بسم الله الرحمن الرحیم

پروژه ایرودینامیک

بهار ۹۷

دینا سلطانی تهرانی ۹۵۲۹۰۳۳ -- مینا صالحی مرنی ۹۵۲۹۰۴۰ - نسیم فلاحی آرزودار ۹۵۲۹۴۳۲

مقدمه

به طور کلی روش های به دســـت آوردن نیروهای پســـا و برا در ایرودینامیک و طراحی ســـازه های هوایی از م سائل کاربردی در صنعت هوافضا بوده و ه ست. معادلاتی که برای به د ست آوردن این نیروها ا ستفاده می شود در حالت کلی معادلات معروف به ناویر-ا ستوکس ا ست که از نوع معادلات دیفرانسیل جزئی ه ستند و حل انها ب سیار مشـــکل خواهد بود. امروزه نرم افزارهای تجاری مانند فلوئنت و CFX به راحتی این pde ها را حل کرده و نتایج را به دقت ارائه می دهند ولی در ن سل های پیش از این نرم افزارها همه محا سبات به صورت د ستی، تجربی و یا نهایتا به کمک نرم افزارهای ابتدایی مثل x-foil انجام می شد. هدف از این پژوهش استفاده از این روش ها و مقایسه نتایج آنها است.

معرفی اولیه

پنل متد از جله روش های عددی حل معادلات مبتنی بر سطح است که از آن برای تحلیل جریان های نیوتونی غیر لزج و غیر چرخ شی در اطراف ابزارهای پرنده در سرعت های مادون صوت یا مافوق صوت ا ستفاده می شود. ابزارهای کاربر در این روش عبارت اند از: (۱) صفحه های تختی که با تعداد معین بدنه را مدل سازی میکنند و روی این صفحه ها سه نوع توزیع تئوریک چ شمه ، چاه و گردابه آزادمی تواند قرار دا شته با شد. (۲) شرایط مرزی مختلفی که ب سته به م سئله می توانند طرح و ا ستفاده شوند. در حال حا ضر کدهای پنل متد تنها کدهایی ه ستند که به صورت گسترده و بعد از نرم افزارهای پیشرفته تجاری برای مدلسازی هندسه های پیچیده و موارد خاص تو سعه یافته اند. به کمک این کدها و ترکیب انها با برخی از همین نرم افزار های جدید، حل ناحیه گذرای جریان امکان پذیر شده است که پیشرفت مهمی به شمار میرود. نتایج حاصل از این حل ها با دقت خوبی بسته به نوع مسئله تعیین میشود ولی به طور

کلی این روش ها فوایدی دارند که هنوز ا ستفاده از انها در بسیاری از موارد به لحاظ سرعت و حجم محا سباتی بر نرم افزارهای تجاری ترجیح داده میشود. این نوشتار خلاصه ای از مزایا و معایب این روش ارائه میدهد.

توضیح نمادهای استفاده شده

C_p = **ضریب پسا**

γ = (vortex strength)**قدرت گردابه**

c = **وتر بال**

α = **زاویه حمله**

ψ = (stream function)**تابع جریان**

ϕ = **تابع پتانسیل جریان**

Q = (source,sink strength)**قدرت چشمه و چاه**

σ = (source,sink)**چاه و چشمه برروی پانل ها**

A = **ماتریس ضرایب**

b = **ضرایب سمت راست معادله**

C_l = **ضریب برآ**

شرح محاسباتی روش

ابتدا بدنه ایرفویل به n پنل (n+1) نقطه تقســیم شــده روی هر پنل یک توضــیع پیوســته از منبع و گردابه است که در طول پنل ثابت می باشد ولی قدرت منبع از پنل به پنلی دیگر متفاوت است.

تقسیم بندی پنل های ایرفول را می توان با توابع گوناگون انجام داد. که یکی از اون توابع به شکل زیر است:

$$\frac{x}{c} = \frac{1}{2}(\cos\varphi + 1) \qquad \varphi = [0, 2\pi]$$
$$\frac{x}{c} = [0, 1]_{\text{bottom}} \,\&\, [0, 1]_{\text{top}}$$

برای ساختن خطوط جریان اصلی روی بدنه ایرفول از توزیع پیوسته ی چشمه و چاه بر روی هر پنل استفاده می شود برای تولید نیروی لیفت از توزیع گردابه استفاده می شود که بر روی پنل ها ثابت است.

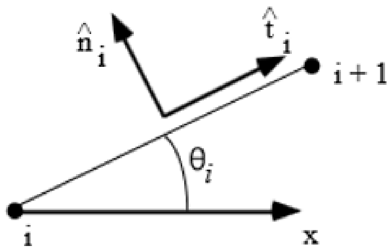
در حال حاضر مسئله دارای N+1 مجهول است که نیاز به N+1 معادله است.

1) **بدنه به عنوان یک خط جریان در نظر گرفته شده است پس سرعت عمود بر آن باید صفر باشد بنابراین سرعت عمود بر هر پنل باید صفر شود. ($V_i . n = 0$) با این کار N معادله به وجود می آید.**
2) **با استفاده از شرط کاته معادله ی $N + 1$ را به دست می آید ، بدین صورت که سرعت در نزدیکی لبه فرار در بالا و پایین ایرفول با هم برابر باشد.**

برای راحتی در محاسبات فرض شده است که سرعت در وسط هر پنل حساب شود که به آن نقطه کنترل (control point)می گویند

سرعتی که روی هر پنل وجود دارد عبارت اند از : سرعت جریان آزاد – سرعت القایی توسط همه پنل ها (چشمه – چاه – گردابه) و سرعت القایی خود پنل روی خودش.

برای بدست آوردن معادلات روی هر پنل به دلیل مسطح بودن یک دستگاه مختصات محلی تعریف می شود برای این دستگاه طبق اشکال زیر خواهیم داشت که:



سرعت برای جریان آزاد :

$$\Psi = U_\infty y - V_\infty x + cost$$

$$u = U_\infty = U\cos\alpha \quad \& \quad v = V_\infty = U\sin\alpha$$

سرعت برای چشمه :

$$\varphi = \frac{Q}{2\pi}\ln r$$

سرعت برای گردابه:

$$\psi = \frac{\Gamma}{2\pi}\ln r$$

برای یک نقطه ی دلخواه p سرعت القایی هر پنل را محا سبه کرده و سپس نقطه ی p را به پنل مورد نظر نـ سبت می دهیم.

زاویه ی هر پنل با محور مختصات اصلی را با θ_i نمایش می دهیم.

حال فرض می کنیم می خواهیم تاثیر پنل i ام را در نقطه ی p ببینیم و سرعت ها را در این نقطه به دست آوریم.

$$\varphi = \frac{Q}{2\pi}Ln(r) \xrightarrow{\text{چون توزیع پیوسته داریم پس}} \varphi_{s_{pi}} = \int_i^{i+1} \frac{\sigma_j}{2\pi} Ln\left(r_{pi}\right) d\xi_i$$

فاصله ی پنل i ام را از نقطه ی فرضی p به دست می آوریم.

$$r_{pi} = \sqrt{\left(\xi_p - \xi_i\right)^2 + \left(\eta_p - \eta_i\right)^2} \xrightarrow{\eta_i = 0} r_{pi} = \sqrt{\left(\xi_p - \xi_i\right)^2 + \left(\eta_p\right)^2}$$

در رابطه ی $\varphi_{s_{pi}}$ قرار می دهیم.

$$\varphi_{s_{pi}} = \int_0^{L_i} \frac{\sigma_i}{4\pi} \mathrm{Ln}\left(\left(\xi_p - \xi_i\right)^2 + \left(\eta_p\right)^2\right) d\xi_i$$

$$\xrightarrow{\sigma_i = cost} \varphi_{s_{pi}} = \frac{\sigma_i}{4\pi} \int_0^{L_i} \mathrm{Ln}\left(\left(\xi_p - \xi_i\right)^2 + \left(\eta_p\right)^2\right) d\xi_i$$

$$\left.\begin{aligned} U_{\xi_{pi}} &= \frac{\partial \varphi_{s_{pi}}}{\partial \xi_p} \\ U_{\eta_{pi}} &= \frac{\partial \varphi_{s_{pi}}}{\partial \eta_p} \end{aligned}\right\} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} U_{\xi_{pi}} = \dfrac{\sigma_i}{4\pi} \displaystyle\int_0^{L_i} \frac{2\left(\xi_p - \xi_i\right)}{\left(\xi_p - \xi_i\right)^2 + \left(\eta_p\right)^2} d\xi_i \\ U_{\eta_{pi}} = \dfrac{\sigma_i}{4\pi} \displaystyle\int_0^{L_i} \frac{2\left(\eta_p\right)}{\left(\xi_p - \xi_i\right)^2 + \left(\eta_p\right)^2} d\xi_i \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} U_{\xi_{pi}} = \dfrac{\sigma_i}{2\pi} \left[\mathrm{Ln}\left(r_{p_i}\right)\right]_0^{L_i} \\ U_{\eta_{pi}} = \dfrac{\sigma_i}{2\pi} \left[\upsilon_{pi}\right]_0^{L_i} \end{cases}$$

سرعت القای هر پنل در وسط خودش :

نقطه p را به وسط خود پنل انتقال می دهیم حال داریم :

برای نقطه ی control point داریم : $\left(\xi_p , \eta_p\right) = \left(\frac{L_i}{2} , 0\right)$

بنابراین :

$$U_{\xi_{pi}} \left(\frac{L_i}{2}\right) = 0$$

$$U_{\eta_{pi}} = \frac{\sigma_i}{4\pi} \left[\upsilon_{pi}\right]_0^{L_i}$$

حال برای محاسبه ی $U_{\eta_{pi}}$ اگر از سمت بالا به وسط پنل نزدیک شویم برابر $\frac{\sigma_i}{2}$ و اگر از پایین نزدیک شویم برابر $-\frac{\sigma_i}{2}$ خواهد شد.

اول پنل i+1 آخر پنل i ام ا ست پس می توانیم به جای $r_{p_i}(L_i)$ از $r_{p_{i+1}}(0)$ ا ستفاده کنیم و همچنین می توانیم به جای $\upsilon_{pi}(L_i)$ از $\upsilon_{pi+1}(0)$ اســـتفاده کنیم که دارای خطا می باشـــد ولی چون پنل ها را کوچک فرض می کنیم خطا بسیار کم است.

و در آخر داریم :

$$U_{\xi_{pi}} = \frac{\sigma_i}{2\pi}\left[\mathrm{Ln}\left(\frac{r_{p_i}(0)}{r_{p_{i+1}}(0)}\right)\right]$$
$$U_{\eta_{pi}} = \frac{\sigma_i}{2\pi}\left[\upsilon_{pi+1}(0) - \upsilon_{pi}(0)\right]$$

حال برای جریان vortex داریم :

$$\Psi = \frac{\Gamma}{2\pi}\mathrm{Ln}(r) \Rightarrow \Psi_{pi} = \int_i^{i+1}\frac{\Gamma(r_{pi})}{2\pi}\mathrm{Ln}(r_{pi})d\xi_i$$

برای محاسبه ی r_{p_i} داریم:

$$r_{p_i} = \sqrt{(\xi_p - \xi_i)^2 + (\eta_p - \eta_i)^2} \xrightarrow{\eta_i=0} r_{p_i} = \sqrt{(\xi_p - \xi_i)^2 + (\eta_p)^2}$$

با جایگذاری r_{p_i} در Ψ و انجام مراحل :

$$\begin{cases} U_{\eta_{pi}} = \dfrac{\Gamma}{2\pi}\left[\mathrm{Ln}(r_{p_i})\right]_0^{L_i} \\ U_{\xi_{pi}} = \dfrac{\Gamma}{2\pi}\left[\upsilon_{pi}\right]_0^{L_i} \end{cases}$$

و مانند چشمه داریم :

$$\begin{cases} U_{\eta_{pi}} = \dfrac{\Gamma}{2\pi}\left[\mathrm{Ln}\left(\dfrac{r_{p_{i+1}}(0)}{r_{p_i}(0)}\right)\right] \\ U_{\xi_{pi}} = \dfrac{\Gamma}{2\pi}\left[\upsilon_{pi+1}(0) - \upsilon_{pi}(0)\right] \end{cases}$$

سرعتی که پنل در وسط خود القا می کند :

$$\begin{cases} U_{\eta_{pi}}(\frac{L_i}{2}\ ,0) = 0 \\ U_{\xi_{pi}}(\frac{L_i}{2}\ ,0) = \pm\frac{\Gamma}{2\pi} \end{cases}$$

سرعت هایی که به دست آمده در راستای ξ و راستای η هر پنل است باید آن ها را در راستای x و y اصلی به دست آورید تا بتوانید با هم جمع کنید :

$$\begin{cases} U_{s_{pi}} = U_{s_{\xi_{pi}}}\cos(\theta_i) - U_{s_{\eta_{pi}}}\sin(\theta_i) \\ V_{s_{pi}} = U_{s_{\xi_{pi}}}\sin(\theta_i) + U_{s_{\eta_{pi}}}\cos(\theta_i) \\ U_{v_{pi}} = U_{v_{\xi_{pi}}}\cos(\theta_i) - U_{v_{\eta_{pi}}}\sin(\theta_i) \\ V_{v_{pi}} = U_{v_{\xi_{pi}}}\sin(\theta_i) + U_{v_{\eta_{pi}}}\cos(\theta_i) \end{cases}$$

حال نقطه ی p را به وسط پنل j ام انتقال می دهیم و نوشتار را به صورت زیر در می آوریم :

$$\begin{cases} U_{s_{ii}} = U_{s_{\xi_{ij}}}\cos(\theta_i) - U_{s_{\eta_{ij}}}\sin(\theta_i) \\ V_{s_{ii}} = U_{s_{\xi_{ij}}}\sin(\theta_i) + U_{s_{\eta_{ij}}}\cos(\theta_i) \\ U_{v_{ii}} = U_{v_{\xi_{ij}}}\cos(\theta_i) - U_{v_{\eta_{ij}}}\sin(\theta_i) \\ V_{v_{ii}} = U_{v_{\xi_{ij}}}\sin(\theta_i) + U_{v_{\eta_{ij}}}\cos(\theta_i) \end{cases}$$

برای control point هر پنل می توان نوشت :

$$V_i = \left[U_\infty + \sum_{i=1}^{N} U_{s_{ij}} + \sum_{i=1}^{N} U_{v_{ij}}\right]\hat{\imath} + \left[V_\infty + \sum_{i=1}^{N} V_{s_{ij}} + \sum_{i=1}^{N} V_{v_{ij}}\right]\hat{\imath}$$

بردار نرمال و مماسی هر پنل در دستگاه مختصات اصلی به صورت زیر می باشد :

$$\begin{cases} n_i = -\sin(\theta_i)\,\hat{\imath} + \cos(\theta_i)\hat{\imath} \\ t_i = \cos(\theta_i)\,\hat{\imath} + \sin(\theta_i)\,\hat{\imath} \end{cases}$$

براساس آنچه که قبلا بیان شد دارای N+1 مجهول هستیم که برای به دست آوردن آن ها باید N+1 معادله بسازیم که N معادله آن از رابطه ی زیر به دست می آید :

بدنه ای که ما داریم خود یک stream line است پس سرعت عمود بر آن صفر است پس :

$$V_i . n_i = 0$$

$$\xrightarrow{\text{پس}} \left[U_\infty + \sum_{i=1}^{N} U_{s_{ij}} + \sum_{i=1}^{N} U_{v_{ij}}\right](-\sin(\theta_i))\hat{\imath} + \left[V_\infty + \sum_{i=1}^{N} V_{s_{ij}} + \sum_{i=1}^{N} V_{v_{ij}}\right](\cos(\theta_i))\hat{\imath} = 0$$

چون N پنل داریم پس N معادله به شکل بالا به دست می آید که پس از ساده سازی میتوان به شکل زیر نشان داد :

$$\sum_{i=1}^{N} A_{i,j}\sigma_i + A_{i,N+1}\Gamma = b_i$$

معادله ی N+1 ام از شرط Kutta به دست می آید.یکی از پیامد های شرط کاته این بود که سرعت مماسی در نزدیکی TE در دو طرف ایرفویل با هم بربر است :

$$U_1 \cos(\theta_1) + V_1 \sin(\theta_1) = -U_N \cos(\theta_N) - V_N \sin(\theta_N)$$

که با ساده سازی و جایگذاری به فرمت زیر در می آید :

$$\sum_{i=1}^{N} A_{N+1,i}\sigma_i + A_{N+1,N+1}\Gamma = b_{N+1}$$

حال با اضافه کردن این معادله به N معادله ی قبلی ماتریس زیر به وجود می آید :

$$\begin{bmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1,N+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{N+1,1} & \cdots & A_{N+1,N+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \vdots \\ \Gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_{N+1} \end{bmatrix}$$

با حل دستگاه بالا Γ , σ_N , ... ,σ_1 به دست می آید.

نیروی لیفت از ۲ حالت بدست می اید

1) **شرط کاته**
2) **انتگرال گیری فشار بر روی سط**

حال می توان C_l , Lift , C_p را از روابط زیر به دست آورد :

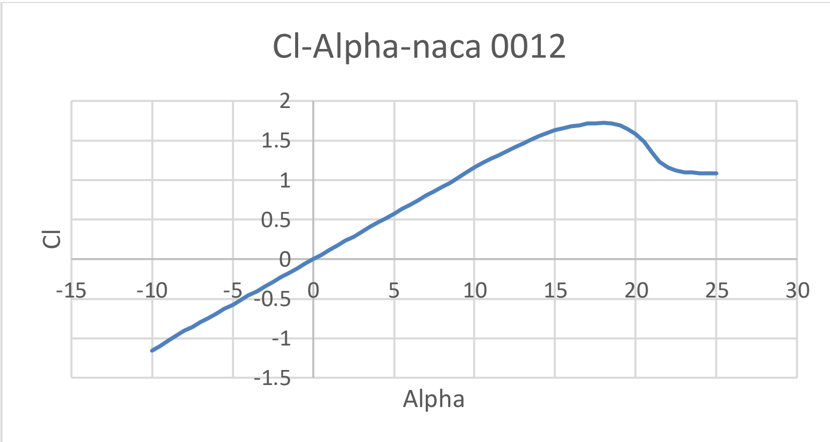
$$C_p = 1 - \frac{V^2}{U_\infty^2}$$

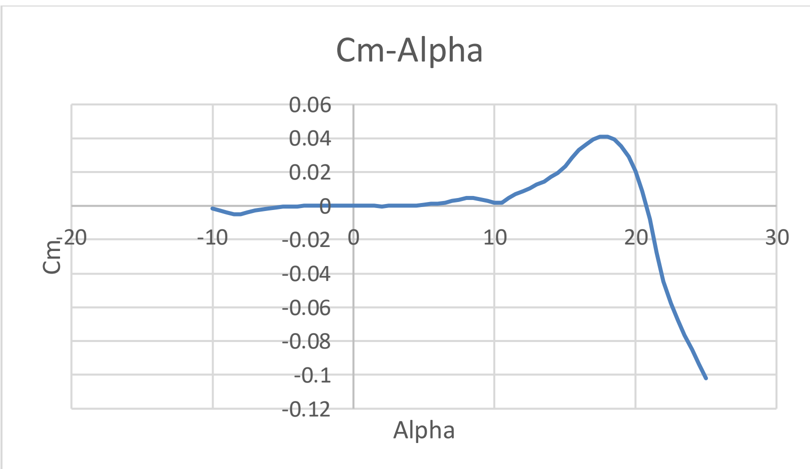
$$L = \rho U_\infty \Gamma$$

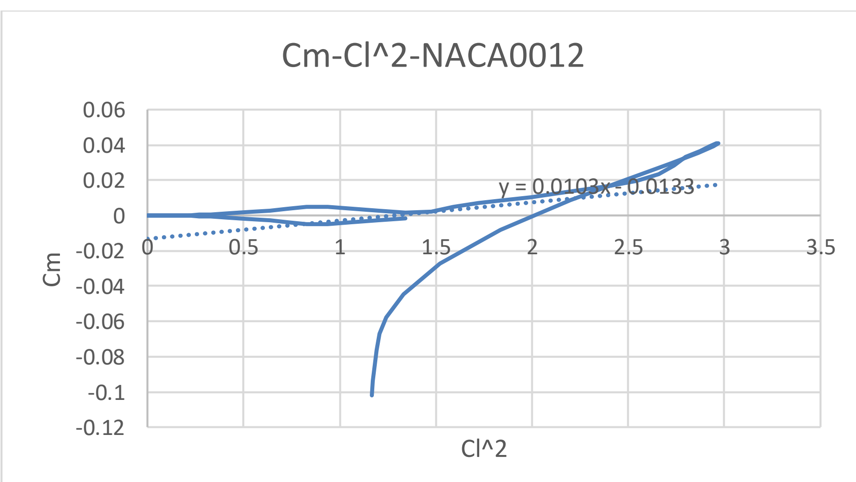
$$C_l = \frac{2\Gamma}{U_\infty c}$$

در زیر داده های به دست آمده به صورت نمودار ارائه شده است که توضیح هر کدام در زیر آن آمده است:

- NACA 0012 – plots

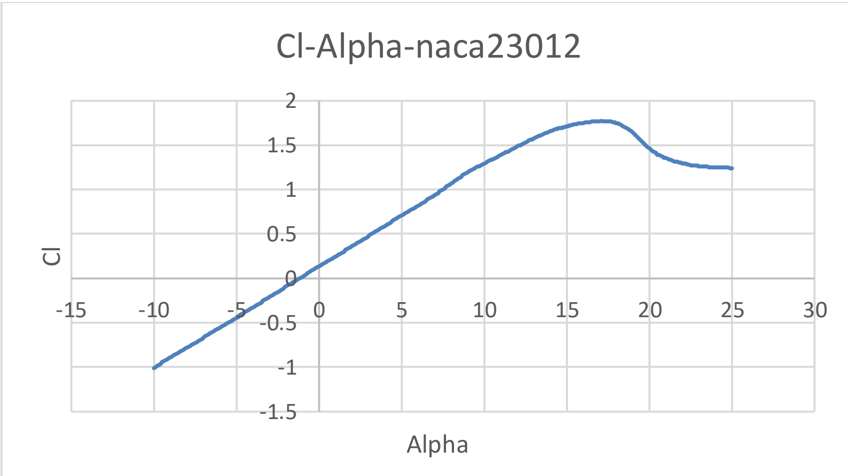


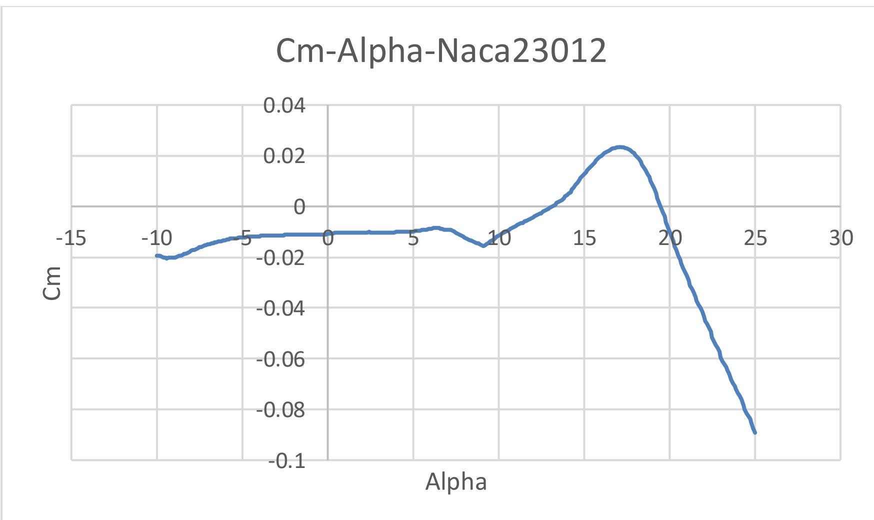


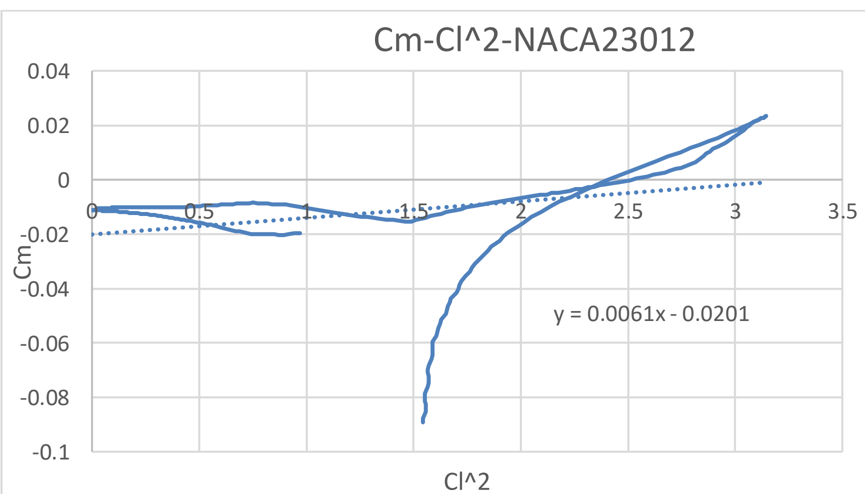


Re = 6e6 M=0.2

- NACA 23012

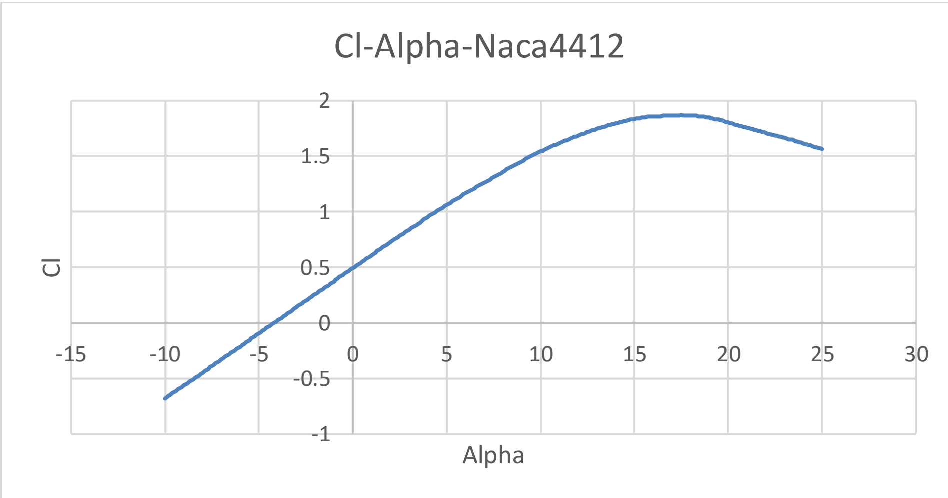


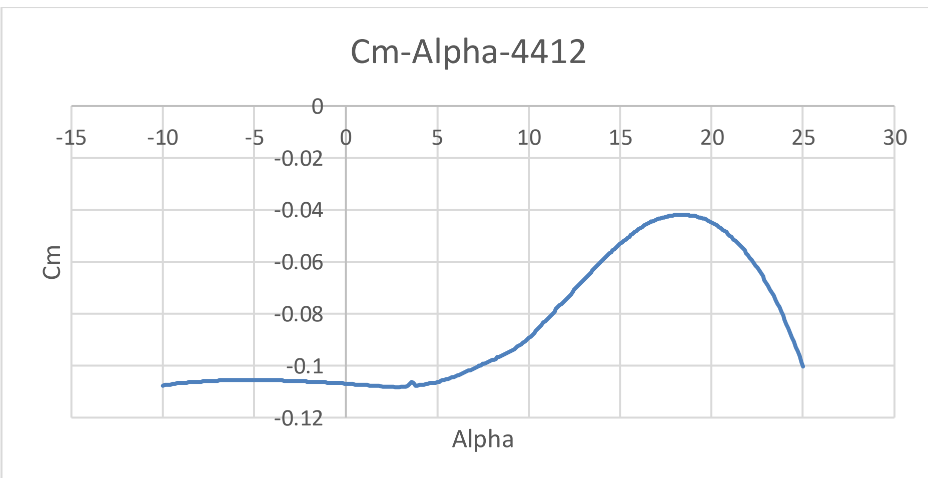


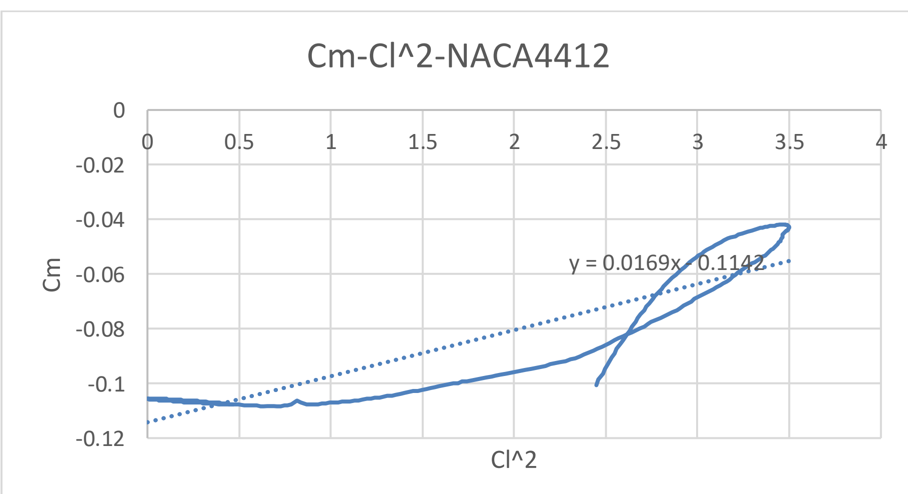


Re = 5e6 M=0.2

- NACA 4412

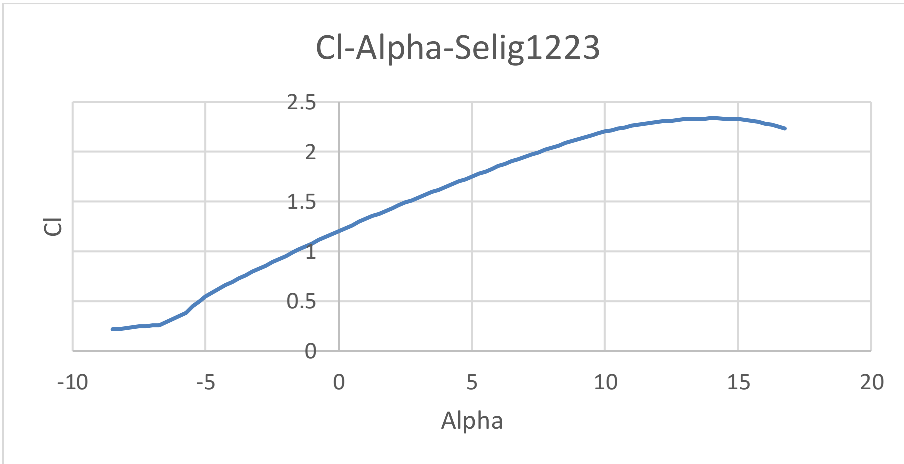


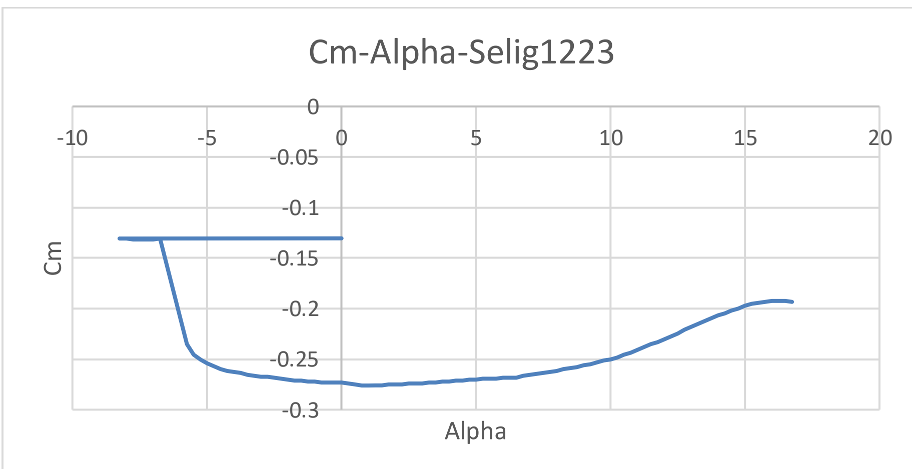


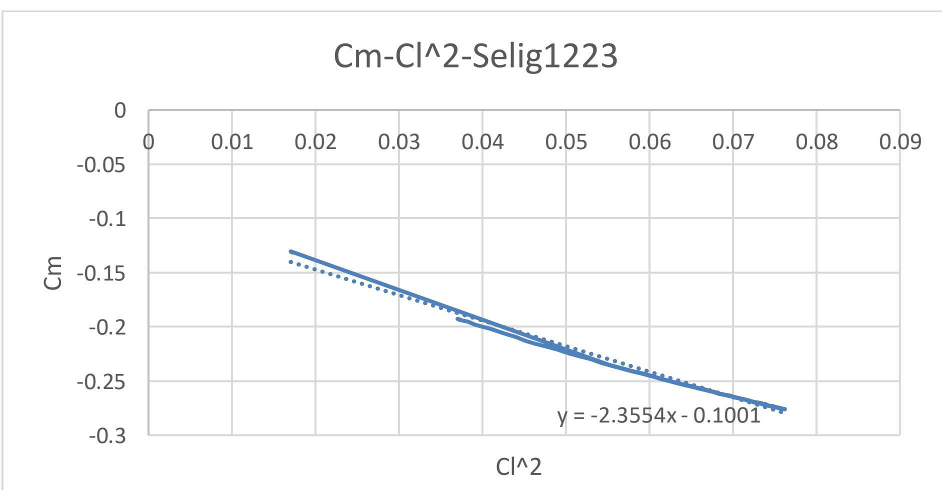


Re = 5e6 M=0.2

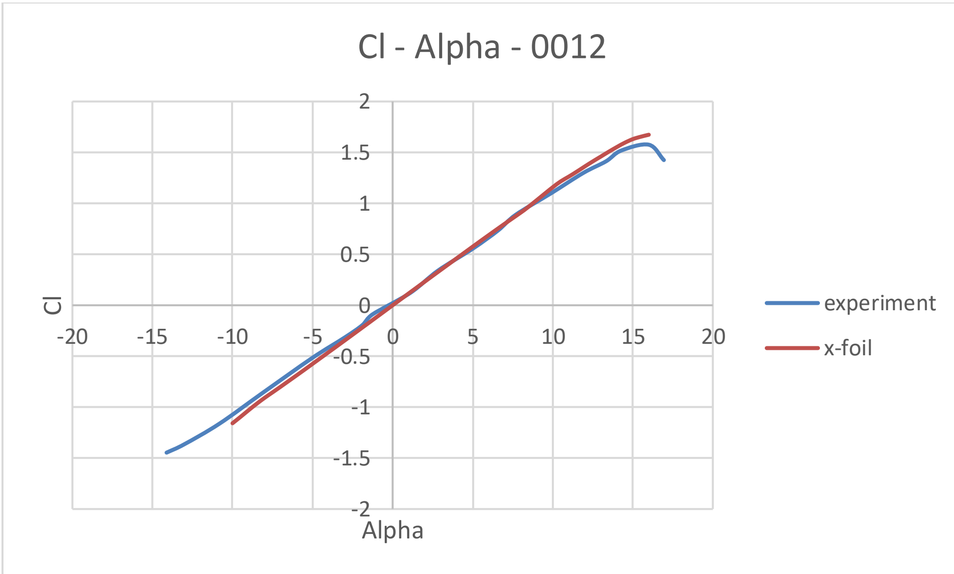
- Selig-s1223







Re=1e6 , M=0.2


Cl - Alpha - 0012
Cl
Alpha
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
-20
-15
-10
-5
0
5
10
15
20
experiment
x-foil