第二章 连续系统的时域分析

第二章 连续系统的时域分析

LTI连续系统的时域分析，归结为：

建立并求解线性微分方程

由于在其分析过程中涉及的函数变量均为时间 t，故称为时域分析法。

这种方法比较直观，物理概念清楚，是学习各种变换域分析法的基础。

§2.1 LTI连续系统的响应

微分方程的经典解

关于0_-和0_+初始值

零输入响应和零状态响应

一、微分方程的经典解

n阶微分方程如下：

$$y^{(n)}(t)+a_{n-1}y^{(n-1)}(t)+\cdots+a_1\,y'(t)+a_0y(t)$$
$$=b_mf^{(m)}\,(t)+b_{m-1}f^{(m-1)}(t)+\cdots+b_1\,f'(t)+b_0f(t)$$

微分方程的经典解：完全解 = 齐次解 + 特解

根据初始条件可求出完全解中的待定系数，得到系统响应。

1. 齐次解$y_h(t)$

齐次微分方程:

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1y^{(1)}(t) + a_0y(t)=0$$

齐次解是齐次微分方程的解。

$y_h(t)$的函数形式?

由上述微分方程的特征根确定。

由特征方程→求出特征根→写出齐次解形式

1. 齐次解$y_h(t)$

表 2-1　不同特征根所对应的齐次解

特征根 λ	齐次解 $y_h(t)$
单实根	$e^{\lambda t}$
r 重实根	$(C_{r-1}t^{r-1}+C_{r-2}t^{r-2}+\cdots+C_1t+C_0)e^{\lambda t}$
一对共轭复根 $\lambda_{1,2}=\alpha\pm j\beta$	$e^{\alpha t}[C\cos(\beta t)+D\sin(\beta t)]$或 $A\cos(\beta t-\theta)$，其中 $Ae^{j\theta}=C+jD$
r 重共轭复根	$[A_{r-1}t^{r-1}\cos(\beta t+\theta_{r-1})+A_{r-2}t^{r-2}\cos(\beta t+\theta_{r-2})+\cdots+A_0\cos(\beta t+\theta_0)]e^{\alpha t}$

注意重根情况处理方法。

齐次解举例

例：求下面微分方程的齐次解

$$y^{(3)}(t)+7y^{(2)}(t)+16y'(t)+12y(t)=f(t)$$

解：系统的特征方程为

$$\lambda^3+7\lambda^2+16\lambda+12=0$$

特征根

$$(\lambda+2)^2(\lambda+3)=0$$

$$\lambda_1=-2(\text{重根}),\ \lambda_2=-3$$

查表得对应的齐次解为 $y_h(t)=(C_1t+C_2)e^{-2t}+C_3e^{-3t}$

2. 特解$y_p(t)$

根据微分方程右端函数式形式，将含待定系数的特解函数式→代入原方程，比较系数得出特解。

表 2-2　不同激励所对应的特解

激励 $f(t)$	特解 $y_p(t)$	
t^m	$P_m t^m+P_{m-1}t^{m-1}+\cdots+P_1 t+P_0$	所有的特征根均不等于 0；
	$t^r[P_m t^m+P_{m-1}t^{m-1}+\cdots+P_1 t+P_0]$	有 r 重等于 0 的特征根
$e^{\alpha t}$	$Pe^{\alpha t}$	α 不等于特征根；
	$(P_1 t+P_0)e^{\alpha t}$	α 等于特征单根；
	$(P_r t^r+P_{r-1}t^{r-1}+\cdots+P_1 t+P_0)e^{\alpha t}$	α 等于 r 重特征根
$\cos(\beta t)$ 或 $\sin(\beta t)$	$P\cos(\beta t)+Q\sin(\beta t)$	所有的特征根均不等于$\pm j\beta$
	或 $A\cos(\beta t-\theta)$，其中 $Ae^{j\theta}=P+jQ$	

特解举例

激励 $f(t)$	特解 $y_p(t)$	
t^m	$P_m t^m + P_{m-1} t^{m-1} + \cdots + P_1 t + P_0$	所有的特征根均不等于 0;
	$t^r [P_m t^m + P_{m-1} t^{m-1} + \cdots + P_1 t + P_0]$	有 r 重等于 0 的特征根

例： 给定微分方程式

$$y''(t) + 2y'(t) + 3y(t) = f'(t) + f(t)$$

如果已知：(1) $f(t) = t^2$； (2) $f(t) = \mathrm{e}^t$，分别求两种情况下此方程的特解。

解： (1) $f(t) = t^2$ 故特解函数式为：

$$y_p(t) = P_2 t^2 + P_1 t + P_0$$

将此式代入方程得到：

$$3P_2 t^2 + (4P_2 + 3P_1)t + (2P_2 + 2P_1 + 3P_0) = t^2 + 2t$$

$$3P_2t^2+\left(4P_2+3P_1\right)t+\left(2P_2+2P_1+3P_0\right)=t^2+2t$$

等式两端各对应幂次的系数应相等，于是有：

$$\begin{cases}3P_2=1\\4P_2+3P_1=2\\2P_2+2P_1+3P_0=0\end{cases}$$

联解得到：

$$P_2=\frac{1}{3},\ P_1=\frac{2}{9},\ P_0=-\frac{10}{27}$$

所以，特解为：

$$y_{\mathrm{p}}(t)=\frac{1}{3}t^2+\frac{2}{9}t-\frac{10}{27}$$

$e^{\alpha t}$	$Pe^{\alpha t}$	α 不等于特征根；
	$(P_1t+P_0)e^{\alpha t}$	α 等于特征单根；
	$(P_rt^r+P_{r-1}t^{r-1}+\cdots+P_1t+P_0)e^{\alpha t}$	α 等于 r 重特征根

（2）$f(t)=e^t$，故特解函数式为：

$$y_p(t)=Pe^t$$

将此式代入方程得到：

$$Pe^t+2Pe^t+3Pe^t=e^t+e^t$$

解之得： $P=1/3$

所以，特解为：

$$y_p(t)=\frac{1}{3}e^t$$

3. 全解

完全解 = 齐次解 + 特解

由初始值定出齐次解中的待定常数C_i，从而得到完全解

固有响应 强迫响应

•齐次解的函数形式仅与系统本身的特性有关，而与激励$f(t)$的函数形式无关，称为系统的固有响应或自由响应；

• 特解的函数形式由激励确定，称为强迫响应。

全解举例

例：给定微分方程式

$$y''(t)+5y'(t)+6y(t)=f(t)$$

(1) $f(t)=2e^{-t}, t\geq 0; y(0_+)=2, y'(0_+)=-1$ 时系统的全解；

(2) $f(t)=e^{-2t}, t\geq 0; y(0_+)=1, y'(0_+)=0$ 时系统的全解；

解：（1）先求齐次解

齐次方程为：$y''(t)+5y'(t)+6y(t)=0$

相应的特征方程为：$\lambda^2+5\lambda+6=0$

特征根为：$\lambda_1=-2, \lambda_2=-3$

特征根为：$\lambda_1 = -2, \lambda_2 = -3$

齐次解为：$y_h(t) = C_1e^{-2t} + C_2e^{-3t}$

再求特解

$f(t) = 2e^{-t}$ 时系统的特解可设为：$y_p(t) = Pe^{-t}$

将其代入微分方程$y''(t) + 5y'(t) + 6y(t) = f(t)$

得：$Pe^{-t} - 5Pe^{-t} + 6Pe^{-t} = 2e^{-t}$

解之得：$P = 1$

特解为：$y_p(t) = e^{-t}$

全解为：$y(t) = y_h(t) + y_p(t) = C_1e^{-2t} + C_2e^{-3t} + e^{-t}$

其中的待定常数C_1, C_2由初始条件确定。

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-3t} + e^{-t}$$

根据初始条件$y(0_+) = 2, y'(0_+) = -1$有

$$C_1 + C_2 + 1 = 2, -2C_1 - 3C_2 - 1 = -1$$

解得： $C_1 = 3, C_2 = -2$

全解为：$y(t) = y_h(t) + y_p(t) = 3e^{-2t} - 2e^{-3t} + e^{-t}$ $t \geq 0$

或者写为：$y(t) = \left(3e^{-2t} - 2e^{-3t} + e^{-t}\right)\varepsilon(t)$

(2) $f(t) = e^{-2t}, t \geq 0; y(0_+) = 1, y'(0_+) = 0$时

系统的全解课后练习；

提醒：激励的指数中-2与其中之一的特征根相等，特解？思考：在该解中能否区分开固有响应和强迫响应？

$$y(t) = \left(2e^{-2t} - e^{-3t} + te^{-2t}\right)\varepsilon(t)$$

二、关于0_-和0_+初始值

若输入$f(t)$是在$t=0$时接入系统，则确定待定系数C_i时用$t = 0_+$时刻的初始值，即$y^{(j)}(0_+)$（$j=0,1,2,\cdots,n-1$）。$y^{(j)}(0_+)$包含了输入信号的作用。

由于在$t=0_-$时，激励尚未接入，该时刻的值$y^{(j)}(0_-)$反映了系统的历史情况而与激励无关。称这些值为初始状态或起始值。

通常，需要从已知的初始状态$y^{(j)}(0_-)$设法求得$y^{(j)}(0_+)$。

0_+初始值求解1—待定系数法

例1：描述某系统的微分方程为

$$y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = 2f'(t) + f(t)$$

已知$y(0_-)=2$，$y'(0_-)= 0$，$f(t)=\delta'(t)$，求$y(0_+)$和$y'(0_+)$。

解：将输入$f(t)= \delta'(t)$代入上述微分方程得

$$y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = 2\delta''(t) + \delta'(t) \qquad （1）$$

利用待定系数法：

令$y''(t)=a\delta''(t)+b\,\delta'(t)+c\delta(t)+r_1(t)$，$r_1(t)$中不含冲激

$y'(t)= a\delta'(t)+b\delta(t)+ r_2(t)$，$r_2(t)=c\varepsilon(t)+ r_1^{(-1)}(t)$

$y(t)= a\delta(t)+ r_3(t)$，$r_3(t)=b\varepsilon(t)+ r_2^{(-1)}(t)$

将上述关系代入式（1），并整理得

$$a\delta''(t)+b\delta'(t)+c\delta(t)+r_1(t)$$
$$+3a\delta'(t)+3b\delta(t)+3r_2(t)$$
$$+2a\delta(t)+2r_3(t)=2\delta''(t)+\delta'(t)$$

比较等式两边冲激项系数，有

$$a=2$$
$$b+3a=1$$
$$c+3b+2a=0$$

解得：$a=2$，$b=-5$，$c=11$，故

$$y''(t)=2\delta''(t)-5\delta'(t)+11\delta(t)+r_1(t),$$
$$y'(t)=2\delta'(t)-5\delta(t)+r_2(t),$$
$$y(t)=2\delta(t)+r_3(t),$$

$$y''(t)=2\delta''(t)-5\delta'(t)+11\delta(t)+r_1(t)$$

$$y'(t)=2\delta'(t)-5\delta(t)+r_2(t)$$

对$y''(t)$从0_-到0_+积分得:

$$y'(0_+)-y'(0_-)=11,\quad y'(0_+)=y'(0_-)+11=11$$

对$y'(t)$从0_-到0_+积分得:

$$y(0_+)-y(0_-)=-5,\quad y(0_+)=y(0_-)-5=2-5=-3$$

- 观察微分方程形式

$$y''(t)+3y'(t)+2y(t)=2\delta''(t)+\delta'(t)$$

总结待定系数法

当二阶微分方程中不包含$\delta''(t)$和$\delta'(t)$项，甚至不包含冲激函数时，是否可以用其他方法求初始值?

0_+初始值求解2—积分法

例2：描述某系统的微分方程为：

$$y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = 2f'(t) + 6f(t)$$

已知$y(0_-)=2$，$y'(0_-)= 0$，$f(t)=\varepsilon(t)$，求$y(0_+)$和$y'(0_+)$。

解：将输入$f(t)=\varepsilon(t)$代入上述微分方程得

$$y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = 2\delta(t) + 6\varepsilon(t) \qquad (1)$$

分析：

① 由于等号右端含有$\delta(t)$函数，故$y''(t)$应包含冲激函数，从而$y'(t)$在$t= 0$处将发生跃变，即$y'(0_+)\neq y'(0_-)$。

② 但$y'(t)$不含冲激函数，否则$y''(t)$将含有$\delta'(t)$项。由于$3y'(t)$中不含$\delta(t)$，故$y(t)$在$t=0$处是连续的。

故 $y(0_+) = y(0_-) = 2$

求$y'(0_+)$：$y''(t)+3y'(t)+2y(t)=2\delta(t)+6\varepsilon(t)$　　（1）

对式(1)两端积分有：

$$\int_{0_-}^{0_+} y''(t)\,\mathrm{d}t+3\int_{0_-}^{0_+} y'(t)\,\mathrm{d}t+2\int_{0_-}^{0_+} y(t)\,\mathrm{d}t=2\int_{0_-}^{0_+} \delta(t)\,\mathrm{d}t+6\int_{0_-}^{0_+} \varepsilon(t)\,\mathrm{d}t$$

由于积分在无穷小区间$[0_-,0_+]$进行的，且$y(t)$在$t=0$连续，故:

$$\int_{0_-}^{0_+} y(t)\,\mathrm{d}t=0,\quad \int_{0_-}^{0_+} \varepsilon(t)\,\mathrm{d}t=0$$

于是由上式得

$$[y'(0_+)-y'(0_-)]+3[y(0_+)-y(0_-)]=2$$

考虑 $y(0_+)=y(0_-)=2$，所以

$$y'(0_+)-y'(0_-)=2\quad,\quad y'(0_+)=y'(0_-)+2=2$$

$$y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = 2\delta''(t) + \delta'(t)$$

$$y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = 2\delta(t) + 6\varepsilon(t)$$

当微分方程右端含有冲激函数时，响应$y(t)$及其各阶导数中，有些在t=0处将发生跃变。

$$y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = 6\varepsilon(t)$$

当微分方程右端不含有冲激函数时，响应$y(t)$及其他$(n-1)$阶导数均不会跃变。

单选题 1分

设置

已知描述某连续系统的微分方程如下，计算初始值$y(0_+)$和$y'(0_+)$为（ ）。

$$y''(t)+6y'(t)+8y(t)=f''(t),$$

$$y(0\_)=1,\ \ y'(0\_)=1,\ \ f(t)=\delta(t)$$

A -5，29

B -5，6

C 24，29

D 5，29

提交

已知描述某连续系统的微分方程如下，计算初始值$y(0_+)$为（ ）。

$$y''(t)+3y'(t)+2y(t)=f(t),$$
$$y(0\_)=1,\ \ y'(0\_)=1,\ \ f(t)=\varepsilon(t)$$

A -2

C 0

B -1

D 1

提交

三、 零输入响应和零状态响应

系统的零状态响应：$y_{zs}(\cdot) = T[\{f(\cdot)\}, \{0\}]$

系统的零输入响应：$y_{zi}(\cdot) = T[\{0\}，\{x(0)\}]$

如何求$y_{zi}(t)$和 $y_{zs}(t)$？

可以用经典法求解。

求解的关键？如何计算初始值 $y_{zi}^{(j)}(0_+), y_{zs}^{(j)}(0_+)$

$$y^{(j)}(0_-)= y_{zi}^{(j)}(0_-)+ y_{zs}^{(j)}(0_-)$$

$$y^{(j)}(0_+)= y_{zi}^{(j)}(0_+)+ y_{zs}^{(j)}(0_+)$$

$$y_{zs}^{(j)}(0_-)= 0 \quad y_{zi}^{(j)}(0_+)= y_{zi}^{(j)}(0_-)$$

$y_{zs}^{(j)}(0_+)$的求解？

$$y_{zs}^{(j)}(0_-) = 0$$

根据$y_{zs}(t)$满足的方程，利用待定系数法或者积分法来求解。

$y_{zi}^{(j)}(0_+)$的求解？

① 题目给出的为$y^{(j)}(0_-)$

$$\begin{cases} y^{(j)}(0_-) = y_{zs}^{(j)}(0_-) + y_{zi}^{(j)}(0_-) \\ \qquad\qquad y_{zs}^{(j)}(0_-) = 0 \end{cases} \Rightarrow y_{zi}^{(j)}(0_-) = y^{(j)}(0_-)$$

而$y_{zi}^{(j)}(0_+) = y_{zi}^{(j)}(0_-)$ $\quad\therefore y_{zi}^{(j)}(0_+) = y_{zi}^{(j)}(0_-) = y^{(j)}(0_-)$

$y_{zi}^{(j)}(0_+)$的求解？

② 题目给出的为$y^{(j)}(0_+)$

$$y^{(j)}(0_+) = y_{zs}^{(j)}(0_+) + y_{zi}^{(j)}(0_+)$$

先计算$y_{zs}^{(j)}(0_+)$，然后可以得到：

$$y_{zi}^{(j)}(0_+) = y^{(j)}(0_+) - y_{zs}^{(j)}(0_+)$$

或者，先由$y^{(j)}(0_+)$求出$y^{(j)}(0_-)$

利用$y_{zi}^{(j)}(0_+) = y_{zi}^{(j)}(0_-) = y^{(j)}(0_-)$求出结果

$$y^{(j)}(0_-)= y_{zi}^{(j)}(0_-)+ y_{zs}^{(j)}(0_-) \quad y_{zs}^{(j)}(0_-)=0$$

$$y^{(j)}(0_+)= y_{zi}^{(j)}(0_+)+ y_{zs}^{(j)}(0_+) \quad y_{zi}^{(j)}(0_+)= y_{zi}^{(j)}(0_-)$$

零状态响应与零输入响应的求解

例：描述某系统的微分方程为

$$y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = 2f'(t) + 6f(t)$$

已知$y(0_-)=2$，$y'(0_-)=0$，$f(t)=\varepsilon(t)$。求该系统的零输入响应和零状态响应。

解：（1）零输入响应$y_{zi}(t)$ 激励为0，故$y_{zi}(t)$满足

$$y_{zi}''(t) + 3y_{zi}'(t) + 2y_{zi}(t) = 0$$

$$y_{zi}(0_+)= y_{zi}(0_-)= y(0_-)=2$$

$$y_{zi}'(0_+)= y_{zi}'(0_-)= y'(0_-)=0$$

该齐次方程的特征根为–1，– 2，故

$$y_{zi}(t) = C_{zi1}e^{-t} + C_{zi2}e^{-2t}$$

代入初始值并解得:$C_{zi1}=4$,$C_{zi2}= -2$，所以:

$$y_{zi}(t) = 4e^{-t} - 2e^{-2t}\ ,\ t > 0$$

（2）零状态响应$y_{zs}(t)$ 满足：

$$y_{zs}''(t) + 3y_{zs}'(t) + 2y_{zs}(t) = 2\delta(t) + 6\varepsilon(t)$$

$$y_{zs}(0_-) = y_{zs}'(0_-) = 0$$

求初始值：

由于上式等号右端含有$\delta(t)$，故$y_{zs}''(t)$含有$\delta(t)$，从而$y_{zs}'(t)$跃变，即$y_{zs}'(0_+)\neq y_{zs}'(0_-)$，而$y_{zs}(t)$在$t=0$连续，即：

$$y_{zs}(0_+) = y_{zs}(0_-) = 0$$

对方程两边积分得：

$$\left[y_{zs}'(0_+)-y_{zs}'(0_-)\right]+3\left[y_{zs}(0_+)-y_{zs}(0_-)\right]+2\int_{0-}^{0+}y_{zs}(t)\,\mathrm{d}t=2+6\int_{0-}^{0+}\varepsilon(t)\,\mathrm{d}t$$

因此： $y_{zs}'(0_+)= 2 + y_{zs}'(0_-)=2$

$$y_{zs}''(t) + 3y_{zs}'(t) + 2y_{zs}(t) = 2\delta(t) + 6\varepsilon(t)$$

对$t>0$时，以上方程为：

$$y_{zs}''(t) + 3y_{zs}'(t) + 2y_{zs}(t) = 6$$

齐次解为：$C_{zs1}e^{-t} + C_{zs2}e^{-2t}$，

特解为：常数3，

于是有：$y_{zs}(t)=C_{zs1}e^{-t} + C_{zs2}e^{-2t} + 3$

代入初始值求得：

$$y_{zs}(t)= -4e^{-t} + e^{-2t} + 3\ ,\quad t\geq 0$$

零状态响应$y_{zs}(t)$另一种解法

$$y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = 2f'(t) + 6f(t)$$

- 假设$f(t)$作用于原系统所引起的零状态响应为$y_{zs1}(t)$，显然它满足：

$$y_{zs1}''(t) + 3y_{zs1}'(t) + 2y_{zs1}(t) = f(t)$$

- 根据零状态响应的微分特性：

$$y_{zs1}'(t) = T[0, f'(t)]$$

- 根据线性性质，原系统的零状态响应为：

$$y_{zs}(t) = 2y_{zs1}'(t) + 6y_{zs1}(t)$$

见例题2.1-6

多选题 4分

设置

关于线性时不变系统的初始值 $y_{zi}^{(j)}(0_+), y_{zs}^{(j)}(0_+)$ （$j = 0$，1，2，…，$n-1$），下列说法正确的是（　　）

A　$y_{zs}^{(j)}(0_-)$一定为0

B　$y_{zs}^{(j)}(0_-)$可能不为0

C　$y_{zi}^{(j)}(0_+)= y_{zi}^{(j)}(0_-)$

D　$y_{zi}^{(j)}(0_+)= = y^{(j)}(0_-)$

提交

完全响应=自由响应+强迫响应

完全响应=零输入响应+零状态响应

关系？

假设微分方程的特征根均为单根，有：

$$y(t)=\underbrace{\sum_{j=1}^{n}C_{zi\,j}e^{\lambda_j t}}_{\text{零输入响应}}+\underbrace{\sum_{j=1}^{n}C_{zsj}e^{\lambda_j t}+y_p(t)}_{\text{零状态响应}}$$

$$y(t)=\underbrace{\sum_{j=1}^{n}C_{j}e^{\lambda_j t}}_{\text{自由响应}}+\underbrace{y_p(t)}_{\text{强迫响应}}$$

虽然零输入响应和自由响应都是齐次方程的解，但二者的系数各不相同。

单选题 1分

设置

对于系统的零输入响应，描述正确的是（ ）

A 全部自由响应

B 部分自由响应

C 部分零状态响应

D 全响应和强迫响应之差

提交