§3.1 LTI离散系统的响应

差分与差分方程

差分方程的经典解

零输入响应和零状态响应

注意离散系统与连续系统分析方法上的联系、区别、对比。

一、差分与差分方程

1. 差分运算

仿照微分运算，定义离散信号的**差分**运算。

$$\frac{df(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta f(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t) - f(t-\Delta t)}{\Delta t}$$

离散信号的变化率有两种表示形式：

$$\frac{\Delta f(k)}{\Delta k} = \frac{f(k+1) - f(k)}{(k+1) - k} \qquad \frac{\nabla f(k)}{\nabla k} = \frac{f(k) - f(k-1)}{k - (k-1)}$$

定义差分

（1）一阶前向差分定义：$\Delta f(k) = f(k+1) - f(k)$

（2）一阶后向差分定义：$\nabla f(k) = f(k) - f(k-1)$

式中，Δ和∇称为差分算子，本书主要用后向差分，简称为差分。

（3）二阶差分定义：

$$\nabla^2 f(k) = \nabla[\nabla f(k)] = \nabla[f(k) - f(k-1)] = \nabla f(k) - \nabla f(k-1)$$

$$= f(k) - f(k-1) - [f(k-1) - f(k-2)] = f(k) - 2f(k-1) + f(k-2)$$

（4） m阶差分：

$$\nabla^m f(k) = f(k) + b_1 f(k-1) + \cdots + b_m f(k-m)$$

（5）差分的线性性质：

$$\nabla[af_1(k) + bf_2(k)] = a\nabla f_1(k) + b\nabla f_2(k)$$

2.　差分方程

包含未知序列$y(k)$及其各阶差分的方程式称为差分方程。

其一般形式为:

$$y(k)+a_{n-1}y(k-1)+\cdots+a_0y(k-n)=b_mf(k)+\cdots+b_0f(k-m)$$

差分方程本质上是递推的代数方程，若已知初始条件和激励，利用迭代法可求得其数值解。

一般不易得到解析形式的(闭合)解。

二、差分方程的经典解

$$y(k) + a_{n-1}y(k-1) + \cdots + a_0 y(k-n) = b_m f(k) + \cdots + b_0 f(k-m)$$

与微分方程经典解类似，$y(k) = y_h(k) + y_p(k)$

1. 齐次解：

齐次方程： $y(k) + a_{n-1}y(k-1) + \cdots + a_0 y(k-n) = 0$

特征方程: $1 + a_{n-1}\lambda^{-1} + \cdots + a_0\lambda^{-n} = 0$,

即： $\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_0 = 0$

其根λ_i($i = 1，2，\cdots，n$)称为差分方程的**特征根**。

根据特征根，齐次解的不同形式

表 2-1　不同特征根所对应的齐次解

特征根 λ	齐次解 $y_h(t)$
单实根	$e^{\lambda t}$
r 重实根	$(C_{r-1}t^{r-1}+C_{r-2}t^{r-2}+\cdots+C_1 t+C_0)e^{\lambda t}$
一对共轭复根 $\lambda_{1,2}=\alpha\pm j\beta$	$e^{\alpha t}[C\cos(\beta t)+D\sin(\beta t)]$或 $A\cos(\beta t-\theta)$，其中 $Ae^{j\theta}=C+jD$
r 重共轭复根	$[A_{r-1}t^{r-1}\cos(\beta t+\theta_{r-1})+A_{r-2}t^{r-2}\cos(\beta t+\theta_{r-2})+\cdots+A_0\cos(\beta t+\theta_0)]e^{\alpha t}$

（1）无重根（n个不相等的单实根）

$$y_h(k)=C_1\lambda_1^k+C_2\lambda_2^k+\cdots+C_n\lambda_n^k$$

(2) 有重根　特征根λ为r重实根时

$$y_h(k)=\left(C_{r-1}k^{r-1}+C_{r-2}k^{r-2}+\cdots+C_1k+C_0\right)\lambda^k$$

（3）一对共轭复根 $\lambda_{1,2}=a+jb=\rho e^{\pm j\beta}$

$$y_k(k)=\rho^k[C\cos(\beta k)+D\sin(\beta k)]\text{或者}A\rho^k\cos(\beta k-\theta)$$

r重共轭复根较少涉及

差分方程齐次解举例

例1： 求解二阶差分方程$y(k) - 5y(k-1) + 6y(k-2) = 0$

已知$y(0) = 2$，$y(1) = 1$，求$y(k)$。

解： 特征方程：$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$

特征根：$\lambda_1 = 2 \ \lambda_2 = 3$

齐次解：$y(k) = C_1 2^k + C_2 3^k$

$$k = 0, y(0) = C_1 + C_2 = 2$$

$$k = 1, y(1) = 2C_1 + 3C_2 = 1$$

联立解出: $C_1 = 5, C_2 = -3$

$$\therefore y(k) = \left[5(2)^k - 3(3)^k\right]\varepsilon(k)$$

例2：

求差分方程

$$y(k)+6y(k-1)+12y(k-2)+8y(k-3)=0$$

的解。

解：特征方程为：

$$\lambda^3+6\lambda^2+12\lambda+8=0 \quad (\lambda+2)^3=0$$

三重特征根：$\lambda_{1,2,3}=-2$

齐次解为：$y(k)=\left(C_2k^2+C_1k+C_0\right)(-2)^k$

最后由初始条件确定C_1，C_2，C_3

2.特解$y_p(k)$：特解的形式与激励的形式类似

表 3-2　不同激励所对应的特解

激励 $f(k)$	特解 $y_p(k)$	
k^m	$P_m k^m+P_{m-1}k^{m-1}+\cdots+P_1k+P_0$	所有特征根均不等于 1 时
	$k^r[P_m k^m+P_{m-1}k^{m-1}+\cdots+P_1k+P_0]$	当有 r 重等于 1 的特征根时
a^k	Pa^k	当 a 不等于特征根时
	$(Pk+P_0)a^k$	当 a 是特征单根时
	$[P_r k^r+P_{r-1}k^{r-1}+\cdots+P_1k+P_0]a^k$	当 a 是 r 重特征根时
$\cos(\beta k)$ 或 $\sin(\beta k)$	$P\cos(\beta k)+Q\sin(\beta k)$ 或 $A\cos(\beta k-\theta)$，其中 $Ae^{j\theta}=P+jQ$	所有特征根均不等于 $e^{\pm j\beta}$

表 2-2　不同激励所对应的特解

激励 $f(t)$	特解 $y_p(t)$	
t^m	$P_m t^m+P_{m-1}t^{m-1}+\cdots+P_1t+P_0$	所有的特征根均不等于 0；
	$t^r[P_m t^m+P_{m-1}t^{m-1}+\cdots+P_1t+P_0]$	有 r 重等于 0 的特征根
$e^{\alpha t}$	$Pe^{\alpha t}$	α 不等于特征根；
	$(P_1t+P_0)e^{\alpha t}$	α 等于特征单根；
	$(P_r t^r+P_{r-1}t^{r-1}+\cdots+P_1t+P_0)e^{\alpha t}$	α 等于 r 重特征根
$\cos(\beta t)$ 或 $\sin(\beta t)$	$P\cos(\beta t)+Q\sin(\beta t)$ 或 $A\cos(\beta t-\theta)$，其中 $Ae^{j\theta}=P+jQ$	所有的特征根均不等于$\pm j\beta$

差分方程特解举例

例： 系统方程 $y(k)+4y(k-1)+4y(k-2)=f(k)$

已知初始条件$y(0)=0$，$y(1)=-1$；激励$f(k)=2^k$，$k\geq 0$。

求方程的全解。

解： 特征方程为 $\lambda^2+4\lambda+4=0$

可解得特征根$\lambda_1=\lambda_2=-2$，

其齐次解为 $y_h(k)=(C_1k+C_2)(-2)^k$

设特解为 $y_p(k)=P(2)^k$，$k\geq 0$

代入差分方程得 $P(2)^k+4P(2)^{k-1}+4P(2)^{k-2}=f(k)=2^k$

解得 $P=1/4$，所以得特解： $y_p(k)=2^{k-2}$，$k\geq 0$

故全解为 $y(k)=y_h+y_p=(C_1k+C_2)(-2)^k+2^{k-2}$，$k\geq 0$

代入初始条件解得 $C_1=1$，$C_2=-1/4$

三、零输入响应和零状态响应

（1） 零输入响应：输入为零，差分方程为齐次

求解方法：齐次解

（2） 零状态响应：初始状态为0，即：

$$y_{zs}(-1) = y_{zs}(-2) = 0$$

求解方法
- 经典法：齐次解+特解
- 卷积法

全解：$y(k) = y_{zi}(k) + y_{zs}(k)$

零输入响应举例

例： 系统的方程$y(k)+3y(k-1)+2y(k-2)=f(k)+f(k-1)$

$f(k)=(-2)^k\varepsilon(k)$　　$y(0)=y(1)=0$,求系统的零输入响应。

解： 零输入响应$y_{zi}(k)$，即当$f(k)=0$时的解。

齐次方程：$y(k)+3y(k-1)+2y(k-2)=0$

第一步：根据特征根写出齐次解

特征方程及特征根为：$\lambda^2+3\lambda+2=0$　　$\lambda_1=-2$，　$\lambda_2=-1$

齐次解为：$y_{zi}(k)=C_1(-2)^k+C_2(-1)^k$

第二步：求初始值

思考1：可不可以直接代入已知的初始值 $y(0)=y(1)=0$？

我们需要的是$y_{zi}(0)$和$y_{zi}(1)$（激励为0），而$y(0)$，$y(1)$中包含了激励的作用，显然二者是不相等的。

我们需要根据$y(0)$，$y(1)$ 求出$y(-1)=y(-2)$，从而得到$y_{zi}(0)$和$y_{zi}(1)$

$k=1$ 时，根据方程$y(k)+3y(k-1)+2y(k-2)=f(k)+f(k-1)$

迭代可得：$y(-1)=-\frac{1}{2}$ $\quad y_{zi}(-1)=y(-1)$

$k=0$ 可得：$y(-2)=\frac{5}{4}$ $\quad y_{zi}(-2)=y(-2)$

第三步：由初始状态确定C_1，C_2

思考2： 我们需要的是$y_{zi}(0)$和$y_{zi}(1)$，可不可以直接用$y_{zi}(-1)$和$y_{zi}(-2)$代入计算？答案：可以，为什么？

将初始条件代入方程：

$$\begin{cases} y_{zi}(-1)=C_1(-1)^{-1}+C_2(-1)^{-1}=-\dfrac{1}{2} \\ y_{zi}(-2)=C_1(-2)^{-2}+C_2(-1)^{-2}=\dfrac{5}{4} \end{cases}$$

解得：$\begin{cases} C_1=-3 \\ C_2=\ \ 2 \end{cases}$

$$y_{zi}(k)=\left[-3(-2)^k+2(-1)^k\right]\varepsilon(k)$$

全响应举例

例：系统方程为 $y(k) + 3y(k-1) + 2y(k-2) = f(k)$

已知激励$f(k)=2^k$, $k\geq 0$，初始状态$y(-1)=0, y(-2)=1/2$,

求系统的零输入响应、零状态响应和全响应。

解：（1）$y_{zi}(k)$满足方程

$$y_{zi}(k) + 3y_{zi}(k-1) + 2y_{zi}(k-2) = 0$$

$$y_{zi}(-1) = y(-1) = 0,\ y_{zi}(-2) = y(-2) = ½$$

特征根为$\lambda_1 = -1$，$\lambda_2 = -2$

递推求出初始值$y_{zi}(0), y_{zi}(1)$（不求亦可）

$$y_{zi}(k) = -3y_{zi}(k-1) - 2y_{zi}(k-2)$$

$$y_{zi}(0) = -3y_{zi}(-1) - 2y_{zi}(-2) = -1$$

$$y_{zi}(1) = -3y_{zi}(0) - 2y_{zi}(-1) = 3$$

齐次解为 $y_{zi}(k)=C_{zi1}(-1)^k+C_{zi2}(-2)^k$

将初始值代入 并解得 $C_{zi1}=1$, $C_{zi2}=-2$

$$y_{zi}(k)=(-1)^k-2(-2)^k \quad , k\geq 0$$

（2）零状态响应$y_{zs}(k)$ 满足

$$y_{zs}(k)+3y_{zs}(k-1)+2y_{zs}(k-2)=2^k$$

$$y_{zs}(-1)=y_{zs}(-2)=0$$

递推求初始值 $y_{zs}(0), y_{zs}(1)$,

$$y_{zs}(k)=-3y_{zs}(k-1)-2y_{zs}(k-2)+2^k , k\geq 0$$

$$y_{zs}(0)=-3y_{zs}(-1)-2y_{zs}(-2)+1=1$$

$$y_{zs}(1)=-3y_{zs}(0)-2y_{zs}(-1)+2=-1$$

$$y_{zs}(k) + 3y_{zs}(k-1) + 2y_{zs}(k-2) = 2^k$$

分别求出齐次解和特解，得

$$y_{zs}(k) = C_{zs1}(-1)^k + C_{zs2}(-2)^k + y_p(k)$$
$$= C_{zs1}(-1)^k + C_{zs2}(-2)^k + (1/3)2^k$$

代入初始值求得

$$C_{zs1} = -1/3\ ,\ C_{zs2} = 1$$

$$y_{zs}(k) = -1/3\,(-1)^k + (-2)^k + (1/3)2^k\ ,\ k \geq 0$$

（3）全响应

$$y(k) = y_{zi}(k) + y_{zs}(k)$$

一、单位序列响应

1、 定义

单位序列$\delta(k)$所引起的零状态响应，记为$h(k)$ 。

$$h(k)=T[\{0\},\delta(k)]$$

2、 举例

例1： 已知某系统的差分方程为

$y(k)-y(k-1)-2y(k-2)=f(k)$， 求单位序列响应$h(k)$。

解： 根据$h(k)$的定义 有

$$h(k)-h(k-1)-2h(k-2)=\delta(k) \qquad (1)$$

$$h(-1)=h(-2)=0$$

（1）递推求初始值$h(0)$和$h(1)$。

$$h(k)= h(k-1) + 2h(k-2) +\delta(k)$$

$$h(0)= h(-1) + 2h(-2) + \delta(0) = 1$$

$$h(1)= h(0) + 2h(-1) + \delta(1) = 1$$

(2) 求$h(k)$

对于$k>0$， $h(k)$满足齐次方程

$$h(k) - h(k-1) - 2h(k-2) = 0$$

特征方程: $(\lambda+1)(\lambda-2) = 0$

$$h(k) = C_1(-1)^k + C_2 2^k\ ,\quad k>0$$

$$h(0) = C_1 + C_2 = 1\ ,\ h(1)= -C_1+2C_2 = 1$$

解得 $C_1= 1/3\ , C_2=2/3$

$$h(k) = (1/3)(-1)^k + (2/3)2^k\ ,\ k\geq 0$$

或写为: $h(k) = [(1/3)(-1)^k + (2/3)2^k]\, \varepsilon(k)$

例2： 系统方程为 $y(k)-y(k-1)-2y(k-2)=f(k)-f(k-2)$

求单位序列响应$h(k)$。

解： $h(k)$满足

$$h(k)-h(k-1)-2h(k-2)=\delta(k)-\delta(k-2)$$

设只有$\delta(k)$作用时，系统的单位序列响应$h_1(k)$，

它满足

$$h_1(k)-h_1(k-1)-2h_1(k-2)=\delta(k)$$

根据线性时不变性，

$$\begin{aligned}h(k) &= h_1(k)-h_1(k-2)\\ &= [(1/3)(-1)^k+(2/3)2^k]\varepsilon(k)-[(1/3)(-1)^{k-2}\\ &\quad +(2/3)2^{k-2}]\varepsilon(k-2)\end{aligned}$$

思考：直接求解方便否？

二、阶跃响应

1、 定义

单位序列**ε(*k*)**所引起的**零状态响应**，记为***g*(*k*)** 。

$$g(k)=T[\varepsilon(k),\{0\}]$$

2、 ε(*k*)和*g*(*k*)的关系

$$\varepsilon(k)=\sum_{i=-\infty}^{k}\delta(i)=\sum_{j=0}^{\infty}\delta(k-j) \longrightarrow g(k)=\sum_{i=-\infty}^{k}h(i)=\sum_{j=0}^{\infty}h(k-j)$$

$$\delta(k)=\varepsilon(k)-\varepsilon(k-1)=\nabla\varepsilon(k) \longrightarrow h(k)=\nabla g(k)$$

两个常用的求和公式：

$$\sum_{j=k_1}^{k_2} a^j = \begin{cases} \dfrac{a^{k_1} - a^{k_2+1}}{1-a} & a \neq 1 \\ k_2 - k_1 + 1 & a = 1 \end{cases} \qquad (k_2 \geq k_1)$$

$$\sum_{j=k_1}^{k_2} j = \frac{(k_2 + k_1)(k_2 - k_1 + 1)}{2}$$

阶跃响应$g(k)$与单位序列响应$h(k)$的关系为

A $$g(k)=\sum_{i=-\infty}^{k}h(i)$$

B $$g(k)=\sum_{i=-\infty}^{\infty}h(i)$$

C $$g(k)=\sum_{j=0}^{\infty}h(k-j)$$

D $$h(k)=g(k)-g(k-1)$$

提交

单选题 1分

设置

LTI离散系统的阶跃响应$g(k)=(0.5)^k\varepsilon(k)$，则其单位序列响应为

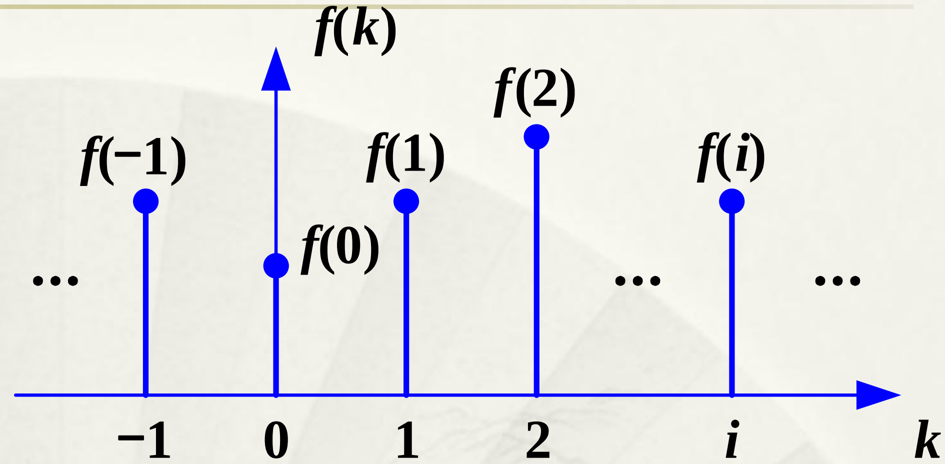
A $h(k)=(0.5)^k\varepsilon(k)-(0.5)^{k-1}\varepsilon(k-1)$

B $h(k)=(0.5)^{k+1}\varepsilon(k+1)-(0.5)^k\varepsilon(k)$

提交

一、卷积和

1、 序列的时域分解



任意序列$f(k)$ 可表示为:

$$f(k)=\cdots+f(-1)\delta(k+1) + f(0)\delta(k) + f(1)\delta(k-1) + f(2)\delta(k-2)+ \cdots + f(i)\delta(k-i) + \cdots$$

$$= \sum_{i=-\infty}^{\infty} f(i)\delta(k-i)$$

2、任意序列作用下的零状态响应

$$f(k) \rightarrow \boxed{\text{LTI系统 零状态}} \rightarrow y_{zs}(k)$$

根据$h(k)$的定义： $\delta(k) \Rightarrow h(k)$

由时不变性： $\delta(k-i) \Rightarrow h(k-i)$

由齐次性： $f(i)\delta(k-i) \Rightarrow f(i)\,h(k-i)$

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} f(i)\delta(k-i) \Rightarrow \sum_{i=-\infty}^{\infty} f(i)h(k-i)$$

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} f(i)\delta(k-i) = f(k), \qquad \sum_{i=-\infty}^{\infty} f(i)h(k-i) = y_{zs}(k)$$

$$\boxed{y_{zs}(k) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} f(i)\,h(k-i)}$$

卷积和

3、卷积和定义

已知定义在区间（$-\infty$，∞）上的两个函数$f_1(k)$和$f_2(k)$，则定义和

$$f(k)=\sum_{i=-\infty}^{\infty} f_1(i)\, f_2(k-i)$$

为$f_1(k)$与$f_2(k)$的卷积和，简称**卷积**；记为

$$f(k)= f_1(k) * f_2(k)$$

注意：求和是在虚设的变量 i 下进行的， i 为求和变量，k 为参变量。结果仍为k 的函数。

$$\boxed{y_{zs}(k)=\sum_{i=-\infty}^{\infty} f(i)\, h(k-i)=f(k)*h(k)}$$

定义计算卷积和举例

例： $f(k) = a^k\varepsilon(k)$, $h(k) = b^k\varepsilon(k)$ ，求$y_{zs}(k)$。

解： $y_{zs}(k) = f(k) * h(k)$

$$= \sum_{i=-\infty}^{\infty} f(i)h(k-i) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} a^i \varepsilon(i) b^{k-i} \varepsilon(k-i)$$

当$i < 0, \varepsilon(i) = 0$， $i \geq 0, \varepsilon(i) = 1$ ；

当$i > k$时， $\varepsilon(k-i) = 0$, $i \leq k$时， $\varepsilon(k-i) = 1$

$$\therefore y_{zs}(k) = \left[\sum_{i=0}^{k} a^i b^{k-i}\right]\varepsilon(k) = b^k \left[\sum_{i=0}^{k}\left(\frac{a}{b}\right)^i\right]\varepsilon(k)$$

$$\therefore y_{zs}(k)=\left[\sum_{i=0}^{k}a^{i}b^{k-i}\right]\varepsilon(k)=b^{k}\left[\sum_{i=0}^{k}\left(\frac{a}{b}\right)^{i}\right]\varepsilon(k)$$

$$=\begin{cases} b^{k}\dfrac{1-\left(\dfrac{a}{b}\right)^{k+1}}{1-\dfrac{a}{b}}\varepsilon(k) & a\neq b \\ b^{k}(k+1)\varepsilon(k) & a=b \end{cases}$$

$\varepsilon(k) * \varepsilon(k) = (k+1)\varepsilon(k)$

二、卷积和图解法

$$f(k)=\sum_{i=-\infty}^{\infty} f_1(i)f_2(k-i)$$

卷积过程可分解为四步：

（1）换元： k换为 i→得 $f_1(i)$， $f_2(i)$

（2）反转平移：由$f_2(i)$反转→ $f_2(-i)$平移k → $f_2(k-i)$

（3）乘积： $f_1(i)\,f_2(k-i)$

（4）求和： i 从 $-\infty$到∞对乘积项求和。

注意：k 为参变量。

图解法计算卷积和举例

例：$f_1(k)$、 $f_2(k)$如图所示，已知

$f(k) = f_1(k) * f_2(k)$，求$f(2) = ?$

$$f(2) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} f_1(i) f_2(2-i)$$

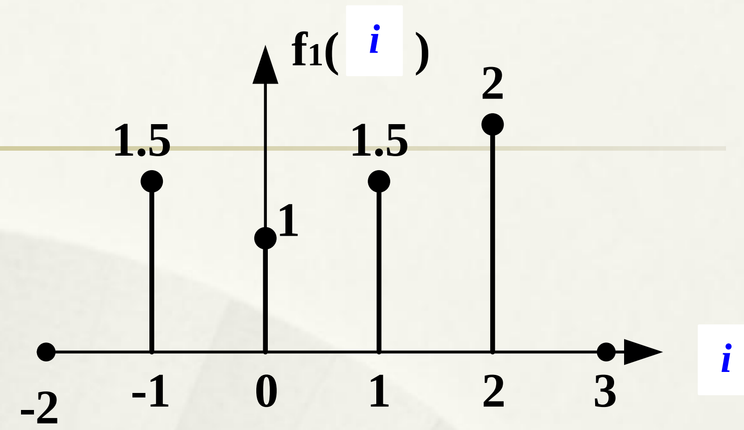
（1）换元

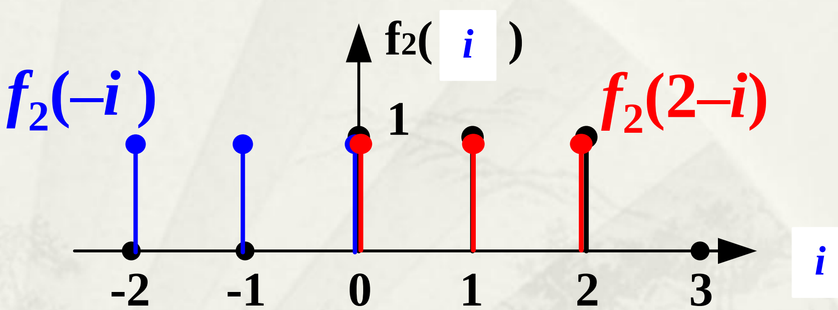
（2） $f_2(i)$反转得$f_2(-i)$

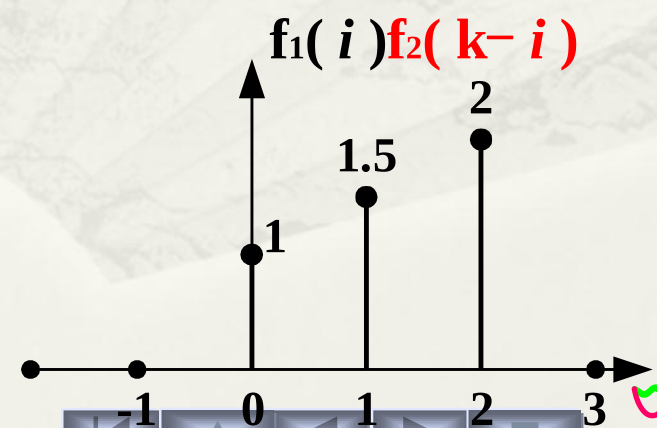
（3） $f_2(-i)$右移2得$f_2(2-i)$

（4） $f_1(i)$乘$f_2(2-i)$

（5）求和，得$f(2) = 4.5$







三、不进位乘法求卷积

$$f(k)=\sum_{i=-\infty}^{\infty} f_1(i)\, f_2(k-i)$$

$$=\cdots+f_1(-1)f_2(k+1)+f_1(0)f_2(k)+f_1(1)f_2(k-1)$$

$$+f_1(2)f_2(k-2)+\cdots+f_1(i)\,f_2(k-i)+\cdots$$

$f(k)$=所有两序列序号之和为k 的那些样本乘积之和。

如k=2时

$$f(2)=\cdots+f_1(-1)f_2(3)+f_1(0)f_2(2)+f_1(1)f_2(1)+f_1(2)f_2(0)+\cdots$$

例： $f_1(k)=\{0,\ f_1(1),\ f_1(2),\ f_1(3),\ 0\}$

$f_2(k)=\{0,\ f_2(0),\ f_2(1),\ 0\}$

不进位乘法

$$
\begin{array}{r}
f_1(1), \quad f_1(2), \quad f_1(3) \\
f_2(0), \quad f_2(1) \\
\times \hline
f_1(1)f_2(1), \quad f_1(2)\,f_2(1), \quad f_1(3)\,f_2(1) \\
f_1(1)\,f_2(0), \quad f_1(2)\,f_2(0), \quad f_1(3)\,f_2(0) \qquad\qquad \\
+ \hline
f_1(1)f_2(1)+f_1(2)f_2(0) \qquad\qquad f_1(3)\,f_2(1) \\
f_1(1)\,f_2(0) \qquad\qquad f_1(2)f_2(1)+f_1(3)f_2(0) \qquad\qquad
\end{array}
$$

$f(k)=\{\ 0,\quad f_1(1)\,f_2(0),\quad f_1(1)f_2(1)+f_1(2)f_2(0)$

$f_1(2)f_2(1)+f_1(3)f_2(0),\quad f_1(3)\,f_2(1),\quad 0\ \}$

$k=0$

不进位乘法适用范围

不进位乘法适用于有限长序列卷积

若：$f(k)$ 序列， $n_1 \le k \le n_2$

$h(k)$ 序列， $n_3 \le k \le n_4$ $y_{zs}(k)$的元素范围?

则 $y_{zs}(k)$ 序列， $(n_1 + n_3) \le k \le (n_2 + n_4)$

例：$f(k)$: $0 \le k \le 3$ 4个元素

$h(k)$: $0 \le k \le 4$ 5个元素

$y_{zs}(k)$: $0 \le k \le 7$ 8个元素

不进位乘法举例

例： $f_1(k)=\{0,\ 2,\ 1,\ 5,\ 0\}$

$\uparrow k=1$

$f_2(k)=\{0,\ 3,\ 4,\ 0,\ 6,\ 0\}$

$\uparrow k=0$

求 $f(k)=f_1(k)*f_2(k)$

解：

$$
\begin{array}{r}
3,\ 4,\ 0,\ 6 \\
\times\quad 2,\ 1,\ 5 \\
\hline
15,\ 20,\ 0,\ 30 \\
3,\ 4,\ 0,\ 6 \\
+\quad 6,\ 8,\ 0,\ 12 \\
\hline
6,\ 11,\ 19,\ 32,\ 6,\ 30
\end{array}
$$

$f(k)=$

$\{0,\ 6,\ 11,\ 19,\ 32,\ 6,\ 30\}$

$\uparrow k=1$

四、卷积和性质

(1) 满足乘法的三律：

交换律, 分配律, 结合律

(2) $f(k) * \delta(k) = f(k)$， $f(k) * \delta(k - k_0) = f(k - k_0)$

(3) $f(k) * \varepsilon(k) = \sum_{i=-\infty}^{k} f(i)$

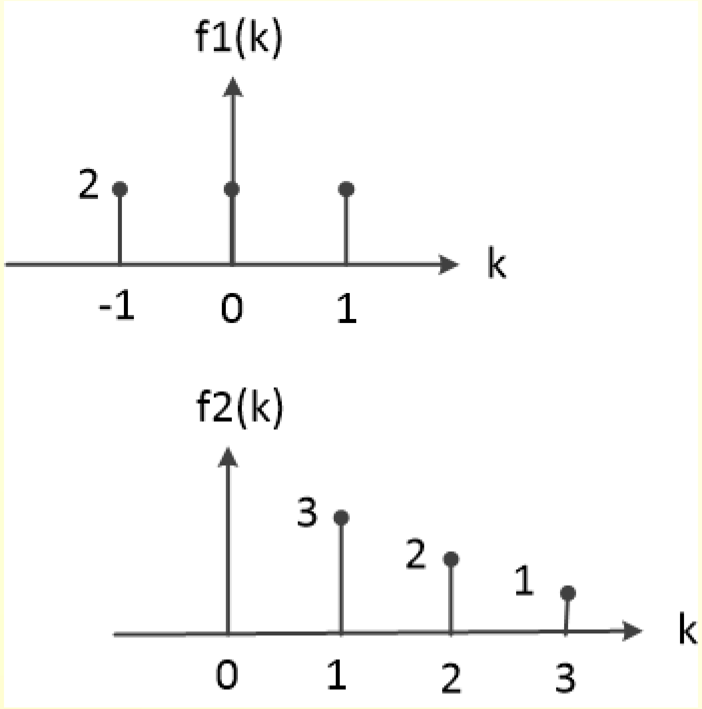
(4) $f_1(k - k_1) * f_2(k - k_2) = f_1(k - k_1 - k_2) * f_2(k)$

(5) $\nabla[f_1(k) * f_2(k)] = \nabla f_1(k) * f_2(k) = f_1(k) * \nabla f_2(k)$

单选题 1分

设置

已知$f_1(k)$ 和$f_2(k)$的波形，设$y(k) = f_1(k) * f_2(k)$, 则$y(2)$等于（ ）。



A 6

B 8

C 10

D 12

提交

单选题 1分

设置

离散序列$f_1(k)=\varepsilon(k+2)-\varepsilon(k-3)$, $f_2(k)=k^2\varepsilon(-k)$, 设$y(k)=f_1(k)*f_2(k)$, 则$y(-1)=(\ \ )$。

A 13

B 14

C 12

D 4

提交

单选题 1分

设置

$$f_1(k)=\begin{cases}1, & k=-1,2\\ 2, & k=0,1\\ 0, & 其它\end{cases}\qquad f_2(k)=\begin{cases}k+1, & k=0,1,2\\ 0, & 其它\end{cases}$$

则卷积和$f_1(k)*f_2(k)$当$k=0$时等于（）

A 0

B 1

C 4

D 9

提交

多选题 1分

设置

下列说法正确的是（ ）

A $f(k) * \delta(k) = f(k)$

B $f(k) * \varepsilon(k) = \sum_{i=-\infty}^{k} f(i)$

C $\varepsilon(k) * \varepsilon(k) = k\varepsilon(k)$

D $\varepsilon(k) * \varepsilon(k-3) = (k-2)\varepsilon(k-3)$

提交

单选题 1分

设置

$$\delta(k) * \delta(k) =$$

A $\delta^2(k)$

B $\delta(k+1)$

C $\delta(k)$

提交

单选题 1分

设置

$$\varepsilon(k-3) * \varepsilon(k-4) =$$

A $\varepsilon(k-7)$

B $\varepsilon(k-6)$

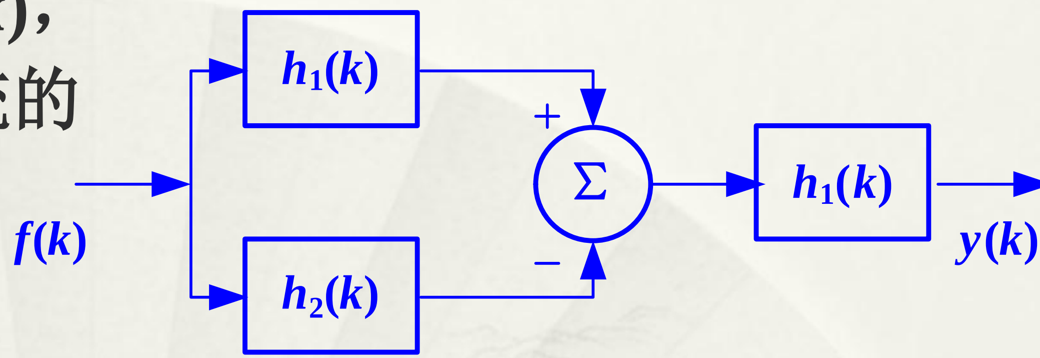
C $\varepsilon(k-4)$

D $(k-6)\varepsilon(k-7)$

提交

利用性质求卷积和

例1： 复合系统中$h_1(k)=\varepsilon(k)$，$h_2(k)=\varepsilon(k-5)$，求复合系统的单位序列响应$h(k)$。



解： 根据$h(k)$的定义，有

$$
\begin{aligned}
h(k) &= [\delta(k) * h_1(k) - \delta(k) * h_2(k)] * h_1(k) \\
&= [h_1(k) - h_2(k)] * h_1(k) \\
&= h_1(k) * h_1(k) - h_2(k) * h_1(k) \\
&= \varepsilon(k) * \varepsilon(k) - \varepsilon(k-5) * \varepsilon(k) \\
&= (k+1)\varepsilon(k) - (k+1-5)\varepsilon(k-5) \\
&= (k+1)\varepsilon(k) - (k-4)\varepsilon(k-5)
\end{aligned}
$$

单选题 1分

设置

$$(0.5)^k \varepsilon(k) * 1 =$$

A 0.5

B 1

C 2

D 0

提交