§4.6 能量谱和功率谱

帕斯瓦尔关系Parseval’s Relation

能量谱

功率谱

能量谱和功率谱分析

一、帕斯瓦尔关系（Parseval's Relation）

$$\boxed{E=\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|^2dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|F(j\omega)|^2d\omega}$$

证明1： $$E=\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|^2dt=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)f^*(t)dt$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F^*(j\omega)e^{-j\omega t}d\omega\right]dt$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F^*(j\omega)\left[\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-j\omega t}dt\right]d\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F^*(j\omega)\,F(j\omega)d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|F(j\omega)|^2d\omega$$

证明2:

由相关定理知: $\mathcal{F}[R(\tau)] = |F(j\omega)|^2$

即: $R(\tau) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |F(j\omega)|^2 e^{j\omega\tau} d\omega$

$$\therefore R(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |F(j\omega)|^2 d\omega$$

又能量有限信号的自相关函数是 $R(\tau) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(t) f^*(t-\tau) dt$

$$\therefore R(0) = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 d\omega$$

因此:

$$\therefore R(0) = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |F(j\omega)|^2 d\omega$$

帕斯瓦尔能量关系举例

例: 求下面信号的能量: $2cos(997t)\dfrac{sin5t}{\pi t}$

解: 根据对称性可得: $\dfrac{sin5t}{\pi t} \longleftrightarrow g_{10}(\omega)$

根据: $f(t)cos\omega_0 t \longleftrightarrow \dfrac{1}{2}F[j(\omega+\omega_0)] + \dfrac{1}{2}F[j(\omega-\omega_0)]$

$$\therefore 2cos(997t)\frac{sin5t}{\pi t} \longleftrightarrow g_{10}(\omega-997) + g_{10}(\omega+997)$$

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |F(j\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi}(10+10) = \frac{10}{\pi}$$

二、能量谱密度（能量谱）

定义：能量谱指单位频率的信号能量，记为$\mathcal{E}(\omega)$

在频带df内信号的能量为$\mathcal{E}(\omega)df$，因而信号在整个频率范围的总能量

$$E=\int_{-\infty}^{\infty}\mathcal{E}(\omega)df=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathcal{E}(\omega)d\omega$$

根据帕斯瓦尔关系 $E=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}|F(j\omega)|^2d\omega$

$\therefore\ \mathcal{E}(\omega)=|F(j\omega)|^2 \qquad \therefore\ R(\tau)\longleftrightarrow\mathcal{E}(\omega)$

即：能量谱函数与自相关函数是一对傅里叶变换对。

三、 功率谱密度（功率谱）

定义：功率谱指单位频率的信号功率，记为$\wp(\omega)$

在频带df内信号的功率为$\wp(\omega)df$，因而信号在整个频率范围的总功率。

$$P=\int_{-\infty}^{\infty}\wp(\omega)df=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\wp(\omega)d\omega$$

设$f(t)$是功率有限信号

令 $f_T(t)=\begin{cases}f(t), & |t|<T/2\\ 0, & |t|>T/2\end{cases}$ $\quad f_T(t)\longleftrightarrow F_T(j\omega)$

则$f(t)$的平均功率为:

$$P=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f^2(t)dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\lim_{T\to\infty}\frac{|F_T(j\omega)|^2}{T}d\omega$$

$$\because P=\int_{-\infty}^{\infty}\wp(\omega)df=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\wp(\omega)d\omega$$

因此:功率有限信号的功率谱密度为:

$$\wp(\omega)=\lim_{T\to\infty}\frac{|F_T(j\omega)|^2}{T}$$

功率有限信号的自相关函数为:

$$R(\tau)=\lim_{T\to\infty}\left[\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f_T(t)f_T(t-\tau)dt\right]=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}f_T(t)*f_T(-t)$$

$$\wp(\omega)=\lim_{T\to\infty}\frac{|F_T(j\omega)|^2}{T}$$

因此:

$$R(\tau)\longleftrightarrow\wp(\omega)$$

维纳-欣钦关系式

功率有限信号的功率谱与自相关函数是一对傅里叶变换。

功率谱举例

例1：求余弦信号 $f(t)=\cos(\omega_1 t)$ 的自相关函数和功率谱。

解：对功率有限信号，由自相关函数的定义，有

$$R(\tau)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)f(t-\tau)dt$$

$$=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\cos(\omega_1 t)\cos[\omega_1(t-\tau)]dt$$

$$=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\cos(\omega_1 t)[\cos(\omega_1 t)\cos(\omega_1\tau)+\sin(\omega_1 t)\sin(\omega_1\tau)]dt$$

$$=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\cos(\omega_1\tau)\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\cos^2(\omega_1 t)dt=\frac{1}{2}\cos(\omega_1\tau)$$

$$R(\tau)=\frac{1}{2}cos(\omega_1\tau)$$

因为功率有限信号的功率谱函数与自相关函数是一对傅里叶变换, 所以功率谱为:

$$\wp(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}R(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau$$

$$=\frac{\pi}{2}[\delta(\omega-\omega_1)+\delta(\omega+\omega_1)]$$

功率谱举例

例1：白噪声，其功率谱密度为$\wp_N(\omega) = N, -\infty < \omega < \infty, N$为常量，求其自相关函数。

解：利用维纳—欣钦关系式$R(\tau) \longleftrightarrow \wp(\omega)$得自相关函数:

$$R_N(\tau) = N\delta(\tau)$$

对于$\tau \neq 0$的所有时刻，$R_N(\tau)$均取零值，仅在$\tau = 0$时为强度等于N的冲激。

由于白噪声的功率谱密度为常数，所以白噪声的自相关函数为冲激函数，表明白噪声在各时刻的取值杂乱无章，没有任何相关性。

四、 能量谱和功率谱分析

时域 $y(t) = f(t) * h(t)$

频域 $Y(j\omega) = F(j\omega)H(j\omega)$

$$\xrightarrow[F(j\omega)]{f(t)} \boxed{\begin{matrix} h(t) \\ H(j\omega) \end{matrix}} \xrightarrow[Y(j\omega)]{y(t)}$$

假定$f(t)$为能量有限信号，$f(t)$的能量谱密度为$\mathcal{E}_f(\omega)$，$y(t)$的能量谱密度为$\mathcal{E}_y(\omega)$，则有：

$$\mathcal{E}_f(\omega) = |F(j\omega)|^2 \qquad \mathcal{E}_y(\omega) = |Y(j\omega)|^2$$

而 $|Y(j\omega)|^2 = |F(j\omega)|^2|H(j\omega)|^2$

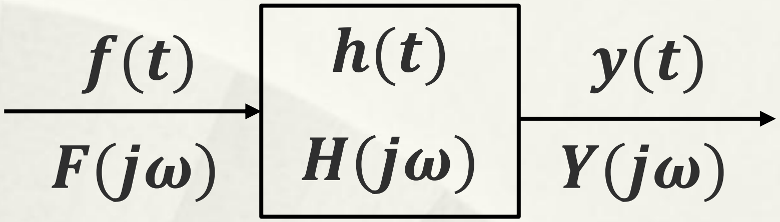
$$\therefore \boxed{\mathcal{E}_y(\omega) = |H(j\omega)|^2\mathcal{E}_f(\omega)}$$

物理意义： 响应的能量谱等于激励的能量谱与$|H(j\omega)|^2$的乘积。

四、 能量谱和功率谱分析

时域 $y(t) = f(t) * h(t)$

频域 $Y(j\omega) = F(j\omega)H(j\omega)$

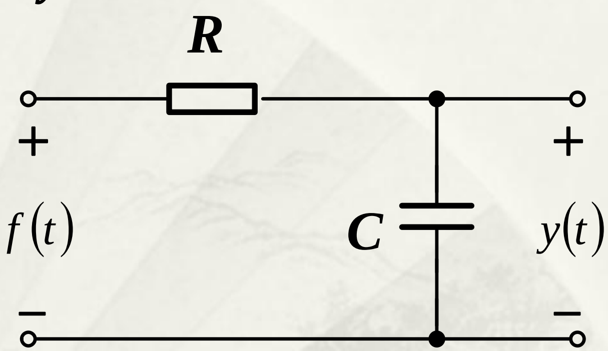


类似地，对功率信号有：

$$\boxed{\wp_y(\omega) = |H(j\omega)|^2 \wp_f(\omega)}$$

功率谱分析举例

例：功率谱密度为N的白噪声通过图(a)所示RC低通系统，求输出的功率谱$\wp_y(\omega)$及自相关函数$R_y(\tau)$，并求输出的平均功率P_y。



$(a)RC$低通电路

解：已知$f(t)$函数的功率谱为

$$\wp_f(\omega) = N$$

$$H(j\omega) = \frac{1/j\omega C}{R + 1/j\omega C} = \frac{1}{1 + j\omega RC}$$

$$\therefore \wp_y(\omega) = |H(j\omega)|^2 \wp_f(\omega) = \frac{N}{1 + (\omega RC)^2}$$

利用维纳—欣钦关系式 $R(\tau) \longleftrightarrow \wp(\omega)$

$$\therefore R_y(\tau) = \mathcal{F}^{-1}[\mathcal{P}_y(\omega)] = \mathcal{F}^{-1}\left[\frac{N}{1+(\omega RC)^2}\right]$$

$$\because \mathcal{F}\left(e^{-\alpha|t|}\right) = \frac{2\alpha}{\alpha^2+\omega^2}$$

$$\therefore R_y(\tau) = \frac{N}{2RC}e^{-\frac{1}{RC}|t|}$$ 自相关函数

平均功率：$P_y = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\wp_y(\omega)d\omega = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{N}{1+(\omega RC)^2}d\omega$

$$= \frac{N}{\pi RC}arctan(RC\omega)|_0^{\infty} = \frac{N}{2RC}$$