

Отчет по лабораторной работе № 5

Модель хищник-жертва

Хусаинова Динара Айратовна

Содержание

Цель работы	4
Теоретическое введение	5
Задачи	7
Выполнение лабораторной работы	8
Julia	9
OpenModelica	15
Вывод	18
Список литературы. Библиография	19

Список иллюстраций

1	График численности хищников от численности жертв	13
2	График численности жертв и хищников от времени	13
3	Стационарное состояние	14
1	График численности хищников от численности жертв	16
2	График численности жертв и хищников от времени	16
3	Стационарное состояние	17

Цель работы

Изучить жесткую модель хищник-жертва и построить эту модель.

Теоретическое введение

- Модель Лотки—Вольтерры — модель взаимодействия двух видов типа «хищник — жертва», названная в честь её авторов, которые предложили модельные уравнения независимо друг от друга. Такие уравнения можно использовать для моделирования систем «хищник — жертва», «паразит — хозяин», конкуренции и других видов взаимодействия между двумя видами. [4]

Данная двувидовая модель основывается на следующих предположениях [4]:

1. Численность популяции жертв x и хищников y зависят только от времени (модель не учитывает пространственное распределение популяции на занимаемой территории)
2. В отсутствии взаимодействия численность видов изменяется по модели Мальтуса, при этом число жертв увеличивается, а число хищников падает
3. Естественная смертность жертвы и естественная рождаемость хищника считаются несущественными
4. Эффект насыщения численности обеих популяций не учитывается
5. Скорость роста численности жертв уменьшается пропорционально численности хищников

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = (-ax(t) + by(t)x(t)) \\ \frac{dy}{dt} = (cy(t) - dy(t)x(t)) \end{cases}$$

В этой модели x – число жертв, y – число хищников. Коэффициент a описывает скорость естественного прироста числа жертв в отсутствие хищников, $-a$ – естественное вымирание хищников, лишенных пищи в виде жертв. Вероятность взаимодействия жертвы и хищника считается пропорциональной как количеству жертв, так и числу самих хищников (xy). Каждый акт взаимодействия уменьшает популяцию жертв, но способствует увеличению популяции хищников (члены $-bxy$ и dxy в правой части уравнения).

Математический анализ этой (жёсткой) модели показывает, что имеется стационарное состояние, всякое же другое начальное состояние приводит к периодическому колебанию численности как жертв, так и хищников, так что по прошествии некоторого времени такая система вернётся в изначальное состояние.

Стационарное состояние системы (положение равновесия, не зависящее от времени решения) будет находиться в точке $x_0 = \frac{c}{d}, y_0 = \frac{a}{b}$. Если начальные значения задать в стационарном состоянии $x(0) = x_0, y(0) = y_0$, то в любой момент времени численность популяций изменяться не будет. При малом отклонении от положения равновесия численности как хищника, так и жертвы с течением времени не возвращаются к равновесным значениям, а совершают периодические колебания вокруг стационарной точки. Амплитуда колебаний и их период определяется начальными значениями численностей $x(0), y(0)$. Колебания совершаются в противофазе.

Задачи

1. Построить график зависимости численности хищников от численности жертв
2. Построить график зависимости численности хищников и численности жертв от времени
3. Найти стационарное состояние системы

Выполнение лабораторной работы

Для модели «хищник-жертва»:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -0.13 * x(t) + 0.041 * y(t)x(t) \\ \frac{dy}{dt} = 0.31 * y(t) - 0.042 * y(t)x(t) \end{cases}$$

Постройте график зависимости численности хищников от численности жертв, а также графики изменения численности хищников и численности жертв при следующих начальных условиях: $x_0 = 7, y_0 = 20$. Найдите стационарное состояние системы.

Julia

Код программы для нестационарного состояния:

```
using Plots
using DifferentialEquations

x0 = 7
y0 = 20

a = 0.13
b = 0.041
c = 0.31
d = 0.042

function fn(du, u, p, t)
    x, y = u
    du[1] = -a*u[1] + b * u[1] * u[2]
    du[2] = c * u[2] - d * u[1] * u[2]
end

v0 = [x0, y0]
tspan = (0.0, 60.0)
prob = ODEProblem(fn, v0, tspan)
```

```
sol = solve(prob, dtmax=0.05)
X = [u[1] for u in sol.u]
Y = [u[2] for u in sol.u]
T = [t for t in sol.t]
```

```
plt = plot(
    dpi=300,
    legend=false)
```

```
plot!(
    plt,
    X,
    Y,
    color=:blue)
```

```
savefig(plt, "lab5_1.png")
```

```
plt2 = plot(
    dpi=300,
    legend=true)
```

```
plot!(
    plt2,
    T,
    X,
    label="Численность жертв",
    color=:red)
```

```
plot!(
```

```

plt2,
T,
Y,
label="Численность хищников",
color=:green)

savefig(plt2, "lab5_2.png")

```

Код программы для стационарного состояния:

```

using Plots
using DifferentialEquations

a = 0.13
b = 0.041
c = 0.31
d = 0.042

x0 = c / d
y0 = a / b

function ode_fn(du, u, p, t)
    x, y = u
    du[1] = -a*u[1] + b * u[1] * u[2]
    du[2] = c * u[2] - d * u[1] * u[2]
end

v0 = [x0, y0]
tspan = (0.0, 60.0)
prob = ODEProblem(ode_fn, v0, tspan)

```

```

sol = solve(prob, dtmax=0.05)
X = [u[1] for u in sol.u]
Y = [u[2] for u in sol.u]
T = [t for t in sol.t]

```

```

plt2 = plot(
    dpi=300,
    legend=true)

```

```

plot!(
    plt2,
    T,
    X,
    label="Численность жертв",
    color=:red)

```

```

plot!(
    plt2,
    T,
    Y,
    label="Численность хищников",
    color=:green)

```

```

savefig(plt2, "lab05_3.png")

```

В стационарном состоянии решение вида $y(x) = \textit{some function}$ будет представлять собой точку.

Результаты выполнения программ на Julia (рис.1-3).

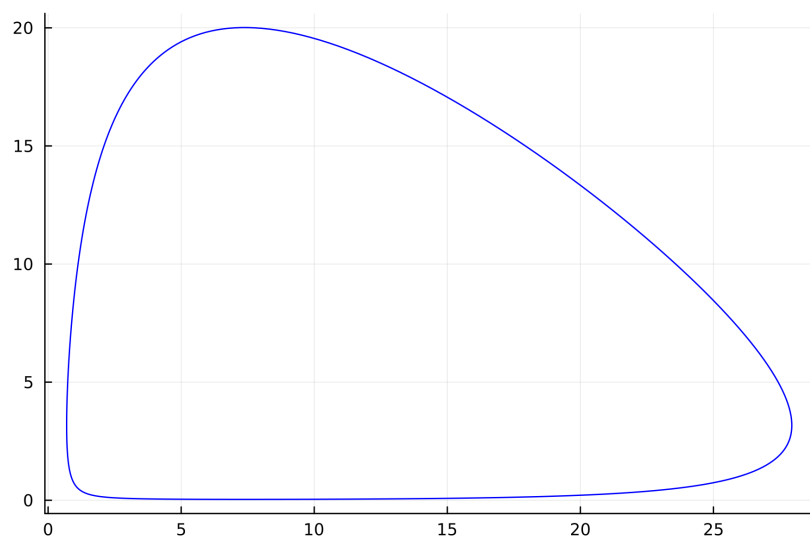


Рис. 1: График численности хищников от численности жертв

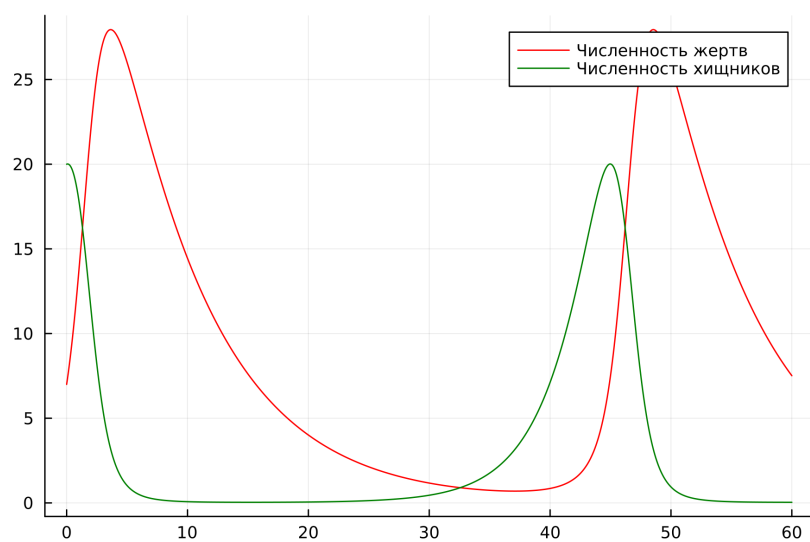


Рис. 2: График численности жертв и хищников от времени

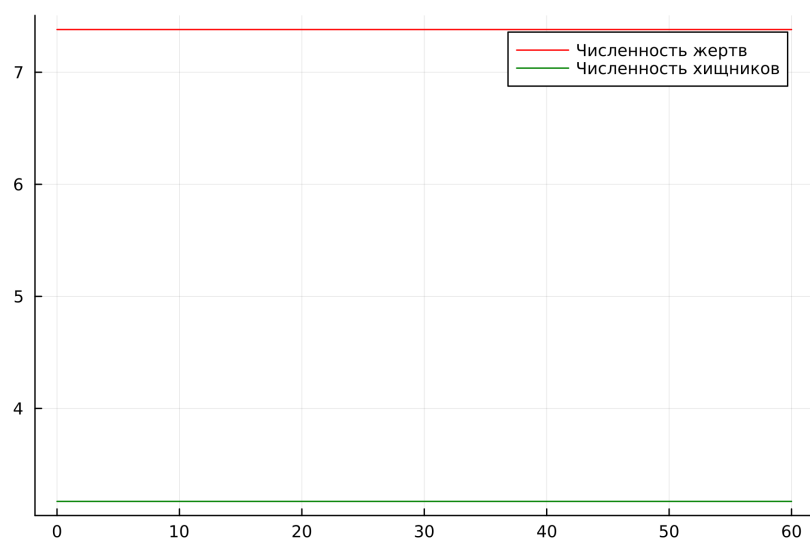


Рис. 3: Стационарное состояние

OpenModelica

Код программы для нестационарного состояния:

```
model lab5_1
Real a = 0.13;
Real b = 0.041;
Real c = 0.31;
Real d = 0.042;
Real x;
Real y;
initial equation
x = 7;
y = 20;
equation
der(x) = -a*x + b*x*y;
der(y) = c*y - d*x*y;
end lab5_1;
```

Код программы для стационарного состояния:

```
model lab5_2
Real a = 0.13;
Real b = 0.041;
Real c = 0.31;
Real d = 0.042;
```

```

Real x;
Real y;
initial equation
x = c / d;
y = a / b;
equation
der(x) = -a*x + b*x*y;
der(y) = c*y - d*x*y;
end lab5_2;

```

Результаты выполнения программ с помощью OpenModelica (рис.4-6).

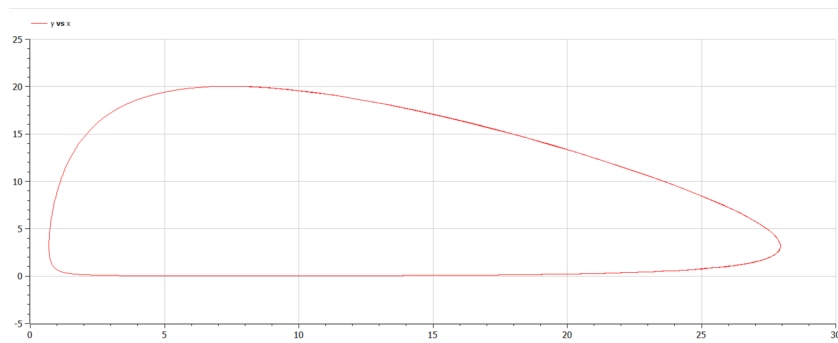


Рис. 1: График численности хищников от численности жертв

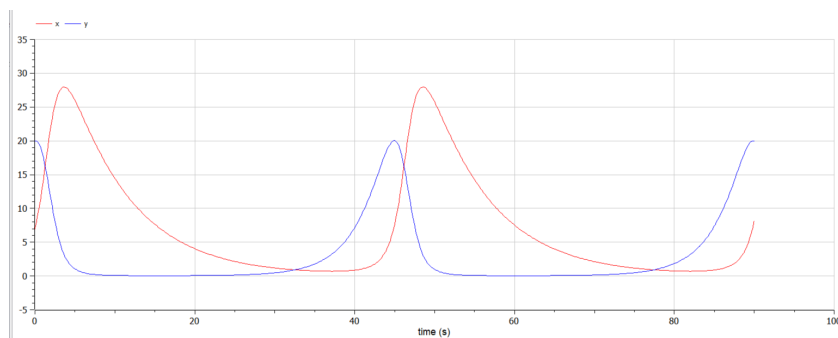


Рис. 2: График численности жертв и хищников от времени

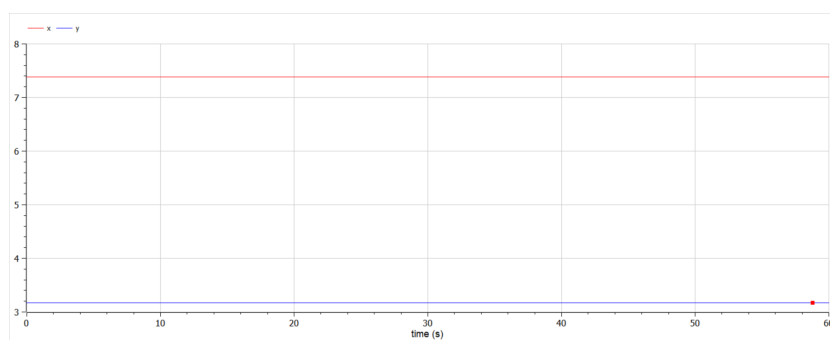


Рис. 3: Стационарное состояние

Вывод

Изучили жесткую модель хищник-жертва и построить эту модель.

Список литературы. Библиография

- [1] Документация по Julia: <https://docs.julialang.org/en/v1/>
- [2] Документация по OpenModelica: <https://openmodelica.org/>
- [3] Решение дифференциальных уравнений: <https://www.wolframalpha.com/>
- [4] Модель Лотки—Вольтерры: https://math-it.petsu.ru/users/semenova/MathECO/Lectures/Lotka_Volterra/