

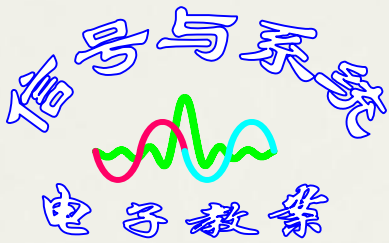
第二章 连续系统的时域分析

§ 2.1 连续系统的时域分析

§ 2.2 冲激响应和阶跃响应

§ 2.3 卷积积分

§ 2.4 卷积积分的性质



第二章 连续系统的时域分析

LTI连续系统的时域分析，归结为：

建立并求解线性微分方程

由于在其分析过程中涉及的函数变量均为时间 t ，故称为时域分析法。

这种方法比较直观，物理概念清楚，是学习各种变换域分析法的基础。

§2.1 LTI连续系统的响应

微分方程的经典解

关于 0_- 和 0_+ 初始值

零输入响应和零状态响应

一、微分方程的经典解

n 阶微分方程如下：

$$\begin{aligned} y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1 y'(t) + a_0 y(t) \\ = b_m f^{(m)}(t) + b_{m-1}f^{(m-1)}(t) + \cdots + b_1 f'(t) + b_0 f(t) \end{aligned}$$

微分方程的经典解：完全解 = 齐次解 + 特解

根据初始条件可求出完全解中的待定系数，得到系统响应。

1. 齐次解 $y_h(t)$

齐次微分方程：

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1y^{(1)}(t) + a_0y(t) = 0$$

齐次解是齐次微分方程的解。

$y_h(t)$ 的函数形式？

由上述微分方程的特征根确定。

由特征方程→求出特征根→写出齐次解形式

1. 齐次解 $y_h(t)$

表 2-1 不同特征根所对应的齐次解

特征根 λ	齐次解 $y_h(t)$
单实根	$e^{\lambda t}$
r 重实根	$(C_{r-1}t^{r-1} + C_{r-2}t^{r-2} + \cdots + C_1t + C_0)e^{\lambda t}$
一对共轭复根 $\lambda_{1,2} = \alpha \pm j\beta$	$e^{\alpha t} [C\cos(\beta t) + D\sin(\beta t)]$ 或 $A\cos(\beta t - \theta)$, 其中 $Ae^{j\theta} = C + jD$
r 重共轭复根	$[A_{r-1}t^{r-1}\cos(\beta t + \theta_{r-1}) + A_{r-2}t^{r-2}\cos(\beta t + \theta_{r-2}) + \cdots + A_0\cos(\beta t + \theta_0)]e^{\alpha t}$

注意重根情况处理方法。

齐次解举例

例：求下面微分方程的齐次解

$$y^{(3)}(t) + 7y^{(2)}(t) + 16y'(t) + 12y(t) = f(t)$$

解：系统的特征方程为

$$\lambda^3 + 7\lambda^2 + 16\lambda + 12 = 0$$

特征根

$$(\lambda + 2)^2(\lambda + 3) = 0$$

$$\lambda_1 = -2(\text{重根}), \lambda_2 = -3$$

查表得对应的齐次解为 $y_h(t) = (C_1t + C_2)e^{-2t} + C_3e^{-3t}$

2. 特解 $y_p(t)$

根据微分方程右端函数式形式，将含待定系数的特解函数式→代入原方程，比较系数得出特解。

表 2-2 不同激励所对应的特解

激励 $f(t)$	特解 $y_p(t)$
t^m	$P_m t^m + P_{m-1} t^{m-1} + \cdots + P_1 t + P_0$ $t^r [P_m t^m + P_{m-1} t^{m-1} + \cdots + P_1 t + P_0]$ 所有的特征根均不等于 0; 有 r 重等于 0 的特征根
$e^{\alpha t}$	$P e^{\alpha t}$ $(P_1 t + P_0) e^{\alpha t}$ $(P_r t^r + P_{r-1} t^{r-1} + \cdots + P_1 t + P_0) e^{\alpha t}$ α 不等于特征根; α 等于特征单根; α 等于 r 重特征根
$\cos(\beta t)$ 或 $\sin(\beta t)$	$P \cos(\beta t) + Q \sin(\beta t)$ 或 $A \cos(\beta t - \theta)$, 其中 $A e^{j\theta} = P + jQ$ 所有的特征根均不等于 $\pm j\beta$

特解举例

激励 $f(t)$	特解 $y_p(t)$
t^m	$P_m t^m + P_{m-1} t^{m-1} + \cdots + P_1 t + P_0$ $t^r [P_m t^m + P_{m-1} t^{m-1} + \cdots + P_1 t + P_0]$
	所有的特征根均不等于 0; 有 r 重等于 0 的特征根

例：给定微分方程式

$$y''(t) + 2y'(t) + 3y(t) = f'(t) + f(t)$$

如果已知：(1) $f(t) = t^2$ ；(2) $f(t) = e^t$ ，分别求两种情况下此方程的特解。

解：(1) $f(t) = t^2$ 故特解函数式为：

$$y_p(t) = P_2 t^2 + P_1 t + P_0$$

将此式代入方程得到：

$$3P_2 t^2 + (4P_2 + 3P_1)t + (2P_2 + 2P_1 + 3P_0) = t^2 + 2t$$

$$3P_2t^2 + (4P_2 + 3P_1)t + (2P_2 + 2P_1 + 3P_0) = t^2 + 2t$$

等式两端各对应幂次的系数应相等，于是有：

$$\begin{cases} 3P_2 = 1 \\ 4P_2 + 3P_1 = 2 \\ 2P_2 + 2P_1 + 3P_0 = 0 \end{cases}$$

联解得到：

$$P_2 = \frac{1}{3}, P_1 = \frac{2}{9}, P_0 = -\frac{10}{27}$$

所以，特解为：

$$y_p(t) = \frac{1}{3}t^2 + \frac{2}{9}t - \frac{10}{27}$$

$$e^{\alpha t}$$

$$Pe^{\alpha t}$$

$$(P_1 t + P_0) e^{\alpha t}$$

$$(P_r t^r + P_{r-1} t^{r-1} + \cdots + P_1 t + P_0) e^{\alpha t}$$

α 不等于特征根;

α 等于特征单根;

α 等于 r 重特征根

(2) $f(t) = e^t$, 故特解函数式为:

$$y_p(t) = Pe^t$$

将此式代入方程得到:

$$Pe^t + 2Pe^t + 3Pe^t = e^t + e^t$$

解之得: $P = 1/3$

所以, 特解为:

$$y_p(t) = \frac{1}{3} e^t$$

3. 全解

完全解 = 齐次解 + 特解

由初始值定出齐次解中的待定常数 C_i ，从而得到完全解

固有响应 强迫响应

- 齐次解的函数形式仅与系统本身的特性有关，而与激励 $f(t)$ 的函数形式无关，称为系统的固有响应或自由响应；
- 特解的函数形式由激励确定，称为强迫响应。

全解举例

例：给定微分方程式

$$y''(t) + 5y'(t) + 6y(t) = f(t)$$

(1) $f(t) = 2e^{-t}, t \geq 0; y(0_+) = 2, y'(0_+) = -1$ 时系统的全解;

(2) $f(t) = e^{-2t}, t \geq 0; y(0_+) = 1, y'(0_+) = 0$ 时系统的全解;

解：（1）先求齐次解

齐次方程为： $y''(t) + 5y'(t) + 6y(t) = 0$

相应的特征方程为： $\lambda^2 + 5\lambda + 6 = 0$

特征根为： $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = -3$

特征根为: $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = -3$

齐次解为: $y_h(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-3t}$

再求特解

$f(t) = 2e^{-t}$ 时系统的特解可设为: $y_p(t) = P e^{-t}$

将其代入微分方程 $y''(t) + 5y'(t) + 6y(t) = f(t)$

得: $P e^{-t} - 5P e^{-t} + 6P e^{-t} = 2e^{-t}$

解之得: $P = 1$

特解为: $y_p(t) = e^{-t}$

全解为: $y(t) = y_h(t) + y_p(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-3t} + e^{-t}$

其中的待定常数 C_1, C_2 由初始条件确定。

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-3t} + e^{-t}$$

根据初始条件 $y(0_+) = 2, y'(0_+) = -1$ 有

$$C_1 + C_2 + 1 = 2, -2C_1 - 3C_2 - 1 = -1$$

解得: $C_1 = 3, C_2 = -2$

全解为: $y(t) = y_h(t) + y_p(t) = 3e^{-2t} - 2e^{-3t} + e^{-t} \quad t \geq 0$

或者写为: $y(t) = (3e^{-2t} - 2e^{-3t} + e^{-t}) \varepsilon(t)$

(2) $f(t) = e^{-2t}, t \geq 0; y(0_+) = 1, y'(0_+) = 0$ 时

系统的全解课后练习;

提醒: 激励的指数中-2与其中之一特征根相等, 特解? 思考: 在该解中能否区分开固有响应和强迫响应?

$$y(t) = (2e^{-2t} - e^{-3t} + te^{-2t}) \varepsilon(t)$$

二、关于 0_- 和 0_+ 初始值

若输入 $f(t)$ 是在 $t=0$ 时接入系统，则确定待定系数 C_i 时用 $t = 0_+$ 时刻的初始值，即 $y^{(j)}(0_+)$ ($j=0,1,2,\cdots,n-1$)。 $y^{(j)}(0_+)$ 包含了输入信号的作用。

由于在 $t=0_-$ 时，激励尚未接入，该时刻的值 $y^{(j)}(0_-)$ 反映了系统的历史情况而与激励无关。称这些值为初始状态或起始值。

通常，需要从已知的初始状态 $y^{(j)}(0_-)$ 设法求得 $y^{(j)}(0_+)$ 。

0₊初始值求解1—待定系数法

例1：描述某系统的微分方程为

$$y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = 2f'(t) + f(t)$$

已知 $y(0_-)=2$, $y'(0_-)=0$, $f(t)=\delta'(t)$, 求 $y(0_+)$ 和 $y'(0_+)$ 。

解：将输入 $f(t)=\delta'(t)$ 代入上述微分方程得

$$y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = 2\delta''(t) + \delta'(t) \quad (1)$$

利用待定系数法：

令 $y''(t)=a\delta''(t)+b\delta'(t)+c\delta(t)+r_1(t)$, $r_1(t)$ 中不含冲激

$$y'(t)=a\delta'(t)+b\delta(t)+r_2(t), \quad r_2(t)=c\epsilon(t)+r_1^{(-1)}(t)$$

$$y(t)=a\delta(t)+r_3(t), \quad r_3(t)=b\epsilon(t)+r_2^{(-1)}(t)$$

将上述关系代入式（1），并整理得

$$\begin{aligned}
 &a\delta''(t)+b\delta'(t)+c\delta(t)+r_1(t) \\
 &\quad + 3a\delta'(t)+3b\delta(t)+3r_2(t) \\
 &\quad + 2a\delta(t)+2r_3(t)= 2\delta''(t) + \delta'(t)
 \end{aligned}$$

比较等式两边冲激项系数，有

$$a=2$$

$$b+3a=1$$

$$c+3b+2a=0$$

解得： $a=2$ ， $b=-5$ ， $c=11$ ， 故

$$y''(t)=2\delta''(t)-5\delta'(t)+ 11\delta(t)+r_1(t),$$

$$y'(t)= 2\delta'(t) -5\delta(t) + r_2(t),$$

$$y(t)= 2\delta(t)+ r_3(t),$$

$$y''(t)=2\delta''(t)-5\delta'(t)+11\delta(t)+r_1(t)$$

$$y'(t)=2\delta'(t)-5\delta(t)+r_2(t)$$

对 $y''(t)$ 从 0_- 到 0_+ 积分得:

$$y'(0_+)-y'(0_-)=11, \quad y'(0_+)=y'(0_-)+11=11$$

对 $y'(t)$ 从 0_- 到 0_+ 积分得:

$$y(0_+)-y(0_-)=-5, \quad y(0_+)=y(0_-)-5=2-5=-3$$

✦ 观察微分方程形式

$$y''(t)+3y'(t)+2y(t)=2\delta''(t)+\delta'(t)$$

总结待定系数法

当二阶微分方程中不包含 $\delta''(t)$ 和 $\delta'(t)$ 项，甚至不包含冲激函数时，是否可以用其他方法求初始值？

0₊初始值求解2—积分法

例2：描述某系统的微分方程为：

$$y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = 2f'(t) + 6f(t)$$

已知 $y(0_-)=2$, $y'(0_-)=0$, $f(t)=\varepsilon(t)$, 求 $y(0_+)$ 和 $y'(0_+)$ 。

解：将输入 $f(t)=\varepsilon(t)$ 代入上述微分方程得

$$y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = 2\delta(t) + 6\varepsilon(t) \quad (1)$$

分析：

- ① 由于等号右端含有 $\delta(t)$ 函数，故 $y''(t)$ 应包含冲激函数，从而 $y'(t)$ 在 $t=0$ 处将发生跃变，即 $y'(0_+) \neq y'(0_-)$ 。
- ② 但 $y'(t)$ 不含冲激函数，否则 $y''(t)$ 将含有 $\delta'(t)$ 项。由于 $3y'(t)$ 中不含 $\delta(t)$ ，故 $y(t)$ 在 $t=0$ 处是连续的。

$$\text{故 } y(0_+) = y(0_-) = 2$$

求 $y'(0_+)$: $y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = 2\delta(t) + 6\varepsilon(t)$ (1)

对式(1)两端积分有:

$$\int_{0_-}^{0_+} y''(t) dt + 3 \int_{0_-}^{0_+} y'(t) dt + 2 \int_{0_-}^{0_+} y(t) dt = 2 \int_{0_-}^{0_+} \delta(t) dt + 6 \int_{0_-}^{0_+} \varepsilon(t) dt$$

由于积分在无穷小区间 $[0_-, 0_+]$ 进行的, 且 $y(t)$ 在 $t=0$ 连续, 故:

$$\int_{0_-}^{0_+} y(t) dt = 0, \quad \int_{0_-}^{0_+} \varepsilon(t) dt = 0$$

于是由上式得

$$[y'(0_+) - y'(0_-)] + 3[y(0_+) - y(0_-)] = 2$$

考虑 $y(0_+) = y(0_-) = 2$, 所以

$$y'(0_+) - y'(0_-) = 2, \quad y'(0_+) = y'(0_-) + 2 = 2$$

$$y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = 2\delta''(t) + \delta'(t)$$

$$y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = 2\delta(t) + 6\varepsilon(t)$$

当微分方程右端含有冲激函数时，响应 $y(t)$ 及其各阶导数中，有些在 $t=0$ 处将发生跃变。

$$y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = 6\varepsilon(t)$$

当微分方程右端不含有冲激函数时，响应 $y(t)$ 及其他 $(n-1)$ 阶导数均不会跃变。

已知描述某连续系统的微分方程如下，计算初始值 $y(0_+)$ 和 $y'(0_+)$ 为（ ）。

$$y''(t) + 6y'(t) + 8y(t) = f''(t),$$

$$y(0_-) = 1, \quad y'(0_-) = 1, \quad f(t) = \delta(t)$$

A

-5, 29

C

24, 29

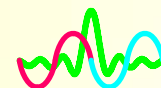
B

-5, 6

D

5, 29

提交



已知描述某连续系统的微分方程如下，计算初始值 $y(0_+)$ 为（ ）。

$$y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = f(t),$$

$$y(0_-) = 1, \quad y'(0_-) = 1, \quad f(t) = \varepsilon(t)$$

A

-2

C

0

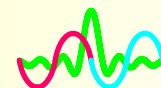
B

-1

D

1

提交



三、 零输入响应和零状态响应

系统的零状态响应: $y_{zs}(\cdot) = T[\{f(\cdot)\}, \{0\}]$

系统的零输入响应: $y_{zi}(\cdot) = T[\{0\}, \{x(0)\}]$

如何求 $y_{zi}(t)$ 和 $y_{zs}(t)$?

可以用经典法求解。

求解的关键? 如何计算初始值 $y_{zi}^{(j)}(0_+), y_{zs}^{(j)}(0_+)$

$$y^{(j)}(0_-) = y_{zi}^{(j)}(0_-) + y_{zs}^{(j)}(0_-)$$

$$y^{(j)}(0_+) = y_{zi}^{(j)}(0_+) + y_{zs}^{(j)}(0_+)$$

$$y_{zs}^{(j)}(0_-) = 0 \quad y_{zi}^{(j)}(0_+) = y_{zi}^{(j)}(0_-)$$

✦ $y_{zs}^{(j)}(0_+)$ 的求解?

$$y_{zs}^{(j)}(0_-) = 0$$

根据 $y_{zs}(t)$ 满足的方程，利用待定系数法或者积分法来求解。

✦ $y_{zi}^{(j)}(0_+)$ 的求解?

① 题目给出的为 $y^{(j)}(0_-)$

$$\begin{cases} y^{(j)}(0_-) = y_{zs}^{(j)}(0_-) + y_{zi}^{(j)}(0_-) \\ y_{zs}^{(j)}(0_-) = 0 \end{cases} \Rightarrow y_{zi}^{(j)}(0_-) = y^{(j)}(0_-)$$

$$\text{而 } y_{zi}^{(j)}(0_+) = y_{zi}^{(j)}(0_-) \therefore y_{zi}^{(j)}(0_+) = y_{zi}^{(j)}(0_-) = y^{(j)}(0_-)$$

✦ $y_{zi}^{(j)}(0_+)$ 的求解?

② 题目给出的为 $y^{(j)}(0_+)$

$$y^{(j)}(0_+) = y_{zs}^{(j)}(0_+) + y_{zi}^{(j)}(0_+)$$

先计算 $y_{zs}^{(j)}(0_+)$, 然后可以得到:

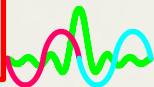
$$y_{zi}^{(j)}(0_+) = y^{(j)}(0_+) - y_{zs}^{(j)}(0_+)$$

或者, 先由 $y^{(j)}(0_+)$ 求出 $y^{(j)}(0_-)$

利用 $y_{zi}^{(j)}(0_+) = y_{zi}^{(j)}(0_-) = y^{(j)}(0_-)$ 求出结果

$$y^{(j)}(0_-) = y_{zi}^{(j)}(0_-) + y_{zs}^{(j)}(0_-) \quad y_{zs}^{(j)}(0_-) = 0$$

$$y^{(j)}(0_+) = y_{zi}^{(j)}(0_+) + y_{zs}^{(j)}(0_+) \quad y_{zi}^{(j)}(0_+) = y_{zi}^{(j)}(0_-)$$



零状态响应与零输入响应的求解

例：描述某系统的微分方程为

$$y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = 2f'(t) + 6f(t)$$

已知 $y(0_-)=2$, $y'(0_-)=0$, $f(t)=\varepsilon(t)$ 。求该系统的零输入响应和零状态响应。

解：（1）零输入响应 $y_{zi}(t)$ 激励为0，故 $y_{zi}(t)$ 满足

$$y_{zi}''(t) + 3y_{zi}'(t) + 2y_{zi}(t) = 0$$

$$y_{zi}(0_+) = y_{zi}(0_-) = y(0_-) = 2$$

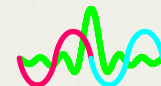
$$y_{zi}'(0_+) = y_{zi}'(0_-) = y'(0_-) = 0$$

该齐次方程的特征根为-1, -2, 故

$$y_{zi}(t) = C_{zi1}e^{-t} + C_{zi2}e^{-2t}$$

代入初始值并解得： $C_{zi1}=4$, $C_{zi2}=-2$ ，所以：

$$y_{zi}(t) = 4e^{-t} - 2e^{-2t}, t > 0$$



(2) 零状态响应 $y_{zs}(t)$ 满足:

$$y_{zs}''(t) + 3y_{zs}'(t) + 2y_{zs}(t) = 2\delta(t) + 6\varepsilon(t)$$

$$y_{zs}(0_-) = y_{zs}'(0_-) = 0$$

求初始值:

由于上式等号右端含有 $\delta(t)$, 故 $y_{zs}''(t)$ 含有 $\delta(t)$, 从而 $y_{zs}'(t)$ 跃变, 即 $y_{zs}'(0_+) \neq y_{zs}'(0_-)$, 而 $y_{zs}(t)$ 在 $t=0$ 连续, 即:

$$y_{zs}(0_+) = y_{zs}(0_-) = 0$$

对方程两边积分得:

$$\left[y_{zs}'(0_+) - y_{zs}'(0_-) \right] + 3 \left[y_{zs}(0_+) - y_{zs}(0_-) \right] + 2 \int_{0_-}^{0_+} y_{zs}(t) dt = 2 + 6 \int_{0_-}^{0_+} \varepsilon(t) dt$$

因此: $y_{zs}'(0_+) = 2 + y_{zs}'(0_-) = 2$

$$y_{zs}''(t) + 3y_{zs}'(t) + 2y_{zs}(t) = 2\delta(t) + 6\varepsilon(t)$$

对 $t>0$ 时，以上方程为：

$$y_{zs}''(t) + 3y_{zs}'(t) + 2y_{zs}(t) = 6$$

齐次解为： $C_{zs1}e^{-t} + C_{zs2}e^{-2t}$,

特解为：常数3，

于是有： $y_{zs}(t) = C_{zs1}e^{-t} + C_{zs2}e^{-2t} + 3$

代入初始值求得：

$$y_{zs}(t) = -4e^{-t} + e^{-2t} + 3, \quad t \geq 0$$

零状态响应 $y_{zs}(t)$ 另一种解法

$$y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = 2f'(t) + 6f(t)$$

- * 假设 $f(t)$ 作用于原系统所引起的零状态响应为 $y_{zs1}(t)$, 显然它满足:

$$y_{zs1}''(t) + 3y_{zs1}'(t) + 2y_{zs1}(t) = f(t)$$

- * 根据零状态响应的微分特性:

$$y_{zs1}'(t) = T[0, f'(t)]$$

- * 根据线性性质, 原系统的零状态响应为:

$$y_{zs}(t) = 2y_{zs1}'(t) + 6y_{zs1}(t)$$

见例题2.1-6

关于线性时不变系统的初始值 $y_{zi}^{(j)}(0_+), y_{zs}^{(j)}(0_+)$ ($j = 0, 1, 2, \dots, n-1$), 下列说法正确的是 ()

- ☒ A $y_{zs}^{(j)}(0_-)$ 一定为0
- ☐ B $y_{zs}^{(j)}(0_-)$ 可能不为0
- ☒ C $y_{zi}^{(j)}(0_+) = y_{zi}^{(j)}(0_-)$
- ☒ D $y_{zi}^{(j)}(0_+) = y^{(j)}(0_-)$

提交

完全响应=自由响应+强迫响应

完全响应=零输入响应+零状态响应

关系？

假设微分方程的特征根均为单根，有：

$$\begin{array}{ccc} y(t) = \sum_{j=1}^n C_{zi j} e^{\lambda_j t} + \underbrace{\sum_{j=1}^n C_{zs j} e^{\lambda_j t}}_{\text{零状态响应}} + y_p(t) & y(t) = \underbrace{\sum_{j=1}^n C_j e^{\lambda_j t}}_{\text{自由响应}} + \underbrace{y_p(t)}_{\text{强迫响应}} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \text{零输入响应} & \text{零状态响应} & \text{自由响应} \quad \text{强迫响应} \end{array}$$

虽然零输入响应和自由响应都是齐次方程的解，但二者的系数各不相同。

对于系统的零输入响应，描述正确的是（ ）

- ☐ A 全部自由响应
- ☒ B 部分自由响应
- ☐ C 部分零状态响应
- ☐ D 全响应和强迫响应之差

提交

