§2.3 卷积积分

信号的时域分解

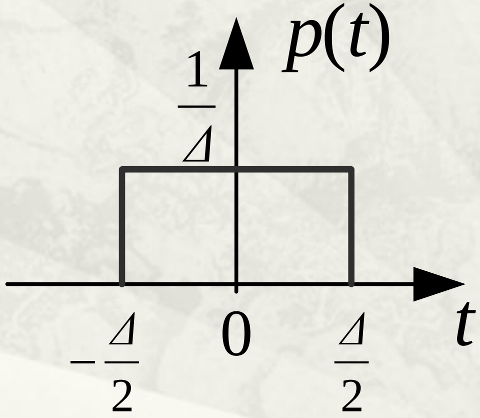
卷积积分

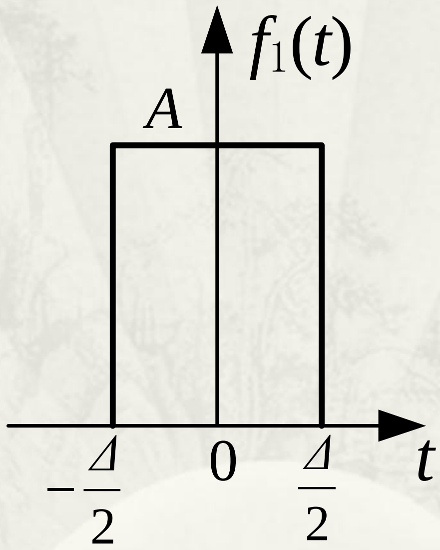
卷积的图解法

一、信号的时域分解与卷积积分

1．信号的时域分解

- 预备知识



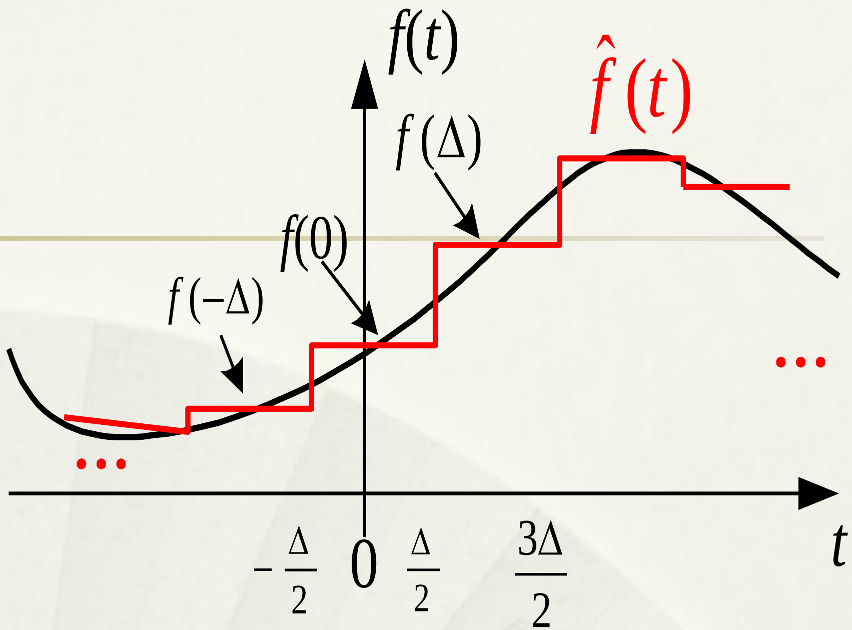


问 $f_1(t) = ?\ p(t)$

$$\boxed{f_1(t) = A\Delta\ p(t)}$$

$$f_1(t-t_0)?$$

•任意信号分解

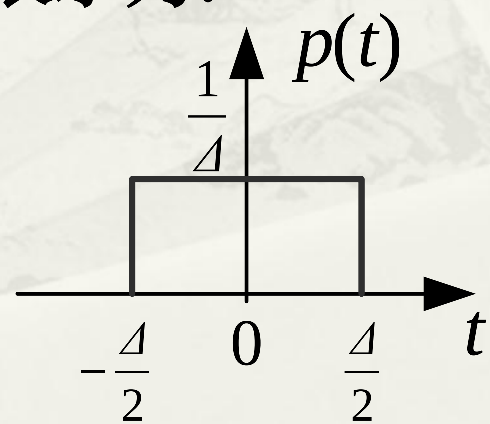


“**0**”号脉冲高度***f*(0)** ,宽度为***Δ***，
用***p*(*t*)**表示为：***f*(0) *Δ* *p*(*t*)**

“**1**”号脉冲高度***f*(*Δ*)** ,宽度为***Δ*** ，
用***p*(*t* –*Δ*)**表示为：***f*(*Δ*) *Δ* *p*(*t* –*Δ*)**

“**–1**”号脉冲高度***f*(–*Δ*)**、宽度为***Δ***，用***p*(*t* +*Δ*)**表示为:
***f* (–*Δ*) *Δ* *p*(*t* +*Δ*)**

$$\hat{f}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n\Delta)\Delta p(t-n\Delta)$$



$$\lim_{\Delta\to 0}\hat{f}(t) = f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\delta(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

2．任意信号作用下的零状态响应

根据$h(t)$的定义：　$\delta(t) \Rightarrow h(t)$

由时不变性：　$\delta(t-\tau) \Rightarrow h(t-\tau)$

由齐次性：　$f(\tau)\delta(t-\tau) \Rightarrow f(\tau)\, h(t-\tau)$

由叠加性：$\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\delta(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)h(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau$

$\parallel$ 　　　　　$\parallel$

$f(t)$ 　　　　　$y_{zs}(t)$

$$\boxed{y_{zs}(t)=\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)h(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau}$$

卷积积分运算

3．卷积积分的定义

已知定义在区间（$-\infty$，∞）上的两个函数$f_1(t)$和$f_2(t)$，则定义积分

$$f(t)=\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau$$

为$f_1(t)$与$f_2(t)$的卷积积分，简称卷积；记为

$$f(t)=f_1(t)*f_2(t)$$

注意：积分是在虚设的变量τ下进行的，τ为积分变量，t为参变量。结果仍为t的函数。

$$\boxed{y_{zs}(t)=\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)h(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau}$$

用定义计算卷积举例

例： $f(t)=e^{t}\ (-\infty<t<\infty), h(t)=\left(6e^{-2t}-1\right)\varepsilon(t)$，求$y_{zs}(t)$。

解： $y_{zs}(t)\ =\ f\ (t)\ *\ \ h(t)$

$$=\int_{-\infty}^{\infty} e^{\tau}\left[6e^{-2(t-\tau)}-1\right]\varepsilon(t-\tau)\,d\tau$$

当$t<\tau$，即$\tau>t$时，$\varepsilon(t-\tau)=0$，当$\tau<t$时，$\varepsilon(t-\tau)=1$

$$y_{zs}(t)=\int_{-\infty}^{t} e^{\tau}\left[6e^{-2(t-\tau)}-1\right]d\tau=\int_{-\infty}^{t}\left(6e^{-2t}e^{3\tau}-e^{\tau}\right)d\tau$$

$$=6e^{-2t}\int_{-\infty}^{t} e^{3\tau}d\tau-\int_{-\infty}^{t} e^{\tau}d\tau$$

$$=2e^{-2t}e^{3\tau}|_{-\infty}^{t}-e^{\tau}|_{-\infty}^{t}=e^{t}$$

二、卷积的图解法

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau$$

卷积过程可分解为四步：

（1）换元： t 换为τ→得 $f_1(\tau)$， $f_2(\tau)$

（2）反转平移：由$f_2(\tau)$反转→ $f_2(-\tau)$平移t → $f_2(t-\tau)$

（3）乘积： $f_1(\tau) f_2(t-\tau)$

（4）积分： τ从 $-\infty$到∞对乘积项积分。

注意：t为参变量。

图解法计算卷积举例

例1： 求$y_{zs}(t)= f(t) * h(t)$ 。

解： 首先换元

然后$f(\tau)$反折 ➡ $f(-\tau)$平移t

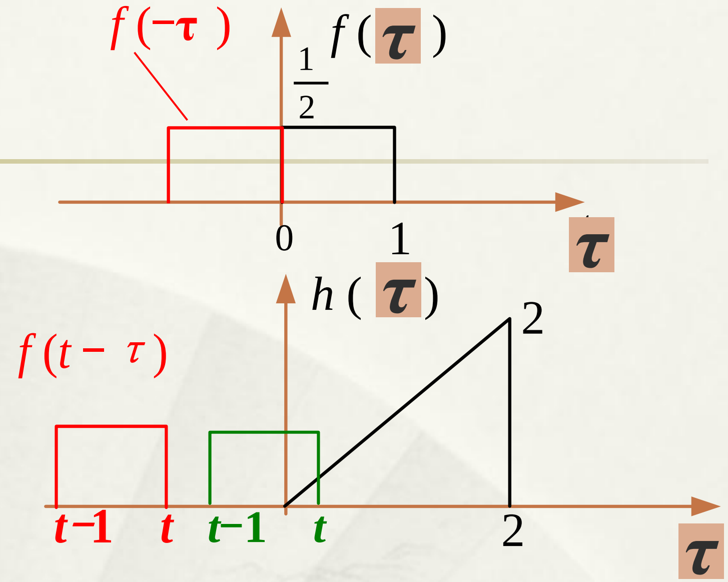
➡ $f(t-\tau)$

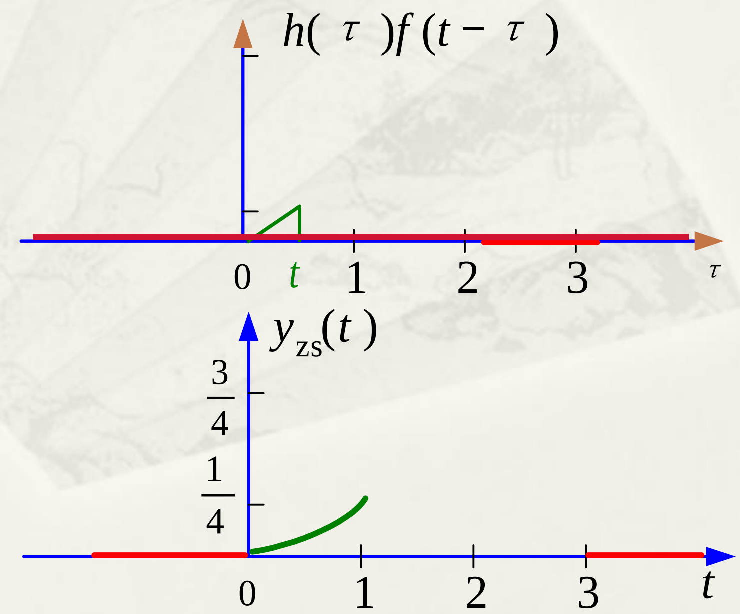
(1) $t < 0$时，$f(t-\tau)$向左移

$f(t-\tau)\,h(\tau) = 0$，故 $y_{zs}(t) = 0$

(2) $0 \le t \le 1$ 时，$f(t-\tau)$向右移

$$y_{zs}(t) = \int_0^t \tau \cdot \frac{1}{2}\,\mathrm{d}\tau = \frac{1}{4}t^2$$





图解法计算卷积举例

(3) $1 \le t \le 2$时

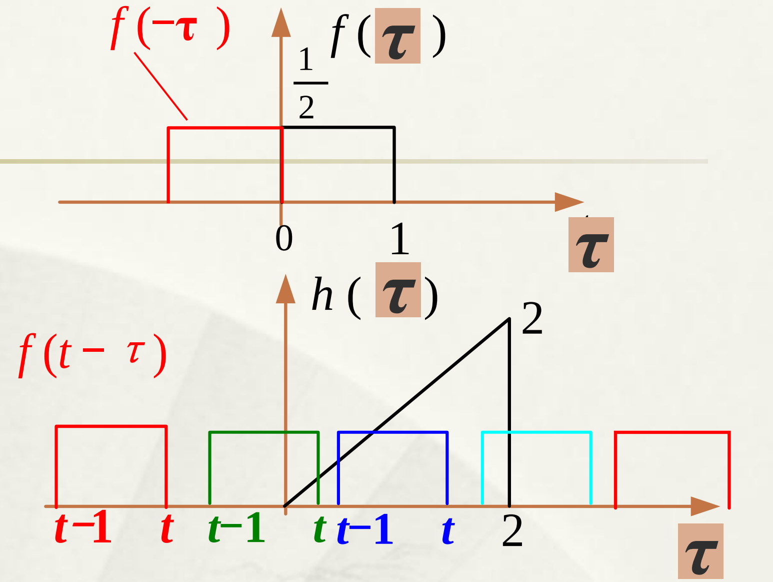
$$y_{zs}(t) = \int_{t-1}^{t} \tau \cdot \frac{1}{2} \mathrm{d}\tau = \frac{1}{2}t - \frac{1}{4}$$

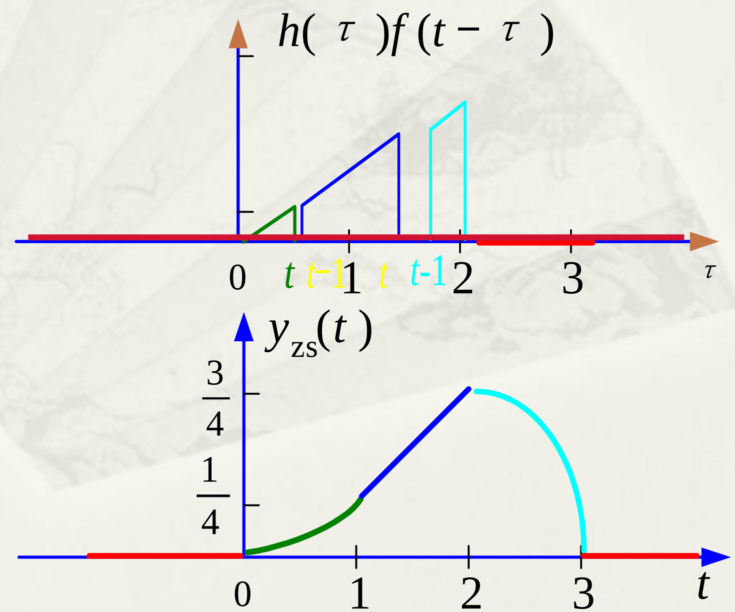
(4) $2 \le t \le 3$ 时

$$y_{zs}(t) = \int_{t-1}^{2} \tau \cdot \frac{1}{2} \mathrm{d}\tau = -\frac{1}{4}t^2 + \frac{1}{2}t + \frac{3}{4}$$

(5) $3 \le t$ 时

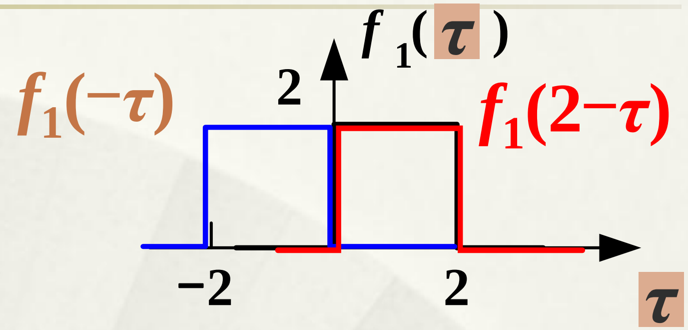
$f(t-\tau)\,h(\tau) = 0$， 故 $y_{zs}(t) = 0$



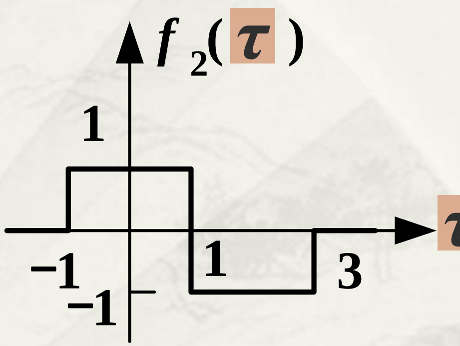


图解法一般比较繁琐，确定积分的上下限是关键。但若只求某一时刻卷积值时还是比较方便的。

例2: $f_1(t)$、 $f_2(t)$如图所示，已知$f(t) = f_2(t) * f_1(t)$，求$f(2) = ?$



解: $$f(2)=\int_{-\infty}^{\infty} f_2(\tau)\, f_1(2-\tau)\, d\tau$$



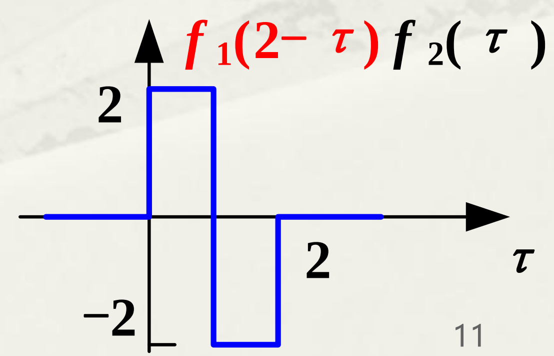
（1）换元

（2）$f_1(\tau)$反转得$f_1(-\tau)$

（3）$f_1(-\tau)$右移2得$f_1(2-\tau)$

（4）$f_1(2-\tau)$与$f_2(\tau)$相乘

（5）积分，得 $f(2) = 0$（面积为0）



单选题 1分

设置

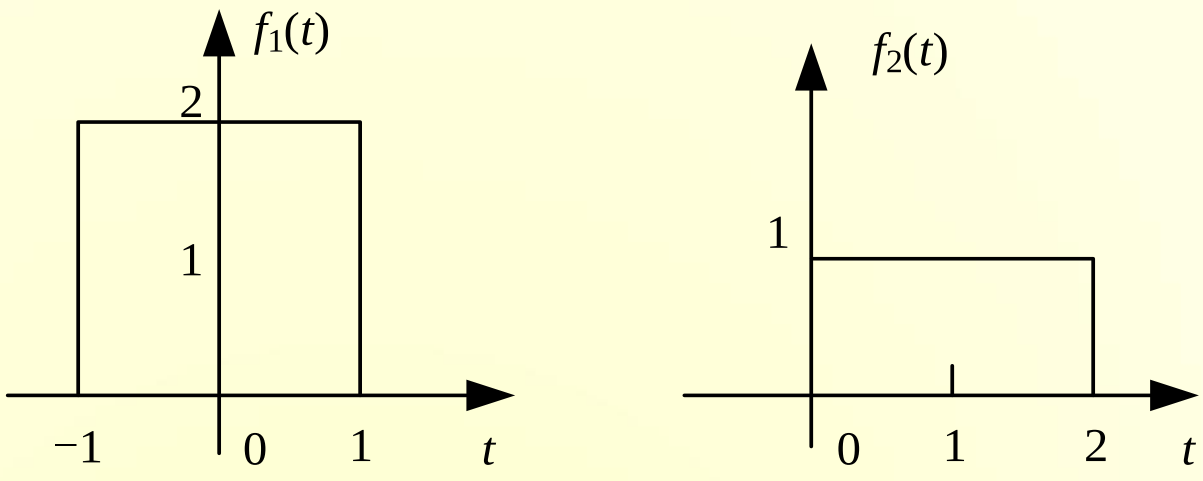
如图所示信号，设 $y(t)=f_1(t)*f_2(t)$，则 $y(0)=(\quad)$

A 1

B 2

C 3

D 4



提交

§2.4　卷积积分的性质

卷积积分是一种数学运算，它有许多重要的性质（或运算规则），灵活地运用它们能简化卷积运算。

卷积代数运算

与冲激函数或阶跃函数的卷积

微分积分性质

卷积的时移特性

相关函数（不要求掌握）

一、卷积代数运算

- 交换律
- 分配律
- 结合律

1. 交换律

$$f_1(t)*f_2(t)=f_2(t)*f_1(t)$$

证明： $f_1(t)*f_2(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(\tau)\cdot f_2(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau$

令 $t-\tau=\lambda$， 则 $\tau:\int_{-\infty}^{+\infty}\to\lambda:\int_{+\infty}^{-\infty}$ ，$\mathrm{d}\tau=-\mathrm{d}\lambda$

$\therefore\ f_1(t)*f_2(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_2(\lambda)\cdot f_1(t-\lambda)\,\mathrm{d}\lambda=f_2(t)*f_1(t)$

- 卷积结果与交换两函数的次序无关。
- 一般选比较简单函数进行反转和平移。

一、卷积代数运算

- 交换律
- 分配律
- 结合律

2．分配律-系统并联运算

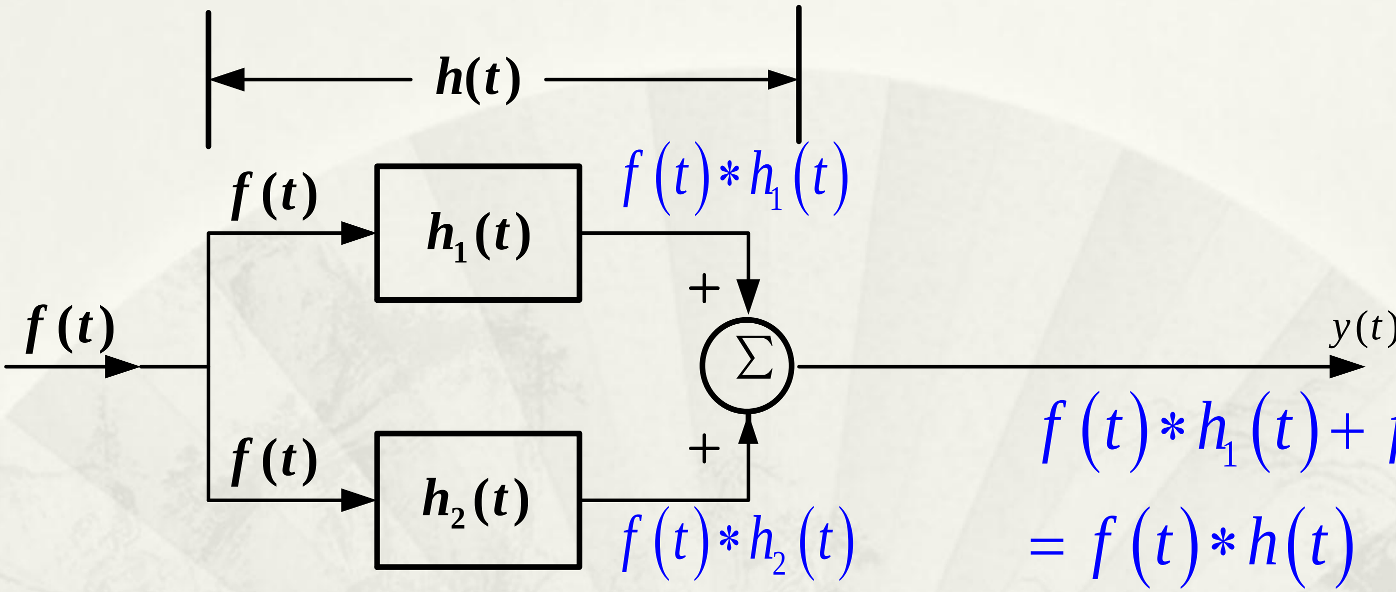
$$f_1(t)*[f_2(t)+f_3(t)]=f_1(t)*f_2(t)+f_1(t)*f_3(t)$$

3．结合律-系统级联运算

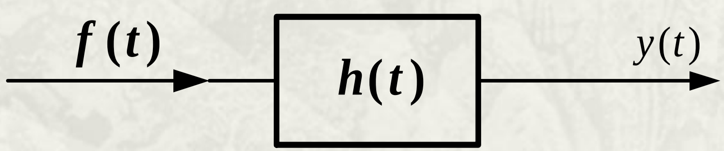
$$[f(t)*f_1(t)]*f_2(t)=f(t)*[f_1(t)*f_2(t)]$$

由于结合律的证明过程中交换了二重积分的次序，所以结合律成立的条件是必须同时满足函数两两相卷积都存在。 比如：$e^{-t}\varepsilon(t)*e^{-t}$其卷积不存在

系统并联



$$f(t)*h_1(t)+f(t)*h_2(t)$$
$$=f(t)*h(t)$$

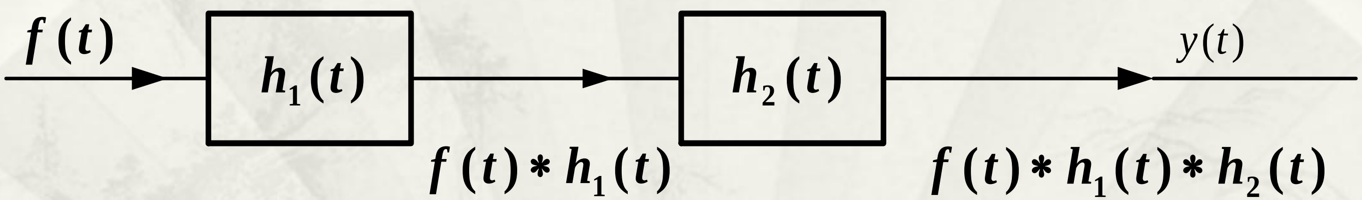


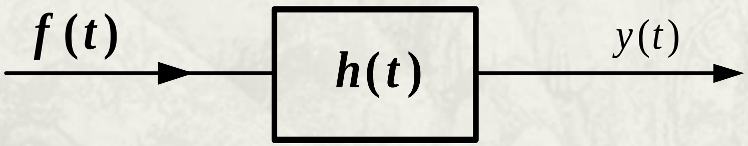
$$h(t)=h_1(t)+h_2(t)$$

结论： 子系统并联时，总系统的冲激响应等于各子系统冲激响应之和。

系统级联

$$f(t) * h_1(t) * h_2(t) = f(t) * [h_1(t) * h_2(t)]$$





$$h(t) = h_1(t) * h_2(t)$$

结论：子系统级联时，总的冲激响应等于子系统冲激响应的卷积。

二、与冲激函数或阶跃函数的卷积

1. $f(t)*\delta(t)=\delta(t)*f(t)=f(t)$　　$f(t)*\delta(t-t_0)=f(t-t_0)$

证明：$\delta(t)*f(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\tau)f(t-\tau)\mathrm{d}\tau=f(t)$

2. $f(t)*\delta'(t)=f'(t)$　　$f(t)*\delta^{(n)}(t)=f^{(n)}(t)$

证明：$\delta'(t)*f(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\delta'(\tau)f(t-\tau)\mathrm{d}\tau=f'(t)$

3. $f(t)*\varepsilon(t)=\int_{-\infty}^{t}f(\tau)\mathrm{d}\tau$

证明：$f(t)*\varepsilon(t)=\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)\varepsilon(t-\tau)\mathrm{d}\tau=\int_{-\infty}^{t}f(\tau)\mathrm{d}\tau$

$$\boxed{\varepsilon(t)*\varepsilon(t)=t\varepsilon(t)\quad t\varepsilon(t)*\varepsilon(t)=\frac{1}{2}t^2\varepsilon(t)}$$

单选题 1分

设置

下列等式不成立的是(   )

A $f(t)\delta'(t)=f(0)\delta'(t)$

B $f(t)\delta(t)=f(0)\delta(t)$

C $f(t)*\delta'(t)=f'(t)$

D $f(t)*\delta(t)=f(t)$

提交

单选题 1分

设置

计算 $\delta'(t) * e^{-t} = (\quad)$

A 0

B e^{-t}

C $-e^{-t}$

D 1

提交

三、卷积的微积分性质

1. $$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}[f_1(t) * f_2(t)] = \frac{\mathrm{d}^n f_1(t)}{\mathrm{d}t^n} * f_2(t) = f_1(t) * \frac{\mathrm{d}^n f_2(t)}{\mathrm{d}t^n}$$

证明：上式= $\delta^{(n)}(t) * [f_1(t) * f_2(t)]$

$$= [\delta^{(n)}(t) * f_1(t)] * f_2(t) = f_1^{(n)}(t) * f_2(t)$$

2. $$\int_{-\infty}^{t}[f_1(\tau) * f_2(\tau)]\mathrm{d}\tau = [\int_{-\infty}^{t} f_1(\tau)\mathrm{d}\tau] * f_2(t) = f_1(t) * [\int_{-\infty}^{t} f_2(\tau)\mathrm{d}\tau]$$

证明：上式=$\varepsilon(t) * [f_1(t) * f_2(t)]$

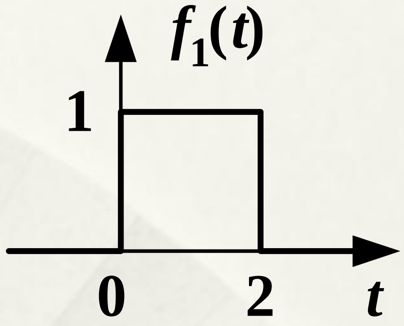
$$= [\varepsilon(t) * f_1(t)] * f_2(t) = f_1^{(-1)}(t) * f_2(t)$$

3. 在$f_1(-\infty) = f_2(-\infty) = 0$的前提下，

$$f_1(t) * f_2(t) = f_1'(t) * f_2^{(-1)}(t)$$

卷积性质举例

例1：$f_1(t)$ 如图, $f_2(t) = e^{-t}\varepsilon(t)$，求$f_1(t)* f_2(t)$



解：$f_1(t) * f_2(t) = f_1'(t) * f_2^{(-1)}(t)$

$f_1'(t) = \delta(t) - \delta(t-2)$

$$f_2^{(-1)}(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{-\tau}\varepsilon(\tau)d\tau = \left[\int_0^t e^{-\tau}d\tau\right]\varepsilon(t)$$ （非0的隐含条件：$t>0$）

$$= -e^{-\tau}\Big|_0^t \cdot \varepsilon(t) = (1-e^{-t})\varepsilon(t)$$

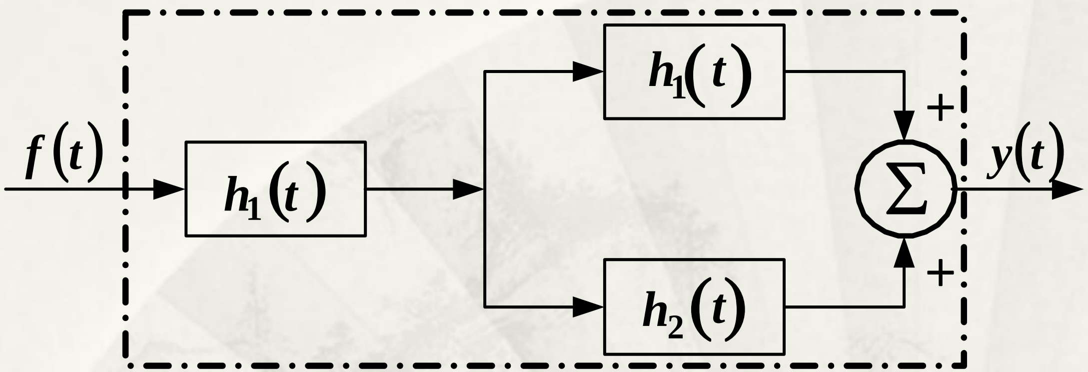
$$f_1(t) * f_2(t) = (1-e^{-t})\varepsilon(t) - [1-e^{-(t-2)}]\varepsilon(t-2)$$

注意：当 $f_1(t)=1$， $f_2(t) = e^{-t}\varepsilon(t)$，

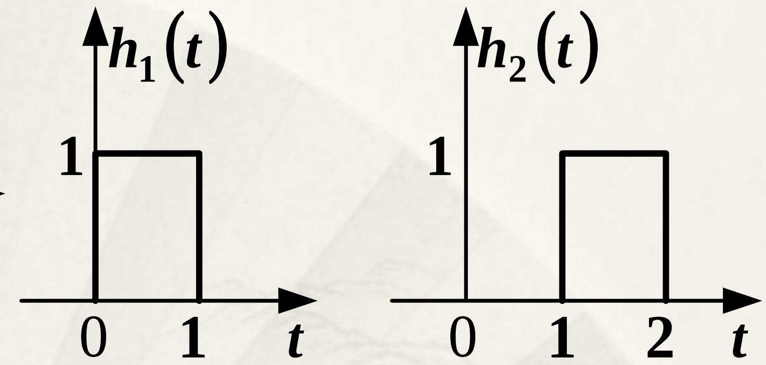
套用 $f_1(t) * f_2(t) = f_1'(t) * f_2^{(-1)}(t) = 0 * f_2^{(-1)}(t) = 0$

显然是错误的。

例2: 图(a)系统由三个子系统构成，已知各子系统的冲激响应$h_1(t), h_2(t)$,如图(b)所示。求复合系统的冲激响应$h(t)$，并画出它的波形。



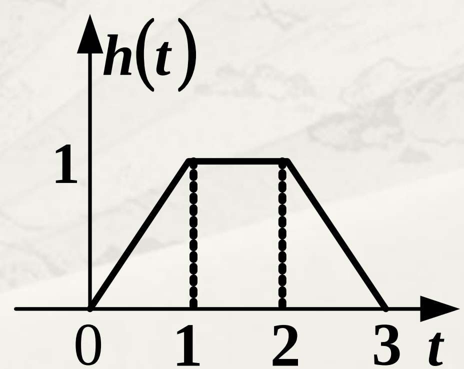
(a)复合系统



(b)子系统的冲激响应

解： $h(t) = h_1(t) * [h_1(t) + h_2(t)]$

其冲激响应如图(c)所示



(c)复合系统的冲激响应

四、卷积的时移特性

若 $f(t) = f_1(t) * f_2(t)$，

则 $f_1(t - t_1) * f_2(t - t_2) = f_1(t - t_1 - t_2) * f_2(t)$

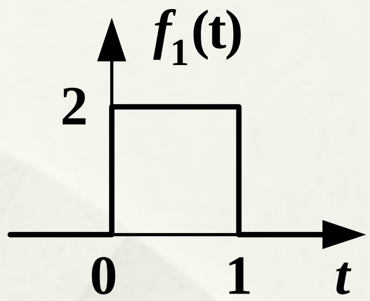
$$= f_1(t) * f_2(t - t_1 - t_2)$$

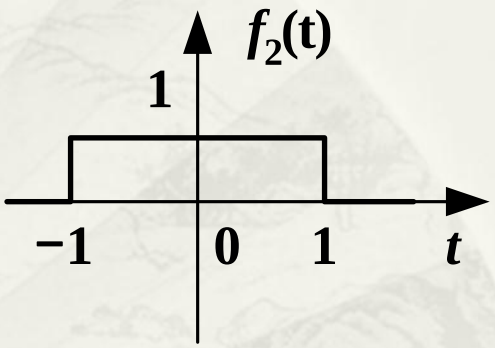
$$= f(t - t_1 - t_2)$$

例3： $f_1(t), f_2(t)$如图，求$f_1(t) * f_2(t)$

解： $f_1(t) = 2\varepsilon(t) - 2\varepsilon(t-1)$

$f_2(t) = \varepsilon(t+1) - \varepsilon(t-1)$





$f_1(t) * f_2(t)$

$= 2\,\varepsilon(t) * \varepsilon(t+1) - 2\,\varepsilon(t) * \varepsilon(t-1)$

$\quad - 2\varepsilon(t-1) * \varepsilon(t+1) + 2\varepsilon(t-1) * \varepsilon(t-1)$

由于$\varepsilon(t) * \varepsilon(t) = t\varepsilon(t)$

据时移特性，有

$f_1(t) * f_2(t) = 2\,(t+1)\,\varepsilon(t+1) - 2\,(t-1)\,\varepsilon(t-1)$

$\qquad - 2\,t\varepsilon(t) + 2\,(t-2)\,\varepsilon(t-2)$

单选题 1分

设置

计算 $f(t-\tau)*\delta(t+\tau)=$ （ ）

A $f(t-\tau)$

B $f(t)$

C $\delta(t)$

D $\delta(t+\tau)$

提交

单选题 1分

设置

以下关于卷积的公式不正确的是（ ）

A $f(t)*\varepsilon(t)=\int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau$

B $\dfrac{\mathrm{d}[f(t)*h(t)]}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}*\dfrac{\mathrm{d}h(t)}{\mathrm{d}t}$

C $\varepsilon(t)*\varepsilon(t)=t\,\varepsilon(t)$

D $e^{-at}\varepsilon(t)*e^{-at}\varepsilon(t)=te^{-at}\varepsilon(t)$

提交

单选题 1分

设置

计算 $f(t-t_1)*\delta'(t-t_2)$ = ( )

A $f(t-t_1-t_2)$

B $f'(t-t_1-t_2)$

C $f'(t-t_2)$

提交

求解卷积的方法可归纳为：

（1）利用定义式，直接进行积分。对于容易求积分的函数比较有效。如指数函数、多项式函数等。

（2）图解法。特别适用于求某时刻点上的卷积值。

（3）利用性质。比较灵活。

三者常常结合起来使用。

五、相关函数

相关函数是鉴别信号的有力工具，被广泛应用于雷达回波的识别，通信同步信号的识别等领域。

相关是一种与卷积类似的运算。与卷积不同的是没有一个函数的反转。

- 相关函数的定义
- 相关与卷积的关系
- 相关函数的图解

1. 实能量信号相关函数定义

实能量有限函数$f_1(t)$和$f_2(t)$的互相关函数:

$$R_{12}(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t)f_2(t-\tau)dt=\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t+\tau)f_2(t)dt$$

$$R_{21}(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty} f_2(t)f_1(t-\tau)dt=\int_{-\infty}^{\infty} f_2(t+\tau)f_1(t)dt$$

互相关是表示两个不同函数的相似性参数。

可证明，$R_{12}(\tau)=R_{21}(-\tau)$。

若$f_1(t)= f_2(t) = f(t)$，则得自相关函数:

$$R(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)f(t-\tau)dt=\int_{-\infty}^{\infty} f(t+\tau)f(t)dt$$

显然，$R(-\tau)= R(\tau)$偶函数。

2. 实功率信号相关函数定义

$f_1(t)$与$f_2(t)$是功率有限信号

相关函数：

$$R_{12}(\tau)=\lim_{T\to\infty}\left[\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_1(t)f_2(t-\tau)dt\right]$$

$$R_{21}(\tau)=\lim_{T\to\infty}\left[\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_2(t)f_1(t-\tau)dt\right]$$

自相关函数：

$$R(\tau)=\lim_{T\to\infty}\left[\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)f(t-\tau)dt\right]$$

例： 求周期余弦信号 $f(t)=E\cos(\omega_1 t)$ 的自相关函数。

解： 对此功率有限信号，由自相关函数的定义，有

$$R(\tau)=\lim_{T\to\infty}\left[\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)f(t-\tau)\mathrm{d}t\right]$$

$$=\lim_{T\to\infty}\frac{E^2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\cos(\omega_1 t)\cos\left[\omega_1(t-\tau)\right]\mathrm{d}t$$

$$=\lim_{T\to\infty}\frac{E^2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\cos(\omega_1 t)\left[\cos(\omega_1 t)\cos(\omega_1\tau)+\sin(\omega_1 t)\sin(\omega_1\tau)\right]\mathrm{d}t$$

$$=\lim_{T\to\infty}\frac{E^2}{T}\cos(\omega_1\tau)\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\cos^2(\omega_1 t)\mathrm{d}t$$

$$=\frac{E^2}{2}\cos(\omega_1\tau)$$

求周期余弦信号$f(t)=E\cos(\omega_1 t)$的自相关函数。

解：对此功率有限信号，由自相关函数的定义，有

$$R(\tau)=\lim_{T\to\infty}\left[\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)f(t-\tau)\,\mathrm{d}t\right]$$

$$=\lim_{T\to\infty}\frac{E^2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\cos(\omega_1 t)\cos\left[\omega_1(t-\tau)\right]\mathrm{d}t$$

$$=\lim_{T\to\infty}\frac{E^2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\cos(\omega_1 t)\left[\cos(\omega_1 t)\cos(\omega_1\tau)+\sin(\omega_1 t)\sin(\omega_1\tau)\right]\mathrm{d}t$$

$$=\lim_{T\to\infty}\frac{E^2}{T}\cos(\omega_1\tau)\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\cos^2(\omega_1 t)\,\mathrm{d}t$$

$$=\frac{E^2}{2}\cos(\omega_1\tau)$$

结论

(1) 周期信号自相关函数仍为周期信号, 且周期相同。

(2) 自相关函数是一偶函数，$\boldsymbol{R(0)}$为最大值。

(3) 余弦函数自相关函数仍为余弦;同理可证，任意相位的正弦、余弦之自相关函数仍为余弦。

3. 相关与卷积的关系

$$R_{12}(t)=\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau)f_2(\tau-t)d\tau$$

$$f_1(t)*f_2(t)=\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau$$

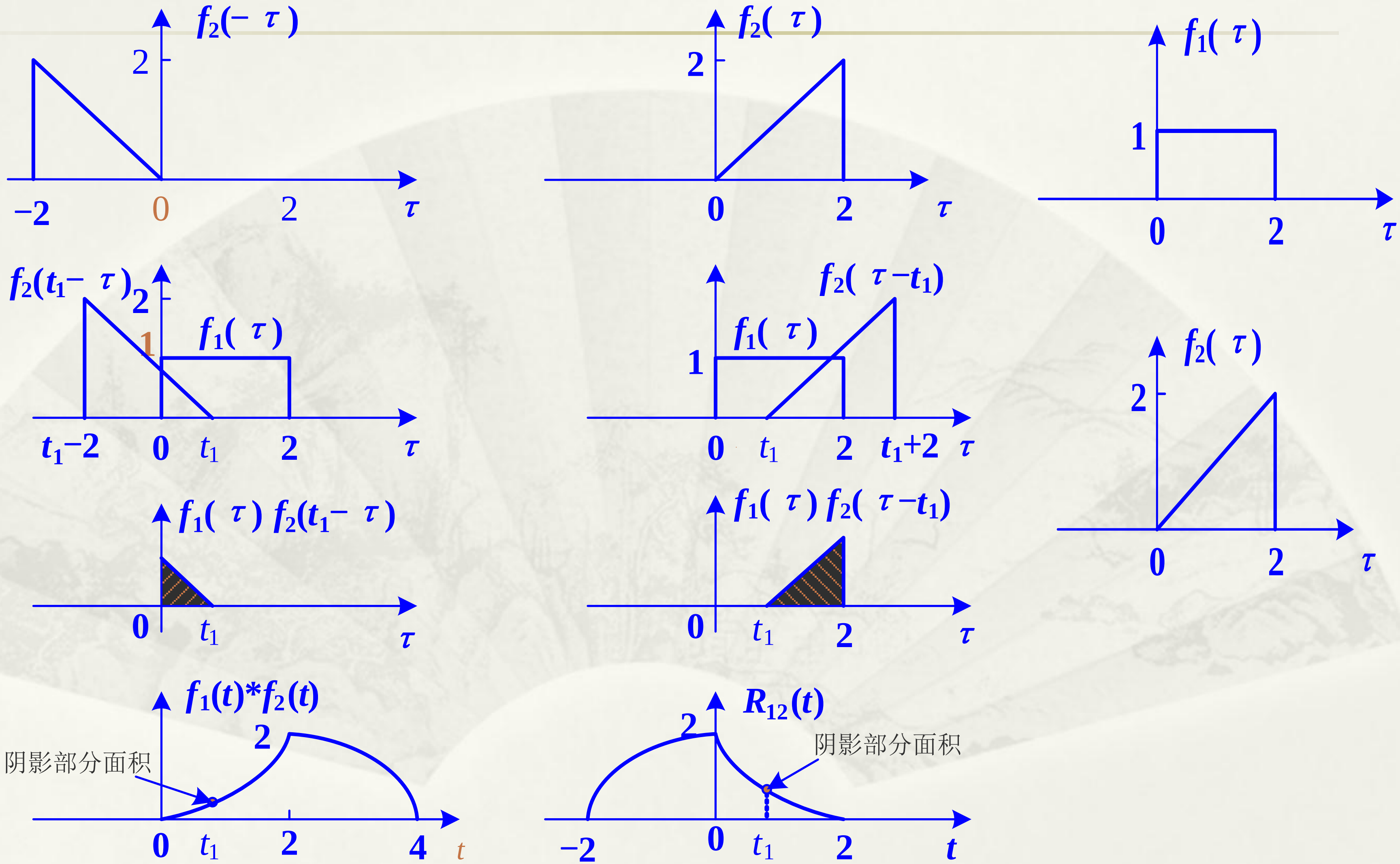
相关与卷积的关系为：

$$R_{12}(t)=f_1(t)*f_2(-t)$$

$$R_{21}(t)=f_2(t)*f_1(-t)。$$

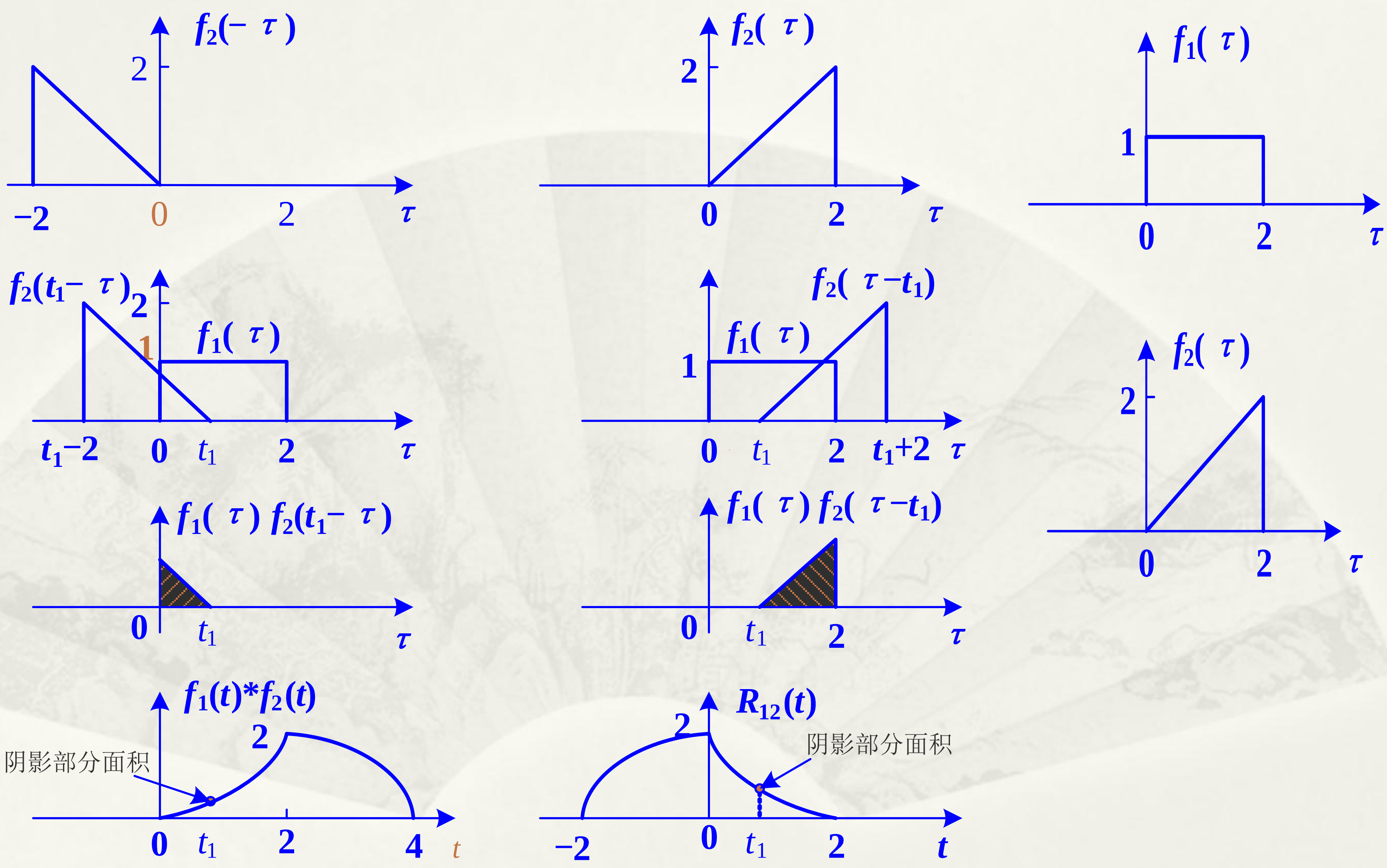
可见，若$f_1(t)$和$f_2(t)$均为实偶函数，则卷积与相关完全相同。

3. 相关函数的图解 $(0<t_1<2)$



(a) 卷积
(b) 相关

3. 相关函数的图解 ($0<t_1<2$)



(a) 卷积 (b) 相关