

8–9 КЛАСИ

1. Медіани AM і BE трикутника ABC перетинаються в точці O . Точки O, M, E, C лежать на одному колі. Знайдіть AB , якщо $BE = AM = 3$.

Відповідь. $2\sqrt{3}$.

Вказівка. Доведіть, що трикутник ABC — рівносторонній.

2. Дано дугу кола, центр якого — недоступна точка, A — точка на цій дузі. Як з допомогою циркуля та лінійки побудувати дотичну до заданої дуги кола в точці A ?

Вказівка. Використайте властивість кута між дотичною і хордою, проведеної з точки дотику.

3. Дві сторони трикутника дорівнюють 10 і 15. Доведіть, що довжина бісектриси кута між ними менше 12.

Вказівка. Через основу бісектриси проведіть пряму, яка паралельна одній із сторін трикутника; скористайтесь властивістю бісектриси трикутника.

4. В рівнобічній трапеції одна з основ втричі більша за іншу. Кут при більшій основі дорівнює 45° . Покажіть, як розрізати цю трапецію на три частини і скласти з них квадрат.

5. Чотири точки кола розташовані в такому порядку: A, B, C, D . Продовження хорди AB за точку B і хорди CD за точку C перетинаються в точці E , причому $\angle AED = 60^\circ$. Величина кута ABD втричі більша за величину кута BAC . Доведіть, що AD — діаметр кола.

Вказівка. Використайте властивості вписаних кутів і доведіть, що $\angle BAC = 30^\circ$.

6. Дано трапецію $ABCD$ з основами BC і AD , причому $AD = 2BC$. Нехай M — середина AD , E — точка перетину бічних сторін AB і CD , O — точка перетину BM і AC , N — точка перетину EO і BC . У якому відношенні точка N ділить відрізок BC ?

Вказівка. Доведіть, що $ABCM$ — паралелограм, а BC — середня лінія трикутника AED .

10–11 класи

1. Дано коло ω і точка D зовні цього кола. Знайдіть такі точки A , B і C на колі ω , щоб чотирикутник $ABCD$ був опуклим і мав максимально можливу площину.

Вказівка. Скористайтеся формулою, яка виражає площину чотирикутника через довжини діагоналей і кут між ними.

2. В тетраедрі $DABC$ $AB = BC$, $\angle DBC = \angle DBA$. Доведіть, що $AC \perp DB$.

Вказівка. Розгляньте площину (DBM) , де M — середина AC .

3. В колі проведено хорди AB і BC , причому $AB = \sqrt{3}$, $BC = 3\sqrt{3}$, $\angle ABC = 60^\circ$. Здайдіть довжину тієї хорди кола, яка ділить кут ABC навпіл

Вказівка. Скористайтеся теоремою косинусів.

4. Медіана AM і бісектриса CD прямокутного трикутника ABC ($\angle B = 90^\circ$) перетинаються в точці O . Знайдіть площину трикутника ABC , якщо $CO = 9$, $OD = 5$.

Вказівка. Добудуйте трикутник до паралелограма.

5. Знайдіть площину перерізу одиничного куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ площиною, яка проходить через середини ребер AB , AD і CC_1 .

Вказівка. Побудуйте переріз. Скористайтеся формулою площині ортогональної проекції многокутника.

6. Дано коло ω радіуса r і точка A , яка віддалена від центра кола на відстань $d < r$. Знайти геометричне місце вершин C всіх можливих прямокутників $ABCD$, де точки B і D лежать на колі ω .

Вказівка. Доведіть і використайте той факт, що якщо $ABCD$ — прямокутник, M — точка в площині цього прямокутника, то $MA^2 + MC^2 = MB^2 + MD^2$