 $\{a_n\}$, 将其连续两项的差求出, 得到一个新数列 $\{b_n\}$, 其中, $b_n = a_{n+1} - a_n (n = 1, 2, \cdots)$, 这个数列称为原数列 $\{a_n\}$ 的一阶差数列. 再求出 $\{b_n\}$ 的连续两项的差, 得到新数列 $\{c_n\}$, 其中, $c_n = b_{n+1} - b_n (n = 1, 2, \cdots)$, 这个数列称为原数列 $\{a_n\}$ 的二阶差数列. 依此类推.

如果某一个数列的 p 阶差数列是一非零常数列, 则称此数列为 p 阶等差数列.

特别地, 一阶等差数列就是通常定义的等差数列. 又如, 自然数的平方数数列是二阶等差数列.

4. 3. 2 高阶等差数列的性质

性质1 如果数列 $\{a_n\}$ 是 p 阶等差数列, 则它的一阶差数列是 $p-1$ 阶等差数列.

性质2 设 $S_n^{(k)} = \sum_{p=1}^n p^k (k = 1, 2, \cdots, n)$. 则 $S_n^{(k)}$ 是关于 n 的 $k+1$ 次多项式.

性质3 数列 $\{a_n\}$ 是 p 阶等差数列的充要条件是: 通项 a_n 是关于 n 的 p 次多项式.

性质4 数列 $\{a_n\}$ 是 p 阶等差数列, 则 S_n 是关于 n 的 $p+1$ 次多项式.

4. 4 等比数列

设公比 $q \neq 0$, $a_1 \neq 0$, 则 $a_n = a_1 q^{n-1}$, $S_n = \begin{cases} \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}, & q \neq 1; \\ na_1, & q = 1. \end{cases}$

4.5 数列求和

(1) 裂项求和法

$$a_n = a_1 + (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \cdots + (a_n - a_{n-1}), \text{ 即 } a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) (n \geq 2).$$

(2) 裂项求积法

$$a_n = a_1 \cdot \frac{a_2}{a_1} \cdot \frac{a_3}{a_2} \cdots \frac{a_n}{a_{n-1}}, \text{ 即 } a_n = a_1 \prod_{k=1}^{n-1} \frac{a_{k+1}}{a_k} (a_k \neq 0, n \geq 2).$$

4.6 递归数列及已知递推关系求通项

4.6.1 递归数列

(1) 一个数列 $\{a_n\}$ 的第 n 项 a_n 与它的前面 k 项 $a_{n-1}, a_{n-2}, \cdots, a_{n-k}, (k < n, k, n \in \mathbf{N}_+)$ 的关系

$$a_n = f(a_{n-1}, a_{n-2}, \cdots, a_{n-k}),$$

称为 k 阶递归关系. 这里 a_n 是关于 $a_{n-1}, a_{n-2}, \cdots, a_{n-k}$ 的 k 元函数, 称为递归函数.

(2) 由 k 阶递归关系及给定的前 k 项 a_1, a_2, \cdots, a_k 的值(称为初始值)所确定的数列称为 k 阶递归数列.

(3) 对于满足 $a_n = p_1 a_{n-1} + p_2 a_{n-2} + \cdots + p_k a_{n-k} (k < n)$, 称为 k 阶常系数齐次线性递归数列.

其对应的一元 k 次方程 $x^k = p_1 x^{k-1} + p_2 x^{k-2} + \cdots + p_{k-1} x + p_k (p_k \neq 0)$, 称为数列 $\{a_n\}$ 的特征方程, 其根称为特征根.

4.6.2 递归数列求通项的方法

(1) 形如 $a_{n+1} = a_n + f(n)$ 的一阶递归式.

$$a_n = a_1 + \sum_{k=2}^n (a_k - a_{k-1}) = a_1 + \sum_{k=2}^n f(k-1) = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} f(k).$$

(2) 形如 $a_{n+1} = pa_n + q$ 的递归式. 构造辅助数列 $\{a_n - \frac{q}{1-p}\}$, 则 $\{a_n - \frac{q}{1-p}\}$ 为以 $a_1 - \frac{q}{1-p}$ 为首项、 p 为公比的等比数列. $a_n = \frac{q}{1-p} + \left(a_1 - \frac{q}{1-p}\right)p^{n-1}$.

(3) 形如 $a_{n+1} = qa_n^p$ 的递归式.

对递归式两边取对数, 有 $\lg a_{n+1} = \lg q + p \lg a_n$. 记 $b_n = \lg a_n$, 则有 $b_{n+1} = pb_n + \lg q$, 转化为(2)的情形.

(4) 形如 $a_{n+1} = pa_n + qa_{n-1}$ 的递归式. 其特征方程为 $x^2 = px + q$. 设其特征根为 α, β , 则

(i) 当 $\alpha \neq \beta$ 时, $a_n = \lambda_1 \alpha^{n-1} + \lambda_2 \beta^{n-1}$, 其中, λ_1, λ_2 用待定系数法由初始值 a_1, a_2 决定.

(ii)当 $\alpha = \beta$ 时, $a_n = (\lambda_1 n + \lambda_2)\alpha^{n-1}$, 其中, λ_1 、 λ_2 用待定系数法由初始值 a_1 、 a_2 决定.

(5)形如 $a_{n+1} = \frac{ba_n}{ca_n + d}$ 的递归式. 取倒数得 $\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{ca_n + d}{ba_n} = \frac{d}{a_n} + \frac{c}{b}$. 设 $t_n = \frac{1}{a_n}$, 则有 $t_{n+1} = \frac{d}{b}t_n + \frac{c}{b}$ 转化为(2)的情形.

(6)其他非线性递归关系求通项可通过韦达定理、换元法、数学归纳法等求得.

4.7 周期数列

如果数列 $\{a_n\}$ 满足: 存在正整数 M 和 T , 使得对于一切正整数 $n(n \geq M)$, 都有 $a_{n+T} = a_n$ 成立, 就称数列 $\{a_n\}$ 为从第 M 项起的、周期为 T 的周期数列.

若 $a_{n+T} \equiv a_n \pmod{m}$, 则称数列 $\{a_n\}$ 为以 m 为模的模周期数列.

5 不等式

5.1 平均不等式

(1)调和平均、几何平均、算术平均和平方平均的关系. 记

$$H_n = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}}, G_n = \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}, A_n = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}, Q_n = \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}{n}}.$$

其中 $a_i > 0 (i = 1, 2, \cdots, n)$, H_n 、 G_n 、 A_n 、 Q_n 依次为 a_1, a_2, \cdots, a_n 的调和平均、几何平均、算术平均、平方平均. 则 $H_n \leq G_n \leq A_n \leq Q_n$, 当且仅当 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ 时, 等号成立.

(2)记 $M_r = \left(\frac{a_1^r + a_2^r + \cdots + a_n^r}{n} \right)^{\frac{1}{r}}$, 其中, $a_i > 0 (i = 1, 2, \cdots, n, r \neq 0)$, 则称 M_r 为 a_1, a_2, \cdots, a_n 的 r 次幂平均.

当 $\alpha > \beta$ 时, 有 $M_\alpha \geq M_\beta$, 即 $\left(\frac{a_1^\alpha + a_2^\alpha + \cdots + a_n^\alpha}{n} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \geq \left(\frac{a_1^\beta + a_2^\beta + \cdots + a_n^\beta}{n} \right)^{\frac{1}{\beta}}$, 当且仅当 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ 时, 等号成立.

5.2 柯西不等式

设 $a_i, b_i \in \mathbf{R} (i = 1, 2, \cdots, n)$. 则 $\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n b_i^2 \right)$, 当且仅当 a_i, b_i 不全为0, 且 $b_i = \lambda a_i (i = 1, 2, \cdots, n)$ 时, 等号成立.

5.3 排序不等式

设有两组数 $a_1, a_2, \cdots, a_n; b_1, b_2, \cdots, b_n$, 满足 $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n, b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_n$.

则有 $a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots + a_n b_1 \leq a_1 b_{j_1} + a_2 b_{j_2} + \cdots + a_n b_{j_n} \leq a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n$.

简言为“反序和 \leq 乱序和 \leq 同序和”.

5.4 琴生(Jensen)不等式

设 $p_i \in \mathbf{R}_+ (i = 1, 2, \dots, n)$, $f(x)$ 是区间 D 上的严格下凸函数. 则对于任意的 $x_1, x_2, \dots, x_n \in D$, 有

$$f\left(\frac{p_1x_1 + p_2x_2 + \dots + p_nx_n}{p_1 + p_2 + \dots + p_n}\right) \leq \frac{p_1f(x_1) + p_2f(x_2) + \dots + p_nf(x_n)}{p_1 + p_2 + \dots + p_n}. \quad ①$$

若 $f(x)$ 是 D 上严格上凸函数, 则有

$$f\left(\frac{p_1x_1 + p_2x_2 + \dots + p_nx_n}{p_1 + p_2 + \dots + p_n}\right) \geq \frac{p_1f(x_1) + p_2f(x_2) + \dots + p_nf(x_n)}{p_1 + p_2 + \dots + p_n}. \quad ②$$

特别地, 当 $p_i = \frac{1}{n} (i = 1, 2, \dots, n)$ 时, 式①、②化为

$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)}{n}$$

$$\text{或 } f\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}\right) \geq \frac{f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)}{n}.$$

6 三角

6.1 三角函数的定义, 定义域, 值域, 单调性, 奇偶性, 周期性, 凹凸性与对称性(略).

6.2 和、差、倍、半角公式, 和差化积, 积化和差公式, 万能置换公式(略).

6.3 常用的三角形中的恒等式和不等式:

(1) 正弦定理、余弦定理(略).

(2) 常见的恒等式

(i) $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \cdot \tan B \cdot \tan C$ (非直角三角形).

(ii) $\sin A + \sin B + \sin C = 4 \cos \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B}{2} \cdot \cos \frac{C}{2}$.

(iii) $\cos A + \cos B + \cos C = 4 \sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2} + 1$.

(iv) $\sin \frac{A}{2} + \sin \frac{B}{2} + \sin \frac{C}{2} = 1 + 4 \sin \frac{\pi - A}{4} \cdot \sin \frac{\pi - B}{4} \cdot \sin \frac{\pi - C}{4}$

(或 $= 1 + 4 \sin \frac{B+C}{4} \cdot \sin \frac{C+A}{4} \cdot \sin \frac{A+B}{4}$).

(v) $\cos \frac{A}{2} + \cos \frac{B}{2} + \cos \frac{C}{2} = 4 \cos \frac{A+B}{4} \cdot \cos \frac{B+C}{4} \cdot \cos \frac{C+A}{4}$.

(vi) $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2(1 + \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C)$.

(vii) $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1 - 2 \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C$.

(3) 常见的不等式

(i) $\sin A + \sin B + \sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

(ii) $\sin A \cdot \sin B \cdot \sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{8}$.

(iii) $\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C \geq -\frac{3}{2}$.

$$(iv) \cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C \geq \frac{3}{4}.$$

$$(v) \cos \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B}{2} \cdot \cos \frac{C}{2} \leq \frac{3\sqrt{3}}{8}.$$

$$(vi) \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C \leq \frac{1}{8}.$$

7 复数

7.1 复数的三种表示法

(1)代数形式: $z = a + bi (a, b \in \mathbf{R})$.

(2)三角形式: $z = r(\cos \theta + i \sin \theta) (r \geq 0, \theta \in \mathbf{R})$.

(3)指数形式: $z = re^{i\theta} (r \geq 0, \theta \in \mathbf{R})$.

其中, a 叫做复数 z 的实部, 记作 $a = \operatorname{Re}(z)$, b 叫做复数 z 的虚部, 记作 $b = \operatorname{Im}(z)$, r 叫做复数 z 的模, 记作 $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$, θ 叫做复数 z 的辐角, 记作 $\theta = \operatorname{Arg} z$, 当 $\theta \in [0, 2\pi)$ 时, 叫做复数 z 的辐角的主值, 记作 $\theta = \arg z$. 因此, $\operatorname{Arg} z = 2k\pi + \arg z (k \in \mathbf{Z})$.

7.2 关于模与共轭复数

$\bar{z} = a - bi$ 叫做 z 的共轭复数.

$$(1) \overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2.$$

$$(2) \overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2.$$

$$(3) \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} (z_2 \neq 0).$$

$$(4) \bar{\bar{z}} = z \Leftrightarrow z \in \mathbf{R}.$$

$$(5) \operatorname{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z}), \operatorname{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z - \bar{z}).$$

$$(6) z \cdot \bar{z} = |z|^2 = |\bar{z}|^2.$$

$$(7) |z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|.$$

$$(8) |z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2|z_1|^2 + 2|z_2|^2.$$

$$(9) ||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 \pm z_2| \leq |z_1| + |z_2|.$$

$$(10) |z| \geq \max\{\operatorname{Re}(z), \operatorname{Im}(z)\}.$$

$$(11) |z| \leq |\operatorname{Re}(z)| + |\operatorname{Im}(z)| \leq \sqrt{2}|z|.$$

7.3 棣莫弗公式

$$z^n = [r(\cos \theta + i \sin \theta)]^n = r^n (\cos n\theta + i \sin n\theta) (n \in \mathbf{Z}).$$

特别地, 当 $|z| = 1$ 时, $\cos n\theta = \operatorname{Re}(z^n) = \frac{1}{2}(z^n + \bar{z}^n)$, $\sin n\theta = \operatorname{Im}(z^n) = \frac{1}{2i}(z^n - \bar{z}^n)$, $1 + z = 2 \cos \frac{\theta}{2} e^{i\frac{\theta}{2}}$,
 $1 - z = -2i \sin \frac{\theta}{2} e^{i\frac{\theta}{2}}$.

7.4 单位根

方程 $x^n - 1 = 0$ 的 n 个根: $1, \varepsilon, \varepsilon^2, \dots, \varepsilon^{n-1}$ 叫做 n 次单位根. 其中, $\varepsilon = e^{i\frac{2\pi}{n}}$ 叫做 n 次单位原根.

关于 n 次单位根有下列常用结果:

$$(1) \varepsilon^{nq+r} = \varepsilon^r \quad (n, q, r \in \mathbf{Z}).$$

$$(2) 1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1} = (x - \varepsilon)(x - \varepsilon^2) \dots (x - \varepsilon^{n-1}).$$

$$(3) \sum_{k=0}^{n-1} \varepsilon^{km} = \begin{cases} n, & n|m; \\ 0, & n \nmid m. \end{cases}$$

实系数一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) 的两个根满足 $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$, $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$;
 $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{-\Delta}i}{2a}$.

7.5 复数的几何意义

设复数 z 对应于复平面上的点 M 及向量 \overrightarrow{OM} , 复数 z_1, z_2 对应于复平面上的点 A, B . 则

(1) $|z_1 - z_2|$ 表示 A, B 的距离.

(2) $|z - z_1| = |z - z_2|$ 表示点 M 的轨迹是 AB 的垂直平分线.

(3) $|z - z_1| = r$ 表示点 M 的轨迹是以为 A 圆心、 r 为半径的圆.

(4) $|z - z_1| + |z - z_2| = 2a$ ($2a > |z_1 - z_2|$) 表示点 M 的轨迹是以 A 和 B 为焦点、 $2a$ 为长轴长的椭圆.

(5) $||z - z_1| - |z - z_2|| = 2a$ ($2a < |z_1 - z_2|$) 表示点 M 的轨迹是以 A 和 B 为焦点、 $2a$ 为实轴长的双曲线.

(6) $\frac{|z_1 - z|}{|z - z_2|} = \lambda$ 表示点 M 是 AB 关于 λ 的定比分点.

(7) 设 z_1, z_2, z_3 对应于复平面上的点 A, B, C . 则 $z = \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3}$ 对应 $\triangle ABC$ 的重心.

(8) 夹角 $\angle AMB = \arg \frac{z_2 - z}{z_1 - z}$.

(9) 平行与垂直

设 z_1, z_2, z_3, z_4 对应于复平面上的四点 A, B, C, D . 则

$$\frac{z_2 - z_1}{z_4 - z_3} = k \Leftrightarrow AB \parallel CD,$$

$$\frac{z_2 - z_1}{z_4 - z_3} = ki \Leftrightarrow AB \perp CD,$$

$$\frac{z_2 - z_1}{z_2 - z_3} \in \mathbf{R} \Leftrightarrow A, B, C \text{ 三点共线}.$$