第五章　连续系统的s域分析

频域分析基本信号：**虚指数信号$e^{j\omega t}$**

任意信号分解为众多不同频率的虚指数分量之和，使响应的求解得到简化，物理意义清楚。但也有不足：

（1）有些重要信号不存在傅里叶变换，如$e^{2t}\varepsilon(t)$;

（2）对于给定初始状态的系统难于利用频域分析。

本章频域中的傅里叶变换推广到复频域来解决这些问题。

本章引入复频率 $s = \sigma + j\omega$,以复指数函数e^{st}为基本信号，任意信号可分解为不同复频率的复指数分量之和。这里用于系统分析的独立变量是复频率 s，故称为s域分析。所采用的数学工具为拉普拉斯变换。

第五章　连续系统的s域分析

5.1 拉普拉斯变换

5.2 拉普拉斯变换的性质

5.3 拉普拉斯逆变换

5.4 复频域分析

§5.1　拉普拉斯变换

从傅里叶变换到拉普拉斯变换

收敛域

(单边)拉普拉斯变换

常见函数的拉普拉斯变换

单边拉氏变换与傅里叶变换的关系

一、从傅里叶变换到拉普拉斯变换

频域分析遇到的问题：

部分函数不满足绝对可积条件。

解决办法：

用一衰减因子$e^{-\sigma t}$(σ为实常数）乘信号$f(t)$，使得：

当$t\to\infty$时，$f(t)e^{-\sigma t}\to 0$，使$f(t)e^{-\sigma t}$的傅里叶变换存在。

$$F_b(\sigma + j\omega) = \mathcal{F}[f(t)e^{-\sigma t}] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-\sigma t}\, e^{-j\omega t} dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-(\sigma+j\omega)t}\, dt$$

$$F_b(\sigma + j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-\sigma t}\, e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-(\sigma+j\omega)t}\, dt$$

相应的傅里叶逆变换为:

$$f(t)e^{-\sigma t} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F_b(\sigma + j\omega)e^{j\omega t}\, d\omega$$

$$\therefore f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F_b(\sigma + j\omega)e^{(\sigma+j\omega)t}\, d\omega$$

令$s = \sigma + j\omega, d\omega = ds/j$，有

$$F_b(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-st}\, dt$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F_b(s)e^{st}\, ds$$

双边拉普拉斯变换对

$$F_b(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-st}\,dt$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F_b(s)e^{st}\,ds$$

$F_b(s)$称为$f(t)$的双边拉氏变换（或象函数）

$f(t)$称为$F_b(s)$的双边拉氏逆变换（或原函数）

二、收敛域

$$F_b(s)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-st}\,dt$$

$$f(t)=\frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F_b(s)e^{st}\,ds$$

只有选择适当的σ值才能使积分收敛，信号$f(t)$的双边拉普拉斯变换存在。

收敛域:

使 $f(t)$拉氏变换存在的σ的取值范围称为$F_b(s)$的收敛域。

例1：因果信号$f_1(t) = e^{\alpha t}\varepsilon(t)$，求拉氏变换。

解：$$F_{1b}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t)e^{-st}\,dt = \int_{0}^{\infty} e^{\alpha t}e^{-st}\,dt$$

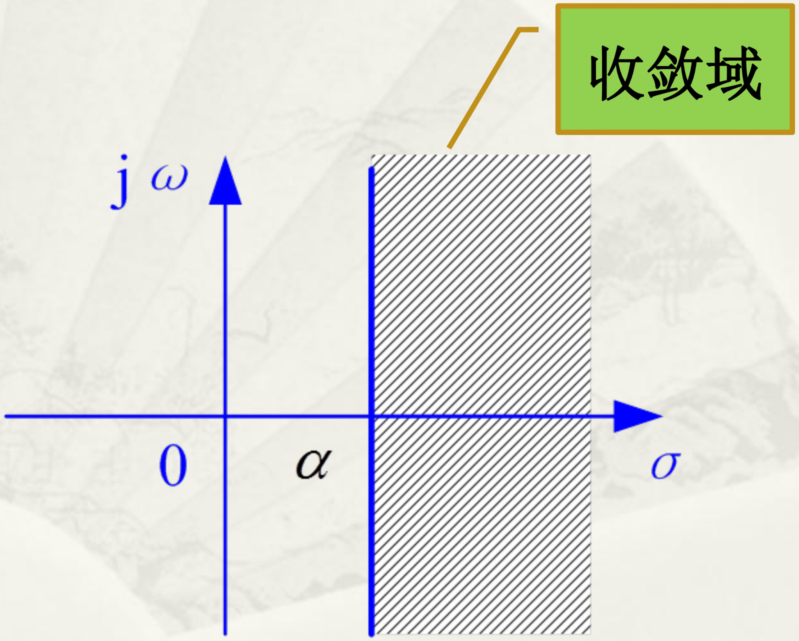
$$= \frac{e^{-(s-\alpha)t}}{-(s-\alpha)}\Big|_0^{\infty} = \frac{1}{s-\alpha}\left[1 - \lim_{t\to\infty} e^{-(\sigma-\alpha)t}e^{-j\omega t}\right]$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{s-\alpha}, & Re[s] = \sigma > \alpha \\ \text{不定}, & \sigma = \alpha \\ \text{无界}, & \sigma < \alpha \end{cases}$$

例1：因果信号$f_1(t) = e^{\alpha t}\varepsilon(t)$，求拉氏变换。

$$F_{1b}(s) = \begin{cases} \frac{1}{s-\alpha}, & Re[s] = \sigma > \alpha \\ \text{不定}, & \sigma = \alpha \\ \text{无界}, & \sigma < \alpha \end{cases}$$

可见，对于因果信号，仅当$Re[s] = \sigma > \alpha$时，其拉氏变换存在，收敛域如右图所示。



$$\boxed{e^{\alpha t}\varepsilon(t) \longleftrightarrow \frac{1}{s-\alpha} \quad \sigma > \alpha}$$

例2：反因果信号$f_2(t) = e^{\beta t}\varepsilon(-t)$，求拉氏变换。

解：$$F_{2b}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f_2(t)e^{-st}\,dt = \int_{-\infty}^{0} e^{\beta t}e^{-st}\,dt$$

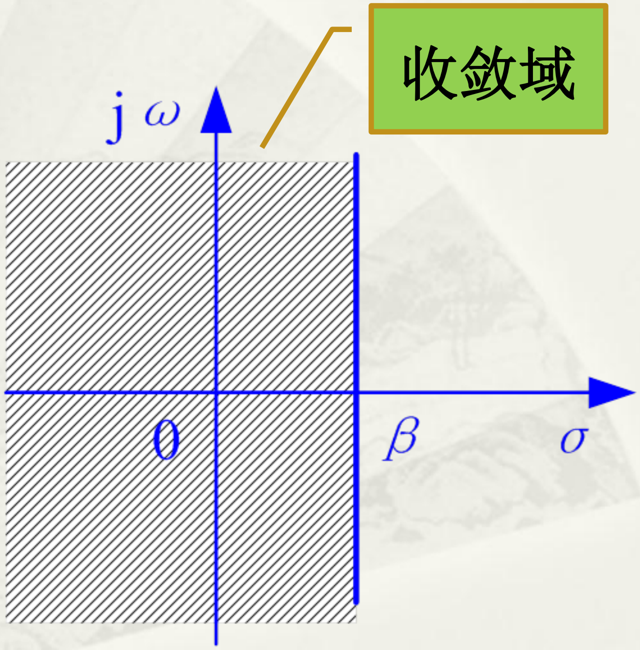
$$= \frac{e^{-(s-\beta)t}}{-(s-\beta)}\Big|_{-\infty}^{0} = \frac{1}{-(s-\beta)}\left[1 - \lim_{t\to-\infty} e^{-(\sigma-\beta)t}e^{-j\omega t}\right]$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{-(s-\beta)}, & Re[s] = \sigma < \beta \\ \text{不定}, & \sigma = \beta \\ \text{无界}, & \sigma > \beta \end{cases}$$

例2：反因果信号$f_2(t) = e^{\beta t}\varepsilon(-t)$，求拉氏变换。

$$F_{2b}(s) = \begin{cases} \dfrac{1}{-(s-\beta)}, & Re[s] = \sigma < \beta \\ \text{不定}, & \sigma = \beta \\ \text{无界}, & \sigma > \beta \end{cases}$$

可见，对于反因果信号，仅当$Re[s] = \sigma < \beta$时，其拉氏变换存在，收敛域如图所示。

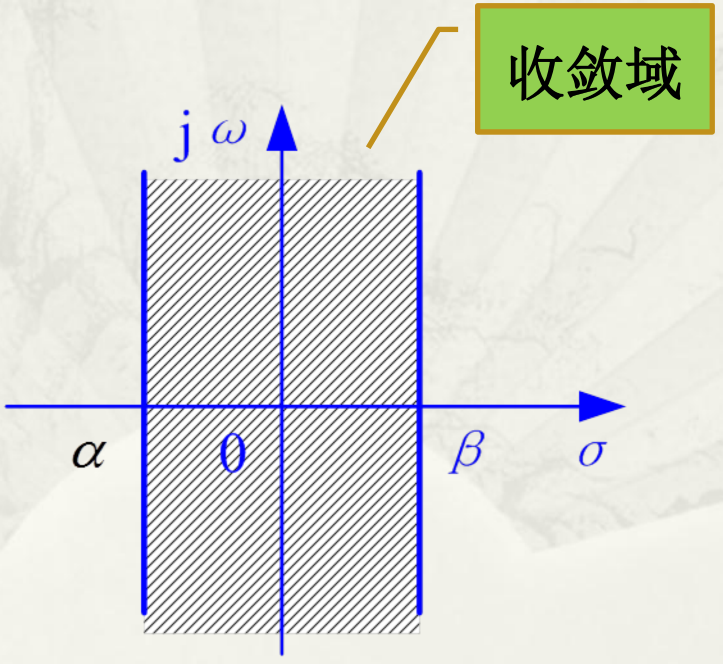


$$\boxed{e^{\beta t}\varepsilon(-t) \longleftrightarrow \frac{1}{-(s-\beta)} \quad \sigma < \beta}$$

例3： 双边信号$f_3(t) = f_1(t) + f_2(t) = \begin{cases} e^{\beta t}, & t < 0 \\ e^{\alpha t}, & t > 0 \end{cases}$，求拉氏变换。

解： 其双边拉普拉斯变换 $F_b(s) = F_{b1}(s) + F_{b2}(s)$

仅当$\beta > \alpha$时，其收敛域为： $\alpha < Re[s] < \beta$ 的一个带状区域，如下图所示。



例4：求下列信号的双边拉普拉斯变换。

$$f_1(t) = e^{-3t}\varepsilon(t) + e^{-2t}\varepsilon(t)$$

$$f_2(t) = -e^{-3t}\varepsilon(-t) - e^{-2t}\varepsilon(-t)$$

$$f_3(t) = e^{-3t}\varepsilon(t) - e^{-2t}\varepsilon(-t)$$

解：

$$f_1(t) \longleftrightarrow F_1(s) = \frac{1}{s+3} + \frac{1}{s+2} \quad Re[s] = \sigma > -2$$

$$f_2(t) \longleftrightarrow F_2(s) = \frac{1}{s+3} + \frac{1}{s+2} \quad Re[s] = \sigma < -3$$

$$f_3(t) \longleftrightarrow F_3(s) = \frac{1}{s+3} + \frac{1}{s+2} \quad -3 < \sigma < -2$$

可见，虽象函数相同，但收敛域不同。

双边拉氏变换必须标出收敛域。

通常遇到的信号都有初始时刻，不妨设其初始时刻为坐标原点。这样，$t<0$时，$f(t)=0$。

从而拉氏变换式写为：

$$F(s)=\int_{0_-}^{\infty}f(t)e^{-st}dt$$

称为单边拉氏变换，简称拉氏变换。

其收敛域一定是$Re[s]>\alpha$，可以省略。

本课程主要讨论单边拉氏变换。

三、单边拉氏变换

$$F(s) \overset{\text{def}}{=} \int_{0_-}^{\infty} f(t)e^{-st}dt$$

$$f(t) \overset{\text{def}}{=} \left[\frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s)e^{st}ds\right]\varepsilon(t)$$

简记为： $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$

$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)]$

或 $f(t) \longleftrightarrow F(s)$

四、常见函数的单边拉普拉斯变换

（1）$\delta(t) \longleftrightarrow 1$，$\sigma > -\infty$

（2）$\varepsilon(t)$或$1 \longleftrightarrow 1/s$，$\sigma > 0$

（3）指数函数 $e^{-s_0 t} \longleftrightarrow \dfrac{1}{s+s_0}$ $\sigma > -Re[s_0]$

$$\cos\omega_0 t = \left(e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}\right)/2 \longleftrightarrow \frac{s}{s^2+\omega_0^2}$$

$$\sin\omega_0 t = \left(e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}\right)/2j \longleftrightarrow \frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}$$

(4) “周期信号” $f_T(t)$

$$F_T(s)=\int_0^{\infty} f_T(t)e^{-st}dt$$

$$=\int_0^{T} f_T(t)e^{-st}dt+\int_T^{2T} f_T(t)e^{-st}dt+\cdots$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\int_{nT}^{(n+1)T} f_T(t)e^{-st}dt$$

令$t=t'+nT$，则原式为：

$$F_T(s)=\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nsT}\int_0^{T} f_T(t')e^{-st'}dt'=\frac{1}{1-e^{-sT}}\int_0^{T} f_T(t)e^{-st}dt$$

(4) "周期信号" $f_T(t)$

$$F_T(s) = \frac{1}{1 - e^{-sT}} \int_0^T f_T(t) e^{-st} dt$$

令$f_0(t) = f_T(t)\ \ 0 < t < T$， 且$f_0(t) \longleftrightarrow F_0(s)$, 则：

$$\boxed{F_T(s) = \frac{F_0(s)}{1 - e^{-sT}}}$$

特例：$\boxed{\delta_T(t) \longleftrightarrow 1/(1 - e^{-sT})}$

思考：$\dfrac{1}{1 + e^{-sT}} \longleftrightarrow ?$

五、单边拉氏变换与傅里叶变换的关系

单边拉氏变换： $F(s)=\int_{0_-}^{\infty} f(t)e^{-st}dt \quad Re[s]>\sigma_0$

傅里叶变换： $F(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt$

假定$f(t)$为因果信号：

根据收敛坐标σ_0的值可分为以下三种情况：

（1）$\sigma_0<0$，即$F(s)$的收敛域包含$j\omega$轴，则$f(t)$的傅里叶变换存在，并且 $F(j\omega)=F(s)|_{s=j\omega}$

例：$f(t)=e^{-2t}\varepsilon(t) \longleftrightarrow F(s)=1/(s+2)$，$\sigma>-2$；

则 $F(j\omega)=1/(j\omega+2)$

（2）σ_0 =0，即$F(s)$的收敛边界为$j\omega$轴;

$$F(j\omega) = \lim_{\sigma\to 0} F(s)$$

例: $f(t) = \varepsilon(t) \longleftrightarrow F(s) = 1/s$

$$F(j\omega) = \lim_{\sigma\to 0}\frac{1}{\sigma + j\omega} = \lim_{\sigma\to 0}\frac{\sigma}{\sigma^2+\omega^2} + \lim_{\sigma\to 0}\frac{-j\omega}{\sigma^2+\omega^2}$$

$$= \pi\delta(\omega) + 1/j\omega$$

（3）σ_0 >0，$F(j\omega)$不存在;

例: $f(t) = e^{2t}\varepsilon(t) \longleftrightarrow F(s) = 1/(s-2)$, $\sigma > 2$;

其傅里叶变换不存在。

一个信号存在拉氏变换，就一定存在傅里叶变换（ ），一个信号存在傅里叶变换，就一定存在双边拉氏变换（ ）。

A 对；错

B 错；对

C 错；错

D 对；对

提交

已知 $F(s)=\dfrac{1}{s+2}-\dfrac{1}{s+3}$，$\sigma>-2$，试问其傅里叶变换是否存在？

A 存在

B 不存在

C 无法确定

提交

单选题 1分 设置

以下为四个因果信号的拉普拉斯变换，其中不存在傅里叶变换的是（　　）。

A $\frac{1}{s}$

B 1

C $\frac{1}{s+2}$

D $\frac{1}{s-2}$

提交

单选题 1分

设置

信号的傅立叶变换可以看成是拉普拉斯变换的特例，如果（　　）。

A 拉普拉斯变换的收敛域不包含虚轴。

B 拉普拉斯变换的收敛域包含单位圆。

C 拉普拉斯变换的收敛域包含虚轴。

D 拉普拉斯变换的收敛域不包含单位圆。

提交