§4.3　周期信号的频谱

信号频谱的概念

周期信号频谱的特点

频带宽度

一、信号频谱的概念

从广义上说，信号的某种特征量随信号频率变化的关系，称为信号的频谱，所画出的图形称为信号的频谱图（eg，功率谱，能量谱）。

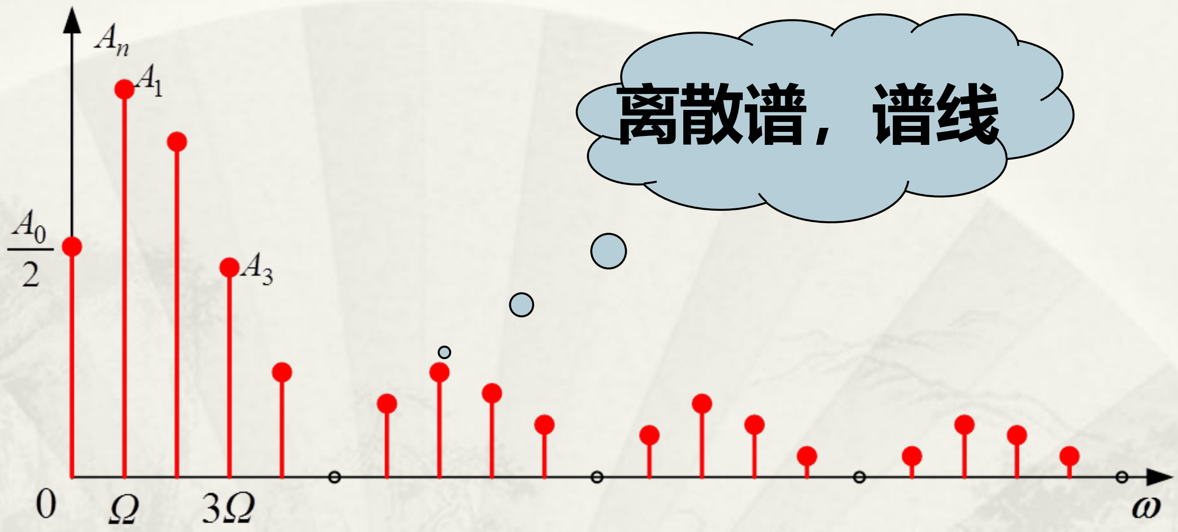
周期信号的频谱是指周期信号中各次谐波幅值、相位随频率的变化关系，即

将A_n~ω和φ_n~ω的关系分别画在以ω为横轴的平面上得到的两个图，分别称为振幅频谱图和相位频谱图。因为$n \geq 0$，所以称这种频谱为单边谱。

频谱图示（单边）

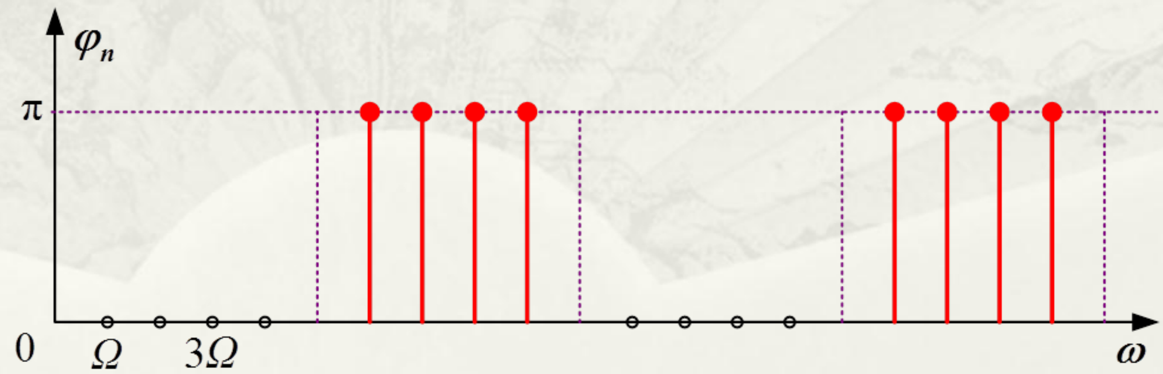
幅度频谱

$A_n \sim \omega$



相位频谱

$\varphi_n \sim \omega$



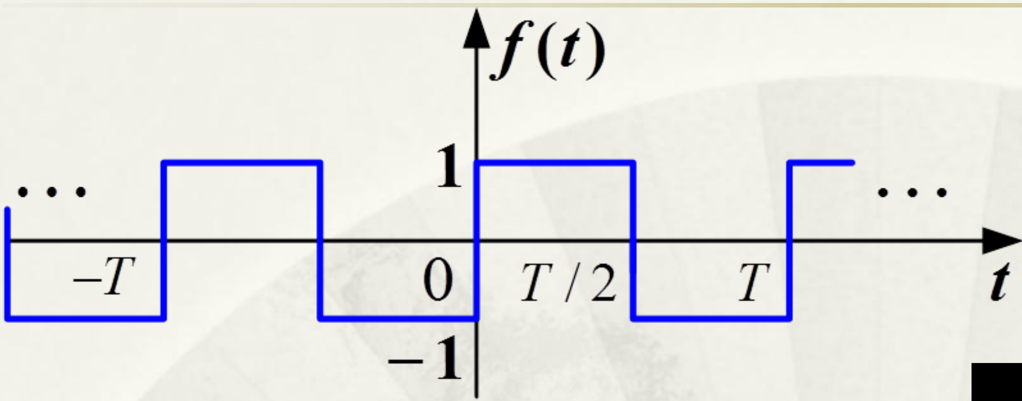
一、信号频谱的概念

$|F_n|\sim\omega$和$\varphi_n\sim\omega$的关系，称为双边谱。若F_n为实数，也可直接画F_n。

对于双边频谱，负频率只有数学意义，而无物理意义。为什么引入负频率？

$f(t)$是实函数，分解成虚指数，必须有共轭对$e^{jn\Omega t}$和$e^{-jn\Omega t}$，才能保证$f(t)$的实函数的性质不变。

频谱概念演示



频谱概念演示

既是奇函数又是奇谐函数,
其频谱中只含奇次谐波,
且为正弦波.

单选题 1分

设置

周期为T 的信号$f_T(t)$的基波角频率为：

A $\Omega = \dfrac{2\pi}{T}$

B $\Omega = \dfrac{\pi}{T}$

C $\Omega = \dfrac{\pi}{2T}$

提交

单边频谱图举例

例1： 周期信号$f(t)=1-\frac{1}{2}cos\left(\frac{\pi}{4}t-\frac{2}{3}\pi\right)+\frac{1}{4}sin\left(\frac{\pi}{3}t-\frac{\pi}{6}\right)$
试求该周期信号的周期T，基波角频率Ω，画出它的单边频谱图，并求$f(t)$的平均功率P。

解： 首先应用三角公式改写$f(t)$的表达式，即

$$f(t)=1+\frac{1}{2}cos\left(\frac{\pi}{4}t-\frac{2}{3}\pi+\pi\right)+\frac{1}{4}cos\left(\frac{\pi}{3}t-\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{2}\right)$$

$$=1+\frac{1}{2}cos\left(\frac{\pi}{4}t+\frac{\pi}{3}\right)+\frac{1}{4}cos\left(\frac{\pi}{3}t-\frac{2}{3}\pi\right)$$

显然1是该信号的直流分量。

$$f(t) = 1 + \frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}t + \frac{\pi}{3}\right) + \frac{1}{4}\cos\left(\frac{\pi}{3}t - \frac{2}{3}\pi\right)$$

分量 $\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}t + \frac{\pi}{3}\right)$ 的周期 $T_1 = 8$;

分量 $\frac{1}{4}\cos\left(\frac{\pi}{3}t - \frac{2}{3}\pi\right)$ 的周期 $T_2 = 6$;

所以$f(t)$的周期$T = 24$，基波角频率$\Omega = 2\pi/T = \pi/12$

因此，分量 $\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}t + \frac{\pi}{3}\right)$是$f(t)$的3次谐波？

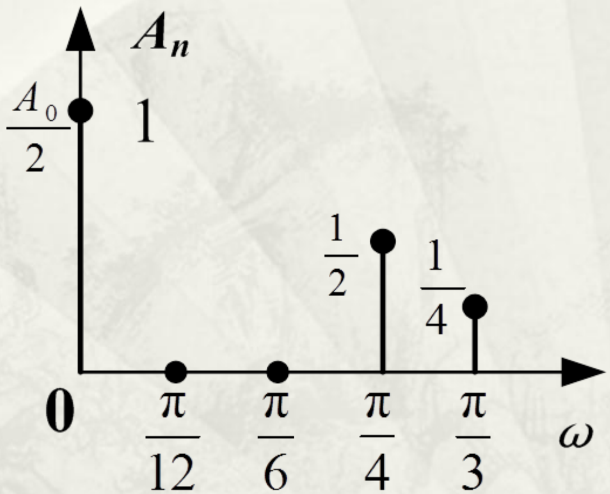
∵ （$\pi/4$）/（$\pi/12$） $= 3$

分量 $\frac{1}{4}\cos\left(\frac{\pi}{3}t - \frac{2}{3}\pi\right)$是$f(t)$的4次谐波？

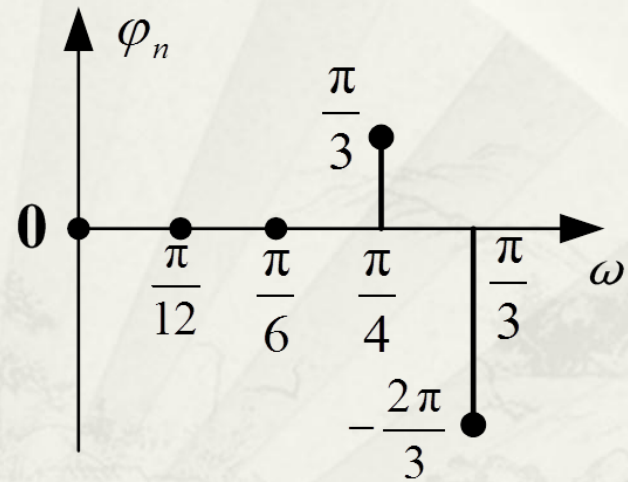
∵ （$\pi/3$）/（$\pi/12$） $= 4$

$$f(t)=1+\frac{1}{2}cos\left(\frac{\pi}{4}t+\frac{\pi}{3}\right)+\frac{1}{4}cos\left(\frac{\pi}{3}t-\frac{2}{3}\pi\right)$$

画出$f(t)$的单边振幅频谱图、相位频谱图如图



(a)



(b)

平均功率：$P=1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{37}{32}$

例2：周期信号$f(t)=1+sin\omega_1 t+2cos\omega_1 t+cos\left(2\omega_1 t+\frac{\pi}{4}\right)$

试画出其幅度谱和相位谱。

解：(1) 单边谱

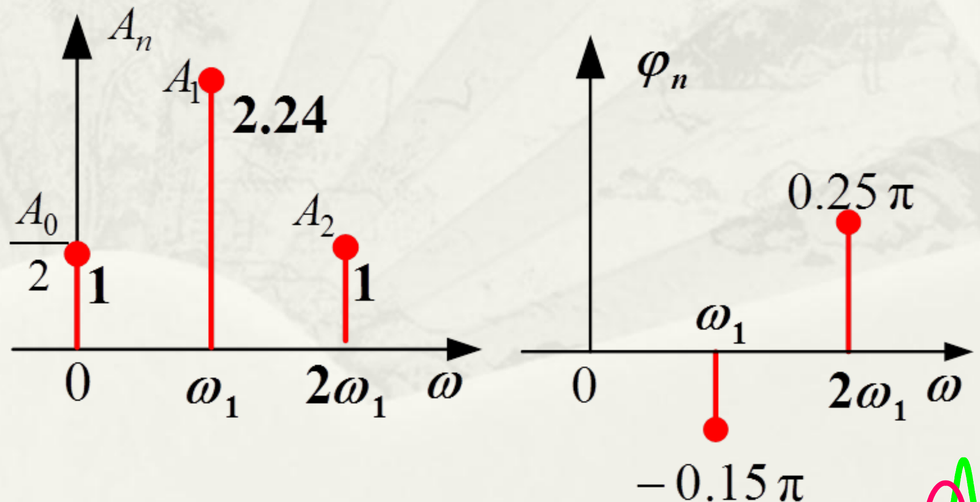
首先应用三角公式改写$f(t)$的表达式，即：

$$f(t)=1+\sqrt{5}cos(\omega_1 t-0.15\pi)+cos\left(2\omega_1 t+\frac{\pi}{4}\right)$$

$A_0/2=1, \varphi_0=0$　　$A_1=\sqrt{5}=2.236,\ \varphi_1=-0.15\pi$

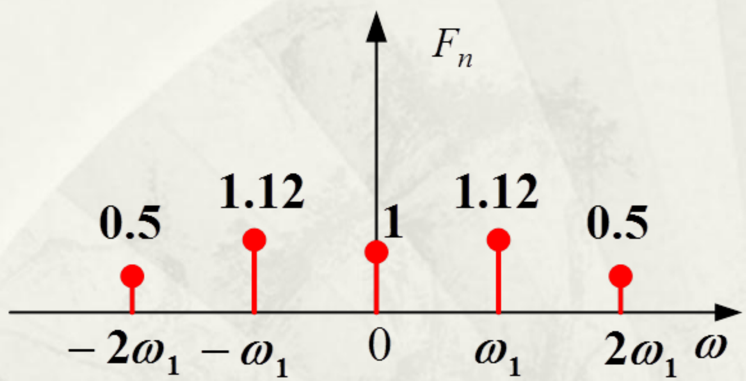
$A_2=1,\ \varphi_2=0.25\pi$

其单边幅度谱和相位谱分别如右图所示：

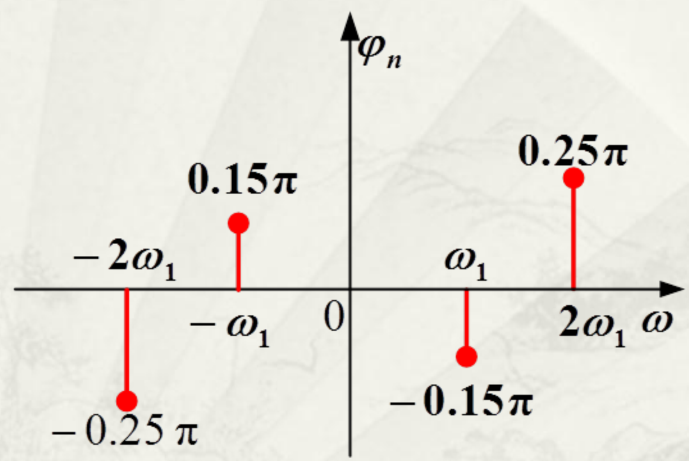


(2) 双边谱

$$F_n = |F_n| e^{j\varphi_n} = \frac{1}{2} A_n e^{j\varphi_n}$$



幅度谱

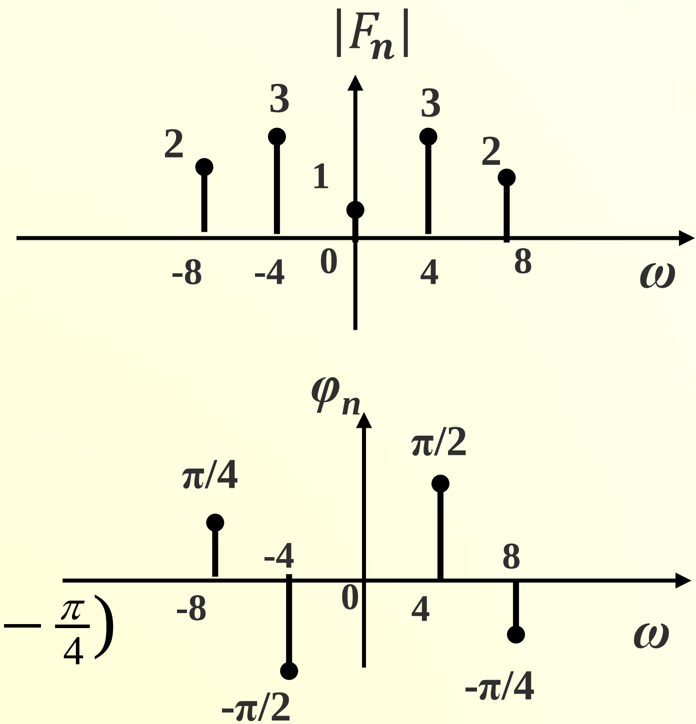


相位谱

单选题 1分

设置

已知某周期信号的振幅谱和相位谱如图所示，则该周期信号的级数表达式为：



A $f(t)=1-6\cos(4t)+4\cos(8t-\frac{\pi}{4})$

B $f(t)=1-6\sin(4t)+4\cos(8t-\frac{\pi}{4})$

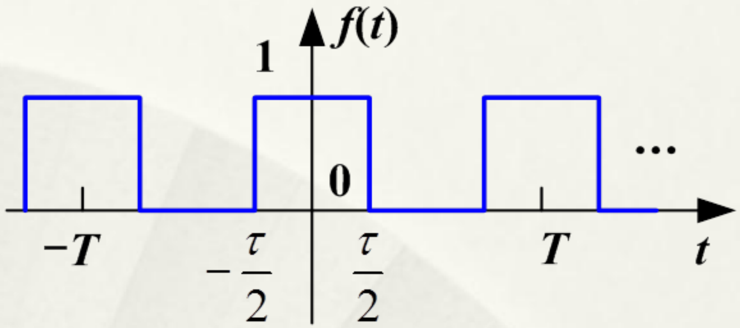
C $f(t)=1-6\sin(4t)+4\sin(8t-\frac{\pi}{4})$

D $f(t)=1+6\sin(4t+\frac{\pi}{2})+4\cos(8t-\frac{\pi}{4})$

提交

二、周期信号频谱的特点

例： 有一幅度为1，脉冲宽度为τ的周期矩形脉冲，其周期为 T ，如图所示，求频谱。



$$F_n=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)e^{-jn\Omega t}dt=\frac{1}{T}\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}}e^{-jn\Omega t}dt$$

$$=\frac{1}{T}\cdot\frac{1}{-jn\Omega}\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}}d\left(e^{-jn\Omega t}\right)=\frac{1}{T}\cdot\frac{e^{-jn\Omega t}}{-jn\Omega}\Bigg|_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}}=\frac{\tau}{T}\cdot\frac{\sin\frac{n\Omega\tau}{2}}{\frac{n\Omega\tau}{2}}$$

令$Sa(x)=\sin x/x$ (取样函数） $F_n=\dfrac{\tau}{T}Sa\left(\dfrac{n\Omega\tau}{2}\right)$

$$F_n = \frac{\tau}{T} Sa\left(\frac{n\Omega\tau}{2}\right) = \frac{\tau}{T} Sa\left(\frac{n\pi\tau}{T}\right) \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

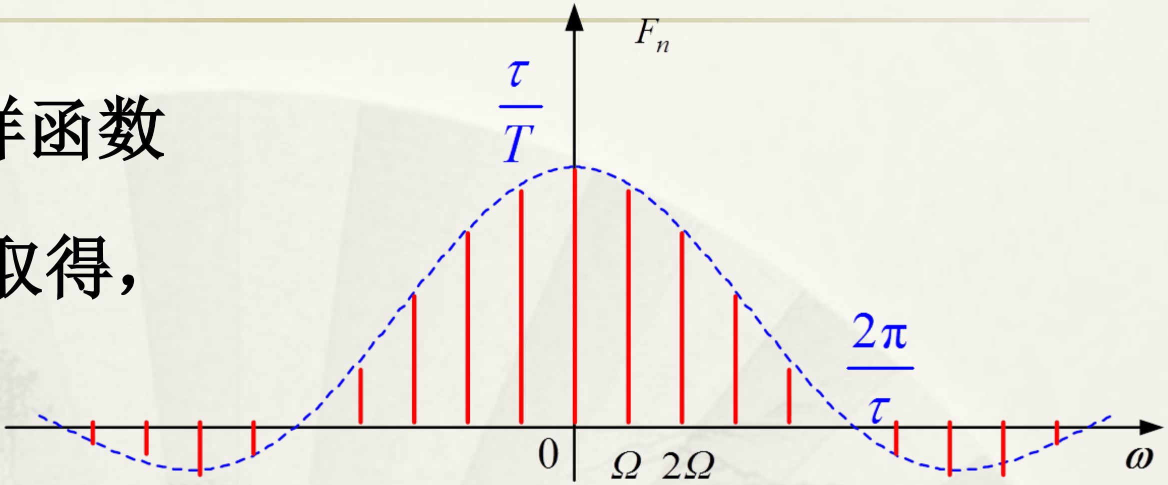
(1) 包络线形状：取样函数

(2) 其最大值在$n = 0$取得，

其值为 τ/T

(3) 离散谱（谐波性）

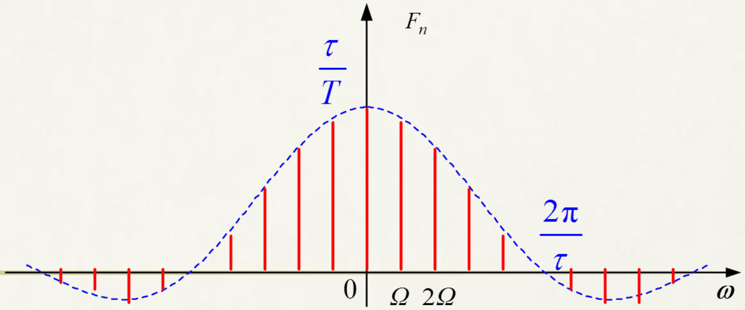
(4) 第一个零点坐标为$2\pi/\tau$



图中$T = 5\tau$

$$\frac{n\Omega\tau}{2} = \pi \Rightarrow \omega = n\Omega = \frac{2\pi}{\tau}$$

(5) F_n是复函数（此处为实函数），$F_n > 0$时，相位为0，否则，相位为π



周期信号频谱的特点：

(1)周期信号的频谱具有谐波(离散)性，谱线位置是基频Ω的整数倍；

(2)一般具有收敛性，总趋势减小。

谱线的结构与波形参数的关系：

➢ T一定，τ 变小，此时Ω（谱线间隔）不变。两零点之间的谱线数目：$\omega_1/\Omega=(2\pi/\tau)/(2\pi/T)=T/\tau$ 增多。

➢ τ一定，T增大，间隔Ω减小，频谱变密。幅度减小。

如果周期T无限增长（这时就成为非周期信号），那么，谱线间隔将趋近于零，周期信号的**离散频谱**就过渡到非周期信号的**连续频谱**，各频率分量的幅度也趋近于无穷小。

单选题 1分

设置

周期信号的频谱是（ ）

A 连续谱

B 离散谱

提交

单选题 1分

设置

连续信号的频谱是( )

A 周期的

B 非周期的

提交

单选题 1分

设置

信号的频谱是离散谱，则原时间信号为（）

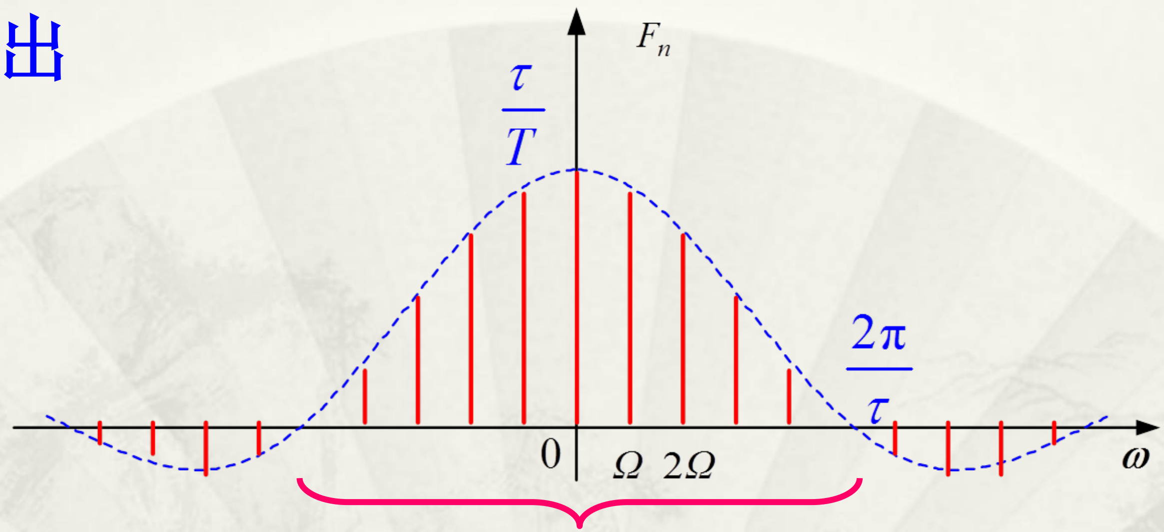
A 周期信号

B 非周期信号

提交

三、频带宽度

1. 问题提出



第一个零点集中了信号绝大部分能量（平均功率）

由频谱的收敛性可知，信号的功率集中在低频段。

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T f^2(t)dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |F_n|^2$$

单选题 1分

设置

周期信号的功率 $P=\sum_{n=0}^{\infty}|F_n|^2$

A 正确

B 错误

提交

2. 频带宽度

在满足一定失真条件下，信号可以用某段频率范围内的信号来表示，此频率范围称为**频带宽度**。

☆一般把**第一个零点**作为信号的频带宽度。记为：

$$B_w = \frac{2\pi}{\tau} \text{ 或者 } B_f = \frac{1}{\tau}; \qquad \text{带宽与脉宽成反比}$$

☆对于一般周期信号，将幅度下降为$0.1|F_n|_{max}$的频率区间定义为频带宽度。

3. 系统的通频带>信号的带宽，才能不失真

语音信号 $300 \sim 3400Hz$

音乐信号 $50 \sim 15000Hz$

§4.4　非周期信号的频谱

傅里叶变换

常用函数的傅里叶变换

一、非周期信号的傅里叶变换

周期信号的指数形式的傅里叶级数的展开：

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n e^{jn\Omega t} \qquad F_n=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)e^{-jn\Omega t}dt$$

$T\rightarrow\infty$时　　周期信号 $\longrightarrow$ 非周期信号

谱线间隔 $\Omega=2\pi/T\rightarrow 0$

离散谱 $\longrightarrow$ 连续谱

傅里叶级数的系数$F_n\rightarrow 0$

各次谐波的幅度值虽为无穷小，但相对大小仍有区别

此时，是否可继续用F_n表示非周期信号的频谱？

引入频谱密度函数。令

$$F(j\omega) = \lim_{T\to\infty} \frac{F_n}{1/T} = \lim_{T\to\infty} F_n T$$

称$F(j\omega)$为频谱密度函数，即单位频率上的频谱。

根据傅里叶级数，可知：

$$F_n T = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-jn\Omega t} dt \qquad f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n T e^{jn\Omega t} \frac{1}{T}$$

考虑到：$T \to \infty, \Omega \to$无穷小，记为:$d\omega$

$n\Omega \to \omega$, 即由离散量变为了连续量

$\frac{1}{T} = \frac{\Omega}{2\pi} \to \frac{d\omega}{2\pi}$ 同时，$\sum \to \int$

$$F_n T = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)e^{-jn\Omega t}dt \qquad f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n T e^{jn\Omega t}\frac{1}{T}$$

于是得到：

$$\boxed{\begin{aligned} F(j\omega) &= \lim_{T\to\infty} F_n T = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt \\ f(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega)e^{j\omega t}d\omega \end{aligned}}$$

$F(j\omega)$称为$f(t)$的傅里叶变换或频谱密度函数，简称频谱。

$f(t)$称为$F(j\omega)$的傅里叶反变换或原函数。

也可简记为： $f(t) \longleftrightarrow F(j\omega)$

或者：

$$F(j\omega) = \mathcal{F}[f(t)]$$

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}[F(j\omega)]$$

$F(j\omega)$一般是复函数，写为

$$F(j\omega) = |F(j\omega)|e^{j\varphi(\omega)} = R(\omega) + jX(\omega)$$

说明：

(1) 前面推导并未遵循严格的数学步骤。可证明，函数 $f(t)$傅里叶变换存在的充分条件：

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|dt < \infty$$

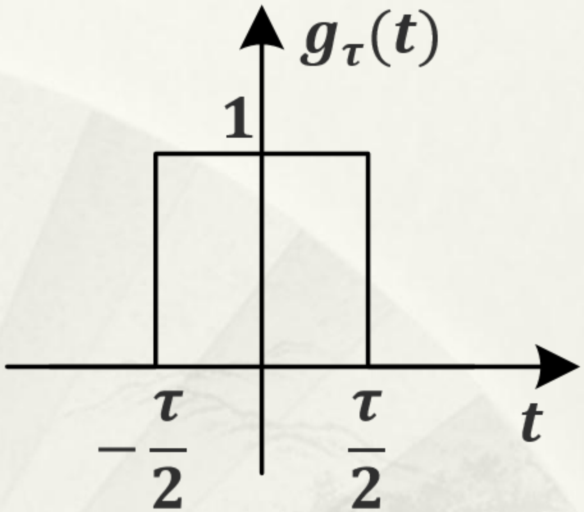
(2) 用下列关系还可方便计算一些积分

$$F(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt \qquad f(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega)d\omega$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega)d\omega = ? \qquad \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega)e^{-j\omega}d\omega = ?$$

二、常用函数的傅里叶变换

1. 矩形脉冲（门函数），记为$g_\tau(t)$



$$F(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt$$

$$=\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} e^{-j\omega t}dt$$

$$=\frac{e^{-j\omega\frac{\tau}{2}}-e^{j\omega\frac{\tau}{2}}}{-j\omega}=\frac{2\sin(\omega\frac{\tau}{2})}{\omega}=\tau Sa(\omega\frac{\tau}{2})$$

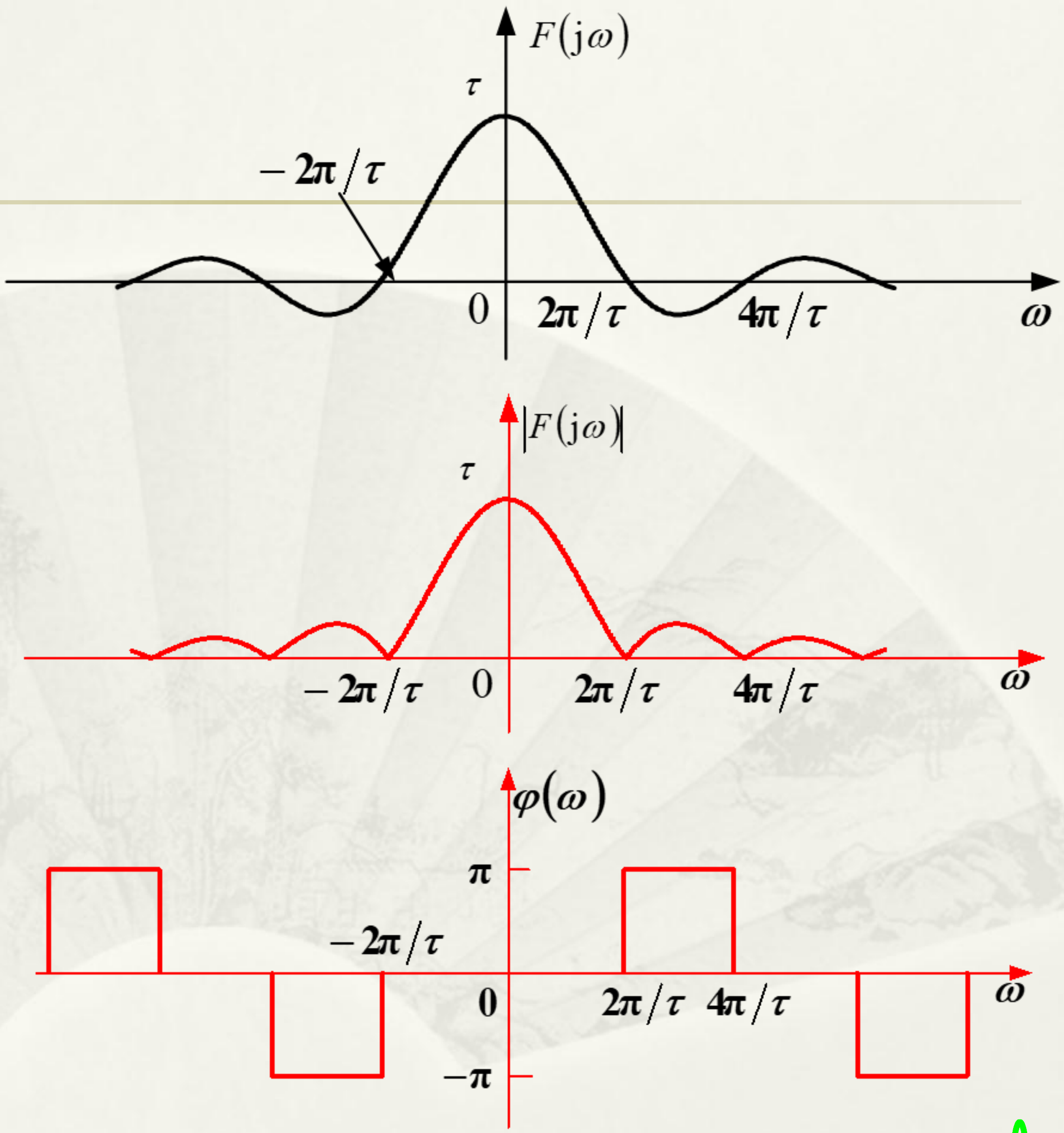
$$\boxed{g_\tau(t)\longleftrightarrow\tau Sa(\omega\frac{\tau}{2})}$$

$$F(j\omega)=\tau Sa(\omega\frac{\tau}{2})$$

频宽：$B_w=2\pi/\tau$

幅度频谱：

相位频谱：



单选题 1分

设置

计算$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2\sin w}{w}dw$ 的值（）

A π

B 2π

C 1

D 0

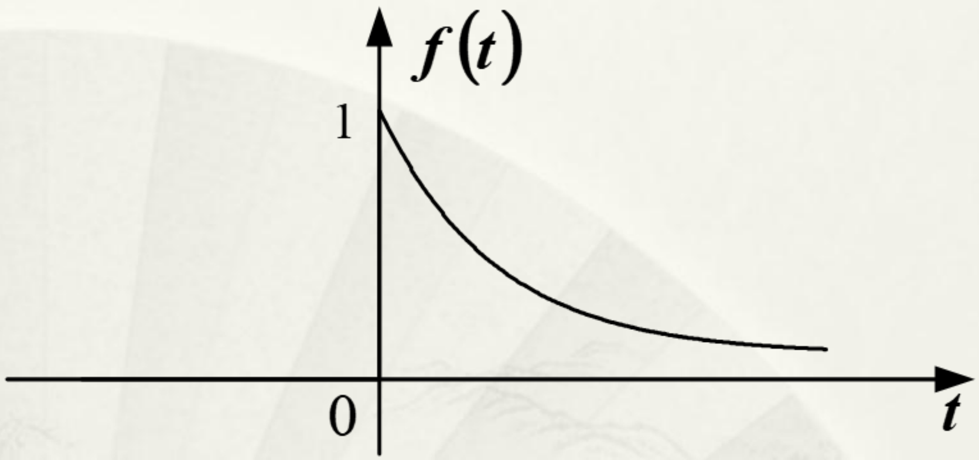
提交

2. 单边指数函数$f(t)=e^{-\alpha t}\varepsilon(t)\ \ \alpha>0$

$$F(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-j\omega t}dt$$

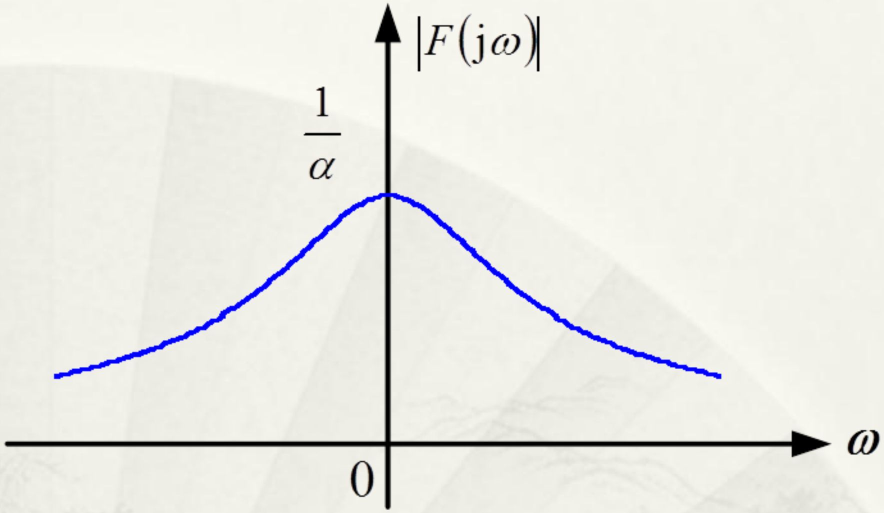
$$=\int_{0}^{\infty}e^{-\alpha t}e^{-j\omega t}dt$$

$$=-\frac{1}{\alpha+j\omega}e^{-(\alpha+j\omega)t}\Bigg|_{0}^{\infty}=\frac{1}{\alpha+j\omega}$$



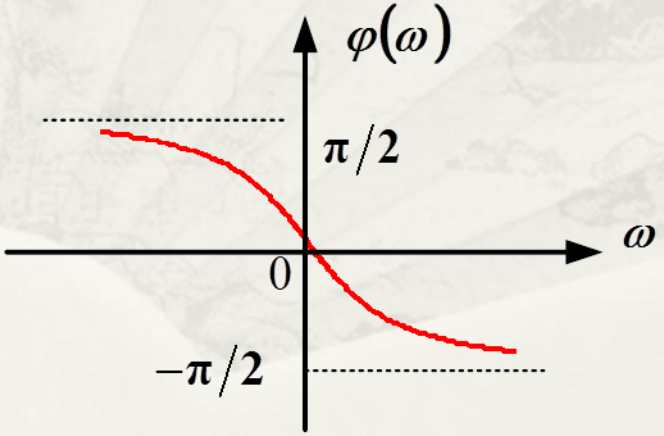
$$\boxed{e^{-\alpha t}\varepsilon(t)\longleftrightarrow\frac{1}{\alpha+j\omega}}$$

$$e^{-\alpha t}\varepsilon(t) \longleftrightarrow \frac{1}{\alpha + j\omega}$$



幅度频谱：

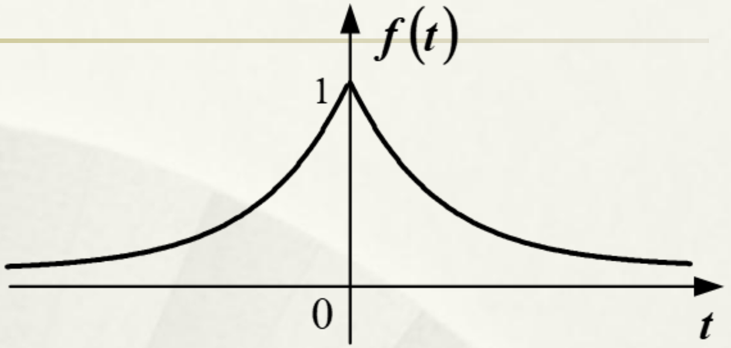
$$|F(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}}$$



相位频谱：

$$\varphi(\omega) = -arctan\frac{\omega}{\alpha}$$

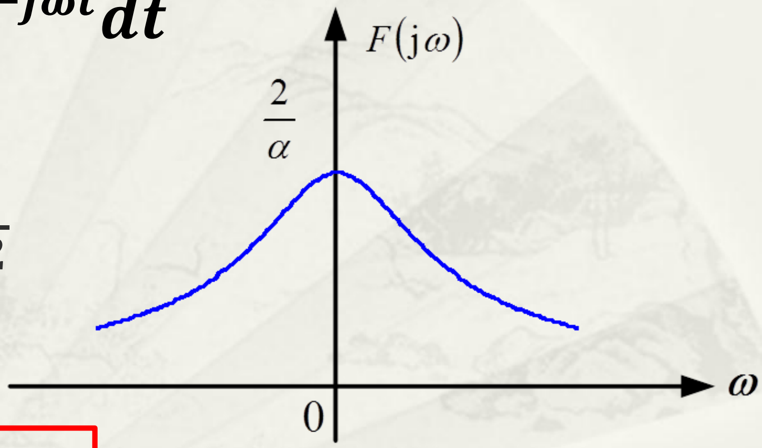
3. 双边指数函数$f(t) = e^{-\alpha|t|}\quad \alpha>0$



$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt$$

$$= \int_{-\infty}^{0} e^{\alpha t}e^{-j\omega t}dt + \int_{0}^{\infty} e^{-\alpha t}e^{-j\omega t}dt$$

$$= \frac{1}{\alpha - j\omega} + \frac{1}{\alpha + j\omega} = \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}$$



$$\boxed{e^{-\alpha|t|} \longleftrightarrow \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}}$$

4．冲激函数δ(*t*)、δ'(*t*)

$$\boldsymbol{\delta(t) \longleftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt = 1}$$

$$\boldsymbol{\delta'(t) \longleftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \delta'(t) e^{-j\omega t} dt = j\omega}$$

$$\boxed{\begin{aligned} &\boldsymbol{\delta(t) \longleftrightarrow 1} \\ &\boldsymbol{\delta'(t) \longleftrightarrow j\omega} \end{aligned}}$$

单选题 1分

设置

a为非零实常数，**信号**$\delta(at)$**的傅里叶变换是（）**

A 1

B a

C $\frac{1}{a}$

D $\frac{1}{|a|}$

提交

5. 直流信号1

有一些函数不满足绝对可积这一充分条件，如 1，$\varepsilon(t)$ 等，但傅里叶变换却存在。直接用定义式不好求解。

可构造一函数序列$\{f_\alpha(t)\}$逼近$f(t)$，即

$$f(t)=\lim_{\alpha\to\infty}f_\alpha(t)$$

而$f_\alpha(t)$ 满足绝对可积条件，并且$\{f_\alpha(t)\}$的傅里叶变换所形成的序列$\{F_\alpha(j\omega)\}$是极限收敛的。

则可定义$f(t)$的傅里叶变换$F(j\omega)$为:

$$F(j\omega)=\lim_{\alpha\to\infty}F_\alpha(j\omega)$$

这样定义的傅里叶变换也称为广义傅里叶变换。

$1 \longleftrightarrow ?$

构造 $f_\alpha(t) = e^{-\alpha|t|}$ ， $\alpha > 0 \longleftrightarrow F_\alpha(j\omega) = \dfrac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}$

$$\because f(t) = 1 = \lim_{\alpha \to 0} f_\alpha(t)$$

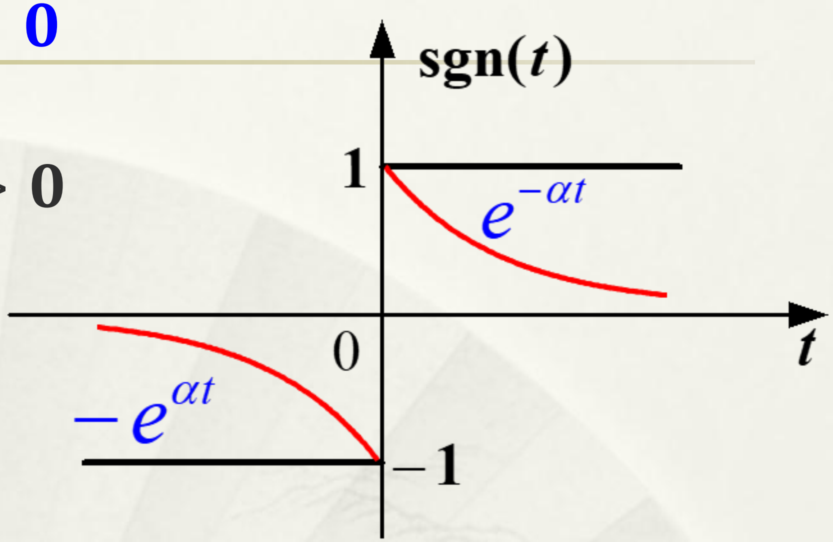
$$\therefore F(j\omega) = \lim_{\alpha \to 0} F_\alpha(j\omega) = \lim_{\alpha \to 0} \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} = \begin{cases} 0, & \omega \neq 0 \\ \infty, & \omega = 0 \end{cases}$$

我们发现：

$$\lim_{\alpha \to 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} d\omega = \lim_{\alpha \to 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2}{1 + \left(\frac{\omega}{\alpha}\right)^2} d\frac{\omega}{\alpha} = 2\pi$$

$$\boxed{1 \longleftrightarrow 2\pi\delta(\omega)}$$

6. 符号函数 $sgn(t) = \begin{cases} -1, & t < 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases}$



构造 $f_\alpha(t) = \begin{cases} -e^{\alpha t}, & t < 0 \\ e^{-\alpha t}, & t > 0 \end{cases} \quad \alpha > 0$

$\because sgn(t) = \lim\limits_{\alpha \to 0} f_\alpha(t)$

$f_\alpha(t) \longleftrightarrow F_\alpha(j\omega)$

$$= \frac{1}{\alpha + j\omega} - \frac{1}{\alpha - j\omega} = -\frac{j2\omega}{\alpha^2 + \omega^2}$$

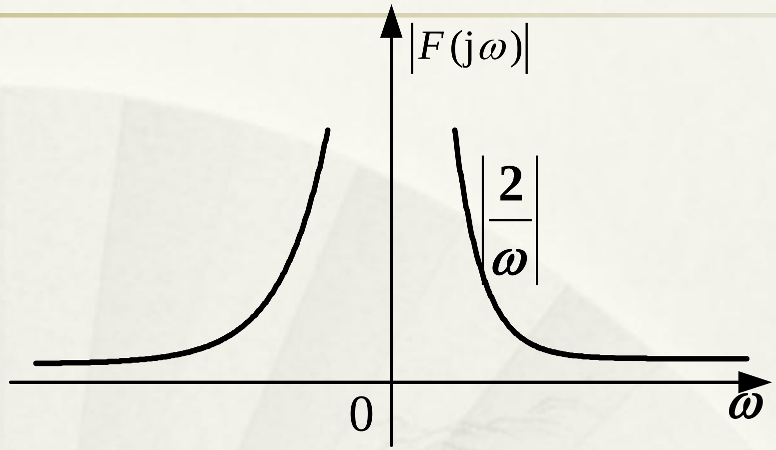
$$\therefore F(j\omega) = \lim_{\alpha \to 0} F_\alpha(j\omega) = \lim_{\alpha \to 0} \frac{-j2\omega}{\alpha^2 + \omega^2} = \frac{2}{j\omega}$$

$$\boxed{sgn(t) \longleftrightarrow \frac{2}{j\omega}}$$

$$sgn(t) \longleftrightarrow \frac{2}{j\omega} = -j\frac{2}{\omega} = \frac{2}{|\omega|}e^{\mp j\frac{\pi}{2}}$$

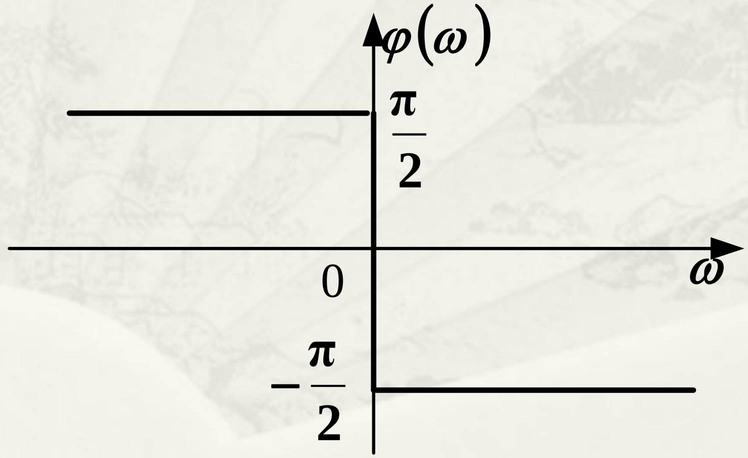
幅度频谱：偶函数

$$|F(j\omega)| = \frac{2}{|\omega|}$$



相位频谱：奇函数

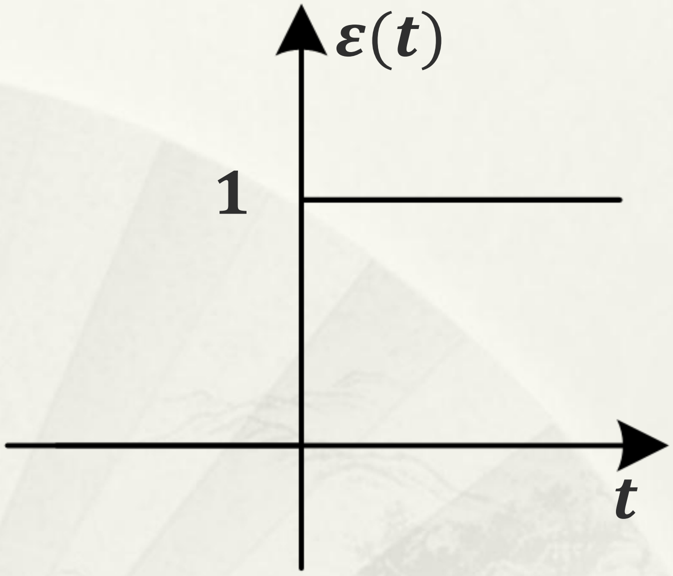
$$\varphi(\omega) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2}, & \omega > 0 \\ \frac{\pi}{2}, & \omega < 0 \end{cases}$$



7. 阶跃函数

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}sgn(t)$$

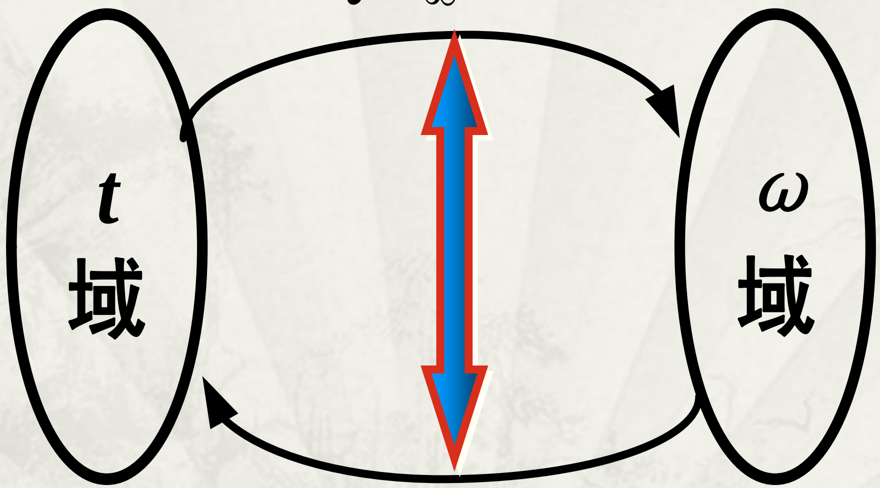
$$\longleftrightarrow \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$



$$\boxed{\varepsilon(t) \longleftrightarrow \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}}$$

傅里叶变换对

$$F(\mathrm{j}\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t$$



$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\mathrm{j}\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega$$

常用函数傅里叶变换对

$$g_\tau(t) \longleftrightarrow \tau Sa(\omega\frac{\tau}{2})$$

$$e^{-\alpha t}\varepsilon(t) \longleftrightarrow \frac{1}{\alpha + j\omega}$$

$$e^{-\alpha|t|} \longleftrightarrow \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}$$

$$\delta(t) \longleftrightarrow 1$$

$$\delta'(t) \longleftrightarrow j\omega$$

$$1 \longleftrightarrow 2\pi\delta(\omega)$$

$$sgn(t) \longleftrightarrow \frac{2}{j\omega}$$

$$\varepsilon(t) \longleftrightarrow \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$