信号与系统 电子教案

§4.5 傅里叶变换的性质

线性

奇偶性

对称性

尺度变换

时移特性

频移特性

卷积定理

时域微分和积分

频域微分和积分

相关定理

常用函数傅里叶变换对

$$g_\tau(t) \longleftrightarrow \tau Sa(\omega\frac{\tau}{2})$$

$$e^{-\alpha t}\varepsilon(t) \longleftrightarrow \frac{1}{\alpha + j\omega}$$

$$e^{-\alpha|t|} \longleftrightarrow \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}$$

$$\delta(t) \longleftrightarrow 1$$

$$\delta'(t) \longleftrightarrow j\omega$$

$$1 \longleftrightarrow 2\pi\delta(\omega)$$

$$sgn(t) \longleftrightarrow \frac{2}{j\omega}$$

$$\varepsilon(t) \longleftrightarrow \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$

一、线性性质(Linear Property)

若 $f_1(t) \longleftrightarrow F_1(j\omega)$， $f_2(t) \longleftrightarrow F_2(j\omega)$

则： $[af_1(t) + bf_2(t)] \longleftrightarrow [aF_1(j\omega) + bF_2(j\omega)]$

证明:

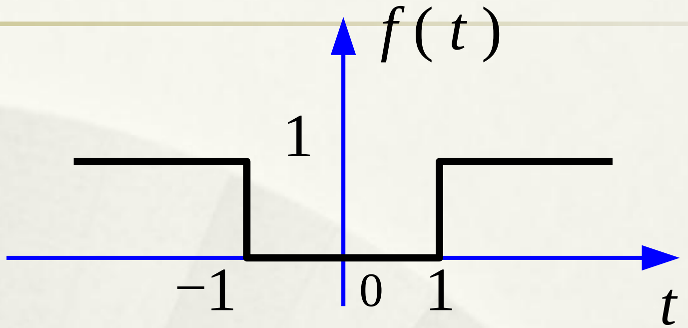
$$\mathcal{F}[af_1(t) + bf_2(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} [af_1(t) + bf_2(t)]e^{-j\omega t}dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} af_1(t)e^{-j\omega t}dt + \int_{-\infty}^{\infty} bf_2(t)e^{-j\omega t}dt$$

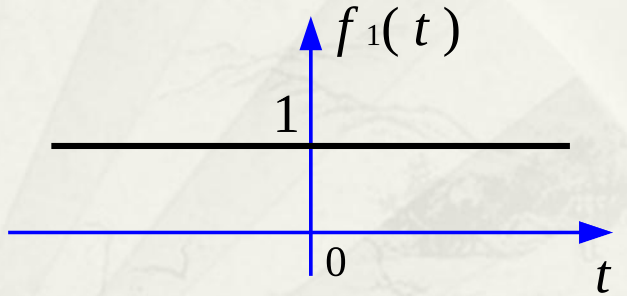
$$= aF_1(j\omega) + bF_2(j\omega)$$

线性性质举例

例： 图示$f(t)$的频谱$F(j\omega)=?$

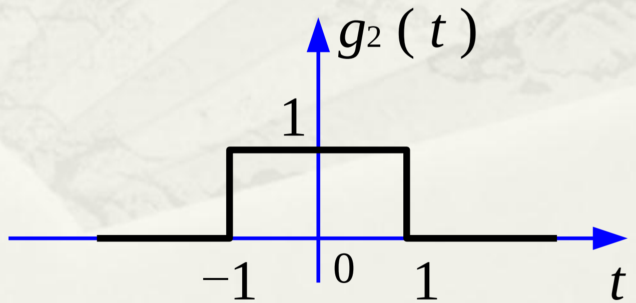


解： $f(t) = f_1(t) - g_2(t)$



$f_1(t) = 1 \longleftrightarrow 2\pi\delta(\omega)$

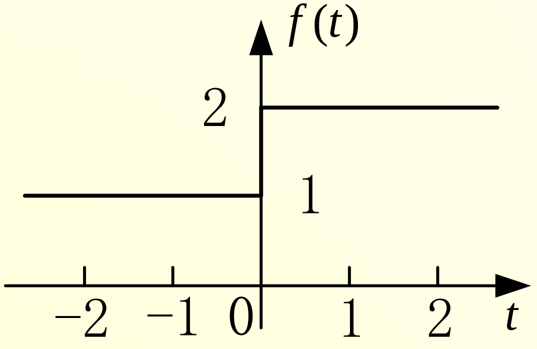
$g_2(t) \longleftrightarrow 2Sa(\omega)$



$\therefore F(j\omega) = 2\pi\delta(\omega) - 2Sa(\omega)$

设置

求如图所示信号的傅里叶变换



A $\pi\delta(w)+\dfrac{1}{jw}$

B $2\pi\delta(w)+\dfrac{2}{jw}$

C $3\pi\delta(w)+\dfrac{1}{jw}$

D $3\pi\delta(w)+\dfrac{2}{jw}$

提交

❖ $f(-t) \leftrightarrow F(-j\omega)$

与是否实函数无关

二、奇偶虚实性(Parity)（5版删）

若 $f(t)$是实函数，且

$$f(t) \longleftrightarrow F(j\omega) = |F(j\omega)|e^{j\varphi(\omega)} = R(\omega) + jI(\omega)$$

则: ✓ 任意实函数

- $R(\omega) = R(-\omega)$； $I(\omega) = -I(-\omega)$
- $|F(j\omega)| = |F(-j\omega)|$； $\varphi(\omega) = -\varphi(-\omega)$
- $F(j\omega) = F^*(-j\omega)$ (实函数特性)

✓ 实&偶函数

- $F(j\omega) = R(\omega)$， $I(\omega) = 0$

✓ 实&奇函数

- $F(j\omega) = jI(\omega)$， $R(\omega) = 0$

实函数$f(t)$满足$f(t) = f(-t)$，它的傅里叶变换一定是（ ）

A 实部为0

B 虚部为0

C 实虚部都不为0

D 以上都不是

提交

三、对称性(Symmetrical Property)

若 $f(t) \longleftrightarrow F(j\omega)$ 则: $F(jt) \longleftrightarrow 2\pi f(-\omega)$

证明:
$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega)e^{j\omega t}d\omega \qquad (1)$$

式 (1) $t \to \omega$, $\omega \to t$ 则:
$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(jt)e^{j\omega t}dt \qquad (2)$$

式 (2) $\omega \to -\omega$ 则:
$$f(-\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(jt)e^{-j\omega t}dt$$

$$\therefore F(jt) \longleftrightarrow 2\pi f(-\omega)$$

对称性举例

例: $f(t)=\dfrac{1}{1+t^2} \longleftrightarrow F(j\omega)=?$

解: $\because e^{-\alpha|t|} \longleftrightarrow \dfrac{2\alpha}{\alpha^2+\omega^2}$ $\quad \therefore e^{-|t|} \longleftrightarrow \dfrac{2}{1+\omega^2}$

$\therefore \dfrac{2}{1+t^2} \longleftrightarrow 2\pi e^{-|\omega|}$ $\quad \dfrac{1}{1+t^2} \longleftrightarrow \pi e^{-|\omega|}$

练习: $\dfrac{sint}{t} \longleftrightarrow ?$ $\quad \dfrac{1}{1+jt} \longleftrightarrow ?$ $\quad \dfrac{1}{1-jt} \longleftrightarrow ?$ $\quad t+\dfrac{1}{t} \longleftrightarrow ?$

$\delta'(t) \longleftrightarrow j\omega$ $\quad sgn(t) \longleftrightarrow \dfrac{2}{j\omega}$ $\quad e^{-\alpha t}\varepsilon(t) \longleftrightarrow \dfrac{1}{\alpha+j\omega}$

$g_\tau(t) \longleftrightarrow \tau Sa(\omega\dfrac{\tau}{2})$

单选题 1分

$f(t)=\frac{1}{t}$ **对应的傅里叶变换结果为：**

A $-j\pi\,sgn(\omega)$

B $j\pi\,sgn(\omega)$

C $j2\pi\,sgn(\omega)$

D $-j2\pi\,sgn(\omega)$

提交

单选题 1分

设置

求 $f(t)=\dfrac{2}{1+t^2}$ 的傅里叶变换：

A $e^{-|\omega|}$

B $2\pi e^{-|\omega|}$

C $e^{|\omega|}$

D $2\pi e^{|\omega|}$

提交

四、尺度变换性质(Scaling Transform Property)

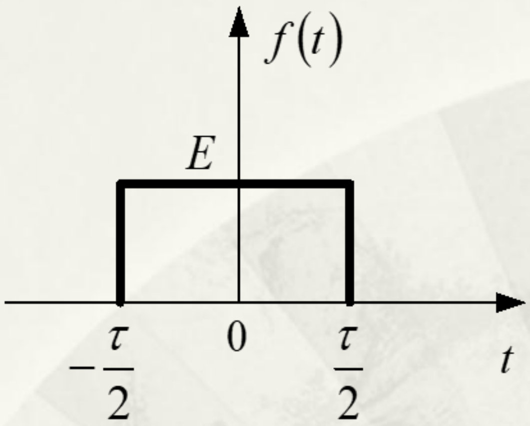
若 $f(t) \longleftrightarrow F(j\omega)$

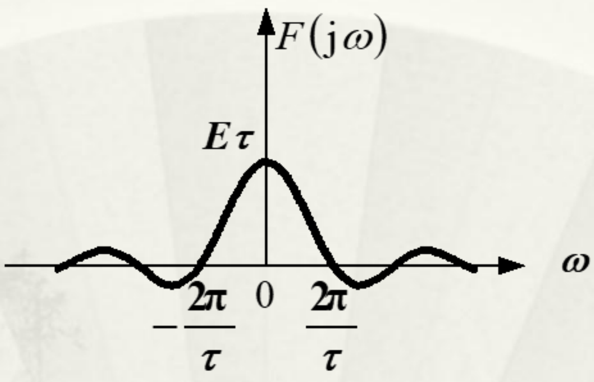
则: $f(at) \longleftrightarrow \dfrac{1}{|a|}F(j\dfrac{\omega}{a})$ 其中a为非零的实常数。

特例: $a = -1$时, $f(-t) \longleftrightarrow F(-j\omega)$

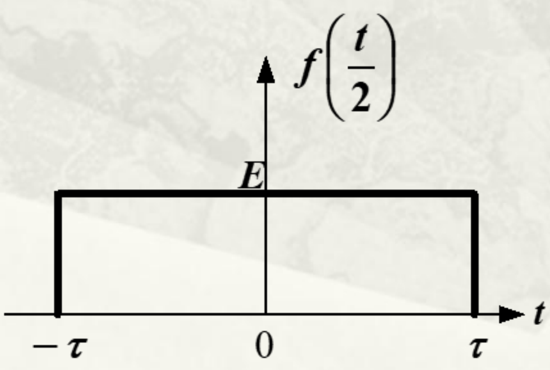
证明提示: 从定义出发，做变量代换令$\tau = at$, 分$a > 0$和$a < 0$两种情况讨论

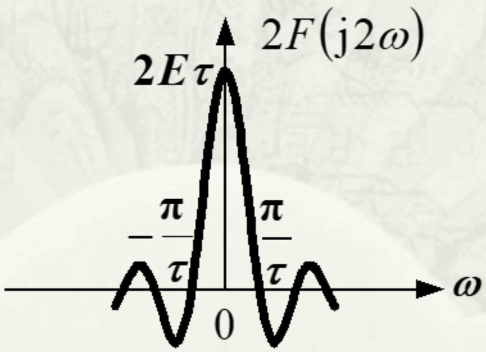
尺度变换的意义





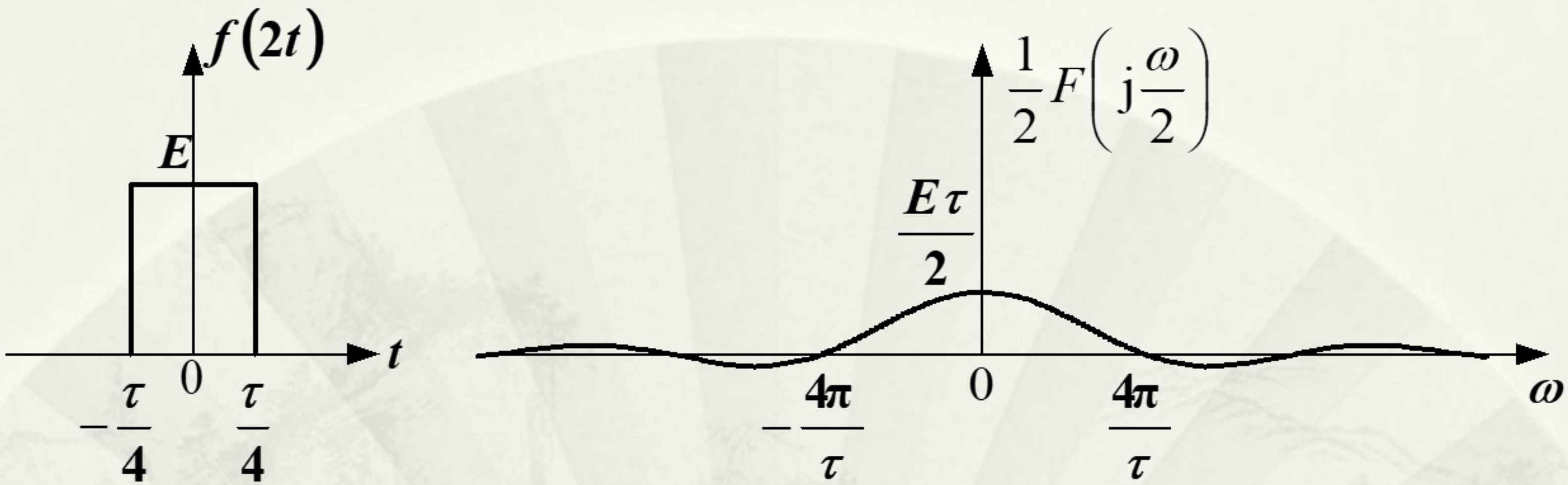
(1) $0 < a < 1$时域扩展，频带压缩。





脉冲持续时间增加*a*倍，变化慢了，信号在频域的频带压缩*a*倍。高频分量减少，幅度上升*a*倍。

(2) $a > 1$时域压缩，频域扩展a倍。



持续时间短，变化快。信号在频域高频分量增加，频带展宽，各分量的幅度下降a倍。

(3) $a = -1$时域反转，频域也反转。

尺度变换举例

例： $f(t)=\dfrac{1}{jt-1}\longleftrightarrow F(j\omega)\ =?$

解： $$e^{-t}\varepsilon(t)\longleftrightarrow\frac{1}{1+j\omega}$$

利用对称性，有

$$\frac{1}{1+jt}\longleftrightarrow 2\pi e^{\omega}\varepsilon(-\omega)\qquad F(jt)\longleftrightarrow 2\pi f(-\omega)$$

利用尺度变换，有

$$\frac{1}{1-jt}\longleftrightarrow 2\pi e^{-\omega}\varepsilon(\omega)\qquad f(-t)\longleftrightarrow F(-j\omega)$$

$$\frac{1}{jt-1}\longleftrightarrow -2\pi e^{-\omega}\varepsilon(\omega)$$

五、时移特性(Time shifting Property)

若 $f(t) \longleftrightarrow F(j\omega)$

则 $f(t-t_0) \longleftrightarrow e^{-j\omega t_0}F(j\omega)$ 其中t_0为实常数。

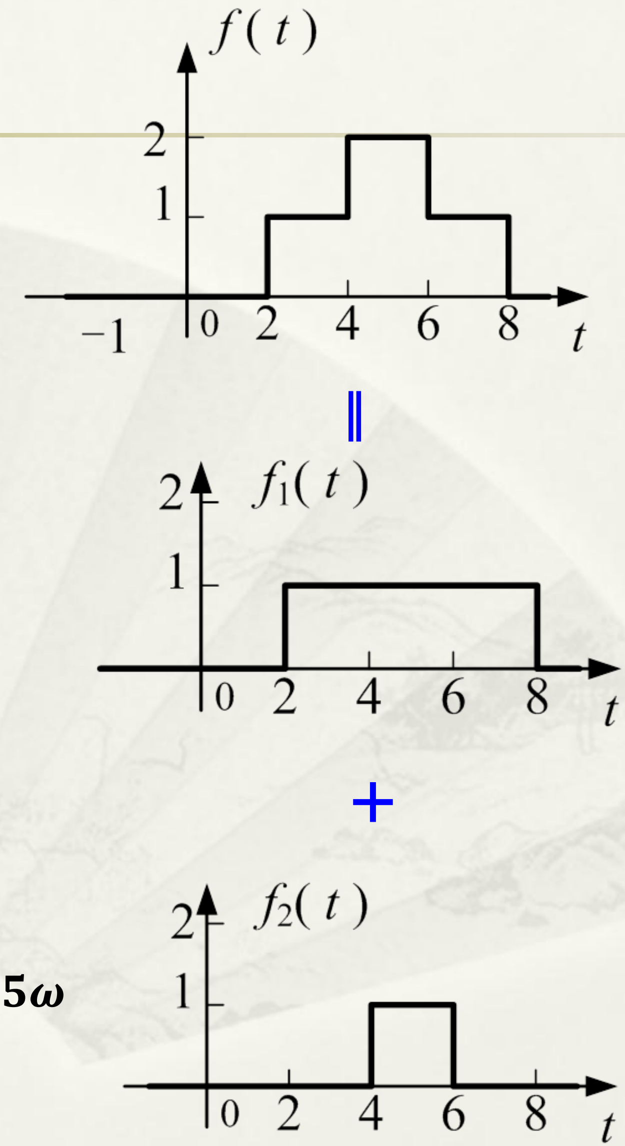
证明: $\mathcal{F}[f(t-t_0)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-t_0)e^{-j\omega t}dt$

$$= e^{-j\omega t_0}\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau \quad (\tau = t - t_0)$$

$$= e^{-j\omega t_0}\, F(j\omega)$$

时移特性举例

例1: 图示$f(t)$的频谱 $F(j\omega)=?$



解:

$$f_1(t)=g_6(t-5)$$

$$f_2(t)=g_2(t-5)$$

$$f(t)=f_1(t)+f_2(t)$$

$$g_6(t-5)\longleftrightarrow 6Sa(3\omega)e^{-j5\omega}$$

$$g_2(t-5)\longleftrightarrow 2Sa(\omega)e^{-j5\omega}$$

$$\therefore F(j\omega)=[6Sa(3\omega)+2Sa(\omega)]\,e^{-j5\omega}$$

时移特性举例

例2： $f(t) \longleftrightarrow F(j\omega)$，求 $f(at-b) \longleftrightarrow ?$

解： 先平移再尺度变换：

$$f(t-b) \longleftrightarrow e^{-j\omega b}F(j\omega)$$

$$f(at-b) \longleftrightarrow \frac{1}{|a|}e^{-j\frac{\omega}{a}b}F(j\frac{\omega}{a})$$

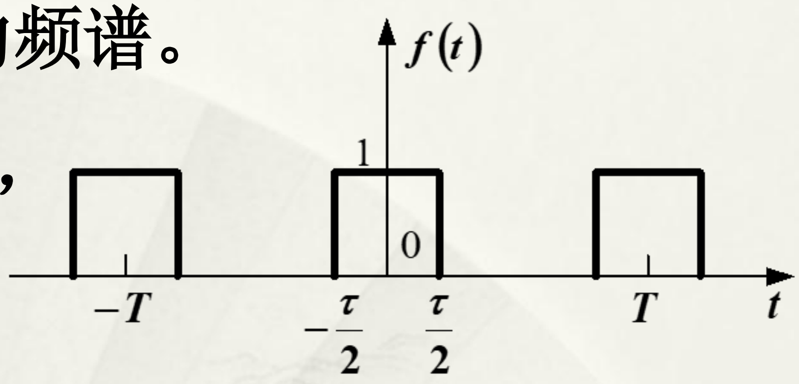
或者先尺度变换，再平移：

$$f(at) \longleftrightarrow \frac{1}{|a|}F(j\frac{\omega}{a})$$

$$f(at-b) = f\left[a\left(t-\frac{b}{a}\right)\right] \longleftrightarrow \frac{1}{|a|}e^{-j\frac{\omega}{a}b}F(j\frac{\omega}{a})$$

时移特性举例

例3： 求图 (a) 所示三脉冲信号的频谱。



(a)三脉冲信号的波形

解： 令$f_0(t)$表示矩形单脉冲信号，

其频谱表示为$F_0(j\omega)$

则：$F_0(j\omega)=\tau Sa\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$

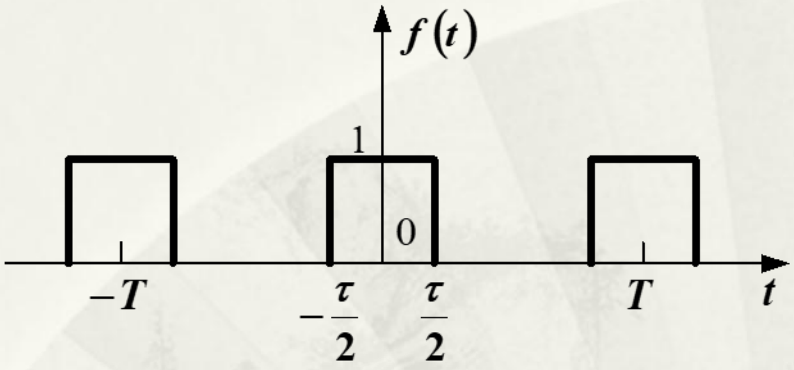
$\because f(t)=f_0(t)+f_0(t+T)+f_0(t-T)$

根据时移性质可知：

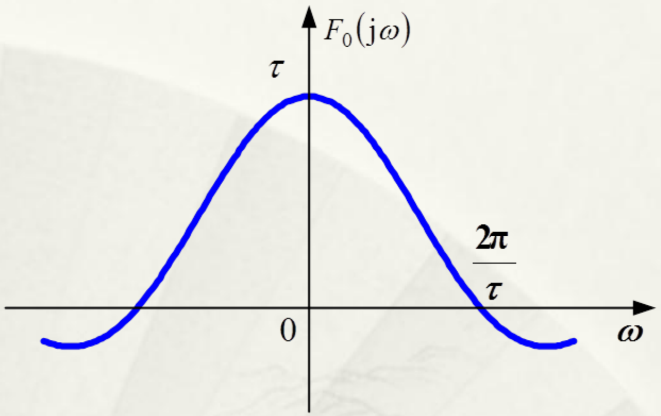
$$F(j\omega)=F_0(j\omega)+F_0(j\omega)e^{j\omega T}+F_0(j\omega)\,e^{-j\omega T}$$

$$F(j\omega)=\tau Sa\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)[1+2cos(\omega T)]$$

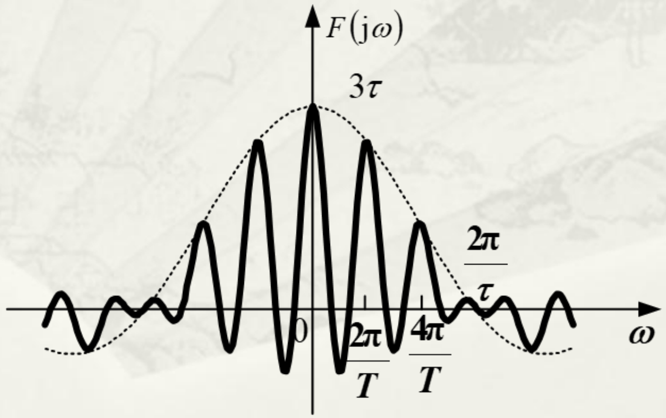
时移特性举例



(a)三脉冲信号的波形



(b) 单脉冲信号的频谱



(c)三脉冲信号的频谱

脉冲个数增多，频谱包络不变，带宽不变。

六、频移特性(Frequency Shifting Property)

若 $f(t) \longleftrightarrow F(j\omega)$

则：$e^{j\omega_0 t}f(t) = F[j(\omega-\omega_0)]$ 其中ω_0为实常数。

证明：$\mathcal{F}\left[e^{j\omega_0 t}f(t)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega_0 t}f(t)e^{-j\omega t}dt$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j(\omega-\omega_0)t}dt$$

$$= F[j(\omega-\omega_0)]$$

例1：$f(t) = e^{j3t} \longleftrightarrow F(j\omega) = ?$

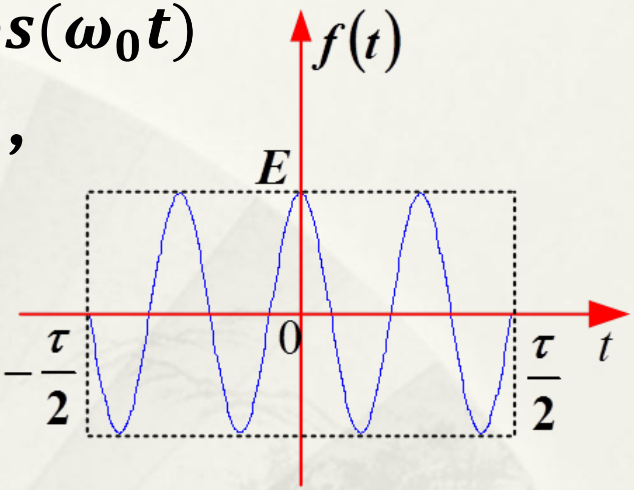
解：$1 \longleftrightarrow 2\pi\delta(\omega)$ $e^{j3t} \longleftrightarrow 2\pi\delta(\omega-3)$

频移特性举例

例：已知矩形调幅信号 $f(t) = Eg_\tau(t)cos(\omega_0 t)$

其中， $g_\tau(t)$为矩形脉冲信号，τ为脉宽，

求其频谱函数



(a)矩形调幅信号的波形

解： $g_\tau(t) \longleftrightarrow G_\tau(j\omega) = \tau Sa(\frac{\omega\tau}{2})$

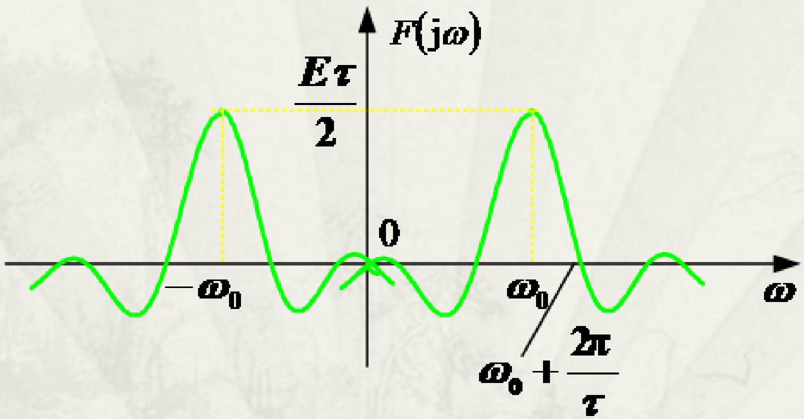
$$f(t) = \frac{1}{2}Eg_\tau(t)\left(e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}\right)$$

$$\therefore F(j\omega) = \frac{1}{2}EG_\tau[j(\omega - \omega_0)] + \frac{1}{2}EG_\tau[j(\omega + \omega_0)]$$

$$\therefore F(j\omega)=\frac{1}{2}EG_{\tau}[j(\omega-\omega_0)]+\frac{1}{2}EG_{\tau}[j(\omega+\omega_0)]$$

$$=\frac{E\tau}{2}Sa\left[\frac{\omega-\omega_0}{2}\tau\right]+\frac{E\tau}{2}Sa\left[\frac{\omega+\omega_0}{2}\tau\right]$$

调幅信号的频谱为包络线的频谱一分为二，向左向右各平移ω_0



(b)矩形调幅信号的频谱

$$f(t)cos\omega_0 t\longleftrightarrow\frac{1}{2}F[j(\omega+\omega_0)]+\frac{1}{2}F[j(\omega-\omega_0)]$$

$$f(t)sin\omega_0 t\longleftrightarrow\frac{j}{2}F[j(\omega+\omega_0)]-\frac{j}{2}F[j(\omega-\omega_0)]$$

单选题 1分

设置

已知 $f(t) \leftrightarrow F(j\omega)$，则 $f(3\text{-}2t)e^{j4t} \leftrightarrow$（ ）

A $\frac{1}{2}F(-j\frac{\omega-4}{2})e^{-j\frac{3(\omega-4)}{2}}$

B $\frac{1}{2}F(j\frac{\omega+4}{2})e^{j\frac{3(\omega+4)}{2}}$

C $-\frac{1}{2}F(-j\frac{\omega-4}{2})e^{-j\frac{3(\omega-4)}{2}}$

D $-\frac{1}{2}F(j\frac{\omega+4}{2})e^{j\frac{3(\omega+4)}{2}}$

提交

七、卷积性质（Convolution Property）

时域卷积：

若 $f_1(t) \longleftrightarrow F_1(j\omega)$， $f_2(t) \longleftrightarrow F_2(j\omega)$

则 $$f_1(t) * f_2(t) \longleftrightarrow F_1(j\omega)F_2(j\omega)$$

频域卷积：

若 $f_1(t) \longleftrightarrow F_1(j\omega)$， $f_2(t) \longleftrightarrow F_2(j\omega)$

则 $$f_1(t)\, f_2(t) \longleftrightarrow \frac{1}{2\pi}[F_1(j\omega) * F_2(j\omega)]$$

$$f_1(t) * f_2(t) \longleftrightarrow F_1(j\omega)F_2(j\omega)$$

证明： $f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau$

$$\mathcal{F}\{f_1(t) * f_2(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau\right]e^{-j\omega t}dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau)\left[\int_{-\infty}^{\infty} f_2(t-\tau)e^{-j\omega t}dt\right]d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau)F_2(j\omega)e^{-j\omega\tau}d\tau$$

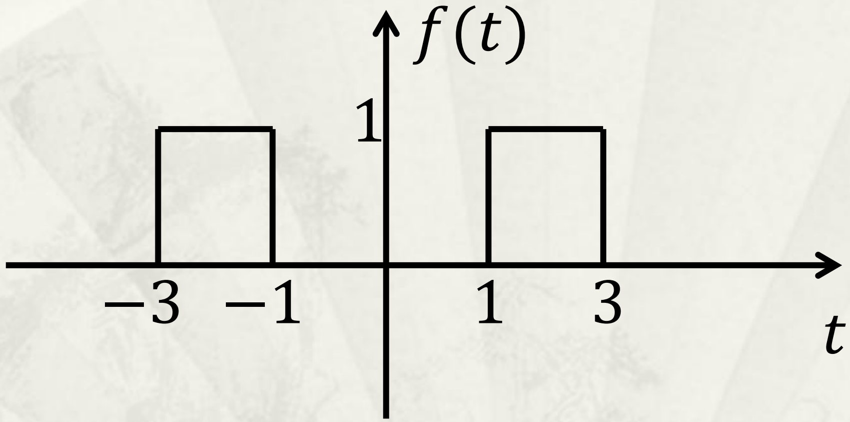
交换积分次序

时移特性

$$\therefore f_1(t) * f_2(t) \longleftrightarrow F_1(j\omega)F_2(j\omega)$$

时域卷积举例

例：求信号$f(t)$的傅里叶变换。



解：$f(t) = g_2(t) * [\delta(t+2) + \delta(t-2)]$

$$\mathcal{F}[f(t)] = 2Sa(\omega)\left(e^{j2\omega} + e^{-j2\omega}\right) = 4Sa(\omega)\cos(2\omega)$$

频域卷积举例

例：求信号$f(t)=\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2$的傅里叶变换。

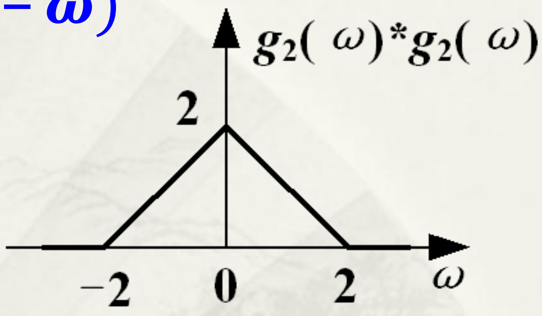
解：$g_2(t) \longleftrightarrow 2Sa(\omega)$　　$F(jt) \longleftrightarrow 2\pi f(-\omega)$

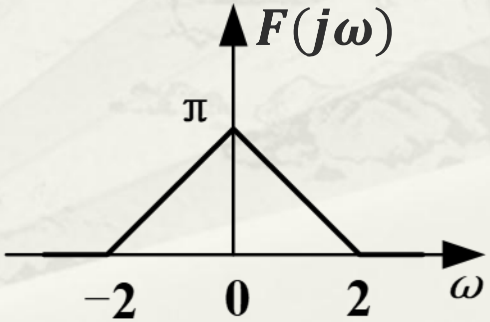
$2Sa(t) \longleftrightarrow 2\pi g_2(-\omega)$

$\therefore Sa(t) \longleftrightarrow \pi g_2(\omega)$

$$\therefore \left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 \longleftrightarrow \frac{1}{2\pi}[\pi g_2(\omega)] * [\pi g_2(\omega)]$$

$$= \frac{\pi}{2}[g_2(\omega)] * [g_2(\omega)]$$

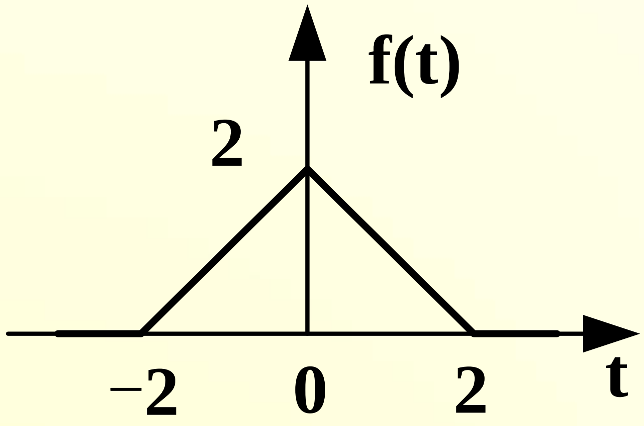




单选题 1分

设置

图示 $f(t)$ 的频谱 $F(j\omega) = ?$



A $4Sa(\omega)$

B $4Sa^2(\omega)$

C $2Sa^2(\omega)$

D $2Sa(\omega)$

提交

八 时域的微分和积分

若 $f(t) \longleftrightarrow F(j\omega)$

则：$f^{(n)}(t) \longleftrightarrow (j\omega)^n F(j\omega)$

$$\int_{-\infty}^{t} f(x)dx \longleftrightarrow \pi F(0)\delta(\omega) + \frac{F(j\omega)}{j\omega} \qquad F(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt$$

证明：$f^{(n)}(t) = \delta^{(n)}(t) * f(t) \longleftrightarrow (j\omega)^n F(j\omega)$

$$f^{(-1)}(t) = \varepsilon(t) * f(t) \longleftrightarrow \left[\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}\right] F(j\omega)$$

$$= \pi F(0)\delta(\omega) + \frac{F(j\omega)}{j\omega}$$

$$\int_{-\infty}^{t} f(x)dx \longleftrightarrow \pi F(0)\delta(\omega) + \frac{F(j\omega)}{j\omega}$$

使用注意事项：对某些函数，虽然$f(t) = g'(t)$

但有可能：$g(t) \neq \int_{-\infty}^{t} f(x)dx$

证明： $f(t) = g'(t) = \dfrac{dg(t)}{dt}$ 则：$dg(t) = f(t)dt$

两边积分：$\displaystyle\int_{-\infty}^{t} dg(x) = \int_{-\infty}^{t} f(x)dx$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{t} f(x)dx = g(t) - g(-\infty)$$

当$g(-\infty) \neq 0$时：$g(t) \neq \displaystyle\int_{-\infty}^{t} f(x)dx$

已知$f'(t) = F_1(j\omega)$，那么：$f(t) \longleftrightarrow F(j\omega)$?

时域积分定理推论：

若 $f^{(n)}(t) \longleftrightarrow F_n(j\omega)$, *and* $f(-\infty) + f(\infty) = 0$

那么：

$$f(t) \longleftrightarrow F(j\omega) = {F_n(j\omega)}\Big/{(j\omega)^n}$$

时域微积分特性举例

例1：求信号$f(t)=\dfrac{1}{t^2}$ 的傅里叶变换。

解：

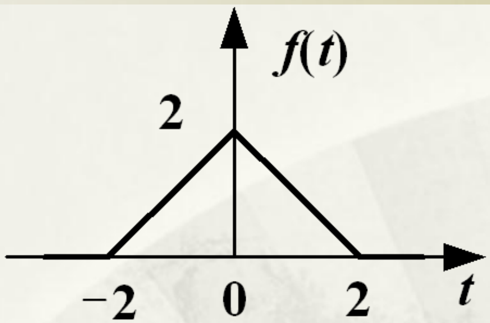
$$sgn(t)\longleftrightarrow\frac{2}{j\omega}\qquad F(jt)\longleftrightarrow 2\pi f(-\omega)$$

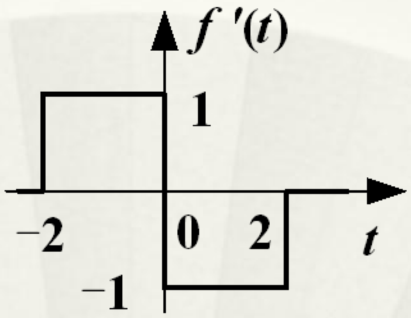
$$\frac{2}{jt}\longleftrightarrow 2\pi sgn(-\omega)\qquad \frac{1}{t}\longleftrightarrow -j\pi sgn(\omega)$$

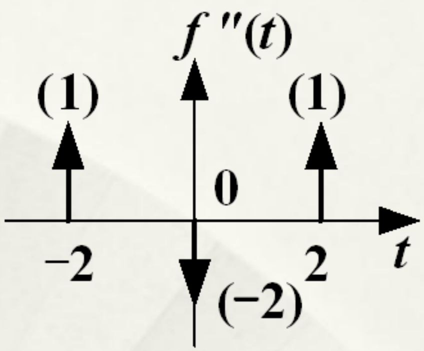
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{t}\right)\longleftrightarrow -(j\omega)j\pi sgn(\omega)=\pi\omega sgn(\omega)$$

$$\frac{1}{t^2}\longleftrightarrow -\pi\omega sgn(\omega)=-\pi|\omega|$$

例2：求信号 $f(t)$如下图所示，求其傅里叶变换。







解：$f''(t) = \delta(t+2) - 2\delta(t) + \delta(t-2)$

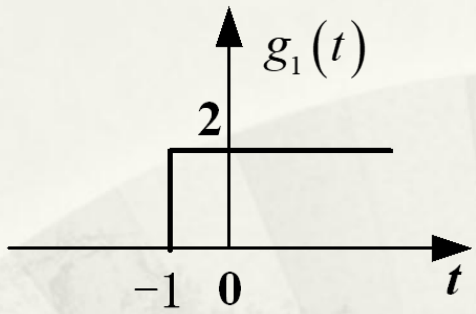
$$F_2(j\omega) = \mathcal{F}[f''(t)] = e^{j2\omega} - 2 + e^{-j2\omega} = 2cos(2\omega) - 2$$

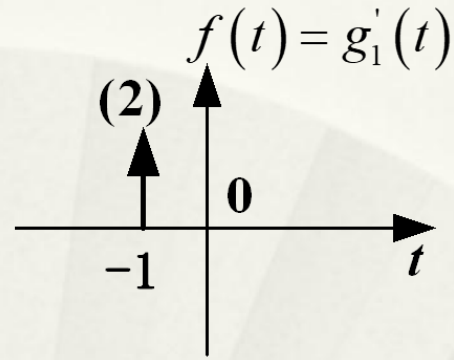
$$\because f(-\infty) + f(\infty) = 0 \quad \therefore F(j\omega) = \frac{F_2(j\omega)}{(j\omega)^2} = \frac{2 - 2cos(2\omega)}{\omega^2}$$

思考下面计算可行否？

$$d\varepsilon(t)/dt = \delta(t) \longleftrightarrow 1 \quad \therefore \varepsilon(t) \longleftrightarrow 1/j\omega$$

例3：求信号$g_1(t)$如下图所示，求其傅里叶变换。





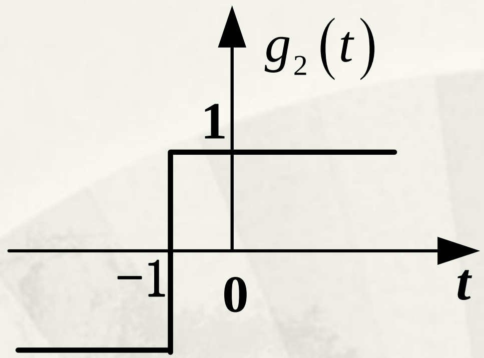
解：$$f(t) = 2\delta(t+1) \longleftrightarrow F(j\omega) = 2e^{j\omega}$$

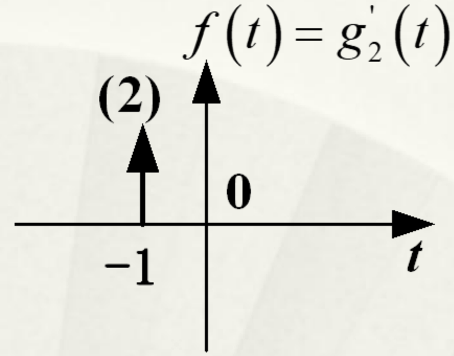
$$\because\ g_1(-\infty) = 0, \qquad \therefore\ g_1(t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)dx$$

根据 $$\int_{-\infty}^{t} f(x)dx \longleftrightarrow \pi F(0)\delta(\omega) + \frac{F(j\omega)}{j\omega}$$

$$\therefore\ G_1(j\omega) = \pi F(0)\delta(\omega) + \frac{2e^{j\omega}}{j\omega} = 2\pi\delta(\omega) + \frac{2e^{j\omega}}{j\omega}$$

例4：求信号$g_2(t)$如下图所示，求其傅里叶变换。





解： $f(t) = 2\delta(t+1) \longleftrightarrow F(j\omega) = 2e^{j\omega}$

$$\because\ g_2(-\infty) \neq 0, \qquad \therefore \int_{-\infty}^{t} f(x)dx = g_2(t) - g_2(-\infty)$$

$$2\pi\delta(\omega) + \frac{2e^{j\omega}}{j\omega} = G_2(j\omega) - 2\pi g_2(-\infty)\delta(\omega) \quad G_2(j\omega) = \frac{2e^{j\omega}}{j\omega}$$

或者利用时域积分定理的推论

$\because\ g_2(-\infty) + g_2(\infty) = 0$ 直接得到结果

九 频域的微分和积分

若 $f(t) \longleftrightarrow F(j\omega)$

则： $(-jt)^n f(t) \longleftrightarrow F^{(n)}(j\omega)$

$$\pi f(0)\delta(t) + \frac{f(t)}{-jt} \longleftrightarrow \int_{-\infty}^{\omega} F(jx)dx$$

$$f(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega)d\omega$$

频域微积分特性举例

例1：求信号$f(t)=t\varepsilon(t)$的傅里叶变换。

解：

$$\varepsilon(t)\longleftrightarrow\pi\delta(\omega)+\frac{1}{j\omega}\qquad (-jt)^n f(t)\longleftrightarrow F^{(n)}(j\omega)$$

$$-jt\varepsilon(t)\longleftrightarrow\frac{d}{d\omega}\left[\pi\delta(\omega)+\frac{1}{j\omega}\right]$$

$$t\varepsilon(t)\longleftrightarrow j\pi\delta'(\omega)-\frac{1}{\omega^2}$$

思考下面算法可行否？

$$t\varepsilon(t)=\varepsilon(t)*\varepsilon(t)\longleftrightarrow\left[\pi\delta(\omega)+\frac{1}{j\omega}\right]\times\left[\pi\delta(\omega)+\frac{1}{j\omega}\right]$$

$\delta(\omega)\delta(\omega)$无定义

十 相关定理

若 $f_1(t) \longleftrightarrow F_1(j\omega)$，$f_2(t) \longleftrightarrow F_2(j\omega)$，$f(t) \longleftrightarrow F(j\omega)$

则：

$$\mathcal{F}[R_{12}(\tau)] = F_1(j\omega)\,F_2^*(j\omega)$$

$$\mathcal{F}[R_{21}(\tau)] = F_1^*(j\omega)F_2(j\omega)$$

$$\mathcal{F}[R(\tau)] = |F(j\omega)|^2$$