一、冲激响应

1. 定义

由单位冲激函数δ(t)所引起的零状态响应称为单位冲激响应，简称冲激响应，记为$h(t)$。

$$h(t)=T[\{0\},\delta(t)]$$

2. 系统冲激响应的求解

找到冲激响应满足的方程，利用前面介绍的经典解法求解。

冲激响应满足的微分方程

对于LTI系统,可以用**n阶微分方程**表示：

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1\, y'(t) + a_0 y(t)$$
$$= b_m f^{(m)}(t) + b_{m-1} f^{(m-1)}(t) + \cdots + b_1\, f'(t) + b_0 f(t)$$

令 $f(t) = \delta(t)$

则 $y(t) = h(t)$

$$h^{(n)}(t) + a_{n-1}h^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1\, h'(t) + a_0 h(t)$$
$$= b_m \delta^{(m)}(t) + b_{m-1}\delta^{(m-1)}(t) + \cdots + b_1\, \delta'(t) + b_0 \delta(t)$$

$h(t)$的求解

由于$h(t)$满足的微分方程的右边为$\delta(t)$及其导数，而$\delta(t)$及其导数在 $t\geq 0_+$ 时都为零，因而方程式右端的自由项恒等于零，这样原系统的冲激响应形式与齐次解的形式相同，其系数由0+时刻的初始条件求得。

齐次解　+　（0+时刻初始值）

特别提醒：

$h(t)$求解的是$t\geq 0$时的解，注意$t=0$时刻是否存在冲激。

冲激响应求解举例

例1：描述某系统的微分方程为：

$$y''(t)+5y'(t)+6y(t)= f''(t) + 2f'(t) + 3f(t)$$

求其冲激响应$h(t)$。

解1： 根据$h(t)$的定义 有

$$h''(t) + 5h'(t) + 6h(t) = \delta''(t)+ 2\delta'(t)+3\delta(t) \quad (1)$$

$$h'(0_-) = h(0_-) = 0$$

先求$h'(0_+)$和$h(0_+)$。

令 $h''(t) = a\delta''(t) + b\delta'(t) + c\delta(t)+ r_1(t)$

$h'(t) = a\delta'(t) + b\delta(t) + r_2(t)$

$h(t) = a\delta(t) + r_3(t)$ [$r_i(t)$ 为不含$\delta(t)$ 的某函数]

代入式(1)，有

$$a\delta''(t) + b\delta'(t)+c\delta(t)+r_1(t) + 5[a\delta'(t)+ b\delta(t)+ r_2(t)]$$
$$+ 6[a\delta(t) + r_3(t)] = \delta''(t)+ 2\delta'(t)+3\delta(t)$$

整理得:

$$a\delta''(t)+(b+5a)\delta'(t)+(c+5b+6a)\delta(t)+ r_1(t)+5 r_2(t)+6 r_3(t)$$
$$= \delta''(t) + 2\delta'(t) + 3\delta(t)$$

利用$\delta(t)$ 系数匹配，得 $a=1$，$b = -3$，$c = 12$

所以 $h(t) = \delta(t) + r_3(t)$ （2）

$h'(t) = \delta'(t) - 3\delta(t) + r_2(t)$ （3）

$h''(t) = \delta''(t) - 3\delta'(t) + 12\delta(t)+ r_1(t)$ （4）

对式(3)从0_-到0_+积分得 $h(0_+) - h(0_-) = -3$

对式(4)从0_-到0_+积分得 $h'(0_+) - h'(0_-) = 12$

故 $h(0_+) = -3$， $h'(0_+) = 12$

求$t>0$时$h(t)$:

当$t>0$时，有 $h''(t) + 5h'(t) + 6h(t) = 0$

微分方程的特征根为-2，-3。

故系统的冲激响应为:

$$h(t)= C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-3t}, \quad t>0$$

代入初始条件 $h(0_+) = -3$， $h'(0_+) = 12$

求得: $C_1=3$，$C_2= -6$

所以: $h(t)= 3e^{-2t} - 6e^{-3t}, \ t > 0$

结合式(2)得:

$$h(t)= \delta(t) + (3e^{-2t} - 6e^{-3t})\varepsilon(t)$$

另解： 描述某系统的微分方程为：

$$y''(t)+5y'(t)+6y(t)=f''(t)+2f'(t)+3f(t)$$

求其冲激响应$h(t)$。

解2： 设$h_1(t)$满足简单方程：$h_1''(t)+5h_1'(t)+6h_1(t)=\delta(t)$

依照前面的方法可得：

$$h(t)=C_1e^{-2t}+C_2e^{-3t}$$

根据：$h_1'(0_+)=1, h_1(0_+)=0$

计算得：

$$h_1(t)=\left(e^{-2t}-e^{-3t}\right)\varepsilon(t)$$

$$h_1'(t)=\left(-2e^{-2t}+3e^{-3t}\right)\varepsilon(t)$$

$$h_1''(t)=\left(4e^{-2t}-9e^{-3t}\right)\varepsilon(t)+\delta(t)$$

$$\therefore h(t)=h_1''(t)+2h_1'(t)+3h_1(t)=\left(3e^{-2t}-6e^{-3t}\right)\varepsilon(t)+\delta(t)$$

冲激响应求解举例

例2: 求系统 $y''(t)+4y'(t)+3y(t)=f'(t)+2f(t)$ 的冲激响应。

解1：将 $f(t)\to\delta(t)$，则 $y(t)\to h(t)$，得到如下方程：

$$h''(t)+4h'(t)+3h(t)=\delta'(t)+2\delta(t)$$

$$h'(0_-)=h(0_-)=0$$

$t>0$时，方程为：$h''(t)+4h'(t)+3h(t)=0$

求特征根：$\lambda^2+4\lambda+3=0\Longrightarrow\lambda_1=-1,\lambda_2=-3$

所以：$h(t)=C_1e^{-t}+C_2e^{-3t}$

接下来的关键就是求解初始值，用待定系数法进行求解。

用待定系数法求解

设 $\begin{cases} h''(t) = a\delta'(t) + b\delta(t) + r_1(t) \\ h'(t) = a\delta(t) + r_2(t) \\ h(t) = r_3(t) \end{cases}$

代入原方程得：$a = 1$， $b = -2$

可以得到： $h(0_+) = 1$， $h'(0_+) = -2$

代入$h(t)$，确定系数C_1,C_2，得：$h(t) = \frac{1}{2}\left(e^{-t} + e^{-3t}\right)\ t > 0$

同时考虑到 $h(t)$ 中不含有 $\delta(t)$ 及各阶导数，最后结果为：

$$h(t) = \frac{1}{2}\left(e^{-t} + e^{-3t}\right)\varepsilon(t)$$

例2：求系统$y''(t)+4y'(t)+3y(t)=f'(t)+2f(t)$的冲激响应。

解2：利用线性时不变性质

设$h_1(t)$满足简单方程 $h_1''(t)+4h_1'(t)+3h_1(t)=\delta(t)$

可以得到（过程略）：

$$h_1(t)=\left(C_1e^{-t}+C_2e^{-3t}\right)\varepsilon(t)$$

$$h_1'(0_+)=1, h_1(0_+)=0$$

将边界条件代入$h_1(t)$式，解得$C_1=1/2, C_2=-1/2$

$$h_1(t)=\frac{1}{2}(e^{-t}-e^{-3t})\varepsilon(t)$$

则由系统的线性时不变特性：$h(t)=h_1'(t)+2h_1(t)$

已知连续系统的微分方程 $y'(t)+2y(t)=f'(t)-f(t)$，则计算冲激响应$h(t)$为(　　)。

A $3e^{-2t}\,\varepsilon(t)$

B $(2e^{-2t}-e^{-3t})\,\varepsilon(t)$

C $\delta(t)-3e^{-2t}\,\varepsilon(t)$

D $(0.5e^{-2t}-2e^{-t}+1.5)\,\varepsilon(t)$

提交

某连续系统的微分方程如下所示，

$$y''(t)+4y'(t)+3y(t)=f(t),$$

其冲激响应为 $h(t)$，则系统

$$y''(t)+4y'(t)+3y(t)=f'(t)-2f''(t),$$

的冲激响应$h_1(t)$为（ ）。

A $2h'(t)+h''(t)$

C $h'(t)-2h''(t)$

B $2h'(t)-h''(t)$

D $h'(t)+2h''(t)$

提交

某LTI连续系统，其输入$f(t)$与输出$y(t)$的关系如下，则该系统的冲激响应为（ ）

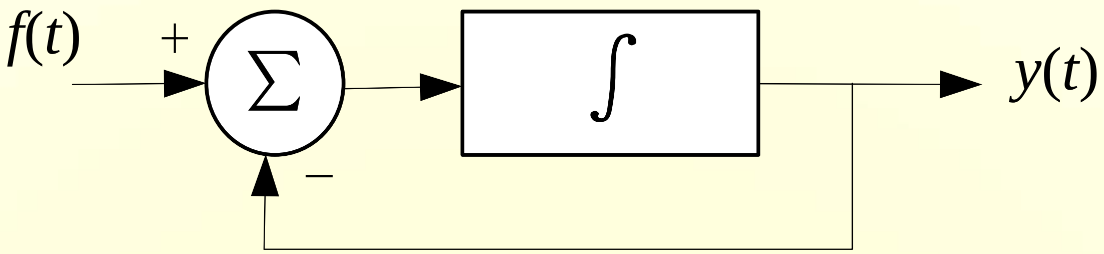
$$y(t)=\int_{t-1}^{\infty}e^{-2(t-x)}f(x-2)dx$$

A $h(t)=e^{-2(t-2)}\varepsilon(t+3)$

B $h(t)=e^{-2(t-2)}\varepsilon(-t+3)$

提交

系统结构框图如图所示，冲激响应满足的方程为（ ）



A $$\frac{dh(t)}{dt}-h(t)=\delta(t)$$

B $$\frac{dh(t)}{dt}=h(t)-\delta(t)$$

C $$\frac{dh(t)}{dt}+h(t)=\delta(t)$$

提交

单选题 1分

设置

已知描述某连续系统的微分方程如下所示，则$h^{n-1}(0_-)$和$h^{n-1}(0_+)$分别等于（ ）

$$h^{n}(t)+a_{n-1}h^{n-1}(t)+\ldots+a_1h'(t)+a_0h(t)=\delta(t)$$

A 0，0

C 0，1

B 0，a_0

D 1，1

提交

二、阶跃响应

阶跃响应定义：$g(t) = T[\varepsilon(t),\{0\}]$

由于线性时不变系统满足微、积分特性，

$$\varepsilon(t)=\int_{-\infty}^{t}\delta(t)\,\mathrm{d}t \qquad h(t)=T[\delta(t),\{0\}]$$

因此，

$$g(t)=\int_{-\infty}^{t}h(\tau)\,\mathrm{d}\tau,\quad h(t)=g'(t)$$

阶跃响应是冲激响应的积分，注意积分限：

$\int_{-\infty}^{t}$，对因果系统：$\int_{0_-}^{t}$

单选题 1分

设置

已知描述某连续系统的微分方程如下所示，则其单位阶跃响应的特解等于（ ）。

$$y''(t)+3y'(t)+2y(t)=f(t)$$

A 2

B 3

C 0.5

D 1

提交

单选题 1分

设置

已知某连续系统的阶跃响应如下，则该系统的冲激响应$h(t)$等于（ ）。

$$g(t) = (2e^{-t} - e^{-2t} + 1)\varepsilon(t)$$

A $(2e^{-2t} - 2e^{-t})\varepsilon(t) + \delta(t)$

B $(2e^{-2t} - 2e^{-t})\varepsilon(t)$

C $(2e^{-2t} - 2e^{-t})\varepsilon(t) + 2\delta(t)$

D $(2e^{-2t} - 2e^{-t})\varepsilon(t) - 2\delta(t)$

提交