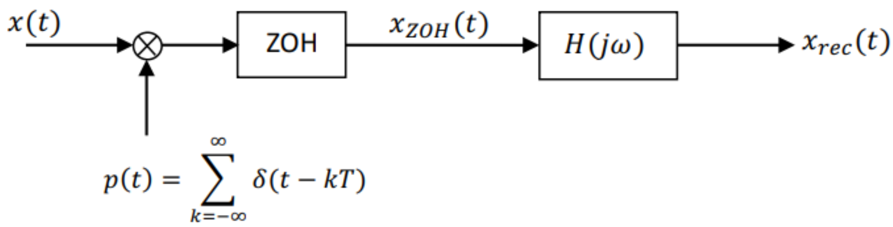
עבודת מחשב 1 - עיבוד אותות

שאלה 1 - דגימה ושחזור:

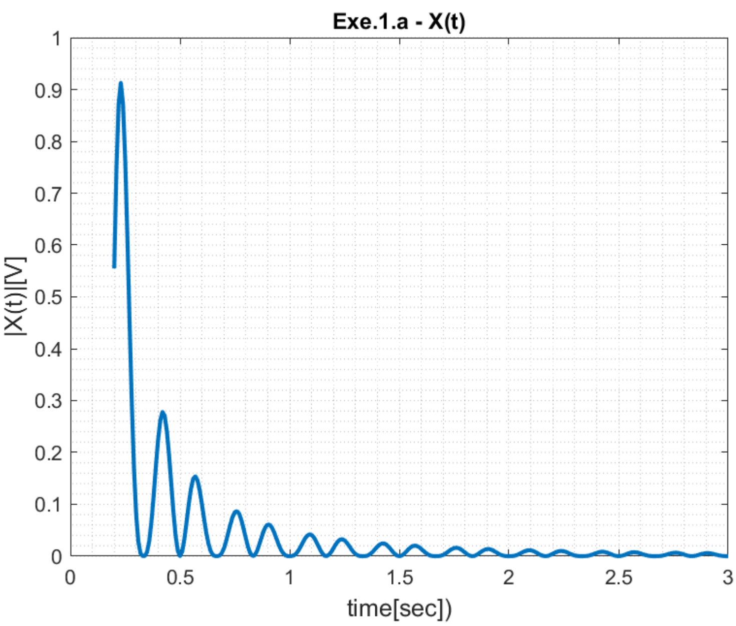


נתון האות הרציף הבא: $\omega_m = 3\pi$, $x(t) = \frac{4}{\omega_m \pi t^2} \cdot \sin^2(\omega_m t)\, cos(\omega_m t) \sin(2\omega_m t)\ [V]$.

א. (5 נק'). צייר/י את $x(t)$ בעזרת MATLAB בתחום $t \in [0.2,3]\ [sec]$. לצורך כך היעזר/י בשלבים הבאים:

- יש ליצור וקטור שורה של נקודות הזמן בהן יוצג האות: $t = 0.2: 1/100: 3$.
- חשב/י את האות בנקודות הזמן שיצרת :
  - x = 4./(wm*pi*t.^2).*(sin(wm*t)).^2.*(cos(wm*t)).*(sin(2*wm*t))
- הצג/י את הערך המוחלט של תוצאות החישוב: $plot(t,x)$.
- השתמש/י בפונקציות $xlabel, ylabel, title$ לצורך הוספת כותרת ושמות לצירים.

פתרון 1א': הצגנו את הערך המוחלט של האות על הגרף:



ב. (10 נק'). יש לפתח ביטוי ל-$X^F(\omega)=\mathcal{F}\{x(t)\}$, התמרת פורייה של האות $x(t)$. הצג/י גרף של $|X^F(\omega)|$, כאשר $\omega\in[-17\pi,17\pi]\ \left[\frac{rad}{sec}\right]$. **את התמרת הפורייה יש לפתח עם הפרמטר ω_m ורק לאחר מכן להציב את ערכו.**

הערה: בפיתוח כדאי לפשט תחילה את האות כך שיהיה מורכב מפונקציות בעלות התמרות מוכרות: exp(),sinc(),sin() וכו'.

פתרון 1ב': מצורפים החישובים להתמרת פורייה של האות x(t):

$$x(t)=\frac{4}{\omega_m\pi t^2}\cdot\sin^2(\omega_m t)\cos(\omega_m t)\cdot\sin(2\omega_m t)=$$

$$\frac{4\omega_m}{\pi}\cdot\text{sinc}\left(\frac{\omega_m}{\pi}t\right)\cdot\text{sinc}\left(\frac{\omega_m}{\pi}t\right)\cdot\underbrace{\cos(\omega_m t)\cdot\sin(2\omega_m t)}_{\text{נפרק לאקספוננטים.}}$$

$$=\frac{4\omega_m}{\pi}\cdot\text{sinc}^2\left(\frac{\omega_m}{\pi}t\right)\cdot\left[\frac{1}{2}\left(e^{j\omega_m t}+e^{-j\omega_m t}\right)\right]\left[\frac{1}{2j}\left(e^{j2\omega_m t}-e^{-j2\omega_m t}\right)\right]=$$

$$\frac{4\omega_m}{\pi}\cdot\text{sinc}^2\left(\frac{\omega_m}{\pi}t\right)\cdot\frac{1}{4j}\left(e^{j3\omega_m t}-e^{-j\omega_m t}+e^{j\omega_m t}-e^{-j3\omega_m t}\right)$$

$$\mathcal{F}\left\{\frac{1}{4j}\cdot\frac{4\omega_m}{\pi}\cdot\text{sinc}^2\left(\frac{\omega_m}{\pi}t\right)\left(e^{j3\omega_m t}-e^{-j\omega_m t}+e^{j\omega_m t}-e^{-j3\omega_m t}\right)\right\}_{(\omega)}=$$

$$\underbrace{\frac{1}{4j}\cdot\frac{4\omega_m}{\pi}}_{C}\left[\mathcal{F}\left\{\text{sinc}^2\left(\frac{\omega_m}{\pi}t\right)\left(e^{j3\omega_m t}\right)\right\}-\mathcal{F}\left\{\text{sinc}^2\left(\frac{\omega_m}{\pi}t\right)\left(e^{-j\omega_m t}\right)\right\}\right.$$

$$\left.+\mathcal{F}\left\{\text{sinc}^2\left(\frac{\omega_m}{\pi}t\right)e^{j\omega_m t}\right\}-\mathcal{F}\left\{\text{sinc}^2\left(\frac{\omega_m}{\pi}t\right)e^{-j3\omega_m t}\right\}\right]$$

כל אקספוננט מפרש כהזזה בתדר כאשר כופלים בו בזמן

לכן הזזה נבצע בסוף התמרות מאקספוננט. <=

$$=C\cdot\frac{1}{2\pi}\cdot\underbrace{\mathcal{F}\left\{\text{sinc}\left(\frac{\omega_m}{\pi}t\right)\right\}}_{\text{מלבן בתדר}}*\underbrace{\mathcal{F}\left\{\text{sinc}\left(\frac{\omega_m}{\pi}t\right)\right\}}_{\text{מלבן בתדר}}$$

איך פה אין הפיכות

(*) $$\mathcal{F}\left\{\text{sinc}\left(\frac{1}{\frac{\pi}{\omega_m}}\cdot t\right)\right\}=\frac{\pi}{\omega_m}\cdot\Pi\left(\frac{\omega}{\frac{2\pi}{\frac{\pi}{\omega_m}}}\right)=$$

$$\frac{\pi}{\omega_m}\cdot\Pi\cdot\left(\frac{\omega}{2\omega_m}\right)$$

$$\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{\pi^2}{\omega_m^2}\,\Pi\left(\frac{\omega}{2\omega_m}\right) * \Pi\left(\frac{\omega}{2\omega_m}\right) = \frac{2\omega_m\cdot\pi^2}{2\pi\,\omega_m^2}\,\Lambda\left(\frac{\omega}{2\omega_m}\right) =$$

$$\frac{\pi}{\omega_m}\,\Lambda\left(\frac{\omega}{2\omega_m}\right) //$$

נבצע הצבה לפונקציה הנ"ל :
לפי האקספוננטות.

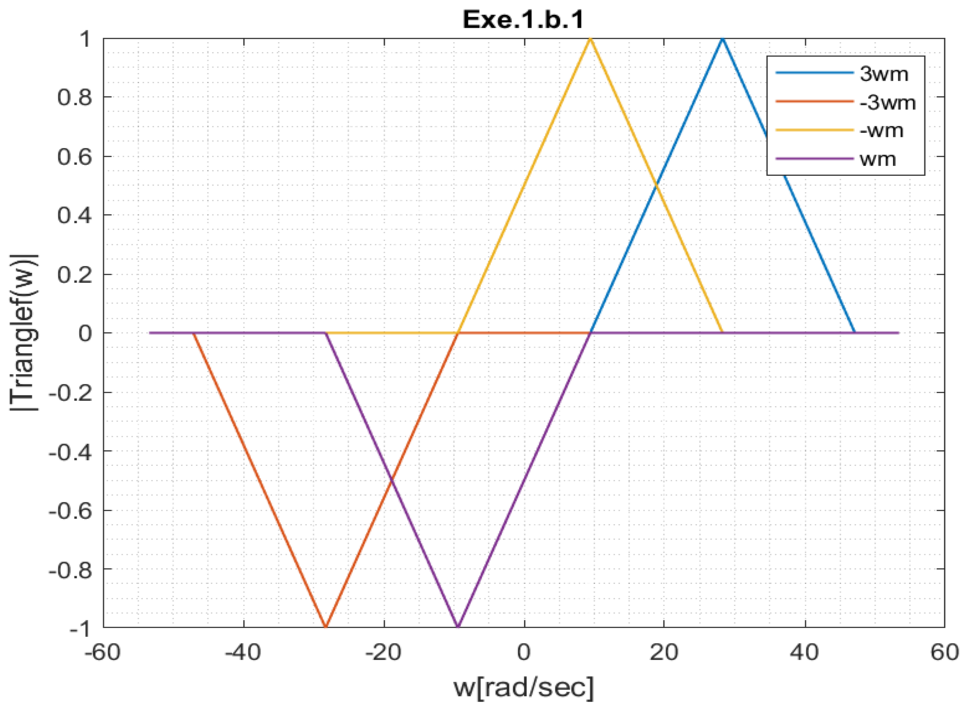
$$\frac{\pi}{\omega_m}\cdot\frac{1}{4j}\cdot\frac{4\omega_m}{\pi}\left[\Lambda\left(\frac{\omega-3\omega_m}{2\omega_m}\right) - \Lambda\left(\frac{\omega+\omega_m}{2\omega_m}\right) + \Lambda\left(\frac{\omega-\omega_m}{2\omega_m}\right)\right.$$

$$\left.\Lambda\left(\frac{\omega+3\omega_m}{2\omega_m}\right)\right] =$$

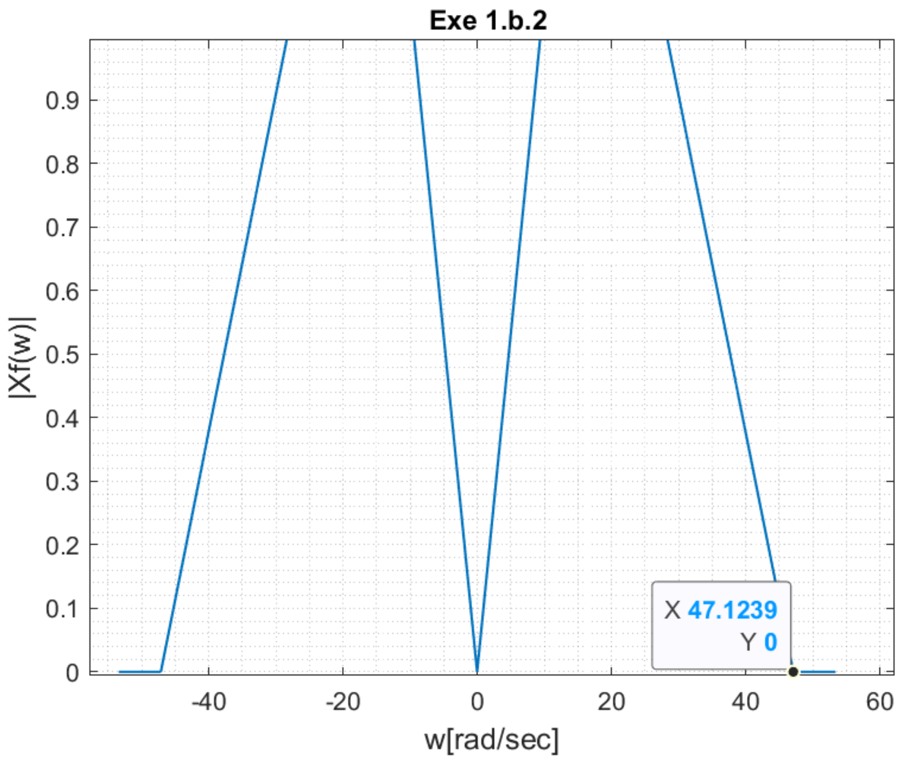
$$\frac{1}{j}\left[\Lambda\left(\frac{\omega-3\omega_m}{2\omega_m}\right) - \Lambda\left(\frac{\omega+\omega_m}{2\omega_m}\right) + \Lambda\left(\frac{\omega-\omega_m}{2\omega_m}\right)\right.$$

$$\left.\Lambda\left(\frac{\omega+3\omega_m}{2\omega_m}\right)\right] //$$

תיארנו כל רכיב של התמרת פורייה של האות בנפרד על הגרף הבא: (בגרף זה ניתן להבדיל בין פונקציות המשולש על פי התדר המרכזי בכל אחת מהן).



לפיכך המשולשים מסתכמים לגרף הבא:



- מהו התדר המקסימלי ω_{max} של האות $x(t)$? (עבור התדר המקסימלי מתקיים $X^F(\omega) = 0\ \forall|\omega| \geq \omega_{max}$)
  הציע/י זמן מחזור לדגימה, T_s, שיאפשר שחזור ללא שגיאות.
- דגמו את האות בנקודות $t_n = nT_s$. מהדגימות יש לייצר אות מדרגות מסוג ZOH, שיסומן ב-$x_{ZOH}(t)$. הציג/י את האותות $x(t)$ ו-$x_{ZOH}(t)$ בגרף אחד.

ג.

פתרון 1ג':

ניתן לראות כאן שהתדר המקסימלי של האות מתקבל מהחישוב של ערך x המופיע בלשונית המקורב מאוד לערך: $15\ \pi$

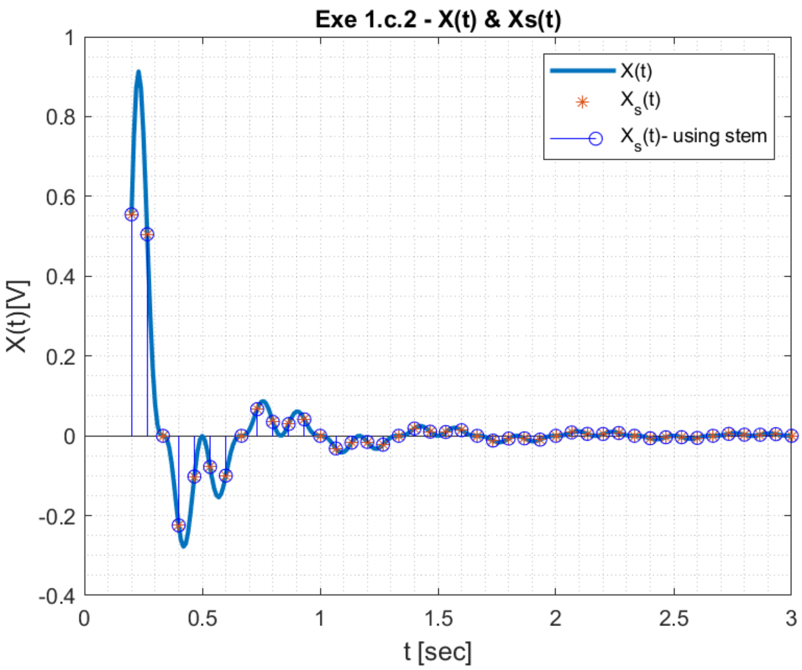
ניתן להבין מהגרף שהתמרת פורייה ממורכזת סביב ה0 והיא סימטרית. נוסף על כך, אינה מחולקת למרווחים מסוימים של תחום התדר ולפיכך לא נוכל לבצע מניפולציות כדי לחסוך ברוחב סרט. לפיכך נאלץ להשתמש בתדר נייקוויסט כחלק מתנאי מספיק לשחזור האות:

$$ws[rad/sec] = 2wmax = 2 * 15\pi = 30\pi$$

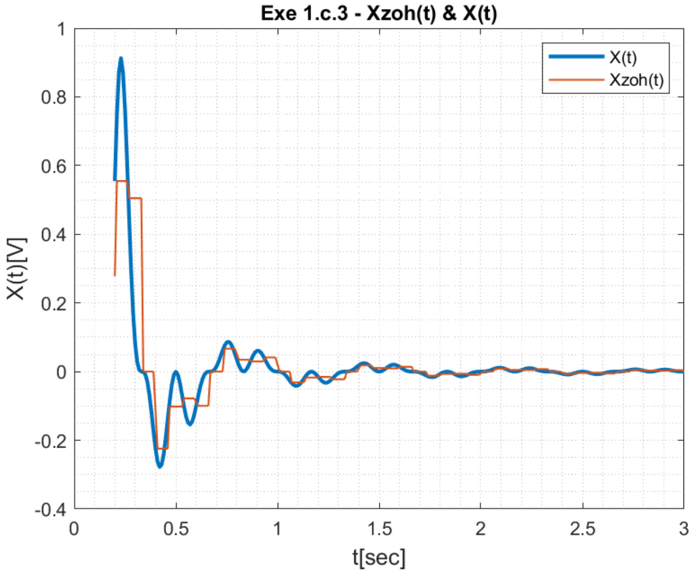
לפיכך זמן הדגימה הנדרש לכך:

$$Ts = \frac{2\pi}{ws} = \frac{1}{15}[sec]$$

דגמנו את האות במרווחים שווים באינטרוול המוזכר בסעיף א' והתוצאה מוצגת על הגרף:



כעת כנדרש יצרנו אות מדרגות מסוג ZOH והצגנו את שני האותות בגרף הנ"ל:



ד. (10 נק') יש לפתח ביטוי ל-$X^F{}_{ZOH}(\omega) = \mathcal{F}\{x_{ZOH}(t)\}$, התמרת פורייה של האות $x_{ZOH}(t)$. הצג/י גרף של $|X^F{}_{ZOH}(\omega)|$, כאשר $\omega \in [-17\pi, 17\pi]\ \left[\frac{rad}{sec}\right]$.

פתרון 1ד':

החישוב האנליטי מצורף בתמונה הבאה:

חזרנו לתרגול כדי להבין

מהי התמרת פוריה של ZOH

הקשר הנעלם שמצוין:

$$X^F_{ZOH}(\omega) = \mathcal{F}\{x_{ZOH}(t)\}$$

$$x_Z(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\cdot\Pi\left(\frac{t-\frac{\tau}{2}-nT}{\tau}\right)$$

$$x_Z(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\cdot\left[\delta(t-nT) * \Pi\left(\frac{t-\frac{\tau}{2}}{\tau}\right)\right]$$

$$X^F_{ZOH}(\omega) = \mathcal{F}\{x_Z(t)\} = \mathcal{F}\left\{\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\cdot\left[\delta(t-nT) * \Pi\left(\frac{t-\frac{\tau}{2}}{\tau}\right)\right]\right\} =$$

$$\frac{1}{\cancel{2\pi}}\cdot\frac{\cancel{2\pi}}{T_s}\cdot\sum_{k=-\infty}^{\infty} X^F(\omega-\omega_s k)\cdot e^{-j\omega\frac{\tau}{2}}\cdot\tau\cdot \text{sinc}\left(\frac{\omega}{\frac{2\pi}{\tau}}\right)$$

$$T_s = \tau$$

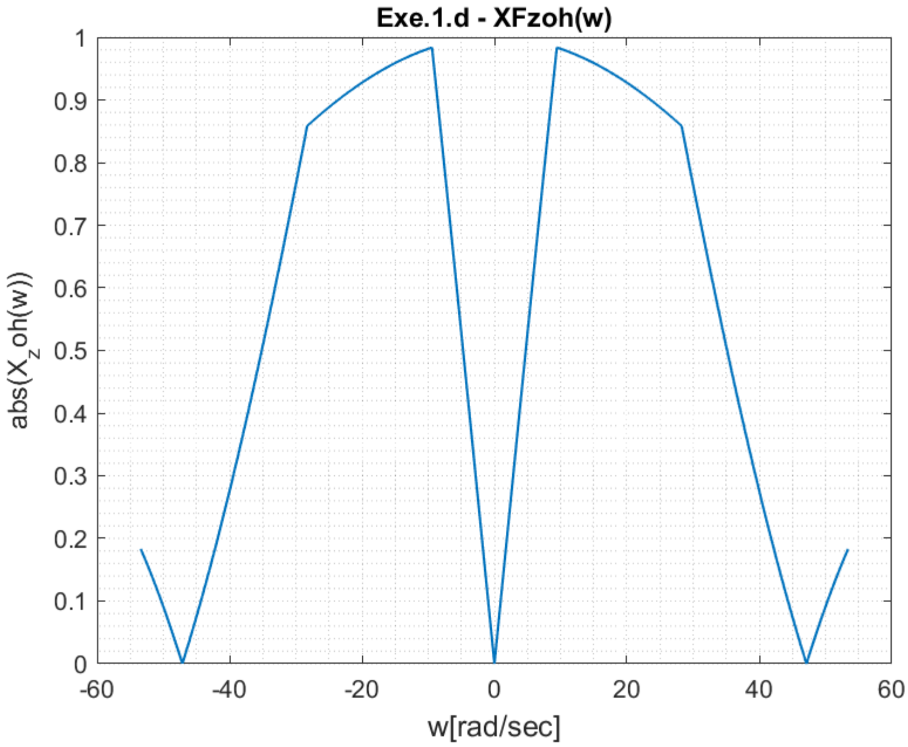
$$= T_s\cdot X^F_p(\omega)\cdot e^{-j\omega\frac{T_s}{2}}\cdot \text{sinc}\left(\frac{\omega T_s}{2\pi}\right) =$$

$$\text{sinc}\left(\frac{\omega T_s}{2\pi}\right)\cdot e^{-j\frac{\omega T_s}{2}}\cdot\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{j}\left[\Lambda\left(\frac{\omega-3\omega_m-k\cdot\omega_s}{2\omega_m}\right)\right.$$

$$-\Lambda\left(\frac{\omega+\omega_m-\omega_s\cdot k}{2\omega_m}\right) + \Lambda\left(\frac{\omega-\omega_m-\omega_s\cdot k}{2\omega_m}\right)$$

$$\left.-\Lambda\left(\frac{\omega+3\omega_m-\omega_s k}{2\omega_m}\right)\right]$$

בעזרת MATLAB תיארנו את התמרת פורייה של אות ZOH בתחום תדרים חסום המצוין בשאלה.



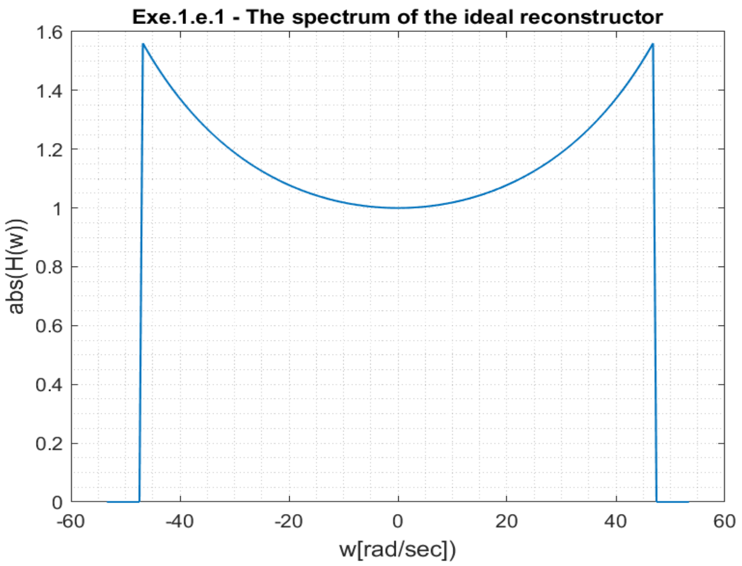
ה. (5 נק') ספקטרום המסנן המשחזר האידיאלי נתון על ידי הפונקציה

$$H(\omega)=\begin{cases}\dfrac{e^{j\pi\omega/\omega_s}}{\operatorname{sinc}(\omega/\omega_s)} & |\omega|\le \omega_s/2\\ 0 & |\omega|>\omega_s/2\end{cases}$$

יש להפעיל את המסנן האידיאלי במישור התדר על $X^F{}_{ZOH}(\omega)$ לקבלת ביטוי ל$X^F{}_{rec}(\omega)$. השתמש/י בפונקצית trapz() על מנת לחשב את האות המשוחזר, $x_{rec}(t)$, על ידי אינטגרל התמרת פורייה. הציגו את האותות $x_{rec}(t)$ ו-$x(t)$ בגרף אחד. האם התקבל שחזור מדויק של $x(t)$? הסבר/י.

פתרון 1ה':

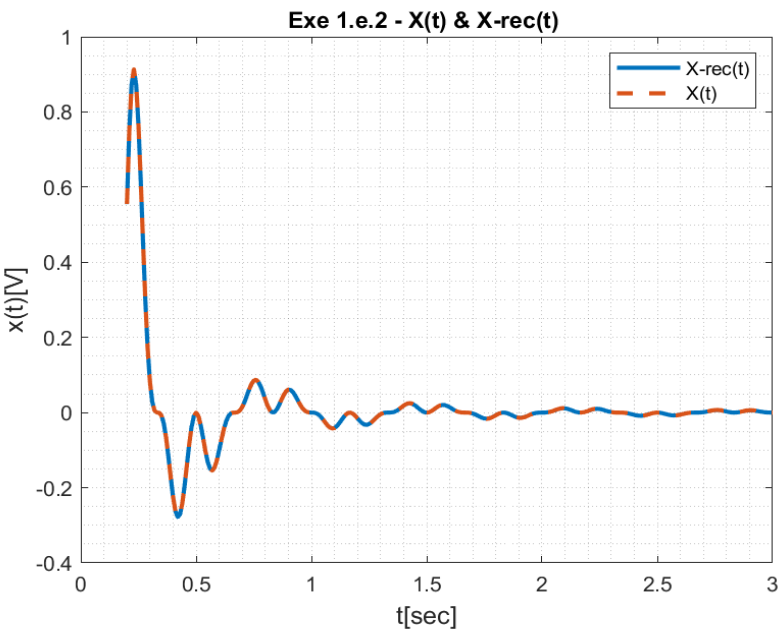
המסנן האידיאלי מתואר בציור הבא בערכו המוחלט. בשלב זה ברצוני להבין איך המסנן בעצם בנוי ואיך הוא נראה .



נפעיל את המסנן האידיאלי כך שיתקבל האות המשוחזר בתדר.

$$X_{rec}^{F}(w) = X_{zoh(w)}^{F} * H_{ideal(w)}$$

נשתמש בהתמרת פורייה הפוכה על מנת להגיע לאות המשוחזר בזמן:



קיבלנו שחזור יחסית מצוין של האות . כמובן שכדי למדוד עד כמה הוא טוב נדרש להעריך את השגיאה בין האותות. בכל מקרה , כל שגיאה שתיווצר תהיה בעקבות ביצוע פעולות מתמטיות שבמבצעים במחשב בתהליך ההגעה לאות המשוחזר הנ"ל.

ו. (5 נק'). כעת הנח/י כי האות $x(t)$ נדגם בתדר $\left[\frac{rad}{sec}\right]$ $\omega_s = 9\omega_m$, האם במקרה זה ניתן לקבל שחזור מדויק? הסבר/י. חזור על סעיף ה' ו-וודא שתוצאותיך מתיישבות עם המסקנה מסעיף זה.

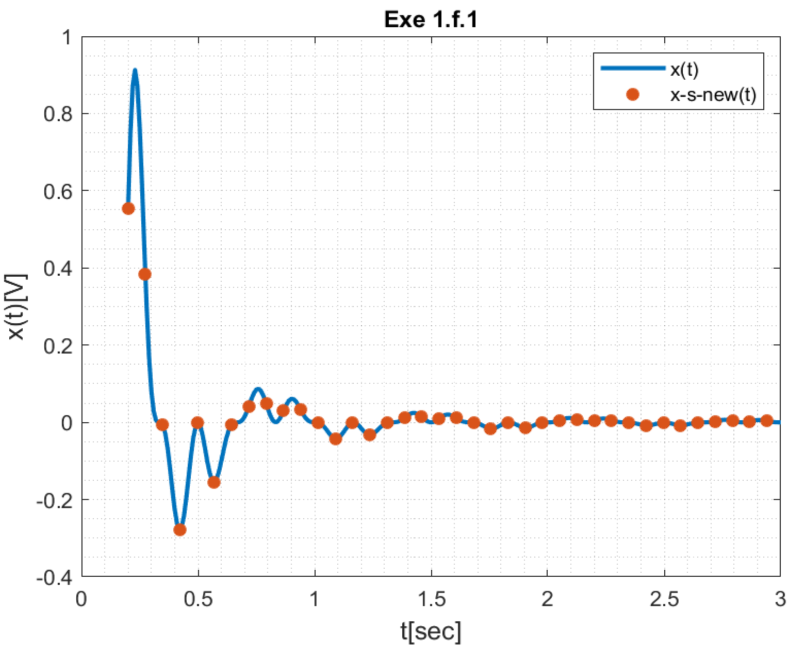
פתרון ו1':

כעת נראה מתמטית איך התדר הדגימה אינו מקיים את נייקוויסט ולפיכך השחזור לא יתבצע במדויק . יתבצעו שכפולים בתדר שיעלו אחד על השני (aliasing) ולא נוכל לקבל שחזור כרצוננו.

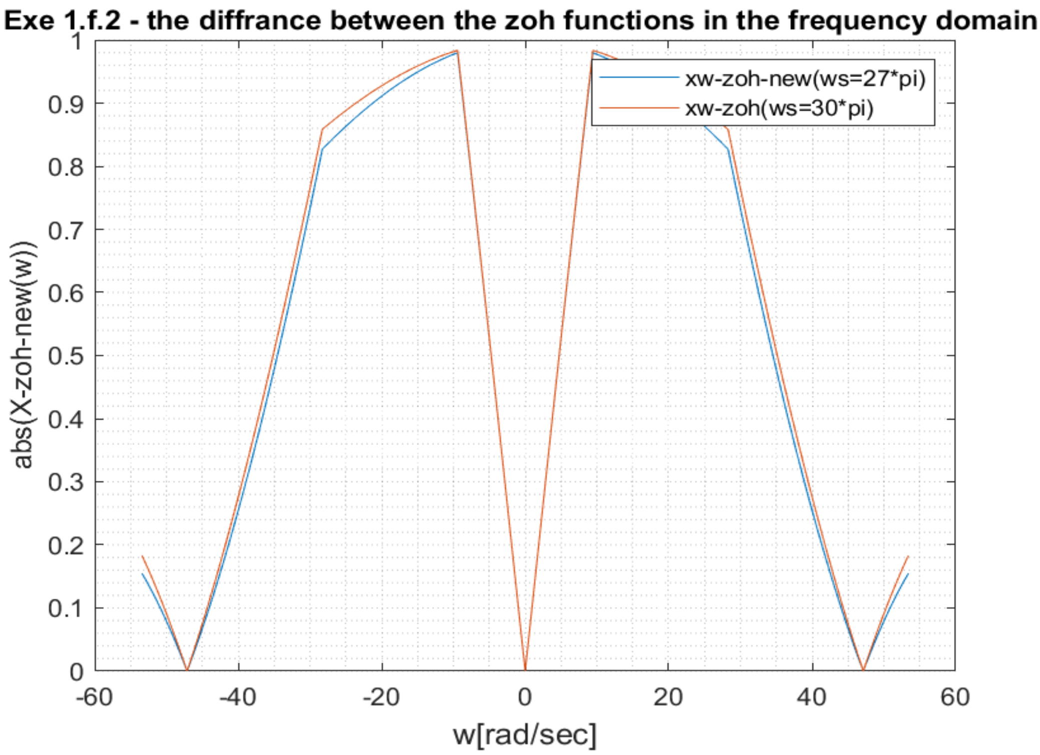
$$ws_{new} = 9 * wm = 9 * 3 * pi = 27 * pi < ws_{old} = 30 * pi$$

$$Ts_{new} = 2 * \frac{pi}{ws_{new}} = 2 * \frac{pi}{27pi} = \frac{2}{27} > Ts_{nyquist} = \frac{1}{15}$$

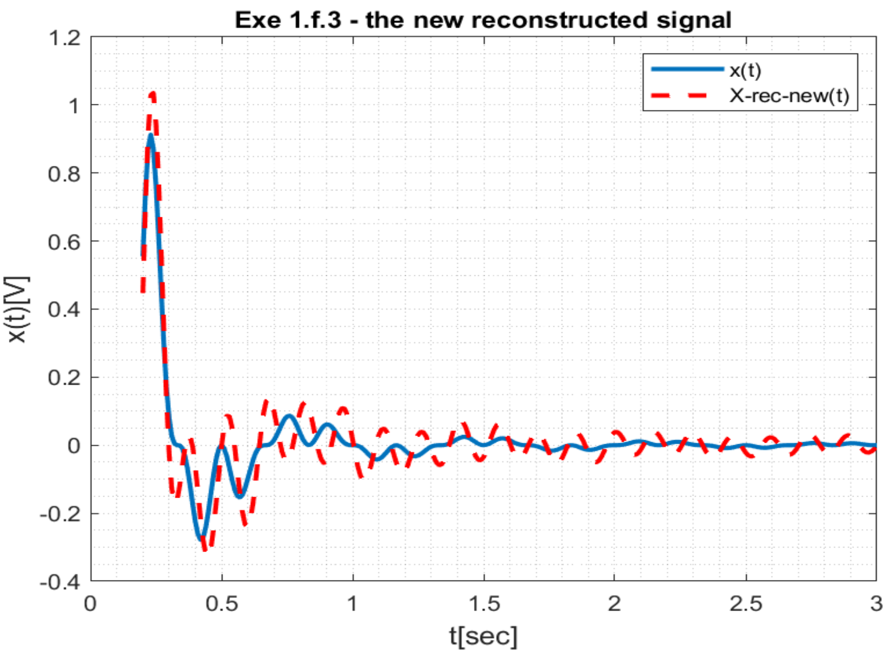
נשים לב שזמן הדגימה יתבצע במרווחים ארוכים יותר בתדר החדש ובשל כך לא נוכל לקבל מספיק אינפורמציה להרכיב את התמונה מחדש במעבר לזמן מהתדר ובשל הסיבה שהוזכרה מקודם (aliasing).



מכאן שנצפה לראות תמונה שונה עבור הביטוי של התמרת פורייה של ZOH במקרה זה:



אכן קיים הבדל וכעת ננסה לשחזר על פי הסעיף הקודם ונראה מה נקבל:



אפשר לראות שהשחזור לא יוצא מדויק כפי שצפינו:

$$x(t) \neq x_{rec_{new}(t)}$$

שאלה 2 – דגימה לא אחידה של אות מחזורי:

נתון אות מחזורי מוגבל סרט: $x(t) = 5\cos(\omega_A t) - 3\sin(\omega_B t);\quad \omega_A = 7\pi,\ \omega_B = 4\pi$

א. (10 נק'). מה זמן המחזור של הפונקציה $x(t)$? דיגמו את האות בצורה אחידה על פני מחזור אחד בעזרת 15 נק' דגימה.

הצג/י את האות ה"דגום" x_s יחד עם האות המקורי ה"רציף" $x(t)$, על פני מחזור אחד.

מדוע נדרשות לפחות 15 נקודות דגימה?

הערה: שימו לב שנקודת הדגימה ה15 של האות ה"דגום" לא ממוקמת בתחילת המחזור השני של האות "הרציף".

הערה: שימו לב כי וקטור הדגימות x_s אינו אות רציף ויש להציג את הדגימות בלבד. לצורך כך השתמשו בתכונות הקו של פונקציית plot() כפי שהוצג בתחילת העבודה.

פתרון 2א':

א) נתון האות $x(t) = 5\cos(w_A t) - 3\sin(w_B t)$, כאשר: $w_A = 7\Pi$, $w_B = 4\Pi$

נסמן: $f(t) = \cos(w_A t)$, $g(t)=\sin(w_B t)$.

אנו יודעים כי הפונק' cos(t) מחזורית 2Π ולכן f(t) בעלת זמן מחזור $T_f = \frac{2\Pi}{w_A} = \frac{2}{7}$

באופן דומה, הפונק' sin(t) מחזורית 2Π ולכן g(t) בעלת זמן מחזור $T_g = \frac{2\Pi}{w_B} = \frac{1}{2}$

נחשב זמן מחזור משותף ע"י מכפלה משותפת מינימלית של T_f ו - T_g ונקבל:

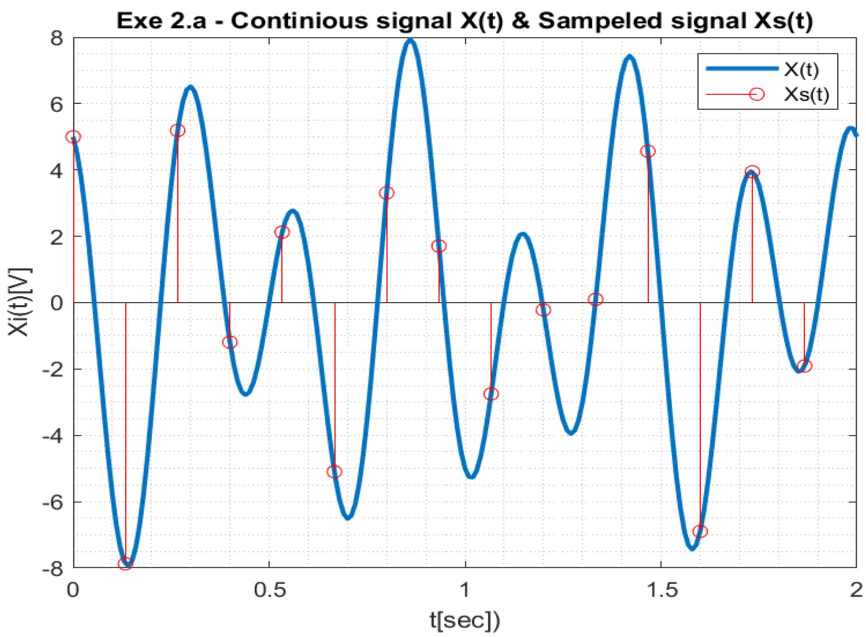
$LCM\{T_f, T_g\} = 2$

כלומר, זמן המחזור של האות הנתון *x(t)* הינו *T=2sec*.

עבור האות הנתון x(t) מתקיים $w_{max} = 7\Pi$

בהינתן T =2, עבור 14 דגימות נקבל מחזור דגימה $T_s = 2/14$ ותדר דגימה 14Π בהתאמה.

אך נבחין כי האות מכיל דלתא בקצה הספקרום שלו, כלומר ב- $|w| = w_{max}$ ולכן על מנת לעמוד בתנאי נייקוויסט יהיה עלינו להוסיף דגימה (במרווח אחיד) כך שנקבל סה"כ 15 דגימות עם מחזור דגימה $T_s = 2/15$ ותדר דגימה 15Π בהתאמה.



ב. (10 נק'). כפי שהוצג בשיעור, ניתן להשתמש בדגימות מסעיף א' על מנת למצוא את מקדמי טור פורייה ע"י כתיבת מערכת משוואות מהצורה $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{F}\boldsymbol{a}$, כאשר הוקטור $\boldsymbol{x}$ מכיל את ערכי הפונקציה בN נקודות הדגימה והוקטור $\boldsymbol{a}$ מכיל את 2M+1 מקדמי טור פורייה.

כתב/י בצורה מפורשת את מטריצת האקספוננטים $\boldsymbol{F}$ (מספיק לכתוב ביטוי לאיבר כללי).

פתרון 2ב': נכתוב ביטוי מפורש למטריצת פורייה (מטריצת האקספוננטים) המסומנת כ-F.

נרשום את האיבר הכללי של המטריצה ואת הקשר של המטריצה לווקטור הדגימות ולווקטור מקדמי הפורייה:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x(t_0) \\ x(t_1) \\ \vdots \\ \vdots \\ x(t_{N-1}) \end{bmatrix}}_{\text{וקטור הדגימות}} = \underbrace{\begin{bmatrix} e^{-kj\omega_0 t_0} & \cdots & \cdots & e^{kj\omega_0 t_0} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ e^{-kj\omega_0 t_{n-1}} & \cdots & \cdots & e^{kj\omega_0 t_{n-1}} \end{bmatrix}}_{\text{מטריצת פוריה}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} a_{-k} \\ a_{-k+1} \\ a_{-k+2} \\ \vdots \\ a_0 \\ \vdots \\ a_k \end{bmatrix}}_{\text{וקטור } \underline{a} \text{ המקדמים}}$$

וקטור הדגימות $\underline{X}$ הינו ממימד $[N \times 1]$

וקטור המקדמים $\underline{a}$ הוא ממימד $[2k+1 \times 1]$

מטריצת האקספוננטים הינה ממימד $[N \times 2k+1]$

עבור המקרה בו $N=2k+1$ המטריצה ריבועית ולכן נדרוש:

$\det\{F\} \neq 0$ כלומר המטריצה הפיכה ולכן נמצא לה הופכית

בפתרון שלנו, כדי לקבל את וקטור המקדמים.

$$
\begin{bmatrix} a_{-K} \\ a_{-K+1} \\ a_{-K+2} \\ \vdots \\ a_0 \\ \vdots \\ \vdots \\ a_K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-Kj\omega_0 t_0} & \cdots & \cdots & e^{Kj\omega_0 t_0} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ e^{-Kj\omega_0 t_{n-1}} & \cdots & \cdots & e^{Kj\omega_0 t_{n-1}} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} x(t_0) \\ x(t_1) \\ \vdots \\ \vdots \\ x(t_{n-1}) \end{bmatrix}
$$

עבור המקרה בו $N > 2K+1$

נבצע שימוש בשיטת Least square ונחשב לפי:

$$a = (F^H F)^{-1} F^H \cdot X$$

מחישוב מקדמי פורייה בMATLAB נקבל:

- האיבר האחרון בשורה מתאים למקדם הפורייה a_7

ואילו האיבר הראשון בשורה a_{-7}.

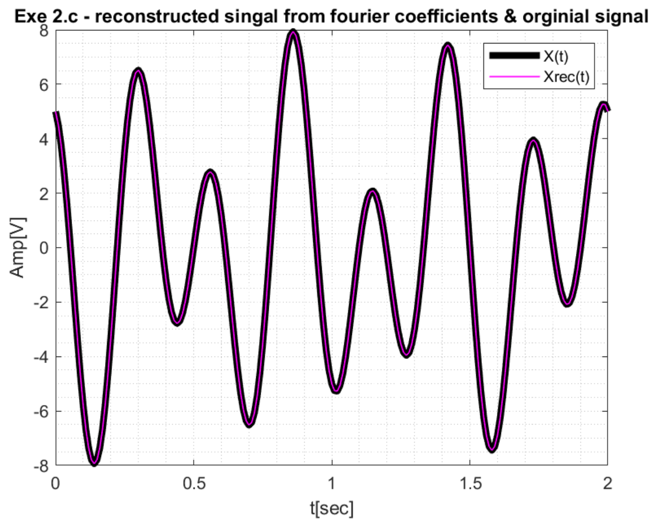
	fourier_coefficient
1	2.5000 - 0.0000i
2	0.0000 - 0.0000i
3	0.0000 - 0.0000i
4	0.0000 - 1.5000i
5	0.0000 - 0.0000i
6	-0.0000 + 0.0000i
7	-0.0000 + 0.0000i
8	-0.0000 - 0.0000i
9	-0.0000 + 0.0000i
10	-0.0000 - 0.0000i
11	0.0000 + 0.0000i
12	-0.0000 + 1.5000i
13	0.0000 + 0.0000i
14	0.0000 + 0.0000i
15	2.5000 - 0.0000i

ג. (10 נק'). שחזרו את האות מתוך וקטור מקדמי טור פורייה והציגו את האות המשוחזר והאות המקורי בגרף אחד. הערה: האות המשוחזר יוצא כאות רציף ולכן כולל כמות נקודות גבוהה מכמות הדגימות בסעיף א'.

פתרון 2ג':

נשחזר את האות בעזרת מקדמי פורייה מתוך ההגדרה של טור פורייה באופן הבא:

$$x(t) = \sum_{k=-7}^{7} a_k \cdot e^{jk\omega_0 t}$$



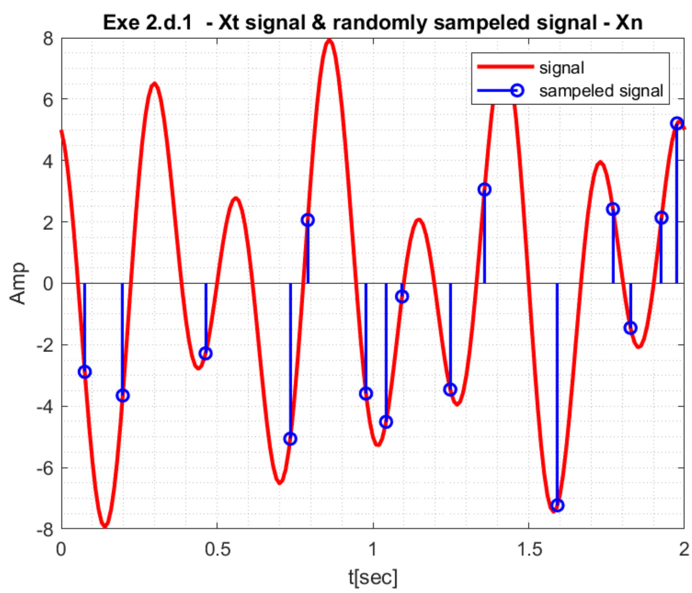
ניתן לראות שהשחזור באופן זה, מאוד יעיל ובעל שגיאה קטנה מאוד.

ד. (6 נק'). חיזרו על סעיפים א', ב' וג' כאשר 15 נקודות הדגימה מפוזרות בצורה אקראית על פני מחזור אחד של האות. לצורך דגימה אקראית השתמשו בפונקציית rand. ממה יש להיזהר במקרה זה אם ברצוננו לשחזר את האות?

פתרון 2ד': כעת הנקודות מפוזרות באופן אקראי על פני מחזור שלם :

נבצע את סעיפים א' עד ג' בתנאים הללו:

סעיף א': נדגום בצורה אקראית באופן המתואר בגרף הבא:



סעיף ב': נבצע 15 דגימות רנדומליות שונות כך שנוכל לקיים את התנאי עבורו : $N = 2K + 1$

להפוך את המטריצה ולמצוא את הווקטור מקדמים החדש בדגימות הנוכחיות.

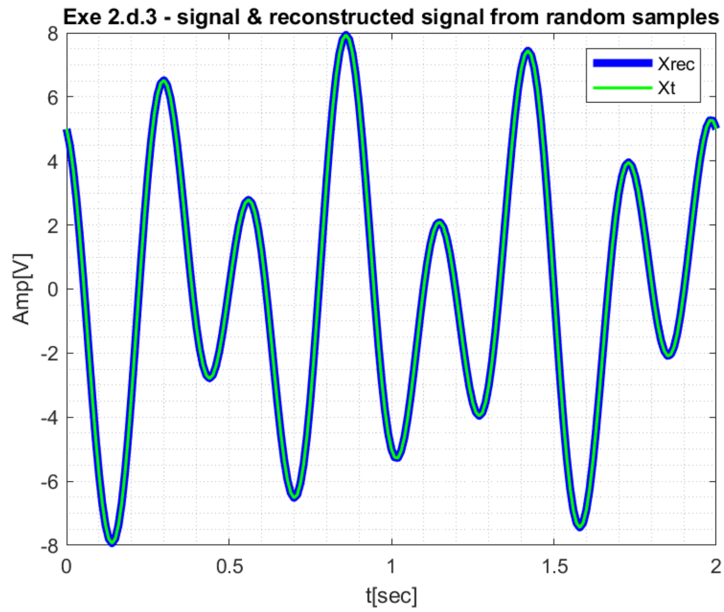
הערכים של מקדמי פורייה יצאו באופן רנדומלי:

יצאו המקדמים $a_7.a_{-7}$.

$a_{-4}.a_4$.

	coaff_rand
1	2.5000 + 0.0000i
2	-0.0000 - 0.0000i
3	0.0000 + 0.0000i
4	-0.0000 - 1.5000i
5	0.0000 - 0.0000i
6	0.0000 + 0.0000i
7	-0.0000 - 0.0000i
8	0.0000 - 0.0000i
9	-0.0000 + 0.0000i
10	0.0000 - 0.0000i
11	0.0000 + 0.0000i
12	-0.0000 + 1.5000i
13	0.0000 - 0.0000i
14	-0.0000 + 0.0000i
15	2.5000 - 0.0000i

סעיף ג': כעת נשחזר את האות ממקדמי פורייה הנ"ל:



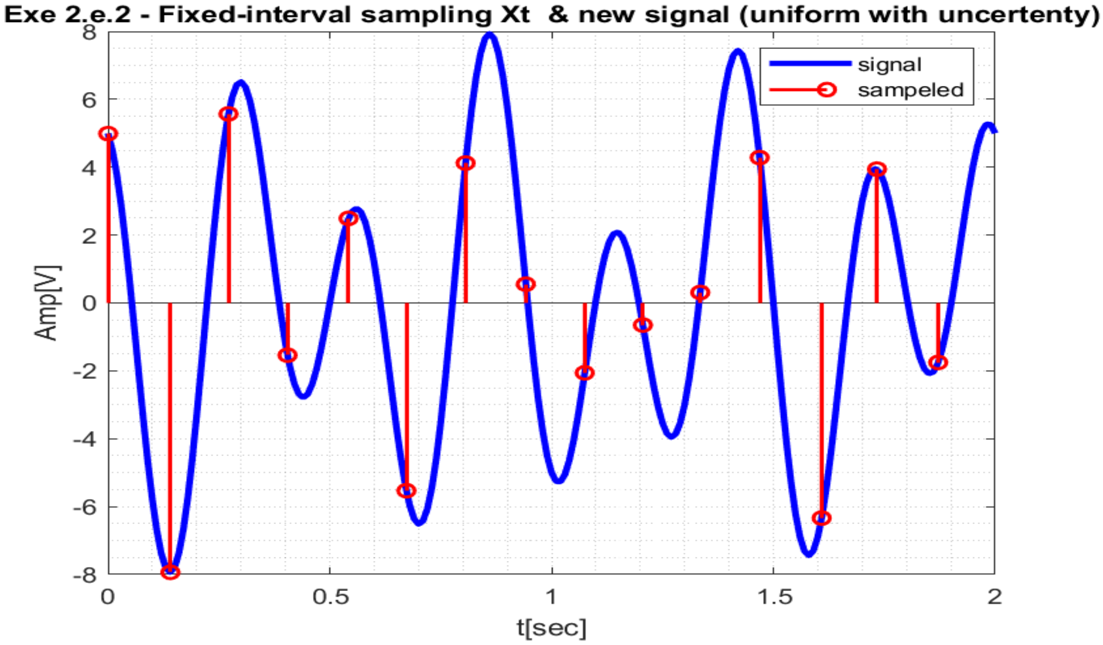
יש להיזהר בתהליך השחזור כאשר הדגימות מפוזרות בצורה אקראית על פני מחזור שלם יש סיכון בכך שנקודה אחת תפגוש את השנייה באותו המקום. במצב זה במקום זה לא נוכל לדעת את כל המקדמים בגלל שנקבל פחות מ15 דגימות וטור פורייה עלול להיפגע מכך וכתוצאה מכך הצגת הפונקציה כטור פורייה.

ה. (8 נק'). חזרו על סעיפים א'-ד' כאשר יש אי-ודאות במיקום הדגימות, כלומר כאשר בונים את המטריצה $\boldsymbol{F}$, במקום להכניס את זמן הדגימה האמיתי, t_n , יש להכניס $t_n + 0.01 * rand(1)$ (שימו לב- לכל n מגרילים מספר רנדומלי אחר). חשבו את ה-condition number של מטריצה $\boldsymbol{F}$ בשני המקרים (דגימה אחידה ולא אחידה) ע"י פונקציית cond. הסבירו את ההבדלים בין האותות המשוחזרים בשני המקרים.

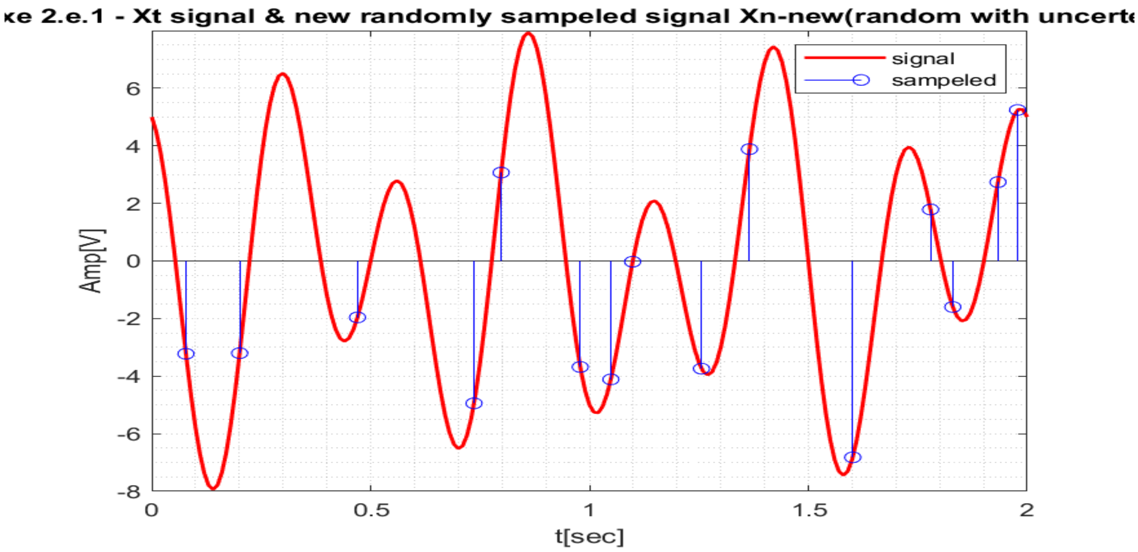
פתרון 2ה':

נחזור על הסעיפים הקודמים אך הפעם נוסיף אי ודאות במיקום הדגימות.

עבור דגימה אחידה בתוספת אי הוודאות נקבל את הגרף הבא:



עבור דגימה שאינה אחידה בתוספת אי ודאות נקבל את הגרף הבא:



נחשב מקדמי פורייה בשני המקרים:

עבור דגימה אחידה:

four_co_uniform_uncertenty

15x1 table

1 fourier_coefficients_uniform
2.5000 + 0.0000i
8.8818e-16 - 1.7070e-15i
-6.9389e-17 + 1.8041e-16i
0.0000 - 1.5000i
-1.5057e-15 - 1.1241e-15i
6.1062e-16 + 1.8180e-15i
-6.2450e-16 - 1.7417e-15i
1.3600e-15 + 2.9502e-16i
-1.4155e-15 + 6.5226e-16i
3.7470e-16 - 2.3037e-15i
-7.7716e-16 + 1.5266e-15i
0.0000 + 1.5000i
-5.8287e-16 - 1.4017e-15i
9.8532e-16 + 2.6507e-15i
2.5000 - 0.0000i

עבור דגימה שאינה אחידה:

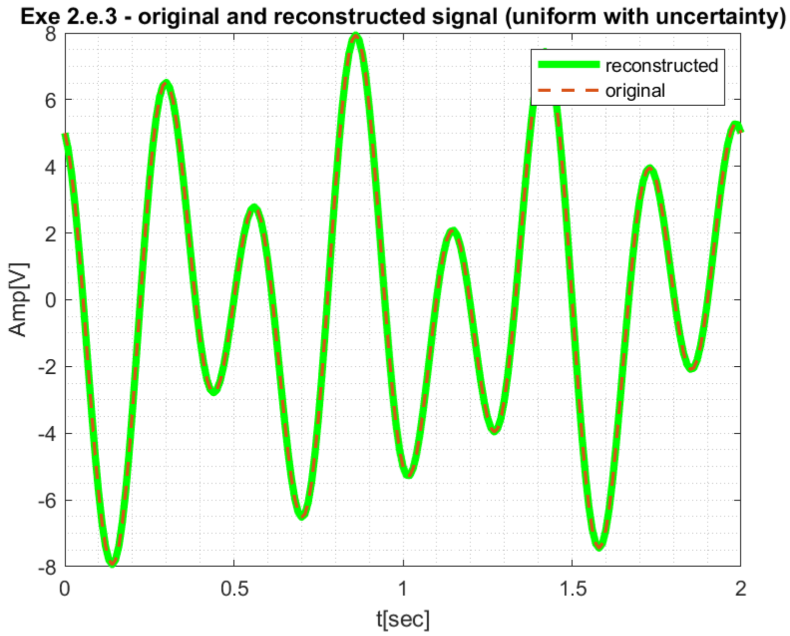
four_co_random_uncertenty

15x1 table

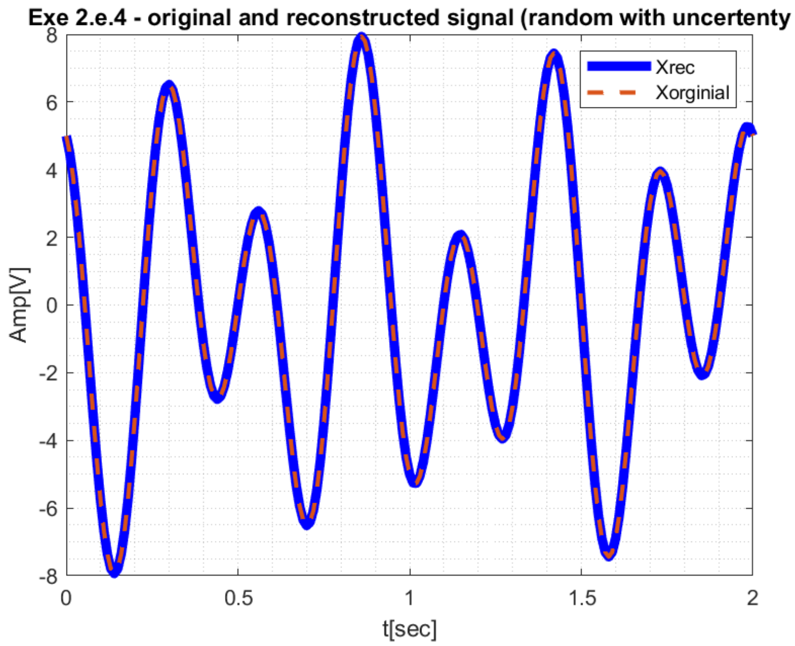
1 fourier_coefficients_random
2.5000 + 0.0000i
-8.8818e-16 + 1.3323e-14i
-1.2434e-14 + 1.1102e-15i
0.0000 - 1.5000i
-1.1990e-14 + 3.5527e-15i
-2.8866e-15 - 2.5757e-14i
1.5099e-14 + 2.6645e-15i
-7.1054e-15 + 7.1221e-16i
1.0658e-14 - 7.5495e-15i
1.0436e-14 + 2.3981e-14i
-8.8818e-15 - 1.7764e-15i
0.0000 + 1.5000i
-7.9936e-15 + 8.6597e-15i
-4.8850e-15 - 1.0214e-14i
2.5000 + 0.0000i

האותות המשוחזרים:

עבור דגימה אחידה עם אי ודאות:



עבור דגימה אקראית עם אי ודאות:



חישבנו את מספר המצב עבור דגימה אקראית עם אי ודאות ועבור דגימה אחידה עם אי ודאות:

קיבלנו שעבור דגימה אחידה מקבל מספר מצב קטן הקרוב לאחד כלומר פתרון יציב יחסית שהשגיאה בין הפונקציה לאות המשוחזר קטנה . קיבלנו שעבור דגימה אקראית מספר המצב יחסית גדול. וזה מאמת את העובדה שהאות המשוחזר בעל שגיאה גדולה יותר ביחס לאות המקורי.

אינני רואה את ההגעה למסקנות האלה כאן בגרף ויכול להיות שהמימוש לא נכון. אני רק מבין שזה התוצאה ויכול מאוד להיות שיש שגיאה בקוד.

עבור דגימה אחידה נקבל את מספר המצב: 1.116177078046634

עבור דגימה אקראית נקבל את מספר המצב: 405.8801 כפול 10 בחזקת 2 .

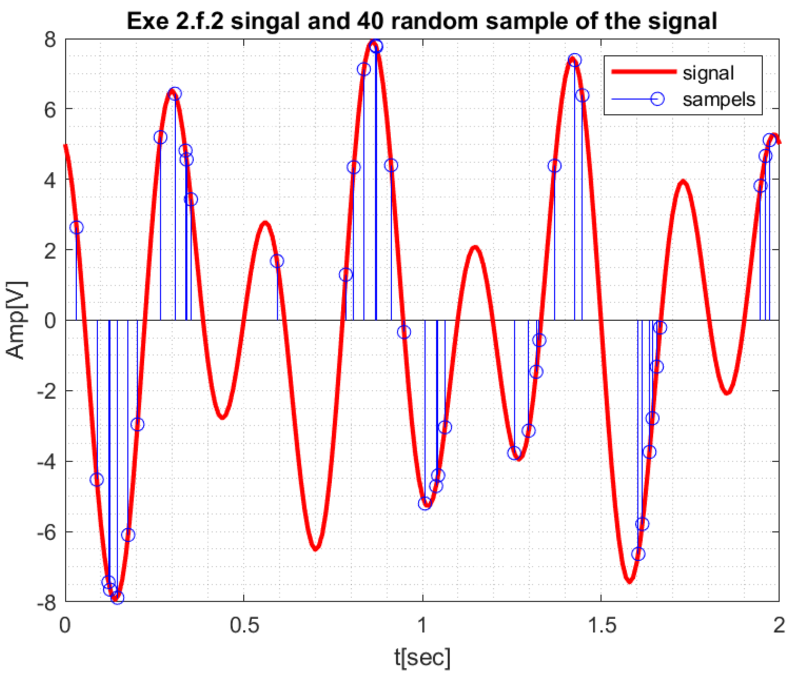
ו. (6 נק'). חזרו על סעיף ה' כאשר דוגמים את האות ב-40 נק' על פני מחזור אחד, עבור המקרה של דגימה לא אחידה (שימו לב שמספר המקדמים שמחפשים נשאר זהה). הסבירו את ההבדלים שהתקבלו.

פתרון 2ו':

כעת המטרה של הסעיף הנ"ל להראות לנו שאם אני לוקח מספר רב יותר של דגימות . 40 למשל. אני אוכל להקטין את השגיאה שנוצרת בין האות המורכב מדגימות אקראיות עם אי ודאות לבין האות המקורי.

נחזור על הסעיף:

נקבל את הגרף הבא:

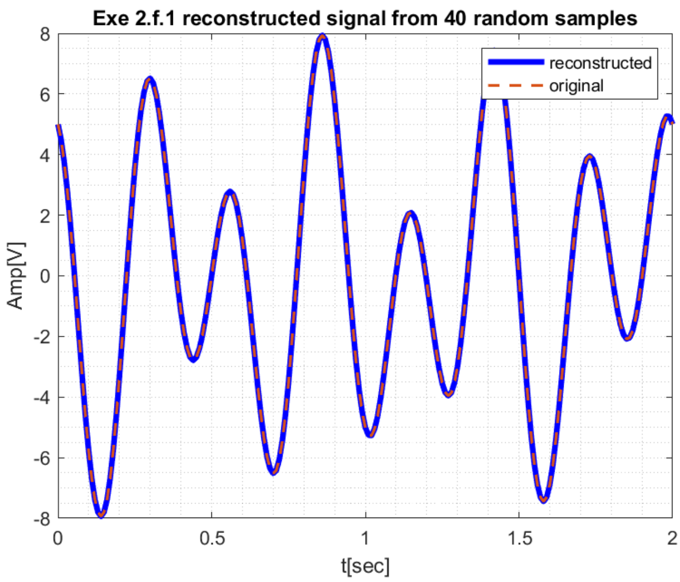


שוב נמצא את מקדמי פורייה לפי אותו התהליך:

2.5000 + 0.0000i
-1.1796e-15 - 2.5500e-16i
4.1633e-17 - 2.5292e-15i
0.0000 - 1.5000i
-6.1409e-16 + 1.8241e-15i
-1.0686e-15 - 1.7625e-15i
1.0686e-15 + 4.6838e-17i
6.4011e-16 - 1.3892e-16i
9.1593e-16 + 2.5674e-16i
-1.1241e-15 + 1.4780e-15i
-6.8695e-16 - 2.6255e-15i
0.0000 + 1.5000i
2.6368e-16 + 2.1198e-15i
-9.4369e-16 - 3.0531e-16i
2.5000 + 0.0000i

כעת נשחזר את האות מהמקדמים שמצאנו ונשווה לפי מספר המצב

(אנחנו אמורים לראותו קטן ומתקרב יותר ל1 ביחס למה שנמצא מקודם) :



נבחן כעת את מספר המצב של מטריצת האקספוננטים עבור המקרה הנ"ל:

נוכל לראות שכעת ערכו(באופן אקראי) : 2.334

ראינו כיצד הדיוק משתפר והשגיאה בין האות הנדגם ביותר נקודות בצורה אקראית עם אי ודאות ,לבין האות המקורי קטנה .

שאלה 3 -דגימה ואנליזה פונקציונלית:

- $\phi_n(t) = \exp\left(j\frac{2\pi}{T}nt\right)$, כאשר n מספר שלם.
- $\psi_n(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Pi\left(\frac{t}{T/20} - (n+0.5) - 20k\right)$ אשר מייצגת גל ריבועי, אשר מקבל ערכים בתחום [0,1] בעל זמן מחזור T ו- duty cycle של 5% . $n \in [0,19]$ מספר שלם.

נתונים שני אותות בעלי זמן מחזור $T = 10\ [sec]$:

- $f(t) = 4\cos\left(\frac{4\pi}{T}t\right) + \sin\left(\frac{10\pi}{T}t\right)$
- $g(t)$ פונקציה מחזורית עם זמן מחזור T כך שמחזור אחד מקיים:

$$g(t) = 2sign\left(\sin\left(\frac{6\pi}{T}t\right)\right) - 4sign\left(\sin\left(\frac{4\pi}{T}t\right)\right), t \in [0, T]$$

א. (5 נק') כתבו פונקציה ב MATLAB המקבלת שלושה ארגומנטים:

- וקטור עמודה המכיל ערכים ממחזור אחד של האות בזמן "רציף".
- מטריצה בעלת N עמודות המכילה בכל עמודה פונקציית בסיס אחת (ערכים של פונקציית הבסיס), כך שהמטריצה תייצג סט אחד של פונקציות. הערה: שימו לב שמספר השורות במטריצה ובווקטור צריכים להתאים.
- סקלר השווה לזמן המחזור T.

הפונקציה מחזירה וקטור באורך N, המכיל את מקדמי ההטלה של האות על כל אחת מפונקציות הבסיס. מקדמי ההטלה עבור פונקציות בסיס ואותות מחזוריים יחושבו כך:

$$c_n = \frac{\langle x(t), \phi_n(t)\rangle}{\|\phi_n(t)\|^2} = \frac{\int_0^T x(t)\phi_n^*(t)dt}{\int_0^T |\phi_n(t)|^2 dt}$$

(השתמשו בפונקציה trapz על מנת לחשב את האינטגרלים)

פתרון 3א':

כתבנו את הפונקציה הבאה:

```
function [Coeff] = projection_res(x_sample_T,matrix_phi,T)
    t1=0:0.01:T;
    Coeff=zeros(size(matrix_phi,2),1);
    for i=1:size(matrix_phi,2)
        denom=trapz(t1,(matrix_phi(:,i)).*conj(matrix_phi(:,i)));
        numer=trapz(t1,x_sample_T'.*conj(matrix_phi(:,i)));

        Coeff(i)=numer/denom;
    end
end
```

פתרון 3ב':

בעזרת הפונקציה נחשב את מקדמי ההטלה של כל אחד משני האותות:

עבור אות f: (שחזור על ידי ϕ):

$a_{20} = 0$	$a_9 = 0$	$a_{-1} = 0$	$a_{-11} = 0$
$a_{19} = 0$	$a_8 = 0$	$a_{-2} = 2$	$a_{-12} = 0$
$a_{18} = 0$	$a_7 = 0$	$a_{-3} = 0$	$a_{-13} = 0$
$a_{17} = 0$	$a_6 = 0$	$a_{-4} = 0$	$a_{-14} = 0$
$a_{16} = 0$	$a_5 = -0.5i$	$a_{-5} = 0.5i$	$a_{-15} = 0$
$a_{15} = 0$	$a_4 = 0$	$a_{-6} = 0$	$a_{-16} = 0$
$a_{14} = 0$	$a_3 = 0$	$a_{-7} = 0$	$a_{-17} = 0$
$a_{13} = 0$	$a_2 = 2$	$a_{-8} = 0$	$a_{-18} = 0$
$a_{12} = 0$	$a_1 = 0$	$a_{-9} = 0$	$a_{-19} = 0$
$a_{11} = 0$	$a_0 = 0$	$a_{-10} = 0$	$a_{-20} = 0$
$a_{10} = 0$			

עבור אות g (שחזור על ידי ϕ):

$a_{20} = -0.001$	$a_9 = -0.0050 - 0.4244i$	$a_{-1} = -0.005 - 0.0023i$	$a_{-11} = -0.005 + 0.0022i$
$a_{19} = -0.005 + 0.0024i$	$a_8 = -0.001$	$a_{-2} = 0.015 - 2.5464i$	$a_{-12} = -0.001$
$a_{18} = 0.015 + 0.2826i$	$a_7 = -0.0050 + 0.0023i$	$a_{-3} = -0.005 + 1.2732i$	$a_{-13} = -0.005 - 0.0024i$
$a_{17} = -0.005 - 0.0022i$	$a_6 = 0.0150 + 0.8487i$	$a_{-4} = -0.001$	$a_{-14} = 0.015 - 0.3635i$
$a_{16} = -0.001$	$a_5 = -0.0050 - 0.0023i$	$a_{-5} = -0.005 + 0.0023i$	$a_{-15} = -0.005 + 0.2546i$
$a_{15} = -0.005 - 0.2546i$	$a_4 = -0.001$	$a_{-6} = 0.015 - 0.8487i$	$a_{-16} = -0.001$
$a_{14} = 0.015 + 0.3635i$	$a_3 = -0.0050 - 1.2732i$	$a_{-7} = -0.005 - 0.0023i$	$a_{-17} = -0.005 + 0.0022i$
$a_{13} = -0.005 + 0.0024i$	$a_2 = 0.0150 + 2.5464i$	$a_{-8} = -0.001$	$a_{-18} = 0.015 - 0.2826i$
$a_{12} = -0.001$	$a_1 = -0.0050 + 0.0023i$	$a_{-9} = -0.005 + 0.4244i$	$a_{-19} = -0.005 - 0.0024i$
$a_{11} = -0.005 - 0.0022i$	$a_0 = -0.001$	$a_{-10} = 0.015 - 0.5091i$	$a_{-20} = -0.001$
$a_{10} = 0.015 + 0.5091i$			

עבור אות f (שחזור על ידי ψ):

$c_0 = 4.4136$	$c_4 = -3.1367$	$c_8 = 2.979$	$c_{12} = 0.643$	$c_{16} = -1.693$
$c_1 = 2.979$	$c_5 = -3.1367$	$c_9 = 4.4227$	$c_{13} = -1.693$	$c_{17} = 0.643$
$c_2 = -0.643$	$c_6 = -2.979$	$c_{10} = 3.1367$	$c_{14} = -4.4227$	$c_{18} = 1.693$
$c_3 = -2.979$	$c_7 = -0.643$	$c_{11} = 1.693$	$c_{15} = -4.4227$	$c_{19} = 3.1244$

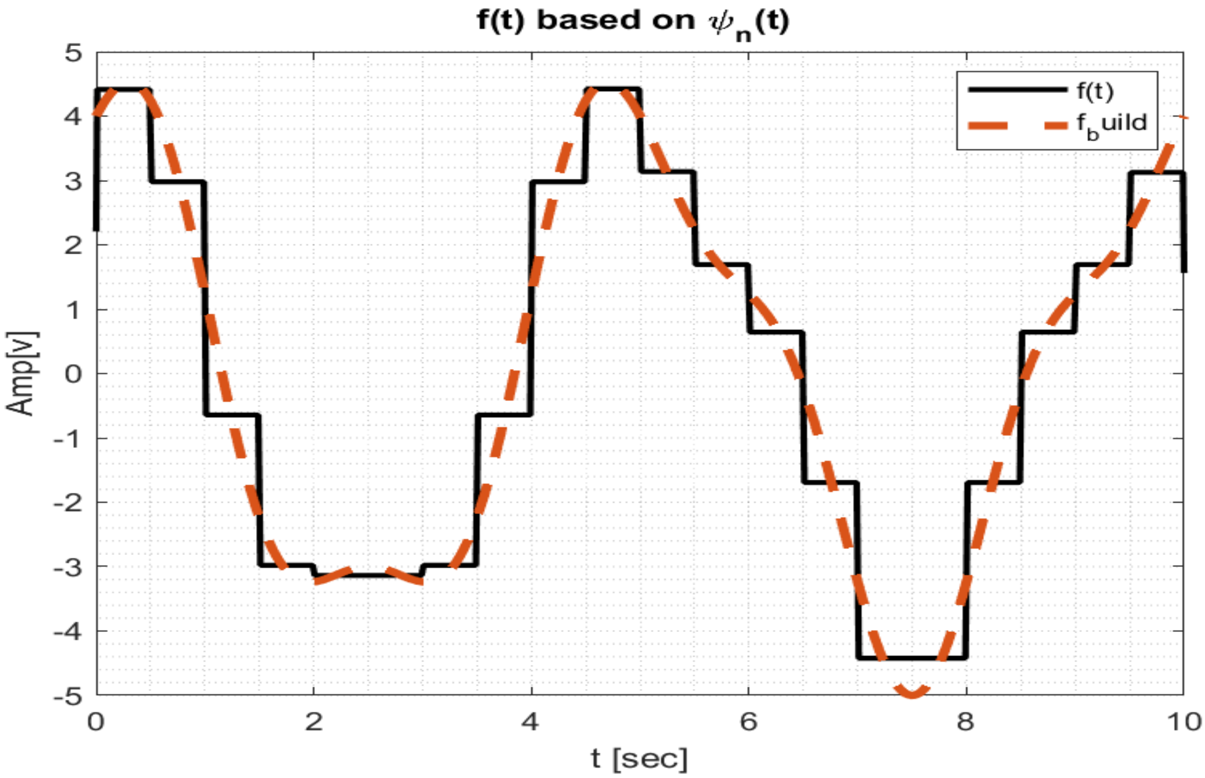
עבור אות g (שחזור על ידי ψ):

$c_0 = -2.0051$	$c_4 = -6.0606$	$c_8 = 6.0606$	$c_{12} = -6.0606$	$c_{16} = 4.7273$
$c_1 = -2.0202$	$c_5 = 1.9394$	$c_9 = 6.0606$	$c_{13} = -3.3535$	$c_{17} = 2.0202$
$c_2 = -2.0202$	$c_6 = 3.3535$	$c_{10} = -5.9394$	$c_{14} = -2.0202$	$c_{18} = 2.0202$
$c_3 = -4.7273$	$c_7 = 6.0606$	$c_{11} = -6.0606$	$c_{15} = 5.9798$	$c_{19} = 2.0152$

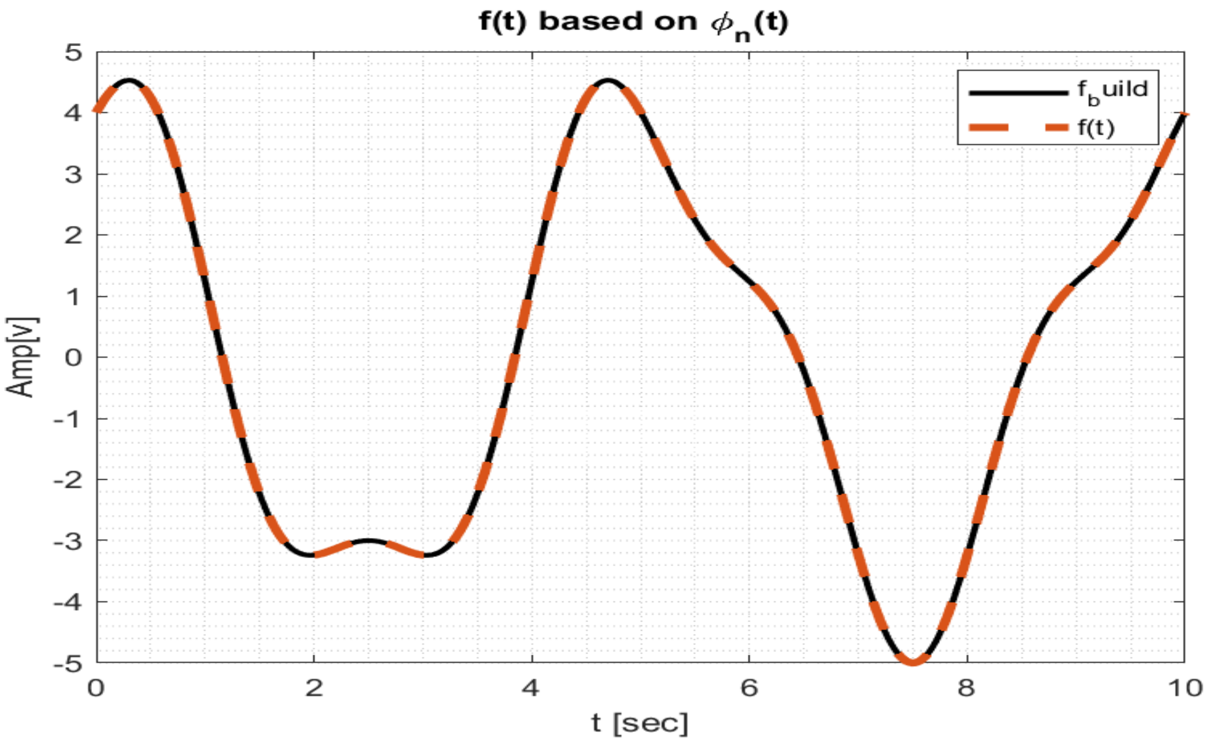
ג. (10נק') שחזרו את האותות מתוך מקדמי ההטלה שחישבתם בסעיף ב', על ידי נוסחת השחזור:

$$\hat{x}(t) = \sum_{n=-N}^{N} c_n \phi_n(t)$$

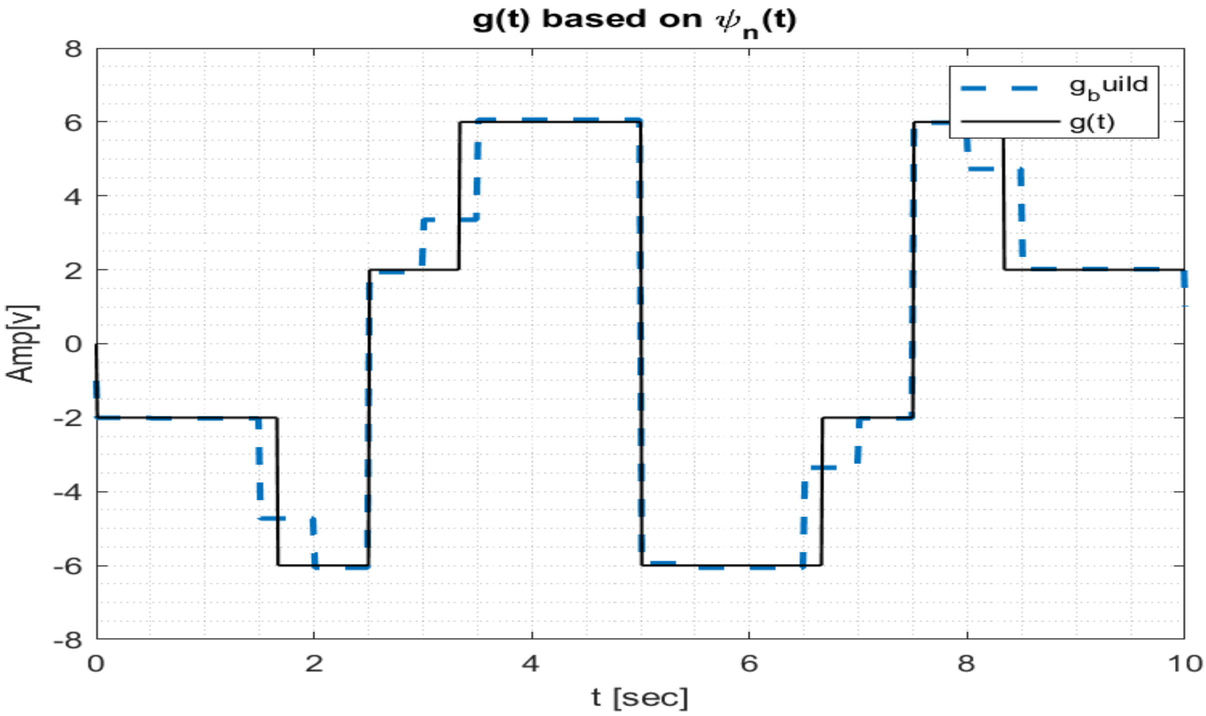
פתרון 3ג':

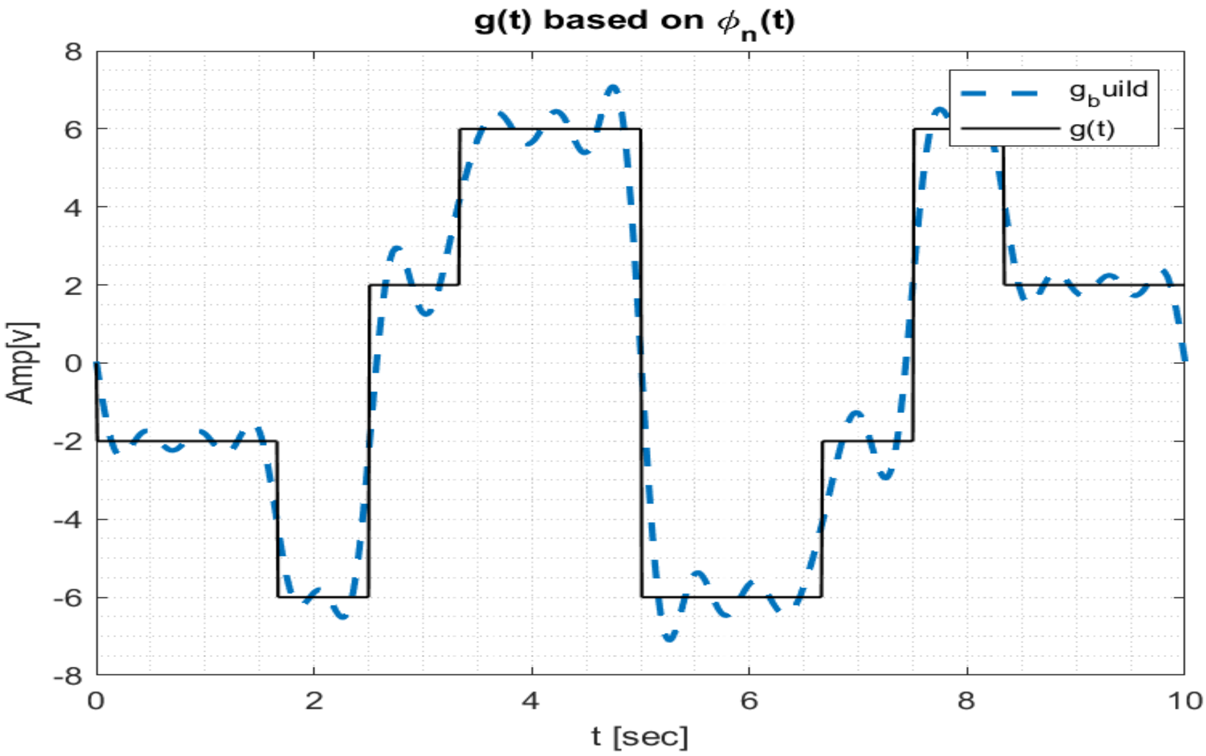


f(t) based on $\psi_n(t)$
f(t)
$f_b$uild
Amp[v]
t [sec]



f(t) based on $\phi_n(t)$
$f_b$uild
f(t)
Amp[v]
t [sec]


g(t) based on ψ_n(t)
8
6
4
2
0
-2
-4
-6
-8
Amp[v]
0
2
4
6
8
10
t [sec]
$g_b$uild
g(t)


g(t) based on ϕ_n(t)
8
6
4
2
0
-2
-4
-6
-8
Amp[v]
0
2
4
6
8
10
t [sec]
$g_b$uild
g(t)

- האם מתקבל שחזור מדויק בכל אחד מהמקרים?
- בשחזור האות $g(t)$ מתוך מקדמי ההטלה על $\phi_n(t)$, האם ניתן לקבל שיחזור מדויק (ללא שגיאה) על ידי הוספת מקדמים מעבר לאלו שחושבו? כיצד ניתן לשפר את דיוק השחזור?
- בשחזור האות $f(t)$ מתוך מקדמי ההטלה על $\psi_n(t)$, האם ניתן לקבל שיחזור מדויק (ללא שגיאה) על ידי הוספת מקדמים מעבר לאלו שחושבו? כיצד ניתן לשפר את דיוק השחזור?

הסבר :

על ידי בסיס המורכב מאקספוננטים ϕ: **קיבלנו ש f שוחזרה** במדויק וזאת כי הפונקציה היא מחזורית ומורכבת מפונקציית קוסינוס וסינוס . לפיכך עבור בסיס זה השחזור שהתבצע מדויק. כלומר ניתן לקבל את הפונקציה על ידי קומבינציה לינארית סופית של וקטורים ממרחב הפונקציות הנפרש על ידי הבסיס הנ"ל.

הגענו למקדמים של האקספוננטים שפורשים את הפונקציה הנ"ל למעלה. ונוכל פירוק לאקספוננטים ולהגיע לאותם מסקנות.

על ידי בסיס המורכב מאקספוננטים ϕ: **קיבלנו שg לא שוחזרה** במדויק וזאת כי הפונקציה בנויה מפונקציית SIGN שמרכיבה אותה וכפי שאנחנו יודעים וראינו גם במעבדה: אות ריבועי מורכב מאינסוף הרמוניות ברחבי מישור התדר כלומר אין סדרה של מקדמים סופית שבעזרתם ניתן לפרוש את הפונקציה בעזרת בסיס זה. לכן גם השחזור יצא לא מדויק . נוכל לשפר את הדיוק בבסיס זה כאשר נוסיף עוד מקדמים .

על ידי בסיס המורכב מפונקציות סימן ψ): **קיבלנו ש f לא שוחזרה** במדויק וזאת כי הפונקציות המרכיבות את הבסיס אינן רציפות בעוד שהפונקציה עצמה רציפה לפיכך לא משנה כמה מקדמים אוסיף לא אוכל לשחזר את הפונקציה והמקדמים יחזרו על עצמם. .

על ידי בסיס המורכב מפונקציות סימן ψ): **קיבלנו שg לא שוחזרה במדויק** בנוסף **לא** נוכל להוסיף מקדמים כמו בבסיס האקספוננטים כדי לשפר את הדיוק.

ד. (5 נק'). הסבר/י:

- באיזה בסיס עדיף להשתמש עבור כל אחד מהאותות הנתונים?
- מהם היתרונות והחסרונות בכל אחד מהבסיסים?
- האם השימוש בבסיס $\psi_n(t)$ זהה לשחזור ZOH?

עבור האות F נעדיף כמובן להשתמש בבסיס המורכב מאקספוננטים ϕ: נוכל ליצור את הפונקציה מקומבינציה לינארית סופית של איברי הבסיס.

עבור האות G לא ניתן לשחזר בעזרת ק"ל סופית של איברי בסיס פונקציות הסימן ψ:

לכן העדיפות גם כאן להשתמש בבסיס האקספוננטים כי נוכל לשפר את הדיוק כאשר נוסיף מקדמים.

חסרונות ϕ :

הבסיס נתקל בקושי לשחזור אותות שאינם רציפים ונדרשים אינסוף מקדמים כדי לבצע לפיכך לא ניתן לבצע בשלמות אף פעם.

חסרונות ψ:

לא משנה כמה מקדמים נוסיף לטור השחזור לא יהיה מדויק .

יתרונות ϕ :

מסוגל לשפר את הדיוק של השחזור בעזרת הוספת מקדמי הטלה.

מסוגל לשחזר אותות המורכבים מאקספוננטים או מהרכבה שלהם. (בעלי תכונת מחזוריות 2 פאי)

יתרונות ψ:

מאפשר יצירה של פונקציות חלון בעלות תכונות ספציפיות.

השימוש בבסיס ψ אינו זהה לשחזור ZOH . אפשר לראות את ההבדלים במימוש של ZOH בשאלה הראשונה. ההבדל הוא שלכל זמן דגימה יש לZOH ערך והוא נשאר כך עד שמגיעה זמן הדגימה הבאה. ובעוד שהפונקציות המשוחזרת באמצעות בסיס ψ יכולה מתישהו להחליט שהיא מציגה את הערך הממוצע של הפונקציה.