信号与系统 电子教案

第一章 信号与系统

§1.4 阶跃函数和冲激函数

函数本身有不连续点(跳变点)或其导数与积分有不连续点的一类函数统称为**奇异信号或奇异函数。**

阶跃函数
冲激函数
是两个典型的奇异函数。

阶跃序列和单位样值序列

§1.4 阶跃函数和冲激函数

一 单位阶跃函数

二 单位冲激函数

三 冲激函数的性质

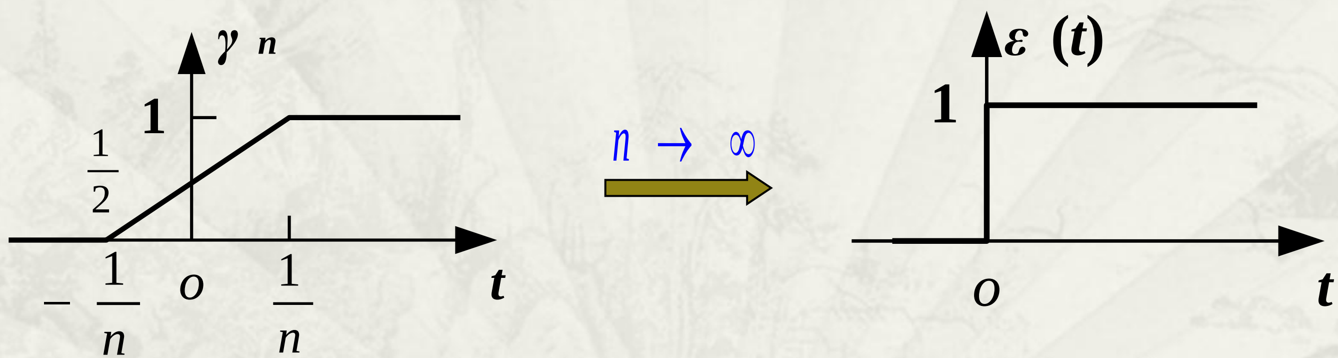
四 序列δ(*k*)和ε(*k*)

一、单位阶跃函数

1. 定义：

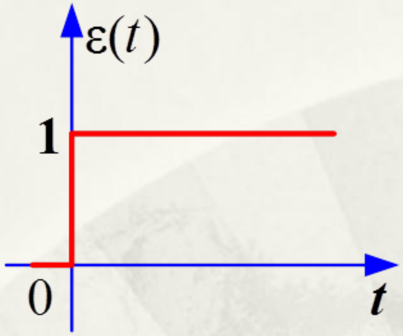
采用求函数序列极限的方法定义阶跃函数。

选定一个函数序列单位斜波函数（垂直高位为1）$\gamma_n(t)$。

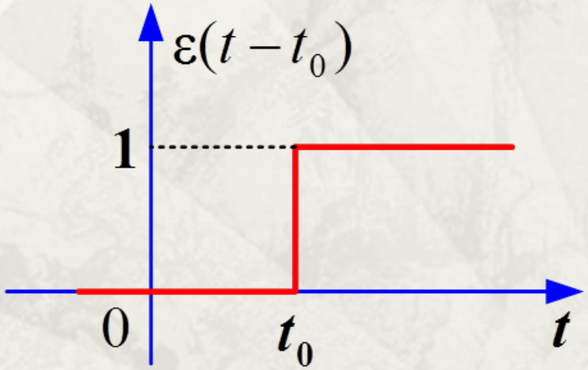


$$\varepsilon(t) \overset{\text{def}}{=} \lim_{n\to\infty} \gamma_n(t) = \begin{cases} 0 & t<0 \\ 1 & t>0 \end{cases}$$

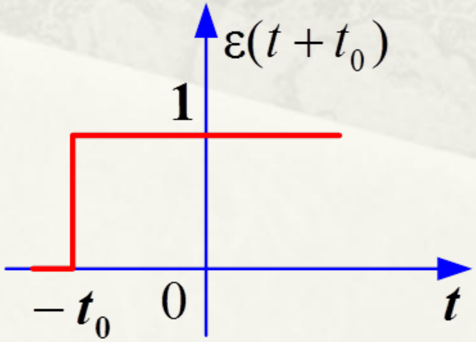
2. 延迟单位阶跃信号：



$$\varepsilon(t) \overset{\text{def}}{=} \lim_{n\to\infty} \gamma_n(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$$



$$\varepsilon(t - t_0) = \begin{cases} 0 & t < t_0 \\ 1 & t > t_0 \end{cases}, \quad t_0 > 0$$

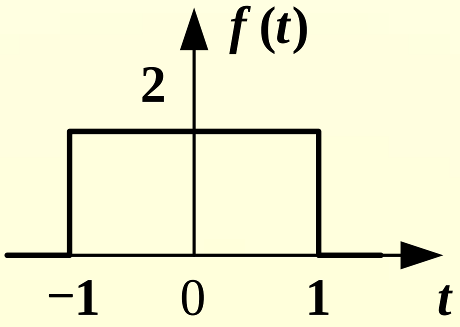


$$\varepsilon(t + t_0) = \begin{cases} 0 & t < -t_0 \\ 1 & t > -t_0 \end{cases}, \quad t_0 > 0$$

单选题 1分

设置

如何用阶跃函数及其延迟函数表示下图所示的信号？



A $2\varepsilon(t-1)-2\varepsilon(t+1)$

B $2\varepsilon(t+1)-2\varepsilon(t-1)$

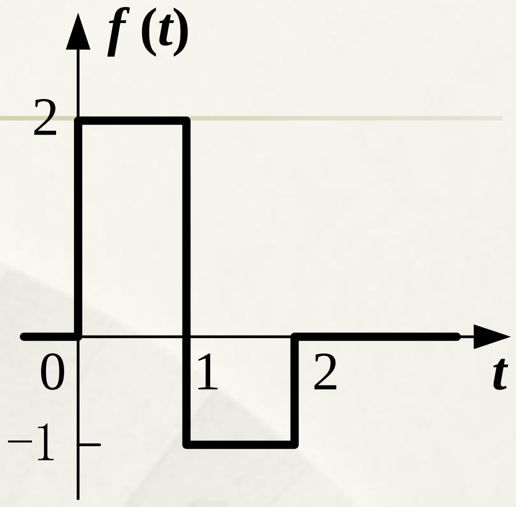
C $\varepsilon(t+1)+\varepsilon(t-1)$

提交

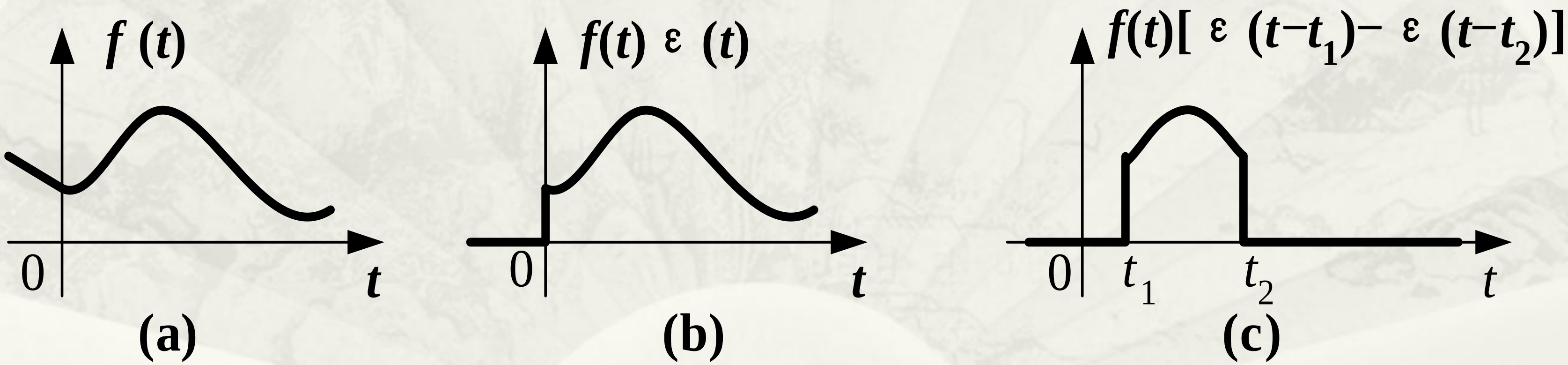
3. 阶跃函数的性质

（1）可以方便地表示某些信号

$$f(t) = 2\varepsilon(t) - 3\varepsilon(t-1) + \varepsilon(t-2)$$



（2）用阶跃函数表示信号的作用区间



（3）积分 $\int_{-\infty}^{t} \varepsilon(\tau)\,d\tau = t\,\varepsilon(t)$

§1.4 阶跃函数和冲激函数

一 单位阶跃函数

二 单位冲激函数

三 冲激函数的性质

四 序列$\delta(k)$和$\varepsilon(k)$

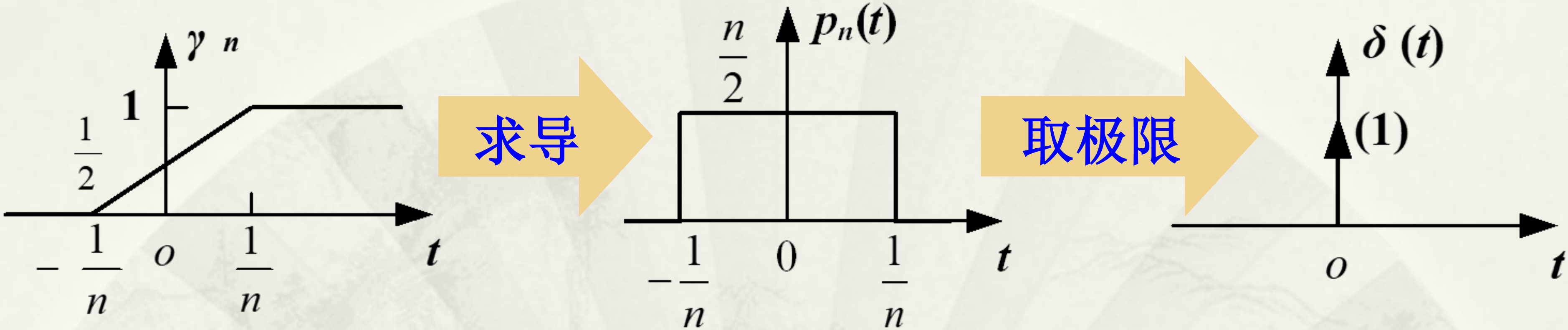
二、单位冲激函数

单位冲激函数是个奇异函数，它是对强度极大，作用时间极短一种物理量的理想化模型。

- 函数序列定义$\delta(t)$
- 狄拉克(Dirac)定义$\delta(t)$
- 冲激函数与阶跃函数关系

单位冲激函数的两种定义方式

1. 函数序列定义



$\delta(t)$函数序列定义： $\delta(t) \overset{\text{def}}{=} \lim_{n\to\infty} p_n(t)$

$\delta(t)$为高度无穷大，宽度无穷小，面积为1的对称窄脉冲。

2. 狄拉克(Dirac)定义

δ(*t*)狄拉克定义： $$\begin{cases} \delta(t)=0 \quad (t\neq 0) \\ \int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)\,\mathrm{d}t=1 \end{cases}$$

- 函数值只在 t = 0时不为零；
- 积分面积为1； $\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)\,\mathrm{d}t=\int_{0_-}^{0_+}\delta(t)\,\mathrm{d}t$
- ***t* =0** 时，***δ***→∞ ，为无界函数。

狄拉克定义更抽象，更数学化，概括了所有单位面积函数极限演变的直观定义式

下列积分正确的是（ ）

A $\int_{-1}^{\infty}\delta(t)\,\mathrm{d}t=1$

B $\int_{-1}^{1}\delta(t)\,\mathrm{d}t=1$

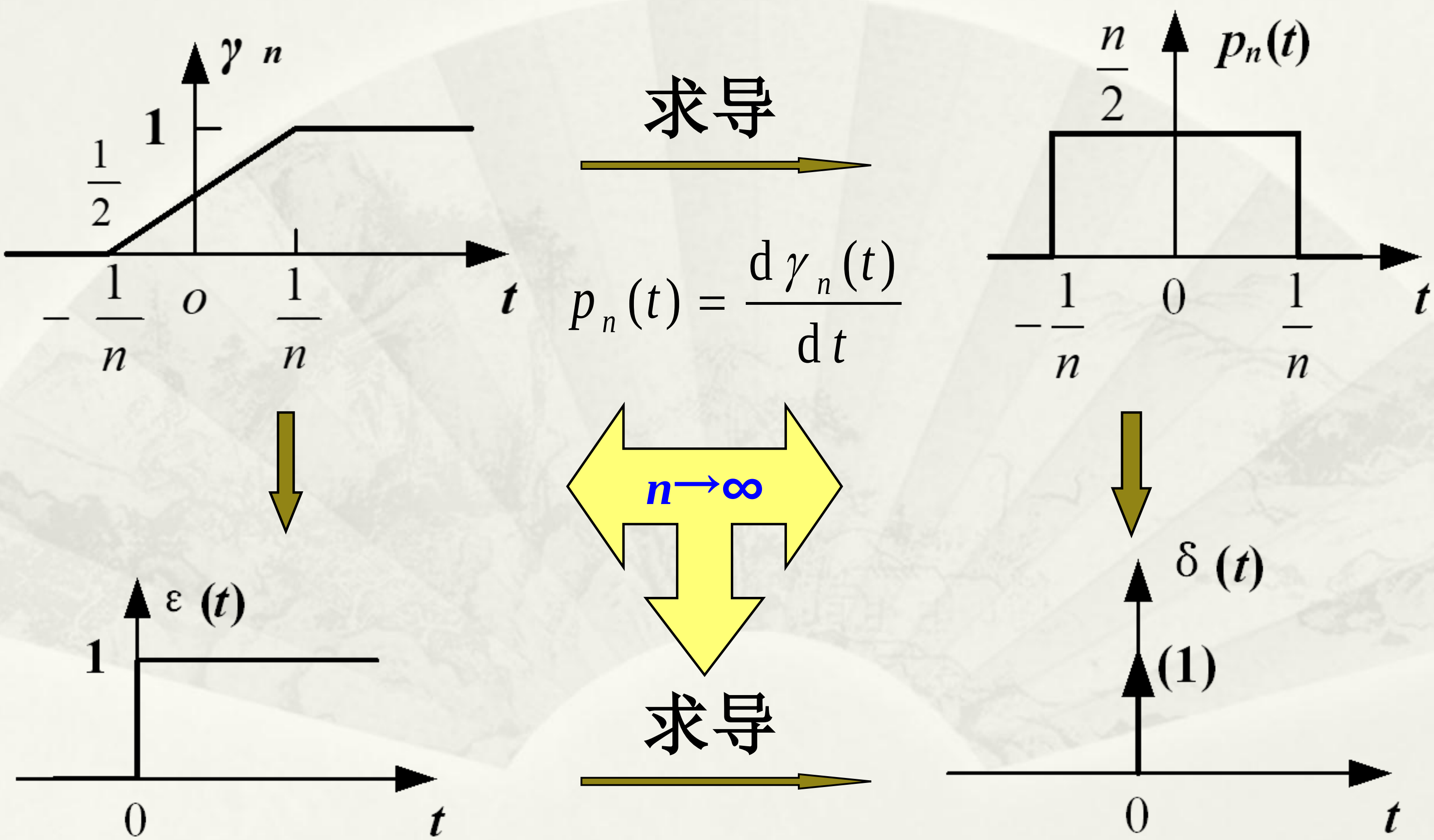
C $\int_{-2}^{-1}\delta(t)\,\mathrm{d}t=1$

D $\int_{1}^{3}\delta(t)\,\mathrm{d}t=1$

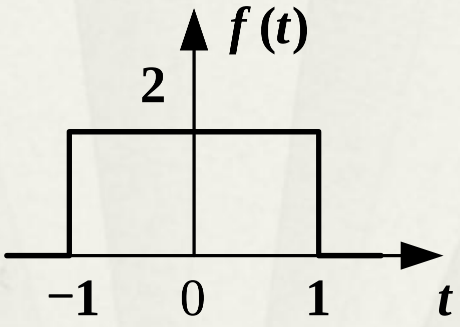
提交

3. δ(t)与ε(t)的关系

$$\varepsilon(t)=\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)\,\mathrm{d}\tau \qquad \delta(t)=\frac{\mathrm{d}\varepsilon(t)}{\mathrm{d}t}$$



对$f(t)$函数求导？



$$f(t) = 2\varepsilon(t+1) - 2\varepsilon(t-1)$$

引入冲激函数之后，间断点的导数也存在

$$f(t) = 2\varepsilon(t+1) - 2\varepsilon(t-1) \qquad f'(t) = 2\delta(t+1) - 2\delta(t-1)$$

设置

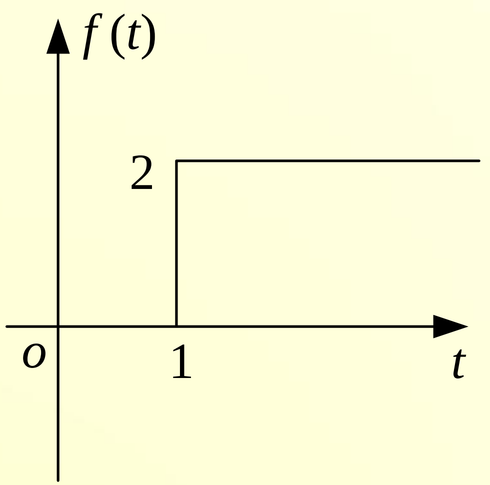
函数 $f(t)$ 的导数正确的是（ ）

A $f'(t)=2\varepsilon(t)$

B $f'(t)=2\delta(t)$

C $f'(t)=2\varepsilon(t-1)$

D $f'(t)=2\delta(t-1)$



提交

§1.4 阶跃函数和冲激函数

一 单位阶跃函数

二 单位冲激函数

三 冲激函数的性质

四 序列$\delta(k)$和$\varepsilon(k)$

三、 冲激函数的性质

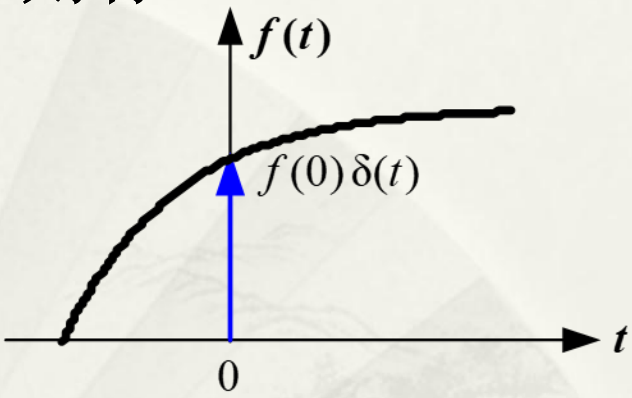
- 取样性
- 冲激偶
- 尺度变换
- 复合函数形式的冲激函数

1. 取样性(筛选性)

如果$f(t)$在$t = 0$处连续，且处处有界，则有

$$\delta(t) f(t) = f(0)\delta(t)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) f(t)\,\mathrm{d}t = f(0)$$



对于平移情况：

$$f(t)\delta(t-t_0) = f(t_0)\delta(t-t_0)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0) f(t)\,\mathrm{d}t = f(t_0)$$

取样性应用

$\delta(t)f(t) = f(0)\delta(t)$ $\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)f(t)\,\mathrm{d}t = f(0)$

例1： $\sin(t+\frac{\pi}{4})\delta(t) = \sin(\frac{\pi}{4})\delta(t) = \frac{\sqrt{2}}{2}\delta(t)$

例2： $\int_{-\infty}^{\infty}\sin(t-\frac{\pi}{4})\delta(t)\,\mathrm{d}t = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

例3： $\int_{-1}^{9}\sin(t-\frac{\pi}{4})\delta(t)\,\mathrm{d}t = ?$

例4： $\int_{-1}^{t}(\tau-1)^2\delta(\tau)\,\mathrm{d}\tau = ?$ $\boldsymbol{\varepsilon(t)}$

取样性应用

$$f(t)\delta(t-t_0)=f(t_0)\delta(t-t_0) \qquad \int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-t_0)f(t)\,\mathrm{d}t=f(t_0)$$

例1： $\int_{-3}^{0}\sin\left(t-\frac{\pi}{4}\right)\delta(t-1)\,\mathrm{d}t=?$ **0**

例2： $\int_{-1}^{1}2\tau\,\delta(\tau-t)\,\mathrm{d}\tau=?$ （课后练习）

$2t\varepsilon(t+1)-2t\varepsilon(t-1)$

取样性性质应用总结：

1、看积分限

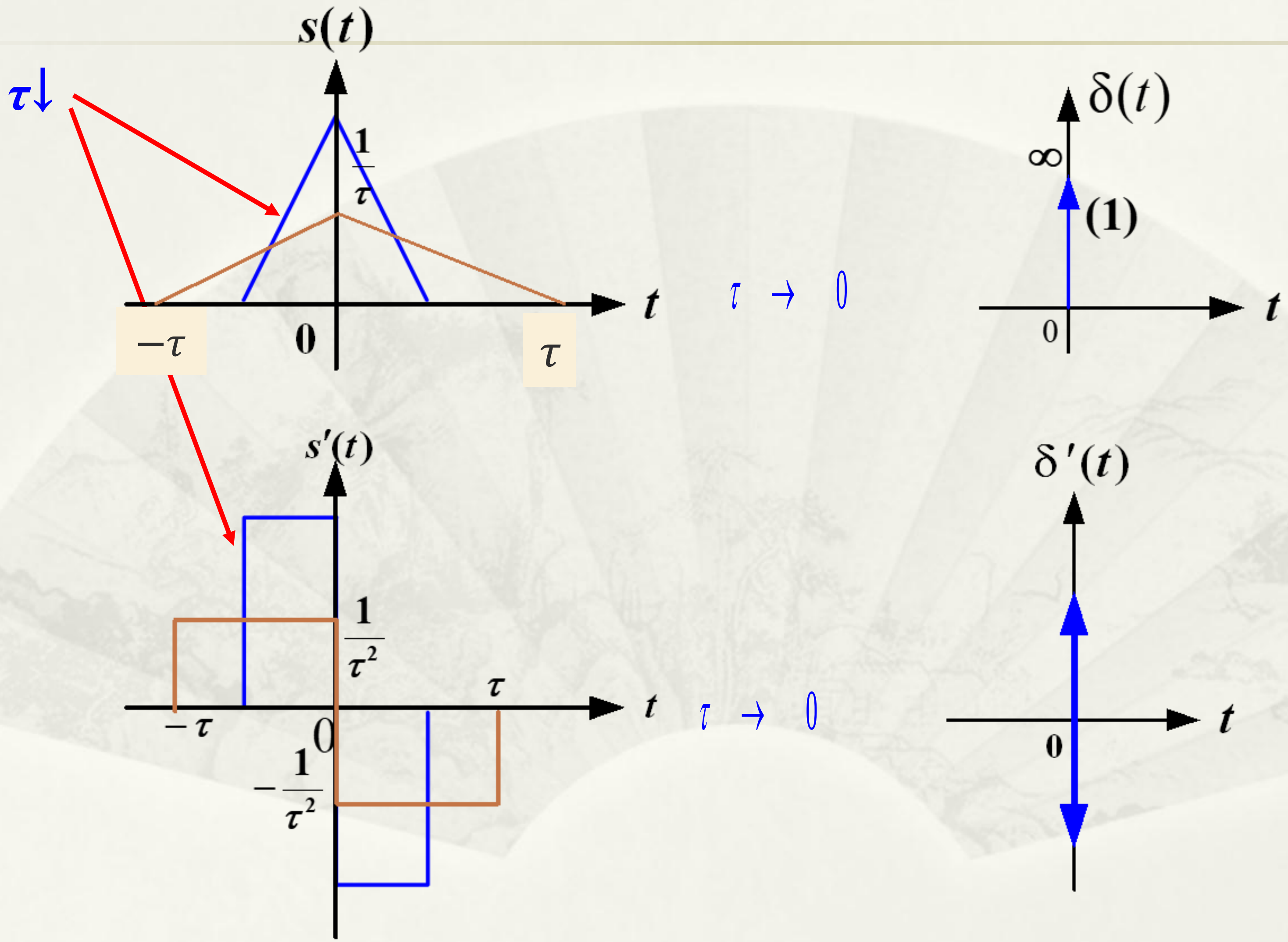
2、看冲激函数所在的位置

3、若积分区间不包含冲激所在位置，无需进一步计算，结果为0，如果包含冲激所在位置，将积分转化成只包含$\delta(t)$函数的积分。

三、 冲激函数的性质

- 取样性
- 冲激偶
- 尺度变换
- 复合函数形式的冲激函数

2. 冲激偶



冲激偶性质：

(1) $\boxed{f(t)\,\delta'(t) = f(0)\,\delta'(t) - f'(0)\,\delta(t)}$

证明：

$$[f(t)\,\delta(t)]' = f(t)\,\delta'(t) + f'(t)\,\delta(t)$$

$$f(t)\,\delta'(t) = [f(t)\,\delta(t)]' - f'(t)\,\delta(t)$$

$$= f(0)\,\delta'(t) - f'(0)\,\delta(t)$$

$$\boxed{f(t)\,\delta'(t-t_0) = f(t_0)\,\delta'(t-t_0) - f'(t_0)\,\delta(t-t_0)}$$

冲激偶性质：

(2) $$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} \delta'(t) f(t)\, \mathrm{d}t = -f'(0)}$$

证明： $$\int_{-\infty}^{\infty} \delta'(t) f(t) dt$$

$$= f(t)\delta(t)\Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f'(t)\delta(t) dt$$ （分部积分）

$$= -f'(0)$$

类似地： $$\int_{-\infty}^{\infty} \delta^{(n)}(t) f(t)\, \mathrm{d}t = (-1)^n f^{(n)}(0)$$

δ′(t)的平移： $$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} \delta'(t-t_0) f(t)\, \mathrm{d}t = -f'(t_0)}$$

(3) $$\boxed{\int_{-\infty}^{t} \delta'(t)\, \mathrm{d}t = \delta(t)}$$

积分 $\int_{-\infty}^{\infty}\sin(2t)\delta'(t)\,\mathrm{d}t = (\quad)$

A 2

B -2

C -2cos(t)

D 0

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty}\delta'(t)f(t)\,\mathrm{d}t = -f'(0)}$$

提交

思考：

例： $$\int_{-\infty}^{\infty}(t-2)^2\delta'(t-1)dt = ?$$ 2

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta'(t-t_0)f(t)\,\mathrm{d}t = -f'(t_0)$$

$$f(t)\,\delta'(t-t_0) = f(t_0)\,\delta'(t-t_0) - f'(t_0)\,\delta(t-t_0)$$

三、 冲激函数的性质

- 取样性
- 冲激偶
- 尺度变换
- 复合函数形式的冲激函数

3. 冲激函数和冲激偶函数的尺度变换

$$\delta(at)=\frac{1}{|a|}\delta(t)$$

$$\delta(at-t_0)=\frac{1}{|a|}\delta(t-\frac{t_0}{a})$$

$$\delta'(at)=\frac{1}{|a|}\cdot\frac{1}{a}\delta'(t)$$

当$a=-1$时

$$\delta(-t)=\delta(t)$$

偶函数

$$\delta'(-t)=-\delta'(t)$$

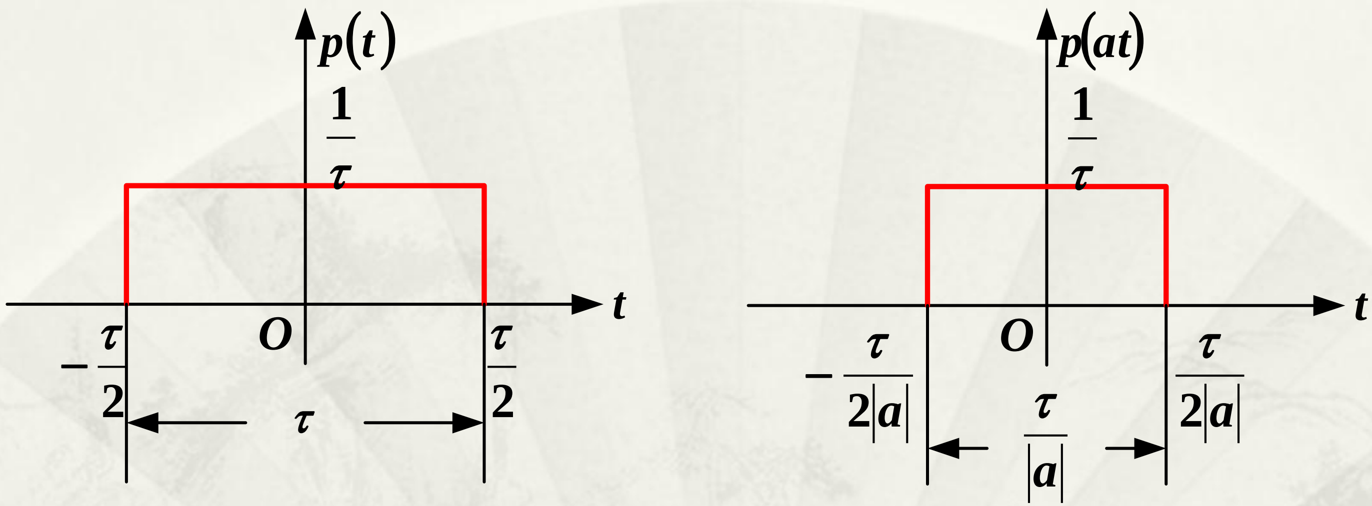
奇函数

类推:

$$\delta^{(n)}(at)=\frac{1}{|a|}\cdot\frac{1}{a^n}\delta^{(n)}(t)$$

$$\delta^{(n)}(-t)=(-1)^n\delta^{(n)}(t)$$

从冲激函数的定义理解 $\delta(at)=\frac{1}{|a|}\delta(t)$



$\tau \to 0$ 时, $p(t) \to \delta(t)$, $p(t)$面积为1, $\delta(t)$强度为1

$\tau \to 0$ 时, $p(at) \to \delta(at)$, $p(at)$面积为$\frac{1}{|a|}$, $\delta(at)$强度为$\frac{1}{|a|}$

多选题 1分

设置

下列表达式正确的是（ ）

$$\delta(at) = \frac{1}{|a|}\delta(t)$$

$$\delta(at - t_0) = \frac{1}{|a|}\delta(t - \frac{t_0}{a})$$

A $\delta(4t) = 0.25\delta(t)$

B $\delta(-4t) = 0.25\delta(t)$

C $\delta(-0.5t) = 2\delta(t)$

D $\delta(2t-1) = 0.5\delta(t-1)$

提交

尺度变换举例：

$$\delta(at) = \frac{1}{|a|}\delta(t)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) f(t)\,\mathrm{d}t = f(0)$$

例1： $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(5t)(t-2)^2\,\mathrm{d}t = ?$

解： $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(5t)(t-2)^2\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{5}\delta(t)(t-2)^2\,\mathrm{d}t$

$$= \frac{1}{5}(t-2)^2\Big|_{t=0}$$

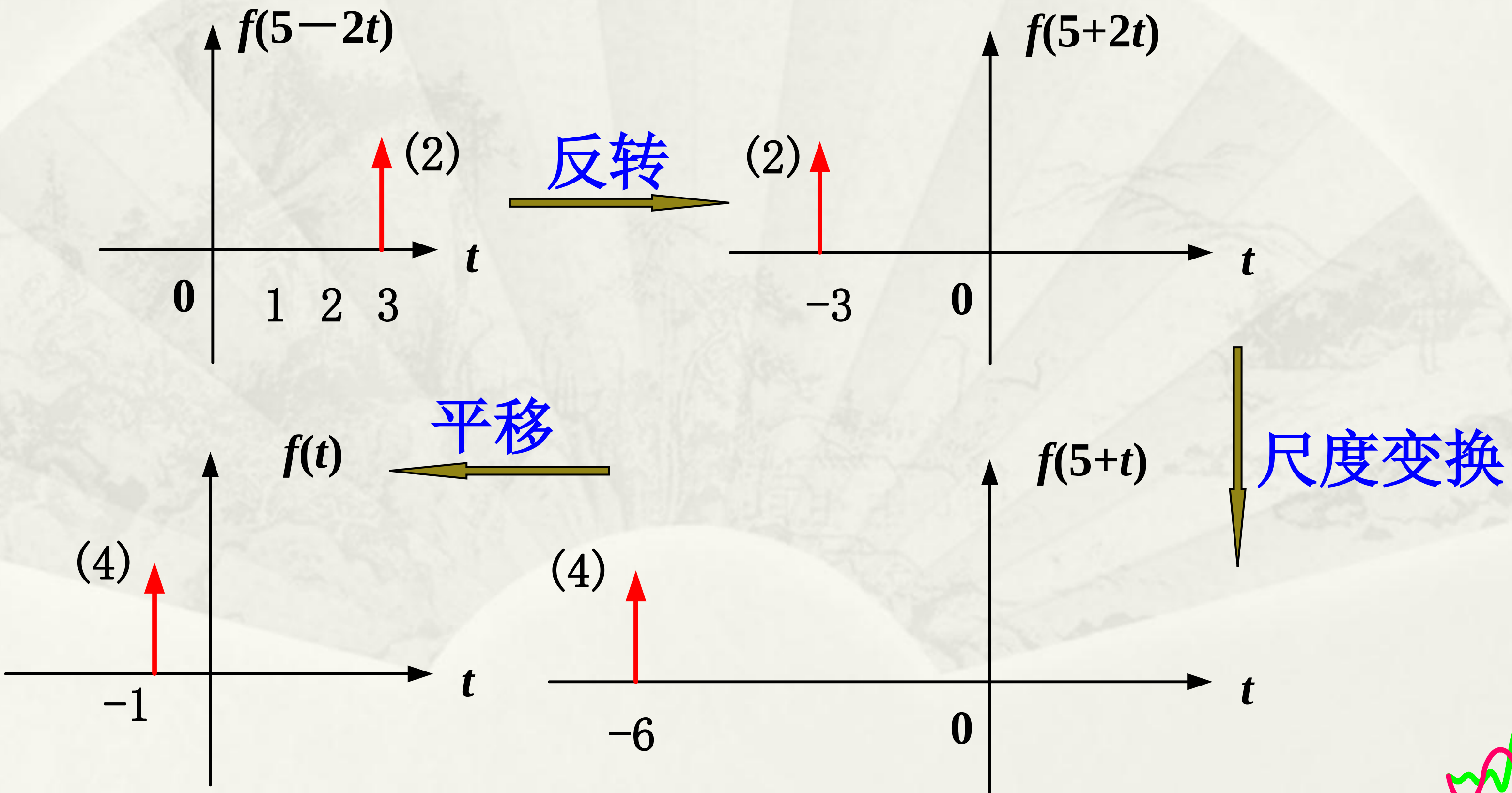
$$= \frac{4}{5}$$

尺度变换举例：

$$\delta(at-t_0)=\frac{1}{|a|}\delta(t-\frac{t_0}{a})$$

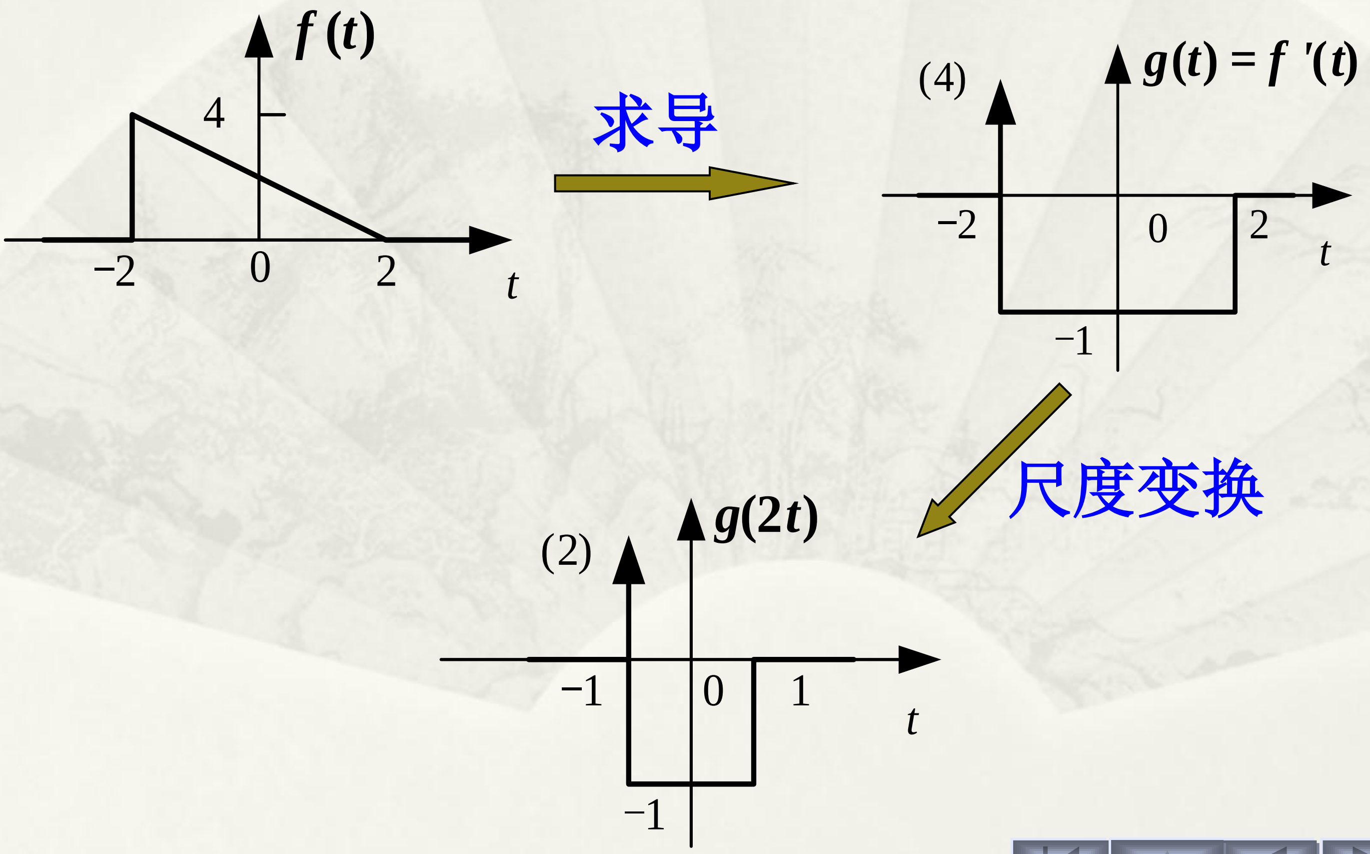
例2：已知信号 $f(5-2t)$ 的波形，请画出 $f(t)$ 的波形。

解：



尺度变换举例：

例3： 已知$f(t)$，画出$g(t) = f\,'(t)$和 $g(2t)$



三、 冲激函数的性质

- 取样性
- 冲激偶
- 尺度变换
- 复合函数形式的冲激函数

4. 复合函数形式的冲激函数

形如$\delta[f(t)]$的冲激函数。其中$f(t)$是普通函数，并且$f(t) = 0$有n个互不相等的实根 t_i (i=1,2,···,n) 。

如果$f(t)$=0有重根，$\delta[f(t)]$无意义。

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\{\varepsilon[f(t)]\} = \delta[f(t)]\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}$$

$$\delta[f(t)] = \frac{1}{f'(t)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\{\varepsilon[f(t)]\}$$

$$\varepsilon[f(t)]?$$

例： $f(t) = t^2 - 4$，如图一所示

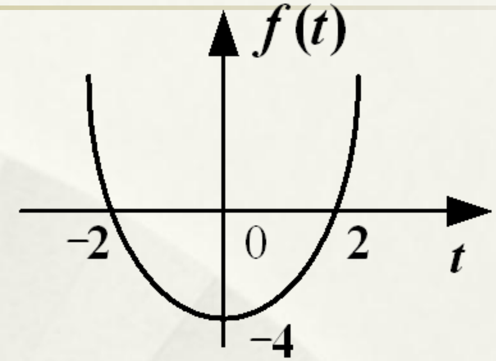
解： $\varepsilon[f(t)] = \varepsilon(t^2 - 4)$

$= 1 - \varepsilon(t+2) + \varepsilon(t-2)$（图二）

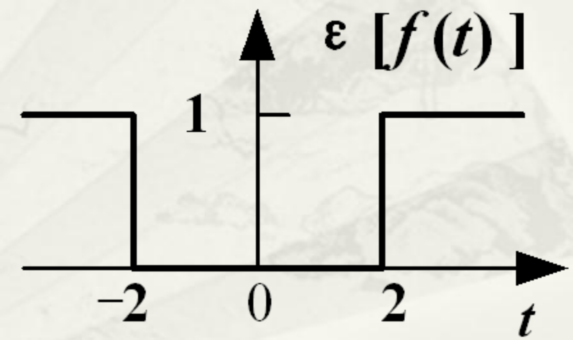
$$\delta[f(t)] = \frac{1}{f'(t)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\{\varepsilon[f(t)]\}$$

$$= \frac{1}{4}\delta(t+2) + \frac{1}{4}\delta(t-2)$$

一般地， $\boxed{\delta[f(t)] = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{|f'(t_i)|}\delta(t - t_i)}$



图一



图二

冲激函数的性质总结

（1）取样性

$$f(t)\delta(t) = f(0)\delta(t)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t)\,\mathrm{d}t = f(0)$$

（2）奇偶性 $\delta(-t) = \delta(t)$

（3）比例性 $\delta(at) = \dfrac{1}{|a|}\delta(t)$

（4）微积分性质

$$\delta(t) = \frac{\mathrm{d}\varepsilon(t)}{\mathrm{d}t}$$

$$\int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \varepsilon(t)$$

（5）冲激偶

$$f(t)\delta'(t) = f(0)\delta'(t) - f'(0)\delta(t)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta'(t)\,\mathrm{d}t = -f'(0)$$

$$\int_{-\infty}^{t} \delta'(t)\,\mathrm{d}t = \delta(t)$$

$$\delta'(-t) = -\delta'(t)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta'(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

信号与系统 电子教案

§1.4 阶跃函数和冲激函数

一　单位阶跃函数

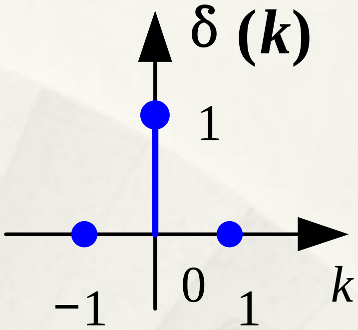
二　单位冲激函数

三　冲激函数的性质

四　序列δ(k)和ε(k)

四、 序列δ(k)和ε(k)（普通序列）

1. 单位(样值)序列δ(k)



$$\delta(k) \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} 1, & k = 0 \\ 0, & k \neq 0 \end{cases}$$

•取样性质：

$$f(k)\delta(k) = f(0)\delta(k)$$

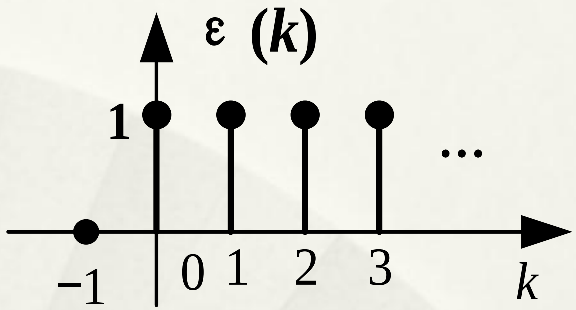
$$f(k)\delta(k-k_0) = f(k_0)\delta(k-k_0)$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k)\delta(k) = f(0)$$

•例： $\sum_{k=-\infty}^{\infty} (k-5)\delta(k) = ?$

2. 单位阶跃序列ε(*k*) 定义

$$\varepsilon(k) \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} 1, & k \geq 0 \\ 0, & k < 0 \end{cases}$$



ε(*k*)与δ(*k*)的关系：

$$\delta(k) = \varepsilon(k) - \varepsilon(k-1)$$

$$\varepsilon(k) = \sum_{i=-\infty}^{k} \delta(i) \quad / \quad \varepsilon(k) = \sum_{j=0}^{\infty} \delta(k-j)$$

下列说法正确的是( )

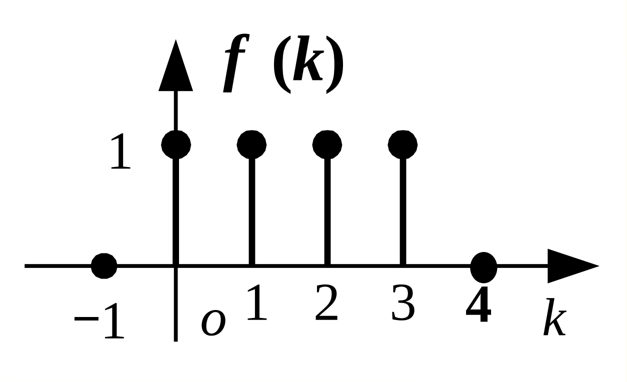
A 冲激函数$\delta(t)$和单位序列$\delta(k)$都是奇异函数。

B 单位序列$\delta(k)$和单位阶跃序列$\varepsilon(k)$都是奇异函数。

C 冲激函数$\delta(t)$和阶跃函数$\varepsilon(t)$都是奇异函数

提交

下列表达式正确的是（ ）



A $f(k)=\varepsilon(k)-\varepsilon(k-3)$

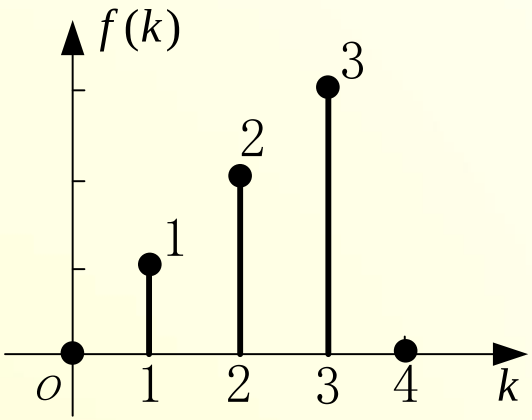
B $f(k)=\varepsilon(k)-\varepsilon(k-4)$

C $f(k)=\delta(k)+\delta(k-1)+\delta(k-2)+\delta(k-3)$

D $\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k)=4$

提交

如图所示图形的表达式是



A $k[\varepsilon(k)-\varepsilon(k-3)]$

B $k[\varepsilon(k)-\varepsilon(k-4)]$

C $k[\varepsilon(k)-\varepsilon(k+3)]$

D $k[\varepsilon(k)-\varepsilon(k+4)]$

提交

下列关系式错误的是( )

A $\varepsilon(k)=\sum_{i=-\infty}^{k}\delta(i)$

B $\boldsymbol{\varepsilon(k)=\delta(k)+\delta(k+1)++\delta(k+2)\cdots}$

C $\varepsilon(k)=\sum_{j=0}^{\infty}\delta(k-j)$

提交

单选题 1分

设置

$$\sum_{i=-\infty}^{k}(i+3)\delta(i+2)=$$

A $\delta(k+3)$

B $\delta(k+2)$

C $\varepsilon(k+3)$

D $\varepsilon(k+2)$

提交

信号与系统
电子教案

§1.4 阶跃函数和冲激函数

一 单位阶跃函数

二 单位冲激函数

三 冲激函数的性质

四 序列$\delta(k)$和$\varepsilon(k)$