Отчет по лабораторной работе № 6

Задача об эпидемии

Хусаинова Динара Айратовна

Содержание

Список иллюстраций

Цель работы

Изучить и построить модель эпидемии.

Теоретическое введение

Рассмотрим простейшую модель эпидемии. Предположим, что некая популяция, состоящая из N особей, (считаем, что популяция изолирована) подразделяется на три группы. Первая группа - это восприимчивые к болезни, но пока здоровые особи, обозначим их через $S(t)$. Вторая группа – это число инфицированных особей, которые также при этом являются распространителями инфекции, обозначим их $I(t)$. А третья группа, обозначающаяся через $R(t)$ – это здоровые особи с иммунитетом к болезни. До того, как число заболевших не превышает критического значения I^*, считаем, что все больные изолированы и не заражают здоровых. Когда $I(t) > I^*$, тогда инфицирование способны заражать восприимчивых к болезни особей.

Таким образом, скорость изменения числа $S(t)$ меняется по следующему закону:

$$\frac{dS}{dt} = \begin{cases} -\alpha S & \text{,если } I(t) > I^* \\ 0 & \text{,если } I(t) \leq I^* \end{cases}$$

Поскольку каждая восприимчивая к болезни особь, которая, в конце концов, заболевает, сама становится инфекционной, то скорость изменения числа инфекционных особей представляет разность за единицу времени между заразившимися и теми, кто уже болеет и лечится, то есть:

$$\frac{dI}{dt} = \begin{cases} \alpha S - \beta I & \text{, если } I(t) > I^* \\ -\beta I & \text{, если } I(t) \leq I^* \end{cases}$$

А скорость изменения выздоравливающих особей (при этом приобретающие иммунитет к болезни):

$$\frac{dR}{dt} = \beta I$$

Постоянные пропорциональности α, β - это коэффициенты заболеваемости и выздоровления соответственно. Для того, чтобы решения соответствующих уравнений определялось однозначно, необходимо задать начальные условия. Считаем, что на начало эпидемии в момент времени $t = 0$ нет особей с иммунитетом к болезни $R(0) = 0$, а число инфицированных и восприимчивых к болезни особей $I(0)$ и $S(0)$ соответственно. Для анализа картины протекания эпидемии необходимо рассмотреть два случая: $I(0) \leq I^*$ и $I(0) > I^*$

Задачи

Построить графики изменения числа особей в каждой из трех групп S, I, R. Рассмотреть, как будет протекать эпидемия в случаях:

1. $I(0) \leq I^*$
2. $I(0) > I^*$

Выполнение лабораторной работы

Вариант 54

На одном острове вспыхнула эпидемия. Известно, что из всех проживающих на острове $(N = 8439)$ в момент начала эпидемии $(t = 0)$ число заболевших людей (являющихся распространителями инфекции) $I(0) = 86$, А число здоровых людей с иммунитетом к болезни $R(0) = 25$. Таким образом, число людей восприимчивых к болезни, но пока здоровых, в начальный момент времени $S(0) = N - I(0) - R(0)$. Постройте графики изменения числа особей в каждой из трех групп.

Рассмотрите, как будет протекать эпидемия в случае:

1. $I(0) \leq I^*$
2. $I(0) > I^*$

Julia

Код программы для случая $I(0) \leq I^*$:

```
using Plots
using DifferentialEquations

N = 8439
I0 = 86
R0 = 25
S0 = N - I0 - R0
alpha = 0.6
beta = 0.2

function func(du, u, p, t)
    S, I, R = u
    du[1] = 0
    du[2] = -beta*u[2]
    du[3] = beta*I
end

v0 = [S0, I0, R0]
tspan = (0.0, 60.0)
prob = ODEProblem(func, v0, tspan)
sol = solve(prob, dtmax = 0.05)
```

```
S = [u[1] for u in sol.u]
I = [u[2] for u in sol.u]
R = [u[3] for u in sol.u]
T = [t for t in sol.t]
plt = plot(
  dpi = 600,
  legend = :topright)
plot!(
  plt,
  T,
  S,
  label = "Восприимчивые особи",
  color = :blue)
plot!(
  plt,
  T,
  I,
  label = "Инфицированные особи",
  color = :red)
plot!(
  plt,
  T,
  R,
  label = "Особи с иммунитетом",
  color = :green)

savefig(plt, "lab6_1.png")
```

Код программы для случая $I(0) > I^*$:

```
using Plots
```

```
using DifferentialEquations

N = 8439
I0 = 86
R0 = 25
S0 = N - I0 - R0
alpha = 0.4
beta = 0.1

function func(du, u, p, t)
    S, I, R = u
    du[1] = -alpha*u[1]
    du[2] = alpha*u[1] - beta*u[2]
    du[3] = beta*I
end

v0 = [S0, I0, R0]
tspan = (0.0, 120.0)
prob = ODEProblem(func, v0, tspan)
sol = solve(prob, dtmax=0.05)
S = [u[1] for u in sol.u]
I = [u[2] for u in sol.u]
R = [u[3] for u in sol.u]
T = [t for t in sol.t]

plt = plot(
  dpi=600,
  legend=:right)
```

```
plot!(
  plt,
  T,
  S,
  label="Восприимчивые особи",
  color=:blue)
plot!(
  plt,
  T,
  I,
  label="Инфицированные особи",
  color=:red)
plot!(
  plt,
  T,
  R,
  label="Особи с иммунитетом",
  color=:green)


savefig(plt, "lab6_2.png")
```

Результат выполнения программ на Julia

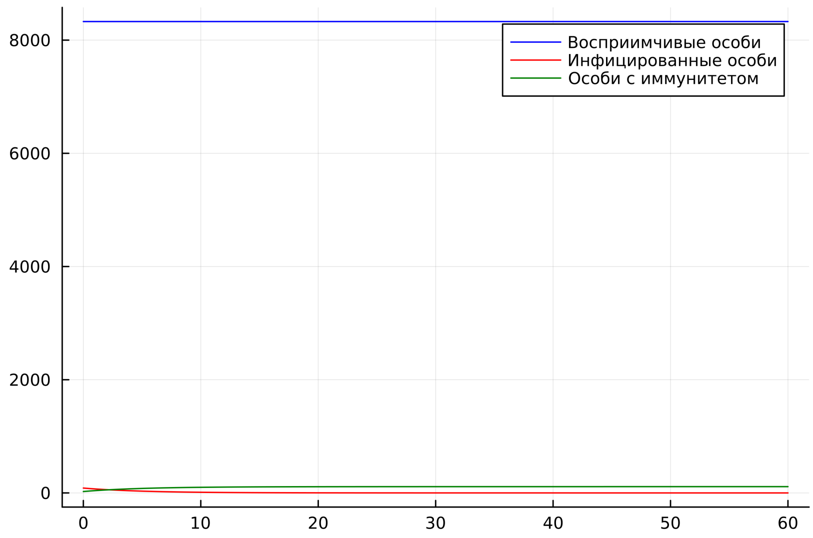

Рис. 1: График при условии, что число зараженных меньше критического значения

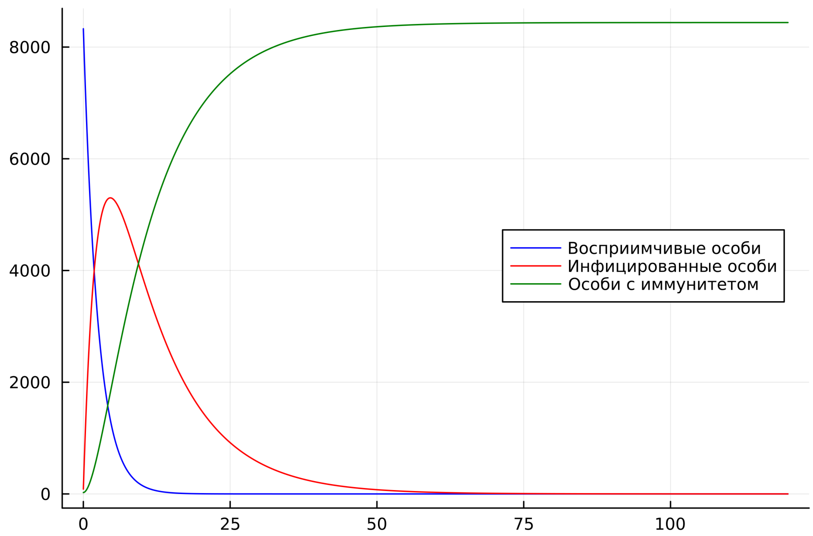

Рис. 2: График при условии, что число зараженных больше критического значения

OpenModelica

Код программы для случая $I(0) \leq I^*$:

```
model lab6_1
Real N = 8439;
Real I;
Real R;
Real S;
Real alpha = 0.6;
Real beta = 0.2;
initial equation
I = 86;
R = 25;
S = N - I - R;
equation
der(S)=0;
der(I) = -beta*I;
der(R) = beta*I;
end lab6_1;
```

Код программы для случая $I(0) > I^*$:

```
model lab6_2
Real N = 8439;
Real I;
```

```
Real R;
Real S;
Real alpha = 0.4;
Real beta = 0.1;
initial equation
I = 86;
R = 25;
S = N - I - R;
equation
der(S) = -alpha*S;
der(I) = alpha*S - beta*I;
der(R) = beta*I;
end lab6_2;
```

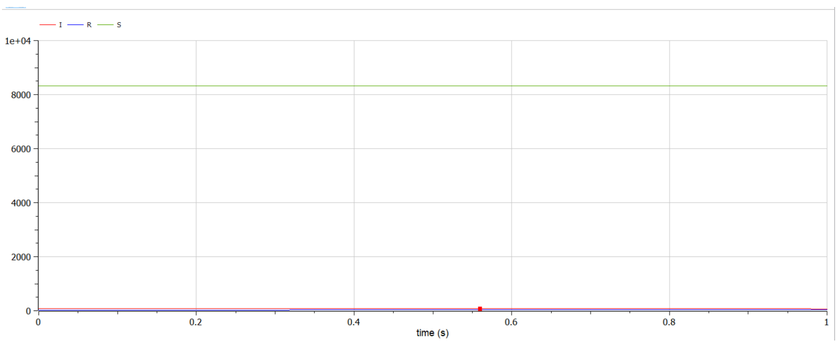

Рис. 1: OpenModelica. График при условии, что число зараженных меньше критического значения

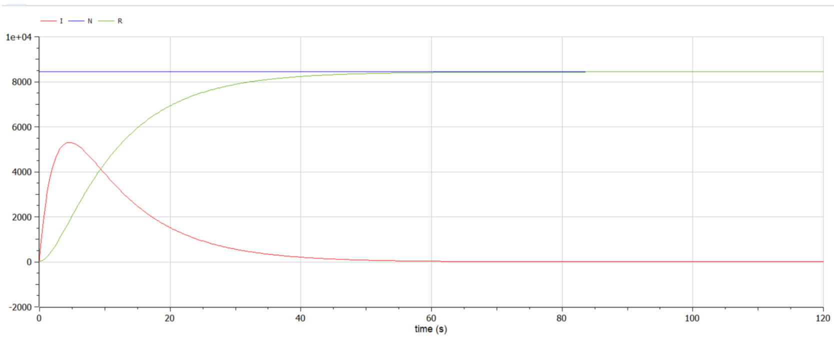

Рис. 2: OpenModelica. График при условии, что число зараженных больше критического значения

Вывод

Изучили и построили модель эпидемии.

Список литературы. Библиография

[1] Документация по Julia: https://docs.julialang.org/en/v1/

[2] Документация по OpenModelica: https://openmodelica.org/

[3] Решение дифференциальных уравнений: https://www.wolframalpha.com/

[4] Конструирование эпидемиологических моделей: https://habr.com/ru/post/551682/