第四章 傅里叶变换和系统的频域分析

§4.0 引言

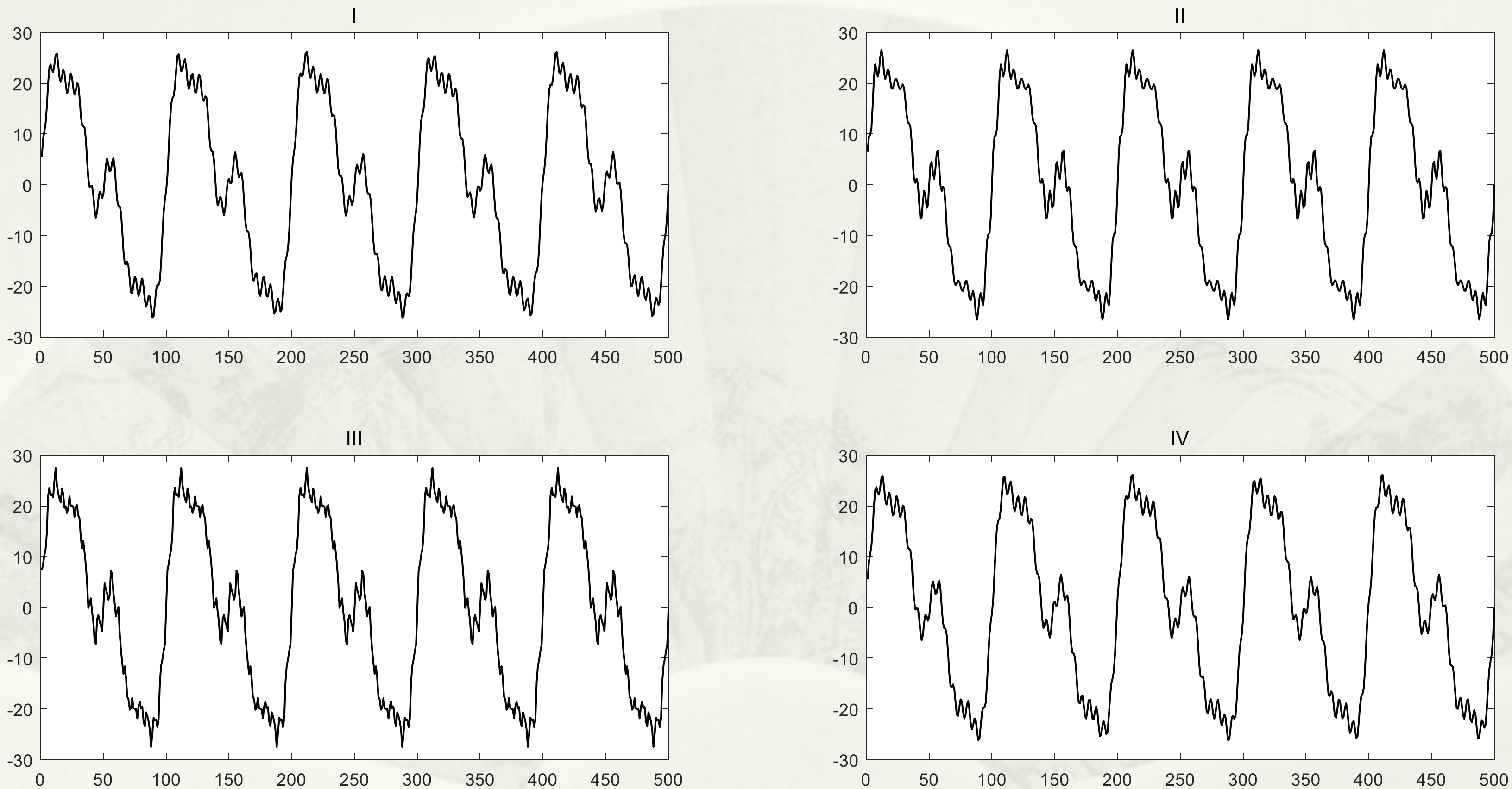
时域分析，以冲激函数为基本信号，任意输入信号可分解为一系列冲激函数之和， $y_{zs}(t) = h(t) * f(t)$;

本章将以正弦信号和虚指数信号$e^{j\omega t}$为基本信号，任意输入信号可分解为一系列不同频率的正弦信号或虚指数信号之和，在此基础上研究系统的响应；

用于系统分析的独立变量是频率， 故称为频域分析 。

我们为什么要研究频域?

时域波形



找出和图(I)相同的波形

投票 最多可选1项

设置

找出和图(I)相同的波形

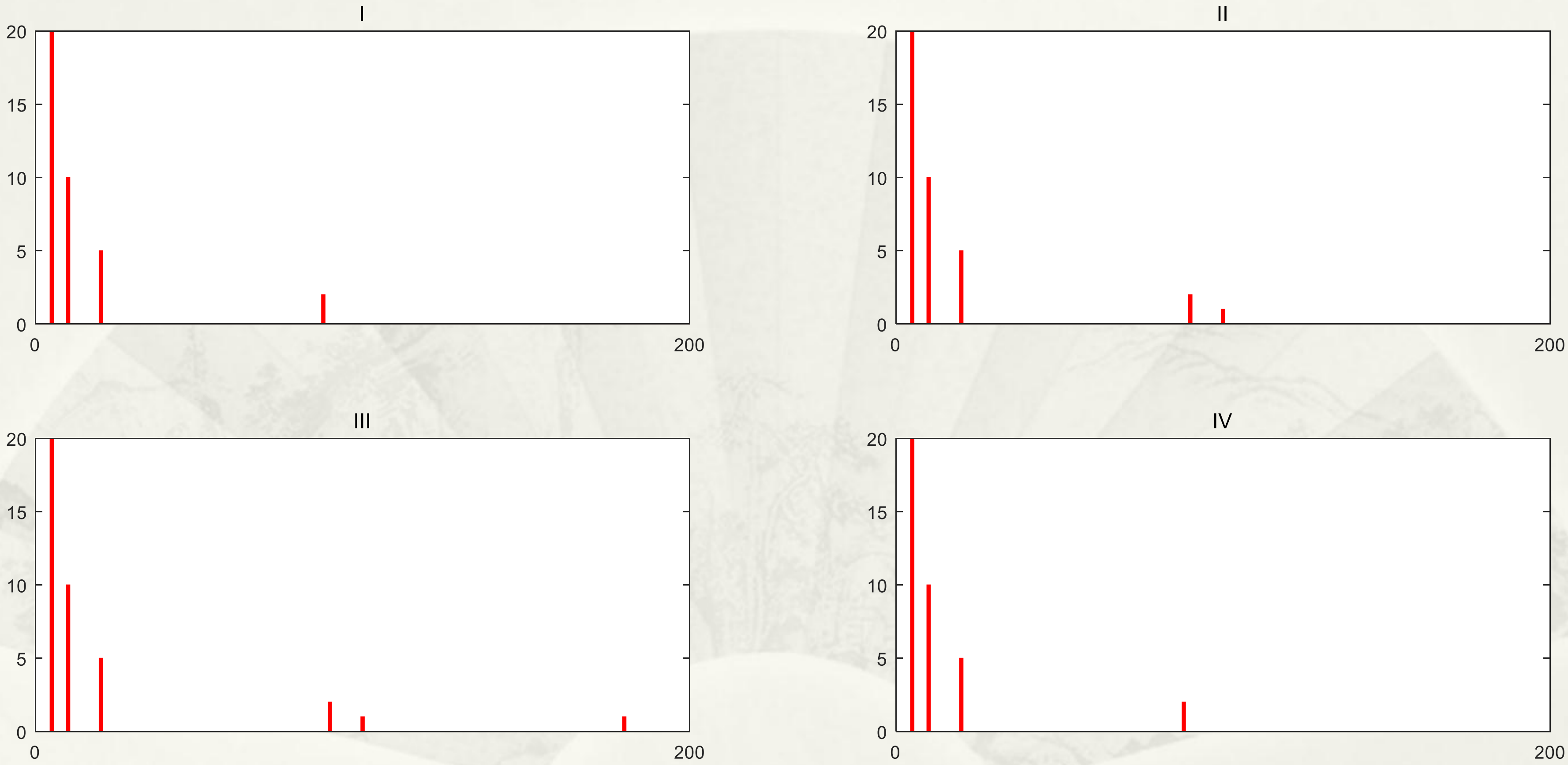
A 图II

B 图III

C 图IV

提交

以上四图的频域分布



频域分析

信号的正交分解

周期信号的傅里叶级数的三角形式

周期信号的傅里叶级数的指数形式

引入频谱、带宽等的概念

非周期信号的频谱---傅里叶变换

发展历史

•1822年，法国数学家傅里叶(J. Fourier, 1768—1830)在研究热传导理论时发表了“热的分析理论”，提出并证明了将周期函数展开为正弦级数的原理，奠定了傅里叶级数的理论基础。

•泊松(Poisson)、高斯(Guass)等人把这一成果应用到电学中去，得到广泛应用。

发展历史

•进入20世纪以后，谐振电路、滤波器、正弦振荡器等一系列具体问题的解决为正弦函数与傅里叶分析的进一步应用开辟了广阔的前景。

•在通信与控制系统的理论研究和工程实际应用中，傅里叶变换法具有很多的优点。

• “FFT”快速傅里叶变换为傅里叶分析法赋予了新的生命力。

§4.1　信号分解为正交函数

矢量正交与正交分解

信号正交与正交函数集

信号的正交分解

一、矢量正交与正交分解

- 矢量正交的定义：

指矢量$V_x = (vx_1, vx_2, vx_3)$与$V_y = (vy_1, vy_2, vy_3)$的内积为0。即

$$V_x V_y^T = \sum_{i=1}^{3} v_{xi} v_{yi} = 0$$

- 正交矢量集：指由两两正交的矢量组成的矢量集合

如三维空间中，以矢量

$V_x =$（2，0，0）、$V_y =$（0，2，0）、$V_z =$（0，0，2)

所组成的集合就是一个正交矢量集，且完备。

矢量$A = (2，5，8)$表示为 $A = V_x + 2.5\,V_y + 4\,V_z$

- 矢量空间正交分解的概念可推广到信号空间。

二、信号正交与正交函数集

1. 信号正交：

定义在(t_1, t_2)区间的$\varphi_1(t)$和$\varphi_2(t)$满足：

$$\int_{t_1}^{t_2} \varphi_1(t)\,\varphi_2^*(t)dt = 0$$ (两函数的内积为0)

则称$\varphi_1(t)$和$\varphi_2(t)$在区间(t_1, t_2)内正交。

2. 正交函数集：

若n个函数$\varphi_1(t)$，$\varphi_2(t)$，…，$\varphi_n(t)$构成一个函数集，这些函数在区间(t_1, t_2)内满足

$$\int_{t_1}^{t_2} \varphi_i(t)\,\varphi_j^*(t)dt = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ K_i \neq 0 & i = j \end{cases}$$

则称此函数集为在区间(t_1, t_2)的正交函数集。

3. 完备正交函数集

如果在正交函数集{$\varphi_1(t)$， $\varphi_2(t)$， …， $\varphi_n(t)$}之外，不存在函数$\varphi(t)(\neq 0)$满足

$$\int_{t_1}^{t_2} \varphi^*(t)\,\varphi_i(t)dt = 0 \quad i = 1,2,3\cdots,n$$

则称此函数集为完备正交函数集。

例如：

三角函数集 {1，cos ($n\Omega t$)，sin ($n\Omega t$)，n=1,2,···}

虚指数函数集{$e^{jn\Omega t}$，n=0，±1，±2，···}

是两组典型的在区间(t_0，t_0+T)($T=2\pi/\Omega$)上的完备正交函数集。

三、信号的正交分解

设有n个函数$\varphi_1(t)$，$\varphi_2(t)$，…，$\varphi_n(t)$在区间(t_1, t_2)构成一个正交函数空间。将任一函数$f(t)$用这n个正交函数的线性组合来近似，可表示为:

$$f(t) \approx C_1\varphi_1 + C_2\varphi_2 + \cdots + C_n\varphi_n$$

如何选择各系数C_j使$f(t)$与近似函数之间的误差在区间(t_1, t_2)内为最小？

通常使误差的方差均值(称为均方误差)最小。

均方误差为:

$$\overline{\varepsilon^2} = \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2}\left[f(t) - \sum_{j=1}^{n} C_j\varphi_j(t)\right]^2 dt$$

$$\overline{\varepsilon^2} = \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2}\left[f(t) - \sum_{j=1}^{n} C_j\varphi_j(t)\right]^2 dt$$

为使上式最小， $\frac{\partial \overline{\varepsilon^2}}{\partial C_i} = \frac{\partial}{\partial C_i}\int_{t_1}^{t_2}\left[f(t)-\sum_{j=1}^{n}C_j\varphi_j(t)\right]^2 dt = 0$

展开上式中的被积函数，并求导。上式中只有两项不为0，写为

$$\frac{\partial}{\partial C_i}\int_{t_1}^{t_2}\left[-2C_i f(t)\varphi_i(t) + C_i^2\varphi_i^2(t)\right]dt = 0$$

即： $-2\int_{t_1}^{t_2} f(t)\varphi_i(t)\,dt + 2C_i\int_{t_1}^{t_2}\varphi_i^2(t)\,dt = 0$

所以系数

$$C_i = \frac{\int_{t_1}^{t_2} f(t)\varphi_i(t)\,dt}{\int_{t_1}^{t_2}\varphi_i^2(t)\,dt} = \frac{1}{K_i}\int_{t_1}^{t_2} f(t)\varphi_i(t)\,dt$$

代入，得最小均方误差：$C_i = \dfrac{\int_{t_1}^{t_2} f(t)\varphi_i(t)\,dt}{\int_{t_1}^{t_2} \varphi_i^2(t)\,dt} = \dfrac{1}{K_i}\int_{t_1}^{t_2} f(t)\varphi_i(t)\,dt$

$$\overline{\varepsilon^2} = \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2}\left[f(t) - \sum_{j=1}^{n} C_j\varphi_j(t)\right]^2 dt$$

$$= \frac{1}{t_2 - t_1}\left[\int_{t_1}^{t_2} f^2(t)\,dt + \sum_{j=1}^{n} C_j^2 \int_{t_1}^{t_2}\varphi_j^2(t)\,dt - 2\sum_{j=1}^{n} C_j \int_{t_1}^{t_2} f(t)\varphi_j(t)\,dt\right]$$

$$= \frac{1}{t_2 - t_1}\left[\int_{t_1}^{t_2} f^2(t)\,dt + \sum_{j=1}^{n} C_j^2 K_j - 2\sum_{j=1}^{n} C_j^2 K_j\right]$$

$$= \frac{1}{t_2 - t_1}\left[\int_{t_1}^{t_2} f^2(t)\,dt - \sum_{j=1}^{n} C_j^2 K_j\right] \geq 0$$

$$\overline{\varepsilon^2} = \frac{1}{t_2 - t_1}\left[\int_{t_1}^{t_2} f^2(t)\,dt - \sum_{j=1}^{n} C_j^2 K_j\right] \geq 0$$

在用正交函数去近似$f(t)$时，所取的项数越多，即n越大，则均方误差越小。当$n\to\infty$时（为完备正交函数集），均方误差为零。此时有

$$\int_{t_1}^{t_2} f^2(t)\,dt = \sum_{j=1}^{\infty} C_j^2 K_j$$

上式称为(Parseval)帕斯瓦尔公式，表明：在区间(t_1,t_2) 上$f(t)$所含能量恒等于$f(t)$在完备正交函数集中分解的各正交分量能量之和。

小结

1、函数$f(t)$可分解为无穷多项正交函数之和：

$$f(t)=\sum_{i=1}^{\infty}C_i\varphi_i(t)$$

$$C_i=\frac{1}{K_i}\int_{t_1}^{t_2}f(t)\varphi_i(t)dt \qquad K_i=\int_{t_1}^{t_2}\varphi_i^2(t)dt$$

当$\varphi_i(t)$为复函数时：

$$C_i=\frac{1}{K_i}\int_{t_1}^{t_2}f(t)\varphi_i^*(t)dt \qquad K_i=\int_{t_1}^{t_2}|\varphi_i(t)|^2dt$$

2、帕斯瓦尔能量公式： $$\int_{t_1}^{t_2}f^2(t)dt=\sum_{i=1}^{\infty}C_i^2K_i$$

§4.2 周期信号的傅里叶级数

傅里叶级数的三角形式

波形的对称性与谐波特性

傅里叶级数的指数形式

周期信号的功率——Parseval等式

一、傅里叶级数的三角形式

1. 三角函数集

{1，cos ($n\Omega t$)，sin ($n\Omega t$)，n=1，2，…}

在一个周期内是一个完备的正交函数集。

由积分可知

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} cos(n\Omega t)\cdot sin(n\Omega t)dt = 0$$

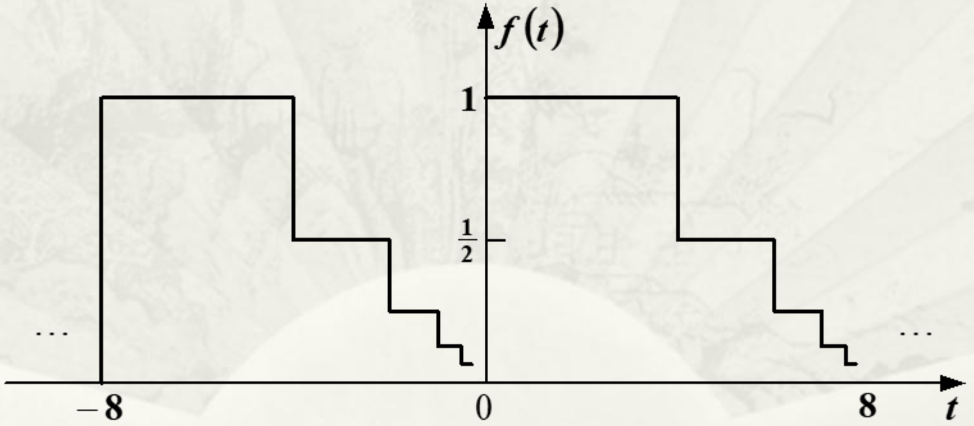
$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} cos(n\Omega t)\cdot cos(m\Omega t)dt = \begin{cases} \frac{T}{2} & m = n \\ 0 & m \neq n \end{cases}$$

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} sin(n\Omega t)\cdot sin(m\Omega t)dt = \begin{cases} \frac{T}{2} & m = n \\ 0 & m \neq n \end{cases}$$

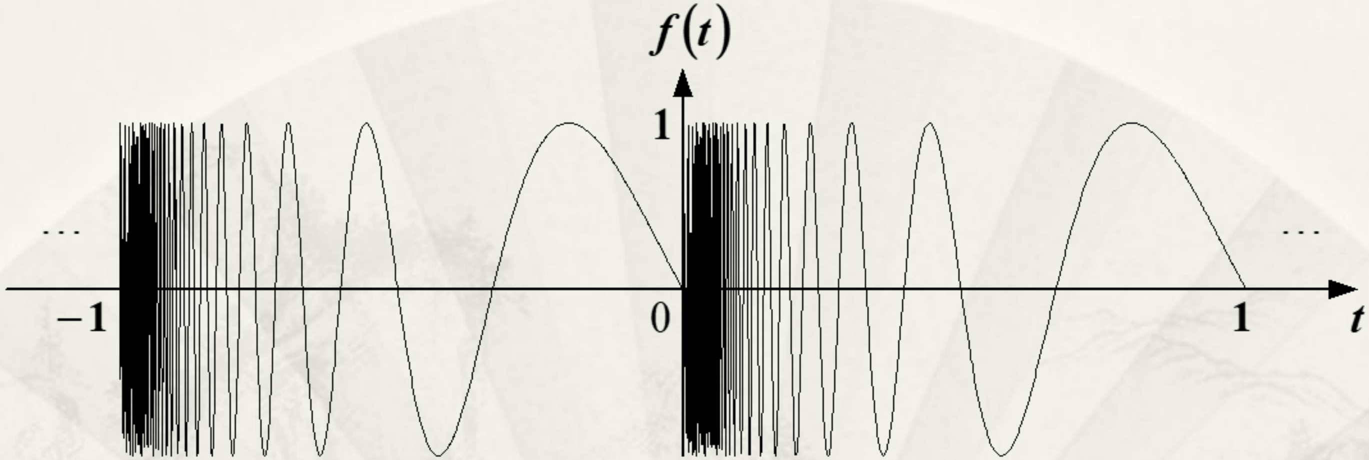
2．级数形式

设周期信号$f(t)$，其周期为T，角频率$\Omega=2\pi/T$，当满足**狄里赫利(Dirichlet)条件**时，它可进行三角形式的级数分解。

条件1：在一周期内，如果有间断点存在，则间断点的数目应是有限个。

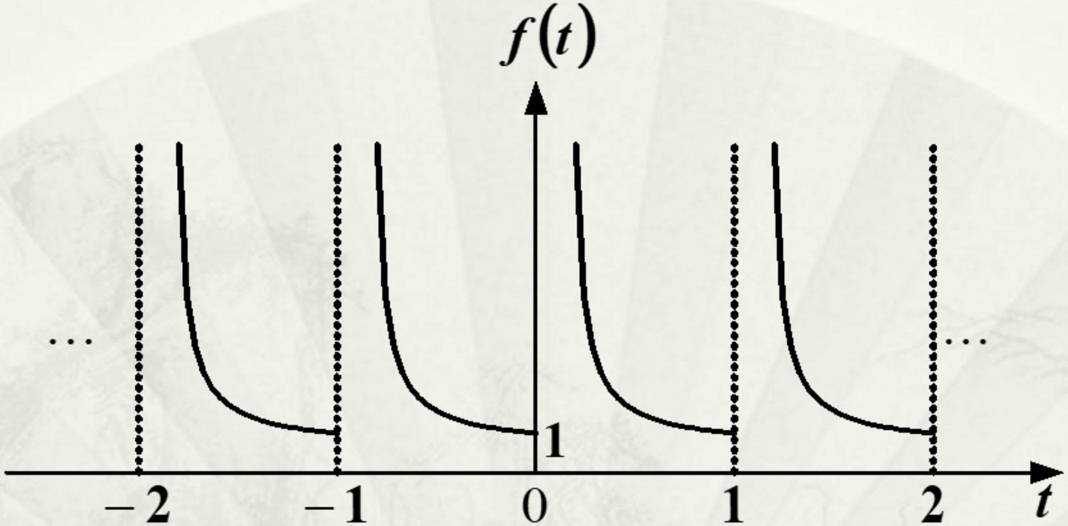


条件2：在一周期内，极大值和极小值的数目应是有限个。



$$f(t) = sin\left(\frac{2\pi}{t}\right) \quad (0 < t < 1)$$

条件3：在一周期内，信号绝对可积。



$$f(t) = \frac{1}{t} \ (0 < t < 1)$$

2. 级数形式

设周期信号$f(t)$，其周期为T，角频率$\Omega=2\pi/T$，当满足狄里赫利(Dirichlet)条件时，它可分解为如下三角级数，称为$f(t)$的傅里叶级数

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n cos(n\Omega t)+\sum_{n=1}^{\infty}b_n sin(n\Omega t)$$

系数a_n，b_n称为傅里叶系数

$$a_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)cos(n\Omega t)dt \qquad b_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)sin(n\Omega t)dt$$

可见，a_n是n的偶函数，b_n是n的奇函数。

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n cos(n\Omega t)+\sum_{n=1}^{\infty}b_n sin(n\Omega t)$$

$$a_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)cos(n\Omega t)dt \qquad b_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)sin(n\Omega t)dt$$

傅里叶系数a_n，b_n的求解根据：

$$f(t)=\sum_{i=1}^{\infty}C_i\phi_i(t) \qquad C_i=\frac{\int_{t_1}^{t_2}f(t)\phi_i^*\,dt}{\int_{t_1}^{t_2}\phi_i(t)\phi_i^*(t)dt}$$

$$\int_{t_1}^{t_2}\phi_i(t)\phi_j^*(t)dt=\begin{cases}0, & i\neq j\\ K_i\neq 0, & i=j\end{cases}$$

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n cos(n\Omega t)+\sum_{n=1}^{\infty}b_n sin(n\Omega t)$$

将上式同频率项合并，可写为:

$$f(t)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}A_n cos(n\Omega t+\varphi_n)$$

式中， $A_0=a_0 \quad A_n=\sqrt{a_n^2+b_n^2} \quad \varphi_n=-arctan\frac{b_n}{a_n}$

$$a_n=A_n cos\varphi_n,\ b_n=-A_n sin\varphi_n \quad n=1,2,\cdots$$

可见：A_n是n的偶函数， φ_n是n的奇函数。

$$f(t)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}A_n cos(n\Omega t+\varphi_n)$$

上式表明，周期信号可分解为直流和许多余弦分量。

- $\frac{A_0}{2}$为直流分量
- $A_1 cos(\Omega t+\varphi_1)$称为基波或一次谐波，其角频率与原周期信号相同
- $A_2 cos(2\Omega t+\varphi_2)$ 称为二次谐波，其频率是基波的2倍

一般而言，$A_n cos(n\Omega t+\varphi_n)$称为n次谐波。

二、波形的对称性与谐波特性

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)cos(n\Omega t)dt \qquad b_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)sin(n\Omega t)dt$$

1 . $f(t)$为偶函数——对称纵坐标

$b_n=0$，展开为余弦级数。

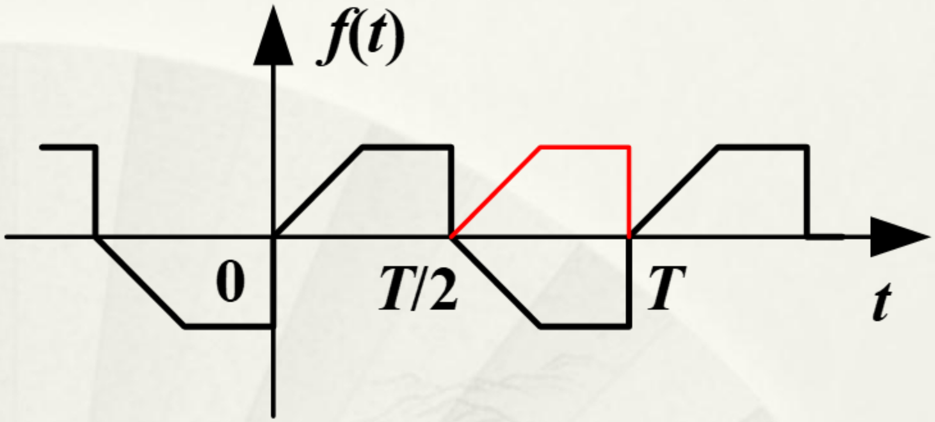
2 . $f(t)$为奇函数——对称于原点

$a_n=0$，展开为正弦级数。

3 . $f(t)$为奇谐函数——$f(t) = -f(t \pm T/2)$

此时，其傅里叶级数中只含奇次谐波分量，而不含偶次谐波分量即

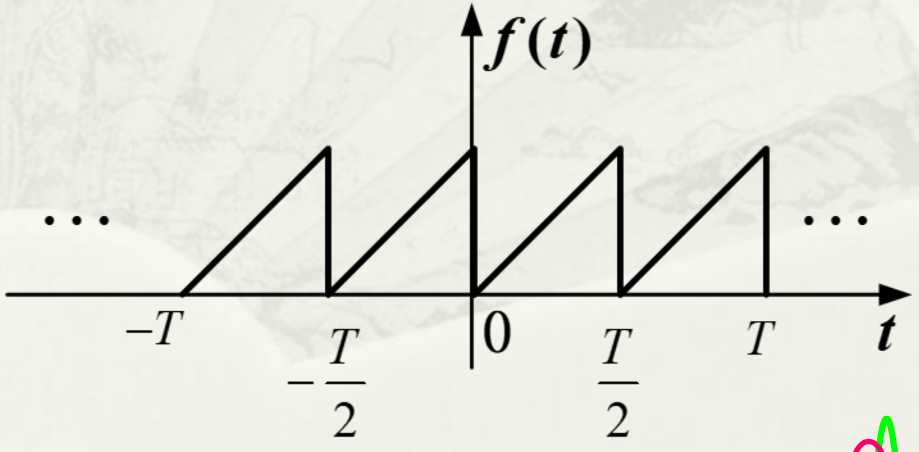
$$a_0=a_2=\cdots=b_2=b_4=\cdots=0$$



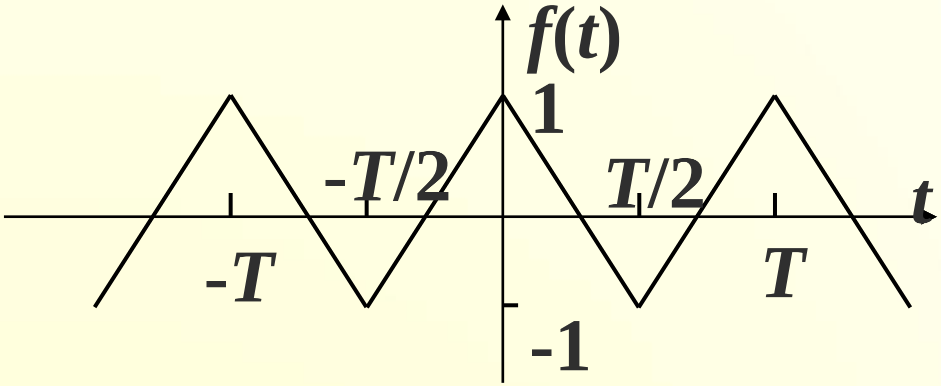
4. $f(t)$为偶谐函数——$f(t) = f(t \pm T/2)$

此时，其傅里叶级数中只含偶次谐波分量，而不含奇次谐波分量即:

$$a_1=a_3=\cdots=b_1=b_3=\cdots=0$$



周期信号如图所示，对其傅里叶级数所含有频率分量的说法，正确的是( )



A 该信号既是偶函数也是奇谐函数

B 该信号所含有的频率分量为奇次余弦波

C 该信号所含有的频率分量为偶次余弦波

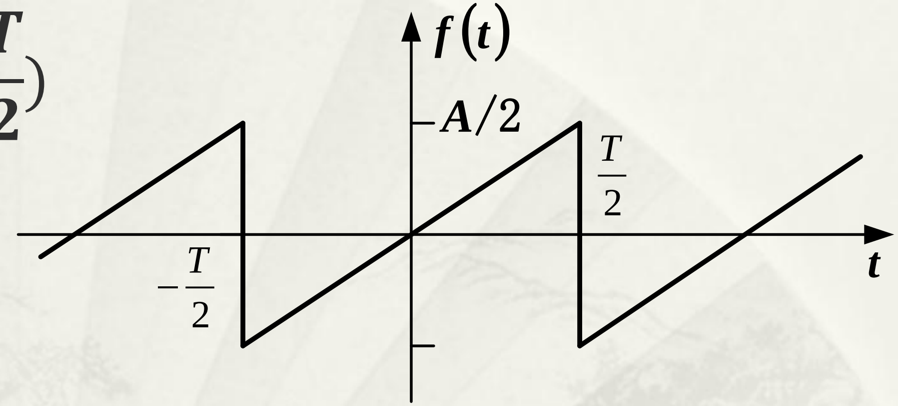
D 该信号既是偶函数也是偶谐函数

傅里叶级数展开举例

例： 求周期锯齿波的三角函数形式的傅里叶级数展开式。

解：

$$f(t) = \frac{A}{T}t \quad (-\frac{T}{2} < t < \frac{T}{2})$$



$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \frac{A}{T} t\cos(n\Omega t)dt = 0$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \frac{A}{T} t\sin(n\Omega t)dt = -\frac{A}{n\pi}(-1)^n$$

直流　基波　二次谐波

$$\therefore f(t) = 0 + \frac{A}{\pi}\sin(\Omega t) - \frac{A}{2\pi}\sin(2\Omega t) + \cdots$$

三、傅里叶级数的指数形式

三角形式的傅里叶级数，含义比较明确，但运算常感不便，因而经常采用指数形式的傅里叶级数。

虚指数函数集 $\{e^{jn\Omega t}, n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots\}$

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\Omega t}$$

系数 F_n 称为复傅里叶系数

$$F_n = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-jn\Omega t} dt$$

利用 $\cos x = (e^{jx} + e^{-jx})/2$ 可从三角形式推出。

指数形式傅里叶级数的推导

$$f(t)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}A_n cos(n\Omega t+\varphi_n)$$

$$=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{A_n}{2}[e^{j(n\Omega t+\varphi_n)}+e^{-j(n\Omega t+\varphi_n)}]$$

$$=\frac{A_0}{2}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}A_n e^{j\varphi_n}e^{jn\Omega t}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}A_n e^{-j\varphi_n}e^{-jn\Omega t}$$

上式中第三项的n用–n代换，$A_{-n}=A_n, \varphi_{-n}=-\varphi_n$ 则上式写为

$$f(t)=\frac{A_0}{2}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}A_n e^{j\varphi_n}e^{jn\Omega t}+\frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{-1}A_n e^{j\varphi_n}e^{jn\Omega t}$$

指数形式傅里叶级数的推导

$$f(t)=\frac{A_0}{2}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}A_n e^{j\varphi_n}e^{jn\Omega t}+\frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{-1}A_n e^{j\varphi_n}e^{jn\Omega t}$$

令 $A_0=A_0e^{j\varphi_0}e^{j0\Omega t}$, $\varphi_0=0$

则： $f(t)=\frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}A_n e^{j\varphi_n}e^{jn\Omega t}$

令复数 $\frac{1}{2}A_n e^{j\varphi_n}=|F_n|e^{j\varphi_n}=F_n$

那么： $f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n e^{jn\Omega t}$

指数形式傅里叶级数的推导

$$F_n=\frac{1}{2}A_ne^{j\varphi_n}=\frac{1}{2}(A_n cos\varphi_n+jA_n sin\varphi_n)=\frac{1}{2}(a_n-jb_n)$$

$$=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)cos(n\Omega t)dt-j\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)sin(n\Omega t)dt$$

$$=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)e^{-jn\Omega t}dt$$

指数形式的傅里叶级数的展开式为:

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_ne^{jn\Omega t}\qquad F_n=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)e^{-jn\Omega t}dt$$

$$n=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

指数形式傅里叶级数

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n e^{jn\Omega t} \qquad F_n=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)e^{-jn\Omega t}dt$$

$$n=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

表明：任意周期信号$f(t)$可分解为许多不同频率的虚指数信号之和，$F_0=A_0/2$ 为直流分量。

傅里叶系数之间的关系

$$F_n = |F_n|e^{j\varphi_n} = \frac{1}{2}A_n e^{j\varphi_n} = \frac{1}{2}(a_n - jb_n)$$

$$|F_n| = \frac{1}{2}A_n = \frac{1}{2}\sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

$$a_n = A_n cos\varphi_n \qquad b_n = -A_n sin\varphi_n$$

$$\varphi_n = arctan\left(-\frac{b_n}{a_n}\right)$$

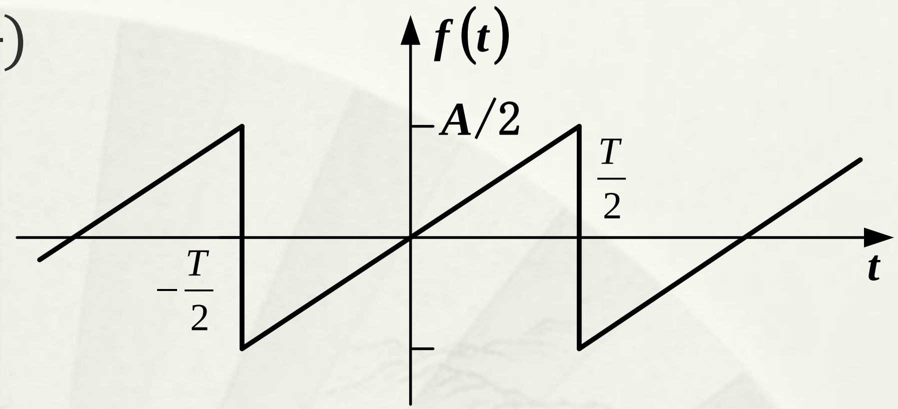
n的偶函数： $a_n\,, A_n\,, |F_n|$

n的奇函数： $b_n\,, \varphi_n$

例：求周期锯齿波的指数形式的傅里叶级数展开式。

解：

$$f(t)=\frac{A}{T}t\quad\left(-\frac{T}{2}<t<\frac{T}{2}\right)$$



$$F_n=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)e^{-jn\Omega t}dt$$

$$=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\frac{A}{T}te^{-jn\Omega t}dt$$

$$=j\frac{A}{2n\pi}cosn\pi$$

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}j\frac{A}{2n\pi}cosn\pi e^{jn\Omega t}$$

三角形式：$f(t)=0+\frac{A}{\pi}sin(\Omega t)-\frac{A}{2\pi}sin(2\Omega t)+\cdots$

四、周期信号的功率——Parseval等式

周期信号一般是功率信号，其平均功率为

$$\frac{1}{T}\int_0^T f^2(t)dt = \boxed{\left(\frac{A_0}{2}\right)^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}A_n^2} = \boxed{\sum_{n=-\infty}^{\infty}|F_n|^2}$$

$$\Uparrow \qquad\qquad \Uparrow$$

$$f(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n cos(n\Omega t + \varphi_n) \qquad f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\Omega t}$$

直流和n次谐波分量在1Ω电阻上消耗的平均功率之和。

$n\geq 0$时，$|F_n|=A_n/2$。

总平均功率=直流、各次谐波的平均功率之和