

Sveučilište u Zagrebu
Prirodoslovno-matematički fakultet
Fizički odsjek
Istraživački studij fizike

Denis Žoljom

KERR/CFT KORESPONDENCIJA

Diplomski rad

Zagreb, veljača 2014.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET
FIZIČKI ODSJEK

SMJER: ISTRAŽIVAČKI STUDIJ FIZIKE

Denis Žoljom

Diplomski rad

Kerr/CFT korespondencija

Voditelj diplomskog rada: doc. dr. sc. Maro Cvitan

Ocjena diplomskog rada: _____

Povjerenstvo: 1. _____

2. _____

3. _____

Datum polaganja: _____

Zagreb, 2014.

“The most beautiful thing we can experience is the mysterious. It is the source of all true art and all science. He to whom this emotion is a stranger, who can no longer pause to wonder and stand rapt in awe, is as good as dead: his eyes are closed.”

Albert Einstein

Zahvala

Želim se zahvaliti svojoj obitelji na golemoj podršci i na činjenici da me izdržala tokom perioda mog studiranja.

Također želim zahvaliti mentoru doc. dr. sc. Mari Cvitanu na pomoći tokom izrade diplomskog rada te Monici Guici i Geoffreyju Comperéu na vrijednim savjetima.

I na kraju, ali ne manje važno, želim se zahvaliti svim prijateljima, na i izvan fakulteta, koji su mi pružali društvo i ohrabrivali me da nastavim dalje. Bez vaše podrške, u obliku raznih druženja i ispijanja pive u Medi, zasigurno ne bih bio na kraju jedne i početku druge epohe mog života. Od srca vam svima zahvaljujem.

Sadržaj

1	Uvod	1
2	Pregled Kerrove metrike	4
2.1	NHEK metrika	11
2.1.1	$SL(2, \mathbb{R})$ grupa	13
2.1.2	Izvijene geometrije	15
3	Grupa asimptotskih simetrija	19
3.1	Algebra difeomorfizama	24
3.2	Generatori i centralni naboj	27
4	Mikroskopska entropija i dokaz korespondencije	30
4.1	Temperatura ekstremne Kerrove crne rupe	31
4.2	Cardyjeva formula	32
5	Zaključak	34
A	Općeniti pojmovi vezani uz mnogostrukosti	36
A.1	Riemannova metrika	36
A.2	Pseudo-Riemannova metrika	37
A.3	Poincaréov metrički tenzor	38
A.4	Izometrije	38
A.5	Preslikavanja između mnogostrukosti	39
A.6	Asimptotska prostor vremena i ADM dekompozicija	39

B	Izvod NHEK metrike	41
C	Određivanje rubnih uvjeta i difeomorfizama	47
D	Virasoro algebra	55
E	Mathematica kod	60
	Bibliografija	70

1

Uvod

EINSTEIN je 1915. godine objavio opću teoriju relativnosti, za koju možemo reći da je jedna od najelegantnijih teorija u fizici. Od svojih početaka je uspjela promijeniti način na koji vidimo svijet oko sebe. Prostor više nije nezavisan od vremena, nego zajedno čine jedinstvenu cjelinu. Zakrivljenost prostor-vremena je postala očita činjenica te je povezujući materiju i geometriju na veoma elegantan način, opća teorija relativnosti otvorila vrata ne samo novim teorijama, poput kvantne gravitacije i teorije struna, nego je otvorila vrata novim tehnologijama koje su promijenile naš način života (GPS). Također je dala bazu za ono što će uvelike postati predmet istraživanja same opće teorije relativnosti - crne rupe i astrofizički fenomeni.

Često ljudi zaziru od opće teorije relativnosti zato jer je matematički formalizam koji ju opisuje, doduše na veoma elegantan način, poprilično složen. Opisi preko tenzora su veoma složeni i često nisu intuitivni, što obično rezultira time da ljudi odustanu od detaljnog studiranja elegancije same teorije.

Vrhunac Einsteinove teorije relativnosti zasigurno leži u Einsteinovim jednadžbama polja

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + g_{\mu\nu}\Lambda = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \quad (1.1)$$

koje na veoma elegantan način povezuju dvije, naizgled oprečne, stvari: materiju danu tenzorom energije-impulsa¹ $T_{\mu\nu}$, te prostor opisan kombinacijom Riccijevog tenzora, Riccijevog skalara i metrike prostora².

Iako je dio znanstvene zajednice bio skeptičan oko rješivosti ovih jednadžbi (pošto se radi o 10 jednadžbi), već iduće godine nakon objave opće teorije relativnosti, Karl Schwarzschild je našao prvo egzaktno (sferno simetrično) rješenje Einsteinovih jednadžbi u vakuumu. Njegovo rješenje kasnije proširuju Reissner i Nordstrøm za slučaj nabijene crne rupe.

Tek kasnije, 1960-ih, počinje takozvano zlatno doba fizike crnih rupa. 1963. Roy P. Kerr je riješio vakumske Einsteinove jednadžbe za slučaj nenabijene rotirajuće crne rupe, koje je 1965. Ezra Newman proširio na slučaj nabijene rotirajuće crne rupe. Roger Penrose je 1964. dokazao da će implodirajuća zvijezda producirati singularitet jednom kad formira horizont događaja. Werner Israel je 1967. dao dokaz za teorem koji tvrdi da "crne rupe nemaju kose"³ - odnosno da su jedini atributi klasifikacije crne rupe masa, zakretni impuls i naboj. Penrose je također pokazao da se iz crne rupe može ekstrahirati energija (Penroseov proces), no takav proces je bio popraćen povećavanjem površine crne rupe, što je Stephena Hawkinga navelo da poveže površinu crne rupe s termodinamičkom entropijom.

Razmatrajući gravitacijski kolaps u odsutstvu tlaka, Hawking i Bekenstein su 1970-ih godina uspjeli definirati entropiju i površinsku temperaturu crne rupe te su zajedno sa James Bardeenom i Brandonom Carterom postavili četiri zakona termodinamike crnih rupa. Možda je najimpresivniji rezultat tog doba upravo veza entropije i površine horizonta događaja

$$S_{BH} = \frac{A}{4\hbar G} \quad (1.2)$$

¹Engl. *stress energy tensor*

²Riccijev tenzor i skalar se mogu skraćeno zapisati kao Einsteinov tenzor $G_{\mu\nu}$.

³Engl. *no hair theorem*

Taj rezultat je naveo fizičare Gerarda 't Hoofta i Leonarda Susskinda da formuliraju holografski princip koji tvrdi da se opis volumena prostora može promatrati preko informacije na granici tog prostora. Razvojem teorije struna Juan Maldacena je koristeći holografski princip uveo AdS/CFT korespondenciju. S jedne strane korespondencije se nalazi konformna teorija polja (CFT od engl. *conformal field theory*), dok su sa druge strane anti-de Sitter prostori koji se koriste u teorijama kvantne gravitacije dane preko formulacije teorije struna⁴.

Jedan od većih neriješenih problema unutar opće teorije relativnosti bio je kako reproducirati izaz za entropiju crne rupe, koristeći Boltzmannov formalizam brojanja mikrostanja iz statističke fizike.

Taj problem se prvo riješio koristeći teoriju struna, a kasnije je uspješno reproduciran izraz za entropiju bez pozivanja na teoriju struna. Umjesto toga koristio se formalizam asimptotskih simetrija. Na taj način se izbjegao kompliciran matematički formalizam teorije struna [3, 4].

Današnja istraživanja AdS/CFT korespondencije često sežu u domenu nuklearne fizike i fizike kondenzirane materije. No mi nećemo ići u tom smjeru, ma koliko god on konceptualno bio interesantan.

U ovom radu od interesa nam je promatrati jedan od vidova holografskog principa: Kerr/CFT korespondenciju. Konačni cilj ove korespondencije je pokazati jednakost vrijednosti entropije dobivene koristeći termodinamiku i mikroskopsko brojanje stanja. Iako ekvivalencija postoji, kao što je pokazano u radu Guice et. al. [5], još uvijek nije nađen sustavan teorijski način otkrivanja rubnih uvjeta koji bi dali korespondenciju. U drugom poglavlju ćemo dati pregled Kerrove metrike te ćemo prijeći u metriku blizu horizonta za ekstremni Kerrov slučaj (NHEK metrika - engl. *near-horizon extreme Kerr*). Zatim ćemo u trećem poglavlju pogledati grupu asimptotskih simetrija te kako se mijenjaju difeomorfizmi određeni rubnim uvjetima specificirani na pozadinskoj metrici. Difeomorfizmi nam služe da bismo dobili centralne naboje, koji će biti ključni u konačnom pokazivanju korespondencije s dvodimenzionalnom CFT.

⁴Za uvod u ADS/CFT korespondenciju pogledajte [1, 2].

2

Pregled Kerrove metrike

KERROVA metrika opisuje geometriju praznog prostora oko nenabijene rotirajuće crne rupe. Razlog zašto je prošlo više od 48 godina od otkrića Schwarzschildovog rješenja, do otkrića Kerrovog rješenja Einsteinovih jednažbi, je taj što su računi veoma komplicirani. Zato nećemo izvoditi Kerrovu metriku, nego ćemo ju izraziti i koristiti u daljnjim računima.

Iako postoje mnogi koordinatni izbori za račun sa Kerrovom metrikom [6], mi ćemo linijski element Kerrove metrike izraziti u Boyer-Lindquistovim koordinatama $(\hat{t}, \hat{r}, \theta, \hat{\phi})$. One su korisne jer minimiziraju broj ne-dijagonalnih komponenti metrike, što nam olakšava analiziranje asimptotskog ponašanja i razumijevanje razlike *horizonta događaja* i *ergosfere*.

Linijski element Kerrove metrike je dan sa

$$ds^2 = -\frac{\Delta}{\rho^2}(d\hat{t} - a \sin^2 \theta d\hat{\phi})^2 + \frac{\sin^2 \theta}{\rho^2} \left((\hat{r}^2 + a^2) d\hat{\phi} - a d\hat{t} \right)^2 + \frac{\rho^2}{\Delta} d\hat{r}^2 + \rho^2 d\theta^2 \quad (2.1)$$

Uvodimo pokrate

$$\Delta \equiv \hat{r}^2 - 2M\hat{r} + a^2, \quad \rho^2 \equiv \hat{r}^2 + a^2 \cos^2 \theta, \quad a \equiv \frac{GJ}{M}, \quad M \equiv GM_{ADM}$$

J je zakretni impuls, M je geometrijska masa, G je četverodimenzionalna Newtonova konstanta, dok je M_{ADM} Arnowitt, Deser, Misner masa.

Definicija Neka je (\mathcal{M}, g_{ab}) asimptotski ravno prostor vrijeme¹ i neka je Σ hiperploha prostornog tipa² koja je $C^{>1}$ u prostornoj beskonačnosti i^0 tako da su (Σ, h_{ab}, K_{ab}) početni uvjeti u asimptotskom prostoru. Neka su x^1, x^2, x^3 asimptotski euklidske koordinate na Σ . Ukupnu energiju (masu) definiramo kao

$$M_{ADM} = \frac{1}{16\pi} \lim_{r \rightarrow \infty} \sum_{\mu, \nu=1}^3 \int \left(\frac{\partial h_{\mu\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial h_{\mu\mu}}{\partial x^\nu} \right) N^\nu dA \quad (2.2)$$

gdje je $r^2 = [(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2]^{1/2}$, a integrira se po sferi konstantnog radijusa r te je N^a normalni vektor na sferu [7].

¹Vidjeti dodatak A za dodatne informacije o asimptotski ravnom prostoru vremenu.

²Svaka krivulja na toj hiperplohi je prostornog tipa.

Promotrimo singularitete ove metrike. Metrika je singularna (divergira) za $\rho^2 = 0$ i $\Delta = 0$, što nam daje

$$\rho^2 = 0 \Rightarrow \hat{r}^2 + a^2 \cos^2 \theta = 0 \Rightarrow \hat{r} = 0 \text{ i } \theta = \pi/2 \quad (2.3)$$

odnosno

$$\Delta = 0 \Rightarrow \hat{r}^2 - 2M\hat{r} + a^2 = 0 \Rightarrow \hat{r} = r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - a^2} \quad (2.4)$$

U slučaju (2.3) radi se o singularitetu zakrivljenosti (prstenasti singularitet), jer na tom mjestu skalarna zakrivljenost³ divergira ($R_{abcd}R^{abcd} \rightarrow \infty$), za razliku od ponašanja $R_{abcd}R^{abcd}$ u r_{\pm} , gdje ćemo imati regularno ponašanje, što ukazuje na to da su singulariteti u (2.4) koordinatni singulariteti. Također vidimo da kako $a \rightarrow 0$ imamo regularno ponašanje u r_{\pm} , odnosno dobivamo Schwarzschildovu metriku ($r_+ \rightarrow 2M$, $r_- \rightarrow 0$). Njih možemo identificirati kao unutarnje i vanjske horizonte (shematski prikaz je na slici 2.1).

Da bismo izbjegli gole singularitete (što bi kršilo princip kozmičke cenzure), zakretni impuls mora biti ograničen $J \in [-M^2/G, M^2/G]$.

Imamo dva Killingova vektora $K = \partial_t$ i $R = \partial_{\phi}$ te njihovu linearnu kombinaciju za bilo koje konstantne koeficijente $aK^{\mu} + bR^{\mu}$.

R^{μ} predstavlja aksijalnu simetriju, no vektor K^{μ} nije ortogonalan niti jednoj hiperplohi što ukazuje da je metrika stacionarna, ali ne i statična. To ima smisla pošto se crna rupa vrti, ali stalno istom mjerom (brzinom).

Upravo zbog stacionarnosti no ne i statičnosti metrike, horizonti događaja u r_{\pm} nisu Killingovi horizonti za asimptotski vremenski translacijski Killingov vektor $K = \partial_t$.

Ako je Killingovo vektorsko polje χ^{μ} svjetlosnog (nul) tipa duž neke nul hiperplohe \mathcal{N} , kažemo da je \mathcal{N} Killingov horizont χ^{μ} , odnosno

Definicija Nul hiperploha \mathcal{N} je Killingov horizont Killingovog vektora χ , ako je χ , na hiperplohi \mathcal{N} , okomit na \mathcal{N} .

Norma vektora K^{μ} je

$$K^{\mu}K_{\mu} = g_{\mu\nu}K^{\mu}K^{\nu} = g_{tt}K^tK^t = -\frac{1}{\rho^2}(\Delta - a^2 \sin^2 \theta) \quad (2.5)$$

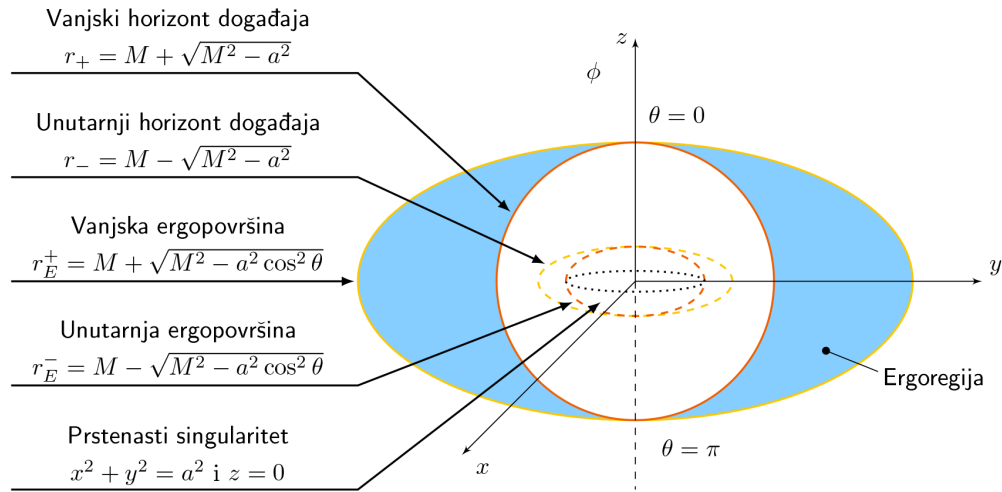
³U ovom slučaju radi se o Kretschmannovom skalaru

koja neće iščeznuti na vanjskom horizontu r_+ ($\Delta = 0$)

$$K^\mu K_\mu = \frac{a^2}{\rho^2} \sin^2 \theta \geq 0 \quad (2.6)$$

Killingov vektor je vremenskog tipa na vanjskom horizontu, osim na polovima gdje je nul tipa. Pošto imamo unutarnji i vanjski horizont, područje između tih ploha se naziva *ergosfera* ili *ergoregija*.

Unutar ergosfere moramo se gibati u smjeru rotacije crne rupe (ϕ smjer), no moguće je kretati se prema ili od obzora događaja (i izaći iz ergosfere).



Slika 2.1 – Shematski prikaz lokacija horizonta, ergopovršina i singulariteta zakrivljenosti u Kerrovom prostor-vremenu.

Korisno je još vidjeti parametre kao što su Hawkingova temperatura, površinska gravitacija, kutna brzina horizonta i konačno entropiju Kerrove crne rupe.

Promotrimo foton koji je emitiran u ϕ smjeru na nekom radijusu r u ekvatorijalnoj ravnini $\theta = \pi/2$ Kerrove crne rupe. U trenu kada smo emitirali foton, njegov impuls nema komponente u r ili θ smjeru pa nam je uvjet da mu je trajektorija nul dan sa

$$ds^2 = 0 = g_{tt}dt^2 + g_{t\phi}(dtd\phi + d\phi dt) + g_{\phi\phi}d\phi^2 \quad (2.7)$$

Rješavajući to kao kvadratnu jednadžbu u $d\phi/dt$ dobivamo rješenje

$$\frac{d\phi}{dt} = -\frac{g_{t\phi}}{g_{\phi\phi}} \pm \sqrt{\left(\frac{g_{t\phi}}{g_{\phi\phi}}\right)^2 - \frac{g_{tt}}{g_{\phi\phi}}} \quad (2.8)$$

Ako to izvrijednimo na površini ergosfere ($g_{tt} = 0$) dva rješenja su (uz $\theta = \pi/2$ i $r = r_E^+ = 2M$)

$$\frac{d\phi}{dt} = 0, \quad \frac{d\phi}{dt} = \frac{2a}{2M^2 + a^2} \quad (2.9)$$

Rješenje različito od nule ima isti predznak kao i a , što interpretiramo kao gibanje fotona u istom smjeru kao rotacija i crne rupe, dok rješenje jednako nuli interpretiramo tako da se foton koji se giba u smjeru suprotno od vrtnje crne rupe uopće ne giba.

Analogno možemo definirati kutnu brzinu horizonta događaja Ω_H kao minimalnu kutnu brzinu čestice na horizontu

$$\Omega_H = \frac{d\phi}{dt} = -\left.\frac{g_{t\phi}}{g_{\phi\phi}}\right|_{r=r_+} = \frac{2a}{r_+^2 + a^2} = \frac{a}{Mr_+} \quad (2.10)$$

Da bismo vidjeli kolika je Hawkingova temperatura Kerrove crne rupe, potrebna nam je površinska gravitacija κ . *Površinska gravitacija* u slučaju Schwarzschildove metrike je definirana kao akceleracija statične čestice blizu horizonta mjerena u prostornoj beskonačnosti [8]. U Schwarzschildovom slučaju se često koristi primjer spuštanja užeta prema crnoj rupi i promatranja sile koja djeluje na užu. U Kerrovom slučaju taj nam primjer neće koristiti, jer će bilo koji dio užeta koji spustimo u ergosferu biti potrgan zbog rotacije i činjenice da unutar ergosfere objekt ne može biti statičan.

Jedan od načina da promotrimo površinsku gravitaciju Kerrove crne rupe jest da pogledamo promjenu nul Killingovog vektora.

Killingov vektor u Kerrovoj metrici koji zadovoljava definiciju za Killingov horizont (nul Killingov vektor) je $\chi^\mu = K^\mu + \Omega_H R^\mu$, gdje smo K^μ i R^μ prethodno definirali. Pošto je χ^μ okomit na \mathcal{N} , duž Killingovog horizonta zadovoljava geodetsku jednadžbu

$$\chi^\mu (\nabla_\mu \chi^\nu) = -\kappa \chi^\nu \quad (2.11)$$

Parametar κ je površinska gravitacija. Koristeći Killingovu jednadžbu $\nabla_{(\mu} \chi_{\nu)} = 0$ i činjenicu da je $\chi_{[\mu} \nabla_\nu \chi_{\sigma]} = 0$ (jer je χ^μ okomit na \mathcal{N}), iz (2.11) dobijemo formulu za

računanje površinske gravitacije

$$\kappa^2 = -\frac{1}{2}(\nabla_\mu \chi_\nu)(\nabla^\mu \chi^\nu) \Big|_{\mathcal{N}} \quad (2.12)$$

Pošto nam je metrika u Boyer-Lindquistovim koordinatama singularna na horizontu, moramo koristiti upadne Kerrove koordinate (engl. *ingoing Kerr*) $(v, \hat{r}, \theta, \tilde{\phi})$ koje su definirane sa

$$\begin{aligned} dv &= d\hat{t} + (\hat{r}^2 + a^2) \frac{d\hat{r}}{\Delta} \\ d\tilde{\phi} &= d\hat{\phi} + a \frac{d\hat{r}}{\Delta} \end{aligned}$$

pa nam metrika postaje

$$\begin{aligned} ds^2 &= \left(1 - \frac{2M\hat{r}}{\rho^2}\right) dv^2 - 2d\hat{r}dv - \rho^2 d\theta^2 - A \frac{\sin^2 \theta}{\rho^2} d\tilde{\phi}^2 + \\ &+ 2a \sin^2 \theta d\tilde{\phi}d\hat{r} + \frac{4aMr}{\rho^2} \sin^2 \theta d\tilde{\phi}dv \end{aligned}$$

pri čemu je $A = (\hat{r}^2 + a^2)^2 - a^2 \Delta \sin^2 \theta$. Tada je

$$\kappa = \frac{r_+ - r_-}{2(r_+^2 + a^2)} = \frac{\sqrt{M^2 - a^2}}{r_+^2 + a^2} = \frac{\sqrt{M^2 - a^2}}{2Mr_+} \quad (2.13)$$

Vidimo da površinska gravitacija ne ovisi o θ , što ukazuje na to da je ona uniformna na horizontu događaja. Za ekstremnu crnu rupu ona je nula, to jest, rotacija uravnoteži gravitaciju. U slučaju rotacije zvijezda, to bi bilo ekvivalentno rotiranju zvijezde brzinom raspada - ona brzina koja se postiže kada je centrifugalna sila na ekvatoru jednaka gravitacijskoj sili [7, 9].

Četiri zakona termodinamike crnih rupa su veoma slični običnim zakonima termodinamike, s tim da površinska gravitacija κ ima ulogu temperature, površina horizonta crne rupe A ima ulogu entropije i masa M ima ulogu unutarnje energije.

Hawkingova temperatura crne rupe je definirana (do na faktor \hbar) kao

$$T_H = \frac{1}{2\pi} \kappa \quad (2.14)$$

Koja iznosi, nakon uvrštavanja (2.13)

$$T_H = \frac{1}{2\pi} \frac{\sqrt{M^2 - a^2}}{2Mr_+} \quad (2.15)$$

Detaljnije o Hawkingovoj temperaturi se može naći u [10] na 122. stranici.

Definicija *Drugi zakon termodinamike crnih rupa kaže da ako je energetski nul uvjet zadovoljen, tada se površina crne rupe ne može smanjiti: $\delta A > 0$.*

Jedini način da bi drugi zakon termodinamike vrijedio jest da crne rupe imaju entropiju, što su Bekenstein i Hawking [11, 12] i pokazali

$$S_{BH} = \frac{A}{4} \quad (2.16)$$

pri čemu je A površina horizonta crne rupe, u slučaju Kerrove metrike dana sa [7]

$$A = \int_{r=r_+} \sqrt{g_{\theta\theta}g_{\phi\phi}} d\theta d\phi = 4\pi(r_+^2 + a^2) \quad (2.17)$$

što nakon uvrštavanja izraza za radijus vanjskog horizonta događaja r_+ iz (2.4) postaje

$$A = 8\pi Mr_+ \quad (2.18)$$

Na kraju imamo entropiju Kerrove crne rupe

$$S_{BH} = 2\pi Mr_+ \quad (2.19)$$

Ono što nas najviše zanima je ekstremni slučaj, kada je zakretni impuls crne rupe J maksimalno dopušten: $J = M^2$. U tom slučaju je $a = J/M = M$ i $r_+ = M$ te su i površinska gravitacija i Hawkingova temperatura 0, dok je entropija takve crne rupe

$$S_{BH} = \frac{2\pi J}{\hbar} \quad (2.20)$$

To je rezultat koji ćemo pokušati reproducirati sa mikroskopske strane koristeći konformnu teoriju polja i Cardyjevu formulu za entropiju.

2.1 NHEK metrika

U našem nastojanju dokazivanja korespondencije slijedimo članak Guice et. al. [5] u kojem su oni prvo promatrali područje blizu horizonta ekstremne Kerrove crne rupe.

Često se u fizici uzimaju limesi rješenja problema kojeg promatramo, pošto su računi s njima jednostavniji. Također takvi pojednostavljeni sustavi nam znaju reći dosta toga o originalnom problemu kojeg razmatramo.

Razlog zašto se problemi pojednostavljaju u području blizu horizonta Kerrove crne rupe jest taj što se unutar ergosfere fizikalni objekti moraju rotirati oko, ali zajedno sa crnom rupom. Na horizontu ekstremne crne rupe opažači se moraju rotirati oko crne rupe brzinom svjetlosti što će uzrokovati pojavu samo kiralnih stupnjeva slobode (onih koji se rotiraju u istom smjeru).

Ekstremne crne rupe su definirane kao stacionarne crne rupe sa iščezavajućom Hawkingovom temperaturom ($T_H = 0$) te kao one čiji se unutarnji i vanjski horizonti poklapaju.

Prije nego što specificiramo rubne uvjete u asimptotskoj beskonačnosti NHEK metrike, ukratko ćemo proći kroz korake izvoda koji se može naći u dodatku B.

Definiramo bezdimenzionalne koordinate

$$t = \frac{\lambda \hat{t}}{2M}, \quad y = \frac{\lambda M}{\hat{r} - M}, \quad \phi = \hat{\phi} - \frac{\hat{t}}{2M}, \quad \lambda \rightarrow 0 \quad (2.21)$$

čime dobivamo NHEK metriku u koordinatama Poincaréovog tipa⁴

$$ds^2 = 2GJ\Omega^2 \left(\frac{-dt^2 + dy^2}{y^2} + d\theta^2 + \Lambda^2 \left(d\phi + \frac{dt}{y} \right)^2 \right) \quad (2.22)$$

pri čemu su

⁴Koordinate Poincareovog tipa opisuju hiperbolni prostor te se koriste kod definiranja koordinata na AdS_n prostoru. Za dodatak o Poincaréovoj metrici pogledajte A.

$$\Omega^2 \equiv \frac{1 + \cos^2 \theta}{2}, \quad \Lambda \equiv \frac{2 \sin \theta}{1 + \cos^2 \theta} \quad (2.23)$$

$\phi \sim \phi + 2\pi$ i $0 \leq \theta \leq \pi$. NHEK geometrija nije asimptotski ravna⁵. Zakretni impuls J se javlja kao faktor ispred metrike.

Da bismo prekrili čitavu NHEK geometriju uvodimo globalne koordinate (r, τ, ϕ)

$$\begin{aligned} y &= (\sqrt{1+r^2} \cos \tau + r)^{-1}, \\ t &= y \sqrt{1+r^2} \sin \tau, \\ \phi &= \varphi + \ln \left| \frac{\cos \tau + r \sin \tau}{1 + \sqrt{1+r^2} \sin \tau} \right| \end{aligned} \quad (2.24)$$

čime konačno dobivamo oblik metrike s kojim ćemo raditi

$$d\bar{s}^2 = 2GJ\Omega^2 \left(-(1+r^2)d\tau^2 + \frac{dr^2}{1+r^2} + d\theta^2 + \Lambda^2(d\varphi + rd\tau)^2 \right) \quad (2.25)$$

$$\bar{g} = 2GJ\Omega^2 \begin{pmatrix} -(1+r^2(1-\Lambda^2)) & 0 & 0 & r\Lambda^2 \\ 0 & \frac{1}{1+r^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ r\Lambda^2 & 0 & 0 & \Lambda^2 \end{pmatrix} \quad (2.26)$$

Razlog rada sa NHEK geometrijom je taj što nam ona ima zanimljiva simetrijska svojstva. Ona ima pojačanu $SL(2, \mathbb{R})_R \times U(1)_L$ grupu izometrija⁶. $SL(2, \mathbb{R})$ produžuje simetriju vremenskih translacija obične Kerrove metrike, dok je $U(1)$ naslijeđena aksijalna simetrija Kerrovog rješenja.

⁵Ugrubo možemo reći da je asimptotski ravno prostorvrijeme je ono za koje se beskonačnosti u konformnom dijagramu poklapaju sa onim od Minkowskog prostor-vremena, sa budućom nul beskonačnošću \mathcal{I}^+ , prostornom beskonačnošću ι^0 i prošlom nul beskonačnošću \mathcal{I}^- . Za detalje pogledati jedanaesto poglavlje u [7].

⁶Izometrije su geometrijske simetrije

2.1.1 $SL(2, \mathbb{R})$ grupa

Definicija Specijalna linearna grupa $SL(2, \mathbb{R})$ je grupa svih realnih 2×2 matrica determinante 1.

Možemo parametrizirati grupu $SL(2, \mathbb{R})$, tako da se ishodište koordinatnog sustava preslikava u identitet grupe

$$(a, b, c) \rightarrow M(a, b, c) = \begin{bmatrix} 1+a & b+c \\ b-c & 1+((b+c)(b-c))/(1+a) \end{bmatrix}$$

Nadalje, grupu lineariziramo tako da promatramo kakvo je ponašanje u okolici identiteta. To se radi tako da dopustimo parametrima (a, b, c) da postanu infinitezimalno mali i da razvijemo parametre u red

$$(a, b, c) \rightarrow (\delta a, \delta b, \delta c) \rightarrow M(\delta a, \delta b, \delta c) = \begin{bmatrix} 1+\delta a & \delta b+\delta c \\ \delta b-\delta c & 1+(\delta b+\delta c)(\delta b-\delta c)/(1+\delta a) \end{bmatrix}$$

Vektori baze u Liejevoj algebri su koeficijenti uz prvi red infinitezimala. U našem slučaju to su 2×2 matrice

$$(\delta a, \delta b, \delta c) \rightarrow I_2 + \delta a X_a + \delta b X_b + \delta c X_c = \begin{bmatrix} 1+\delta a & \delta b+\delta c \\ \delta b-\delta c & 1-\delta a \end{bmatrix}$$

pri čemu su

$$\begin{aligned} X_a &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \left. \frac{\partial M(a, b, c)}{\partial a} \right|_{(a,b,c)=(0,0,0)} \\ X_b &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \left. \frac{\partial M(a, b, c)}{\partial b} \right|_{(a,b,c)=(0,0,0)} \\ X_c &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \left. \frac{\partial M(a, b, c)}{\partial c} \right|_{(a,b,c)=(0,0,0)} \end{aligned}$$

Generatori $SL(2, \mathbb{R})$ grupe tvore Liejevu algebra te za njih vrijede sva poznata svojstva Liejeve algebre: zatvorenost, distributivnost, antisimetriju i Jacobijev identitet

$$[X_a, [X_b, X_c]] + [X_b, [X_c, X_a]] + [X_c, [X_a, X_b]] = 0$$

Tri generatora grupe $SL(2, \mathbb{R})$ zadovoljavaju komutacijske relacije

$$[X_a, X_b] = 2X_c, \quad [X_a, X_c] = 2X_b, \quad [X_b, X_c] = -2X_a$$

Pošto je NHEK metrika (2.25) stacionarna (ne ovisi eksplicitno o τ), mora postojati Killingov vektor vremenskog tipa kojeg uzimamo da je $\sim \partial_\tau$. Također, metrika ne ovisi eksplicitno o φ pa će postojati Killingov vektor $\sim \partial_\varphi$.

Gledajući izometrije, rotacijska $U(1)$ izometrija je generirana Killingovim vektorom

$$\xi_0 = -\partial_\varphi \quad (2.27)$$

Vremenske translacije postaju dio pojačane⁷ $SL(2, \mathbb{R})$ grupe izometrija koja je generirana sa

$$\tilde{J}_0 = 2\partial_\tau \quad (2.28)$$

$$\tilde{J}_1 = \frac{2r \sin \tau}{\sqrt{1+r^2}} \partial_\tau - 2\sqrt{1+r^2} \cos \tau \partial_r + \frac{2 \sin \tau}{\sqrt{1+r^2}} \partial_\varphi \quad (2.29)$$

$$\tilde{J}_2 = -\frac{2r \cos \tau}{\sqrt{1+r^2}} \partial_\tau - 2\sqrt{1+r^2} \sin \tau \partial_r - \frac{2 \cos \tau}{\sqrt{1+r^2}} \partial_\varphi \quad (2.30)$$

Također imamo invarijantnost metrike na diskretnu simetriju koja preslikava

$$(\tau, \varphi) \rightarrow (-\tau, -\varphi)$$

Lako je provjeriti da su ovi vektori uistinu Killingovi vektori ako riješimo Killingovu jednadžbu, odnosno ako provjerimo da Liejeva derivacija metrike po Killingovom vektoru iščezava [5].

⁷ $SL(2, \mathbb{R}) \times U(1)$ nije simetrija standardne Kerrove metrike, nego je simetrija blizu horizonta, zato kažemo da je ona pojačana (engl. *enhanced*) simetrija, koja je veća od standardne simetrije za Kerrovu metriku.

$$\mathcal{L}_\xi g_{\mu\nu} = 0 \quad (2.31)$$

Algebra za Killingove vektore $\xi_i = \xi_i^\mu \partial_\mu$ ($i = 1, 2, 3$) je dana preko izraza

$$[\xi_a, \xi_b] = (\xi_a^\nu \partial_\nu \xi_b^\mu - \xi_b^\nu \partial_\nu \xi_a^\mu) \partial_\mu$$

Za tri generatora $SL(2, \mathbb{R})$ grupe algebra iznosi⁸

$$[\tilde{J}_0, \tilde{J}_1] = -2\tilde{J}_2, \quad [\tilde{J}_0, \tilde{J}_2] = 2\tilde{J}_1, \quad [\tilde{J}_1, \tilde{J}_2] = 2\tilde{J}_0 \quad (2.32)$$

Ako postavimo $\Lambda(\theta_0) = 1$, za vrijednost kuta $\theta = \theta_0 \simeq 47.0586^\circ$, dobivamo 3D geometriju koja je lokalno ‘izvijena’ (engl. *warped*) verzija AdS_3

$$ds^2 = 2GJ\Omega^2 \left(-(1+r^2)d\tau^2 + \frac{dr^2}{1+r^2} + (d\varphi + rd\tau)^2 \right) \quad (2.33)$$

Za vrijednost kuta $\theta = \theta_0$ vektor ∂_t postane nul vektor, dok za $\theta \in \langle \theta_0, \pi - \theta_0 \rangle$, ∂_t postaje prostornog tipa, što je izravna posljedica prisutnosti ergoregije u originalnoj Kerrovoj metriki (2.1).

Izvijene AdS_3 geometrije koje se javljaju na proizvoljnim fiksnim vrijednostima kuta θ su Lorentzijanski⁹ analogoni spljoštene S^3 (3-sfera).

2.1.2 Izvijene geometrije

Izvijena (engl. *warped*) geometrija je Riemannova ili Lorentzijanska mnogostrukost čiji se metrički tenzor može zapisati kao

$$ds^2 = g_{ab}(y)dy^a dy^b + f(y)g_{ij}(x)dx^i dx^j$$

Geometrija se skoro rastavlja na Kartezijev produkt y geometrije i x geometrije - osim što je x dio izvijen, odnosno reskaliran je skalarnom funkcijom druge koordinate y .

⁸Ove komutacijske relacije se razlikuju od onih iz definicije algebre $SL(2, \mathbb{R})$ grupe, no to nas ne treba čuditi, jer je reprezentacija generatora grupe drugačija u ovom slučaju. Sama svojstva grupe se ne mijenjaju.

⁹O Riemannovim i pseudo-Riemannovim mnogostrukostima pogledajte u dodatku A

Maksimalno simetričan prostor sa konstantnom negativnom zakrivljenosti ($R < 0$) se naziva anti-de Sitter prostor. 2+1 dimenzionalan anti-de Sitter prostor je definiran kao hiperploha radijusa zakrivljenosti ℓ^{10}

$$x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = -\ell^2$$

uronjena u četverodimenzionalan ravni prostor s metrikom

$$ds^2 = dx_0^2 + dx_1^2 - dx_2^2 - dx_3^2$$

odnosno skraćeno

$$g_{ab} = \text{diag}(1, 1, -1, -1)$$

Po konstrukciji AdS_3 metrika je invarijantna na djelovanje grupe $SO(2, 2)$ [13, 14]. Killingovi vektori su:

$$J_{ab} = x_a \frac{\partial}{\partial x^b} - x_b \frac{\partial}{\partial x^a}$$

$SO(p, q)$ je specijalna neodređena ortogonalna grupa (engl. *special indefinite orthogonal group*), dimenzije $n = p + q$, u našem slučaju $n = 4$, te ima $n(n - 1)/2$ Killingovih vektora (u našem sličaju 6). Oni su

$$\begin{aligned} J_{01} &= x_0 \partial_1 - x_1 \partial_0 & J_{02} &= x_0 \partial_2 + x_2 \partial_0 & J_{03} &= x_0 \partial_3 + x_3 \partial_0 \\ J_{12} &= x_1 \partial_2 + x_2 \partial_1 & J_{13} &= x_1 \partial_3 + x_3 \partial_1 & J_{23} &= x_3 \partial_2 - x_2 \partial_3 \end{aligned}$$

Algebra je dana sa

$$[J_{ab}, J_{cd}] = g_{ad} J_{bc} - g_{ac} J_{bd} + g_{bc} J_{ad} - g_{bd} J_{ac}$$

Na primjer

$$[J_{01}, J_{02}] = g_{02} J_{10} - g_{00} J_{12} + g_{10} J_{02} - g_{12} J_{00} = -g_{00} J_{12} = -J_{12}$$

¹⁰Katkad se stavlja da je $\ell = 1$ radi jednostavnosti, pošto se radijus zakrivljenosti javlja kao faktor ispred metrike pa ne mijenja bitno njen oblik.

Što je lako za provjeriti rukom eksplicitno.

Topologija prostora je $\mathbb{R}^2 \times S^1$, dok grupa izometrija $SO(2, 2)$ ima lokalni izomorfizam

$$SO(2, 2) \simeq SL(2, \mathbb{R})_R \times SL(2, \mathbb{R})_L$$

Linearnom kombinacijom tih vektora dobivamo nove vektore koji su reprezentacija Liejeve algebre $sl(2, \mathbb{R})$ (bez tilde su generatori $SL(2, \mathbb{R})_L$, dok su sa tildom generatori $SL(2, \mathbb{R})_R$):

$$J_0 = J_{01} - J_{23} \quad J_1 = J_{13} - J_{02} \quad J_2 = -J_{12} - J_{03}$$

$$\tilde{J}_0 = -J_{01} - J_{23} \quad \tilde{J}_1 = J_{13} + J_{02} \quad \tilde{J}_2 = J_{12} - J_{03}$$

Sa algebram

$$[J_1, J_2] = 2J_0, \quad [J_0, J_1] = -2J_2 \quad [J_0, J_2] = 2J_1$$

odnosno

$$[\tilde{J}_1, \tilde{J}_2] = 2\tilde{J}_0, \quad [\tilde{J}_0, \tilde{J}_1] = -2\tilde{J}_2 \quad [\tilde{J}_0, \tilde{J}_2] = 2\tilde{J}_1$$

Izborom koordinatnog sustava (τ, ω, σ) , pri čemu nam nove koordinate pokrivaju čitav prostor $(\{\tau, \omega, \sigma\} \in \langle -\infty, \infty \rangle)$, gdje je veza starih i novih koordinata¹¹

$$\begin{aligned} x_0 &= \ell \left(\cos \left(\frac{\tau}{2} \right) \cosh \left(\frac{\sigma}{2} \right) \sinh \left(\frac{\omega}{2} \right) - \sin \left(\frac{\tau}{2} \right) \sinh \left(\frac{\sigma}{2} \right) \cosh \left(\frac{\omega}{2} \right) \right) \\ x_1 &= \ell \left(\cos \left(\frac{\tau}{2} \right) \sinh \left(\frac{\sigma}{2} \right) \cosh \left(\frac{\omega}{2} \right) + \sin \left(\frac{\tau}{2} \right) \cosh \left(\frac{\sigma}{2} \right) \sinh \left(\frac{\omega}{2} \right) \right) \\ x_2 &= \ell \left(\cos \left(\frac{\tau}{2} \right) \cosh \left(\frac{\sigma}{2} \right) \cosh \left(\frac{\omega}{2} \right) + \sin \left(\frac{\tau}{2} \right) \sinh \left(\frac{\sigma}{2} \right) \sinh \left(\frac{\omega}{2} \right) \right) \\ x_3 &= \ell \left(\sin \left(\frac{\tau}{2} \right) \cosh \left(\frac{\sigma}{2} \right) \cosh \left(\frac{\omega}{2} \right) - \cos \left(\frac{\tau}{2} \right) \sinh \left(\frac{\sigma}{2} \right) \sinh \left(\frac{\omega}{2} \right) \right) \end{aligned}$$

metrika anti-de Sitter prostora postaje

¹¹Proceduru prelaska u nove koordinate računamo u Mathematici, jer su diferencijali veoma složeni. Izvod možete naći u [15].

$$\begin{aligned}
ds^2 &= \frac{\ell^2}{4}(-d\tau^2 + d\omega^2 + d\sigma^2 + 2\sinh\omega d\tau d\sigma) = \\
&= \frac{\ell^2}{4}(-(d\tau - \sinh\omega d\sigma)^2 + d\omega^2 + \cosh^2\omega d\sigma^2) = \\
&= \frac{\ell^2}{4}(-\cosh^2\omega d\tau^2 + d\omega^2 + (d\sigma + \sinh\omega d\tau)^2)
\end{aligned}$$

Ako to usporedimo sa (2.33), vidimo da imamo isti oblik metrike uz $\varphi \rightarrow \sigma$ i $r = \sinh\omega$. Killingovi vektori u ovoj bazi su

$$\begin{aligned}
J_0 &= \frac{2\cosh\sigma}{\cosh\omega}\partial_\tau + 2\sinh\sigma\partial_\omega - 2\tanh\omega\cosh\sigma\partial_\sigma \\
J_1 &= \frac{2\sinh\sigma}{\cosh\omega}\partial_\tau + 2\cosh\sigma\partial_\omega - 2\tanh\omega\sinh\sigma\partial_\sigma \\
J_2 &= 2\partial_\sigma \\
\tilde{J}_0 &= 2\partial_\tau \\
\tilde{J}_1 &= 2\sin\tau\tanh\omega\partial_\tau - 2\cos\tau\partial_\omega + \frac{2\sin\tau}{\cosh\omega}\partial_\sigma \\
\tilde{J}_2 &= -2\cos\tau\tanh\omega\partial_\tau - 2\sin\tau\partial_\omega - \frac{2\cos\tau}{\cosh\omega}\partial_\sigma
\end{aligned}$$

Metrika spljoštenog (engl. *squashed*) AdS_3 prostora je

$$ds_\lambda^2 = \frac{\ell^2}{4}(-\cosh^2\omega d\tau^2 + d\omega^2 + \lambda^2(d\sigma + \sinh\omega d\tau)^2)$$

pri čemu je λ realni parametar (*squashing parameter*). Ako njega stavimo da je nula, dobivamo metriku AdS_2 prostora.

Lako je eksplicitno pokazati, rješavajući Killingovu jednadžbu u slučaju izvijene AdS_3 metrike, da vektori J_0 i J_1 više nisu Killingovi vektori za tu metriku. $SL(2, \mathbb{R})_R$ vektori i J_2 vektor ostaju Killingovi vektori za izvijenu geometriju. Pošto je σ koordinata u biti φ koordinata (iz usporedbe sa (2.33) metrikom), vektor $J_2 = 2\partial_\sigma$ identificiramo kao rotacijski Killingov vektor, odnosno onaj koji generira $U(1)$ grupu izometrija.

Uvođenjem faktora λ 'izvili' smo originalnu geometriju i time smo slomili originalnu simetriju AdS_3 prostora sa $SL(2, \mathbb{R})_R \times SL(2, \mathbb{R})_L$ na $SL(2, \mathbb{R})_R \times U(1)_L$.

Detaljnije o izvijenim geometrijama možete naći u [15, 16, 14].

3

Grupa asimptotskih simetrija

DIFEOMORFNA invarijantnost je osnovna simetrija opće teorije relativnosti. U prostor-vremenima koji posjeduju asimptotsku granicu, javlja se podgrupa difeomorfizama koji tvore grupu asimptotskih simetrija (engl. *asymptotic symmetry group* (ASG)), koja djeluje netrivialno na asimptotsku granicu.

Po definicij, asimptotske simetrije su one baždarne transformacije koje ostavljaju promatrane konfiguracije polja asimptotski invarijantnim [3]. Detalji grupe asimptotskih simetrija će ovisiti o promatranom prostor-vremenu, dinamici te o nametnutim rubnim uvjetima. Formalizam koji koristimo je onaj koji su razvili Barnich i Brandt [17].

Rubni uvjeti su ograničenja na dopuštene konačne deformacije pozadinske metrike. Ako pozadinsku metriku označimo sa $\bar{g}_{\mu\nu}$ i deformaciju sa $h_{\mu\nu}$, deformirana metrika je $g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$.

Jedan od problema u Kerr/CFT korespondenciji je taj što nije a priori očito koje rubne uvjete moramo postaviti da bismo dobili odgovarajuće difeomorfizme koji će nam koristiti u računu centralnog naboja potrebnog za dokaz korespondencije (nemamo asimptot-

ski ravno prostor-vrijeme). Oni uvelike ovise o fizikalnim kontekstu. Difeomorfizam generiran vektorom ξ će transformirati pozadinsku metriku

$$\bar{g}_{\mu\nu} + \mathcal{L}_\xi \bar{g}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$$

za neku deformaciju $h_{\mu\nu}$.

Da bismo definirali asimptotske simetrije pozadinskog prostor-vremena, moramo specificirati dozvoljene fluktuacije $h_{\mu\nu}$ i dozvoljene difeomorfizme ξ .

Način na koji definiramo ASG je sljedeći:

1. Definiramo *granicu* prostor-vremena.

Moramo definirati što znači ‘ići u beskonačnost’. Obično se uzima da nam radijalna koordinata ide u beskonačnost $r \rightarrow \infty$, dok su nam ostale koordinate fiksne.

2. Definiramo *rubne uvjete* za pozadinsku metriku.

Jedan od načina je da pretpostavimo funkcionalnu formu rubnih uvjeta $h_{\mu\nu}$. Uzmamo da se $h_{\mu\nu}$ može razviti polinomno bar do drugog reda u r kao

$$h_{\mu\nu} = h_{\mu\nu}^1 r^m + h_{\mu\nu}^2 r^{m-1} + o(r^{m-1})$$

U našem slučaju, rubni uvjeti specificiraju $h_{\mu\nu} \rightarrow \mathcal{O}(r^m)$ u beskonačnosti, za neki r^m , pri čemu je $m(\mu, \nu)$ cijeli broj.

3. Trebamo naći najopćenitiji oblik difeomorfizama ξ koji čuvaju rubne uvjete (to jest, zadovoljava $\mathcal{L}_\xi g_{\mu\nu} = \mathcal{O}(r^m)$ za $g_{\mu\nu}$ koji zadovoljava rubne uvjete) i formiraju dobro definiranu algebru danu Lievim zagradama. Takvi difeomorfizmi su *kandidati za asimptotske simetrije*. Podskup tih difeomorfizama će biti unaprijeđen u ASG (i odgovarajuću algebru u algebru asimptotskih simetrija), ako difeomorfizmi zadovoljavaju uvjete koji će biti navedeni. Kao i sa perturbacijama $h_{\mu\nu}$, ovaj korak uključuje pretpostavljanje forme ξ . Pretpostavljamo da se ξ mogu razviti u red kao:

$$\xi^\mu = r^{m_\mu} \tilde{\xi}^\mu + o(r^{m_\mu})$$

gdje je $\tilde{\xi}^\mu$ neka funkcija od koordinata koje nisu r^1 .

4. Zatim računamo *naboje* pridružene kandidatima asimptotskih simetrija.

Formalizam Barnicha i Brandta [17] omogućuje nam definiranje naboja kao površinskih integrala duž granice $\partial\Sigma$ nul ili prostornog izreza (granica ne mora biti u beskonačnosti). Zato trebamo, umjesto Noetherine struje koja je $(n - 1)$ forma, $(n - 2)$ forme, koje se računaju lokalno kao funkcional polja u prostornoj beskonačnosti. Te $(n - 2)$ forme se nazivaju superpotencijali [18]. Odgovarajući naboj za asimptotsku simetriju ξ je

$$Q_\xi[g, \bar{g}] = \int_{\partial\Sigma} k_\xi[h, \bar{g}] \quad (3.1)$$

gdje je k_ξ $(n - 2)$ forma konstruirana iz lineariziranih jednadžbi gibanja za $h_{\mu\nu}$, a n je broj dimenzija prostor-vremena. Explicitan izraz za k_ξ je

$$\begin{aligned} k_\xi[h, \bar{g}] &= k_\xi^{[\nu\mu]}[h, \bar{g}](d^{n-2}x)_{\nu\mu} \\ (d^{n-p}x)_{\mu_1 \dots \mu_p} &:= \frac{1}{p!(n-p)!} \epsilon_{\mu_1 \dots \mu_n} dx^{\mu_{p+1}} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_n} \\ k_\xi^{[\nu\mu]}[h, \bar{g}] &= -\frac{\sqrt{-\bar{g}}}{16\pi} [\bar{D}^\nu(h\xi^\mu) + \bar{D}_\sigma(h^{\mu\sigma}\xi^\nu) + \bar{D}^\mu(h^{\nu\sigma}\xi_\sigma) + \\ &\quad + \frac{3}{2}h\bar{D}^\mu\xi^\nu + \frac{3}{2}h^{\sigma\mu}\bar{D}^\nu\xi_\sigma + \frac{3}{2}h^{\nu\sigma}\bar{D}_\sigma\xi^\mu - (\mu \leftrightarrow \nu)] \end{aligned} \quad (3.2)$$

Indekse dižemo i spuštamo pozadinskom metrikom $\bar{g}_{\mu\nu}$, $h = \bar{g}^{\mu\nu}h_{\mu\nu}$ je trag, dok je \bar{D}^μ pozadinska kovariantna derivacija.

Općenito, izraz (3.1) vrijedi samo za infinitezimalne perturbacije $h_{\mu\nu}$. Za konačne $h_{\mu\nu}$ moramo integrirati duž puta γ u faznom prostoru da bismo mogli izračunati naboje. Zbog konzistentnosti, naboji moraju biti *integrabilni*, što znači da su neovisni o putu γ . Dovoljan uvjet integrabilnosti je

¹Često se uzima da je razvoj ξ^μ razvoj u padajućim potencijama koordinate r , odnosno $\xi^\mu = \sum_n \tilde{\xi}_n^\mu(\tau, \theta, \phi)r^{-n}$

$$\int_{\partial\Sigma} k_\xi[\delta h_1, g + \delta h_2] - k_\xi[\delta h_2, g + \delta h_1] - k_\xi[\delta h_1 - \delta h_2, g] = 0$$

za bilo koju metriku $g_{\mu\nu}$ dopuštenu s rubnim uvjetima. Integrabilnost je isto tako zadovoljena kada je svojstvo *asimptotske linearnosti* ispunjeno

$$Q_\xi[h, \bar{g}] = Q_\xi[h, \bar{g} + \delta g]$$

odnosno, naboj nema nelinearnih korekcija.

5. Trebamo odrediti da li su nam naboji *konačni*, *integrabilni* i *očuvani na ljusci*, gdje ‘na ljusci’ podrazumijevamo da perturbacije zadovoljavaju linearizirane Einsteinove jednačbe.

Difeomorfizmi ξ koji odgovaraju ne iščezavajućim nabojima, koji zadovoljavaju ove uvjete, su element ASG. Difeomorfizmi koji odgovaraju trivijalnim nabojima su trivijalne asimptotske simetrije.

ASG se sastoji od svih dopuštenih asimptotskih simetrija koje zadovoljavaju rubne uvjete za $h_{\mu\nu}$ i odgovaraju konačnim, integrabilnim i očuvanim nabojima, modulo trivijalnih asimptotskih simetrija. Vektori ξ koji generiraju difeomorfizme su *asimptotski Killingovi vektori*.

$$ASG(\mathcal{M}) := \left\{ \xi^\mu \mid \mathcal{L}_\xi \text{ poštuje rubne uvjete i } Q_\xi \neq 0 \right\}$$

6. Računamo algebru naboja danu Diracovim zagradama. Algebra je definirana kao

$$\{Q_{\xi_1}, Q_{\xi_2}\} := \delta_{\xi_2} Q_{\xi_1} = Q_{\xi_1}[\mathcal{L}_{\xi_2} g, \bar{g}]$$

te nam daje reprezentaciju algebre asimptotskih simetrija ξ , do na moguće centralne ekstenzije $\mathcal{K}_{\xi_1, \xi_2}[\bar{g}]$

$$\{Q_{\xi_1}, Q_{\xi_2}\} \simeq Q_{[\xi_1, \xi_2]} + \mathcal{K}_{\xi_1, \xi_2}[\bar{g}] - N_{[\xi_1, \xi_2]}[\bar{g}]$$

Gdje je $N_{[\xi_1, \xi_2]}[\bar{g}]$ proizvoljna normalizacijska konstanta koja je obično nula. U gornjoj formuli “ \simeq ” označava jednakost na ljusci. Eksplicitni izraz za centralni naboj $\mathcal{K}_{\xi_1, \xi_2}[\bar{g}]$ je

$$\mathcal{K}_{\xi_1, \xi_2}[\bar{g}] = Q_{\xi_1}[\mathcal{L}_{\xi_2}\bar{g}, \bar{g}]$$

Centralni naboj je netrivialan ako se ne može apsorbirati u $N_{[\xi_1, \xi_2]}[\bar{g}]$.

Rubni uvjeti su dio specifikacije ASG. Drugačiji rubni uvjeti mogu dati različite grupe asimptotskih simetrija. Problem je ako izaberemo preslabe rubne uvjete, generatori nam neće biti dobro definirani i integrali za računanje naboja će divergirati, no ako stavimo prerestriktivne rubne uvjete, teorija postaje trivijalna jer će nam svi generatori iščeznuti.

Ono što ćemo mi napraviti je reproducirati i objasniti postupak računa iz članka Guica et. al. [5]. Također treba napomenuti da su nađeni i drugi konzistentni rubni uvjeti [19, 20] koje ćemo komentirati kasnije.

3.1 Algebra difeomorfizama

Detaljno ćemo izvesti račun iz članka [5]. Krećemo od metrike blizu horizonta ekstremne Kerrove crne rupe (2.25)

$$d\bar{s}^2 = 2GJ\Omega^2 \left(-(1+r^2)d\tau^2 + \frac{dr^2}{1+r^2} + d\theta^2 + \Lambda^2(d\varphi + r d\tau)^2 \right)$$

Pošto nemamo asimptotski ravno prostor-vrijeme na granici $r \rightarrow \infty$, nisu nam poznati rubni uvjeti, kao što je to slučaj s AdS_3 [3]. Stoga ih moramo sami zadati te provjeriti da li će nam dobiveni difeomorfizmi dati naboje koji su konačni i integrabilni.

Cilj je, preko zadanih rubnih uvjeta konstruirati asimptotski Killingov vektor ξ koji, uz izbor funkcija ovisno o simetrijama, zadovoljava Virasoro algebru.

Radimo u bazi (τ, r, θ, ϕ) te pišemo rubne uvjete

$$\begin{array}{cccc} \tau & r & \theta & \varphi \\ \left(\begin{array}{cccc} h_{\tau\tau} = \mathcal{O}(r^2) & h_{\tau r} = \mathcal{O}(r^{-2}) & h_{\tau\theta} = \mathcal{O}(r^{-1}) & h_{\tau\varphi} = \mathcal{O}(1) \\ h_{r\tau} = \mathcal{O}(r^{-2}) & h_{rr} = \mathcal{O}(r^{-3}) & h_{r\theta} = \mathcal{O}(r^{-2}) & h_{r\varphi} = \mathcal{O}(r^{-1}) \\ h_{\theta\tau} = \mathcal{O}(r^{-1}) & h_{\theta r} = \mathcal{O}(r^{-2}) & h_{\theta\theta} = \mathcal{O}(r^{-1}) & h_{\theta\varphi} = \mathcal{O}(r^{-1}) \\ h_{\varphi\tau} = \mathcal{O}(1) & h_{\varphi r} = \mathcal{O}(r^{-1}) & h_{\varphi\theta} = \mathcal{O}(r^{-1}) & h_{\varphi\varphi} = \mathcal{O}(1) \end{array} \right) \end{array} \quad (3.3)$$

$h_{\mu\nu} = h_{\nu\mu}$ je devijacija metrike od pozadinske NHEK metrike \bar{g} (2.26)

Rješavamo asimptotsku Killingovu jednadžbu

$$\mathcal{L}_\xi \bar{g}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} \quad (3.4)$$

Zbog činjenice da je ovo jednadžba za simetričan tenzor, imamo 10 nezavisnih linearnih parcijalnih diferencijalnih jednadžbi prvog reda za vektor $\xi = \xi^\mu \partial_\mu$ ².

Pretpostavljamo da nam komponente željenog difeomorfizma imaju ansatz

$$\xi^\mu = \sum_{n=-1}^{\infty} \xi_n^\mu(\tau, \theta, \varphi) r^{-n} \quad (3.5)$$

²To bi za simetričan tenzor u D dimenzija dalo $D(D+1)/2$ jednadžbe.

Uvrštavajući pretpostavljeni ansatz, nakon poduljeg računa danog u dodatku C dobijemo najopćenitiji difeomorfizam koji čuva rubne uvjete (3.3)

$$\xi = [C + \mathcal{O}(r^{-3})]\partial_\tau + [-r\epsilon'(\varphi) + \mathcal{O}(1)]\partial_r + \mathcal{O}(r^{-1})\partial_\theta + [\epsilon(\varphi) + \mathcal{O}(r^{-2})]\partial_\varphi \quad (3.6)$$

gdje je $\epsilon(\varphi)$ proizvoljna glatka funkcija, a C je proizvoljna konstanta. Članovi nižeg reda će odgovarati trivijalnim difeomorfizmima. Grupa asimptotskih simetrija sadrži jednu kopiju konformne cikličke grupe generirane vektorom

$$\xi_\epsilon = \epsilon(\varphi)\partial_\varphi - r\epsilon'(\varphi)\partial_r \quad (3.7)$$

Jedan od fizikalnih razloga za ovakav izgled difeomorfizma jest taj što imamo ne nula temperaturu koja je asocirana s modovima koji korotiraju sa crnom rupom. Odnosno duž horizonta crne rupe opažači se gibaju brzinom svjetlosti. Postojanje temperature ukazuje na postojanje ekscitacija duž ∂_φ . Pošto imamo $\varphi \sim \varphi + 2\pi$, možemo definirati $\epsilon_n(\varphi) = -e^{-in\varphi}$ i $\xi_n = \zeta(\epsilon_n)$.

Ovakvi generatori simetrija će zadovoljavati Virasoro algebru D

$$i[\xi_m, \xi_n] = (m - n)\xi_{m+n} \quad (3.8)$$

Ako stavimo $n = 0$ imamo

$$\xi_0 = -\partial_\varphi \quad (3.9)$$

što je upravo generator $U(1)$ rotacijske izometrije.

Treba uočiti da ovakav odabir rubnih uvjeta ne daje generatore koji će pojačati $SL(2, \mathbb{R})$ u Virasoro algebru.

Generator τ translacija je ∂_τ . Konjugirana očuvana veličina, očuvani naboj, tog generatora je veličina E_R koja mjeri devijaciju od ekstrema ($M^2/G - J$) crne rupe. Pošto razmatramo ekstremne crne rupe ($J = M^2$) tada je $E_R = 0$, odnosno uzet je dodatan zahtjev $Q_{\partial_\tau} = 0$. U članku od Guice et. al. [5] je dano pojašnjenje takvog odabira.

U člancima [19, 20] uz drugačiji izbor rubnih uvjeta dobiju difeomorfizam

$$\xi = [\epsilon_\tau(\tau) + \mathcal{O}(r^{-1})]\partial_\tau + [-r\epsilon'_\tau(\tau) - r\epsilon'_\varphi(\varphi) + \mathcal{O}(1)]\partial_r + \mathcal{O}(r^{-1})\partial_\theta + [\epsilon_\varphi(\varphi) + \mathcal{O}(r^{-1})]\partial_\varphi \quad (3.10)$$

Uz izbor $\epsilon_n(\varphi) = e^{-in\varphi}$ i $\epsilon_n(\tau) = \tau^{1+n}$ dobiju se generatori

$$l_n = e^{-in\varphi}\partial_\varphi + inre^{-in\varphi}\partial_r, \quad \bar{l}_n = -i\tau^{1+n} + i(1+n)r\tau^n\partial_r \quad (3.11)$$

koji zadovoljavaju Virasoro algebre

$$i[l_n, l_m] = (n-m)l_{n+m}, \quad i[\bar{l}_n, \bar{l}_m] = (n-m)\bar{l}_{n+m} \quad (3.12)$$

Dvije algebre možemo shvatiti kao algebre lijevih i desnih modova (engl. *movers*) u CFT. Također za $n = 0$ ponovo dobijemo generator $U(1)$ izometrije l_0 , dok za $n = -1, 0, 1$ za \bar{l}_n dobijemo $SL(2, \mathbb{R})$ Killingove vektore.

Treba naglasiti da ako uključimo difeomorfizme koji dopuštaju pojačavanje $SL(2, \mathbb{R})$ grupe izometrija u Virasoro, dobijemo trivijalne naboje (koje ćemo izračunati za (3.6) i pokazati da nisu 0).

U slučaju ekstremnih geometrija nas ne zanima netrivialna $SL(2, \mathbb{R})$ ili druga Virasoro algebra, jer je entropija ekstremnih crnih rupa dana koristeći samo jednu kopiju Virasoro algebre, dok druga kopija mjeri odstupanje od ekstrema crne rupe.

Jedna od mogućnosti je da se konstruira regija blizu horizonta za ne ekstremne crne rupe preko perturbacijske teorije, kao velika deformacija geometrije blizu horizonta ekstremne crne rupe.

U tom slučaju se algebra difeomorfizama, koja proširuje $SL(2, \mathbb{R})$ algebru na Virasoro, dobiva preko renormalizabilnog tenzora energije-impulsa (koji je ekvivalentan kvazi-lokalnom Brown-York tenzoru energije-impulsa). No takav opis više ne spada u standardnu asimptotsku analizu.

3.2 Generatori i centralni naboj

Nakon što smo našli difeomorfizam trebamo konstruirati površinske integrale koji generiraju difeomorfizme (3.6) preko Diracovih zagrada i moramo vidjeti da li su konačni. Koristimo kovarijantni formalizam Barnicha i Brandta [17] naveden u poglavlju 3.

Generator difeomorfizma ξ je očuvan naboj $Q_\xi[g]$. Pod Diracovim zgradama, naboji pridruženi asimptotskim simetrijama zadovoljavaju istu algebru kao i same simetrije do na centralni član. Infinitezimalna razlika naboja između susjednih geometrija $g_{\mu\nu}$ i $g_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ je dana sa

$$\delta Q_\xi[g] = \frac{1}{8\pi G} \int_{\partial\Sigma} k_\xi[h, g] \quad (3.13)$$

pri čemu integriramo po granici prostornog izreza ($\tau, r = \text{const.}$), a $k_\xi[h, g]$ je dan sa

$$k_\xi[h, g] = -\frac{1}{4}\epsilon_{\alpha\beta\mu\nu} \left[\xi^\nu \bar{D}^\mu h - \xi^\nu \bar{D}_\sigma h^{\mu\sigma} + \xi_\sigma \bar{D}^\nu h^{\mu\sigma} + \frac{1}{2} h D^\nu \xi^\mu - \right. \\ \left. - h^{\nu\sigma} \bar{D}_\sigma \xi^\mu + \frac{1}{2} h^{\sigma\nu} (\bar{D}^\mu \xi_\sigma + \bar{D}_\sigma \xi^\mu) \right] dx^\alpha \wedge dx^\beta \quad (3.14)$$

Algebra Diracovih zagrada grupe asimptotskih simetrija je dana variranjem naboja

$$\{Q_{\xi_m}, Q_{\xi_n}\} = Q_{[\xi_m, \xi_n]} + \frac{1}{8\pi G} \int_{\partial\Sigma} k_{\xi_m}[\mathcal{L}_{\xi_n} \bar{g}, \bar{g}] \quad (3.15)$$

Centralni član računamo tako da uzmemo superpotencijal (3.14) te koristimo $h_{\mu\nu} = \mathcal{L}_{\xi_n} \bar{g}_{\mu\nu}$, gdje je $\bar{g}_{\mu\nu}$ pozadinska metrika (NHEK). Za ξ^μ uzimamo difeomorfizam (3.6) ξ_m , a indekse spuštamo i dižemo pozadinskom metrikom. Integriramo 2-formu koja je proporcionalna volumnom članu $-\sqrt{-|g|} d\theta d\varphi$, za $\tau, r = \text{const.}$ ($\theta \in [0, \pi], \varphi \in [0, 2\pi]$). Čitava procedura je dosta duga te se preporuča korištenje programskih alata poput Mathematice.

Fizikalno je $Q_{\xi_m}[h, g]$ definiran kao naboj linearizirane metrike $h_{\mu\nu}$ oko pozadine $g_{\mu\nu}$ kojoj je pridružen Killingov vektor ξ , dobiven iz Einsteinovih jednažbi. U našem slučaju linearizirana metrika je dana kao Liejeva derivacija pozadinske metrike duž asimptotskog Killingovog vektora (difeomorfizma).

Liejeva derivacija je

$$h_{\mu\nu} = 4iGJ\Omega^2 n e^{-in\varphi} \begin{pmatrix} -r^2(\Lambda^2 - 1) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{(1+r^2)^2} & 0 & i\frac{rn}{2(1+r^2)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i\frac{rn}{2(1+r^2)} & 0 & \Lambda^2 \end{pmatrix} \quad (3.16)$$

Indekse podižemo sa pozadinskom metrikom: $h^{\alpha\beta} = \bar{g}^{\alpha\mu}\bar{g}^{\beta\nu}h_{\mu\nu}$, $h = \bar{g}^{\mu\nu}h_{\mu\nu} = 0$. Pošto integriramo po 2-sferi fiksnog radijusa Levi-Civita simbol $\epsilon_{\alpha\beta\mu\nu}$ može imati indekse $\epsilon_{\theta\varphi\tau r} = 1$ ili $\epsilon_{\theta\varphi r\tau} = -1$.

Superpotencijal, nakon uvrštavanja mogućih indeksa, postaje

$$k_{\xi_m} = 2 \left\{ -\frac{1}{4} \left[-\xi^r \bar{D}_\sigma h^{\tau\sigma} + \xi_\sigma \bar{D}^r h^{\tau\sigma} + \frac{1}{2} h^{\sigma r} \bar{D}^\tau \xi_\sigma \right] + \right. \\ \left. + \frac{1}{4} \left[\xi_\sigma \bar{D}^\tau h^{r\sigma} - h^{\tau\sigma} \bar{D}_\sigma \xi^r + \frac{1}{2} h^{\sigma\tau} (\bar{D}^r \xi_\sigma + \bar{D}_\sigma \xi^r) \right] \right\} d\theta \wedge d\varphi \quad (3.17)$$

Za primjer podizanja i spuštanja indeksa uzimamo drugi član. Dizanje i spuštanje indeksa se isto može napraviti pomoću Mathematice, no korisno je prvo rukom provesti račun i onda provjeriti da li je to ispravno preko Mathematice. Integraciju ne radimo rukom jer je konačni izraz prekomplikiran.

$$\begin{aligned} \xi_\sigma \bar{D}^r h^{\tau\sigma} &= g_{\alpha\sigma} \xi^\alpha g^{r\beta} \bar{D}_\beta h^{\tau\sigma} = \\ &= g_{r\sigma} \xi^r g^{rr} \bar{D}_r h^{\tau\sigma} + g_{\varphi\sigma} \xi^\varphi g^{rr} \bar{D}_r h^{\tau\sigma} = \\ &= g_{rr} \xi^r g^{rr} \bar{D}_r h^{\tau r} + g_{\varphi\varphi} \xi^\varphi g^{rr} \bar{D}_r h^{\tau\varphi} \end{aligned} \quad (3.18)$$

Treba napomenuti da se u nekim članovima javlja izraz tipa $\bar{D}_\mu \xi_\nu$. Želimo dići indeks ξ_ν da bismo dobili vektor. Tu moramo iskoristiti činjenicu da je metrika kovarijantno konstantna, odnosno $\bar{D}_\alpha \bar{g}_{\mu\nu} = 0$ pa možemo komponentu metrike izlučiti ispred kovarijantne derivacije, odnosno $\bar{D}_\mu \xi_\nu = \bar{D}_\mu g_{\nu\alpha} \xi^\alpha = g_{\nu\alpha} \bar{D}_\mu \xi^\alpha$.

Nakon što sredimo sve članove i uvrstimo sve u Mathematicu, dobivamo izraz

$$k_{\xi_m} = e^{-i(m+n)\varphi} f(r, \theta)$$

Tu moramo koristiti trik prilikom integracije. Naš integral je

$$\frac{1}{8\pi G} \int_{\partial\Sigma} k_{\xi_m} [\mathcal{L}_{\xi_n} \bar{g}, \bar{g}] = \frac{1}{4\pi G} \lim_{r \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sqrt{-|\bar{g}|} k_{\xi_m} [\mathcal{L}_{\xi_n} \bar{g}, \bar{g}] d\theta d\varphi \quad (3.19)$$

Koristimo integralnu reprezentaciju Kronecker delta

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(n-m)\varphi} d\varphi = \delta_{n,m} \quad (3.20)$$

Time nam u biti ostaje samo integral po θ . Konačni rezultat integracije je

$$\frac{1}{8\pi G} \int_{\partial\Sigma} k_{\xi_m} [\mathcal{L}_{\xi_n} \bar{g}, \bar{g}] = i\frac{1}{2}n(4 - mn + n^2) J\delta_{m+n,0} = -im(m^2 + 2)J\delta_{m+n} \quad (3.21)$$

Zatim definiramo kvantnu verziju naboja Q preko

$$\hbar L_n := Q_{\xi_n} + \frac{3}{2}J\delta_n$$

te uz pravilo promijene Diracovih zagrada između generatora u komutatore kvantnih operatora $\{.,.\} \rightarrow -\frac{i}{\hbar}[\cdot, \cdot]$ dobivamo kvantnu algebru naboja

$$[L_m, L_n] = (m - n)L_{m+n} + \frac{J}{\hbar}m(m^2 - 1)\delta_{m+n,0} \quad (3.22)$$

što je Virasoro algebra. Iz nje možemo direktno očitati centralni naboj ekstremne Kerrove crne rupe kao

$$c_L = \frac{12J}{\hbar} \quad (3.23)$$

4

Mikroskopska entropija i dokaz korespondencije

NAKON što smo dobili vrijednost centralnog naboja, koji igra ključnu ulogu u izrazu za entropiju, da bismo dokazali korespondenciju treba nam i temperatura ekstremne crne rupe. U poglavlju 2 smo pokazali da je Hawkingova temperatura ekstremne crne rupe jednaka nuli. Općenito, crne rupe ne predstavljaju čista kvantna stanja¹ i kvantna polja u okolini crne rupe se nalaze u termalnom stanju. Tada možemo koristiti opis Hartla i Hawkinga za brojanje stanja, samo poopćen na Kerrovu metriku [21, 7].

¹U kontekstu kvantne teorije, entropija je mjera broja kvantnih stanja pomoću kojih opisujemo sustav.

4.1 Temperatura ekstremne Kerrove crne rupe

Koristimo formalizam kvantne teorije polja. Zato krećemo od definicije vakuuma (osnovnog stanja). Za to koristimo Hartle-Hawkingovo stanje [22]. Hartle i Hawking su pokazali da se može iskoristiti Feynmanova metoda integrala po putu da bismo dobili amplitudu crne rupe koja emitira skalarnu česticu.

Pretpostavimo da imamo kvantno mehanički sustav sa vremenski neovisnih Hamiltonijanom H . Stanje termalne ravnoteže sustava na temperaturi $kT = \beta^{-1}$ je definirano kao matrica gustoće [7]

$$\rho = e^{-\beta H} / Z, \quad Z = \text{Tr}(e^{-\beta H}) \rightarrow \text{normalizacija}$$

Hartle-Hawkingov vakuum za Schwarzschildovu crnu rupu, ograničen na regiju izvan horizonta, je tada matrica gustoće definirana kao

$$\rho = e^{-\hbar\omega/T_H} \quad (4.1)$$

na Hawkingovoj temperaturi T_H . No problem je što za prostor-vremena koja nemaju globalni vremenski Killingov vektor (kao što je slučaj sa Kerrovom geometrijom gdje Killingov vektor ∂_t postaje nul na polovima) Hartle-Hawkingov vakuum ne postoji. Frolov i Thorne [23] su definirali vakuum koristeći Killingov vektor koji je vremenskog tipa van horizonta do površine na kojoj se opažatelj mora gibati brzinom svjetlosti da bi ko-rotirao sa crnom rupom.

Konstrukciju Frolov-Thorne vakuuma za općenitu Kerrovu geometriju započinjemo tako da razvijamo kvantna polja u svojstvena stanja asimptotske energije ω i zakretnog impulsa m . Za skalarno polje Φ možemo zapisati

$$\Phi = \sum_{\omega, m, l} \phi_{\omega m l} e^{-i\omega \hat{t} + im\hat{\phi}} f_l(r, \theta) \quad (4.2)$$

gdje smo sa \hat{t} i $\hat{\phi}$ označili koordinate u ne-ekstremnom slučaju.

Vakuum je, kao u slučaju Hartle-Hawkingovog vakuuma, dijagonalna matrica gustoće u svojstvenoj bazi energije-momenta, sa Boltzmannovim faktorom

$$e^{-\hbar(\omega - \Omega_H m)/T_H} \quad (4.3)$$

Što se svodi na Hartle-Hawkingov vakuum za nerotirajući slučaj $\Omega_H = 0$. Prilikom transformacije u područje blizu horizonta (kao kod izvoda NHEK metrike u dodatku B) imamo

$$e^{-i\omega'\hat{t}+im'\hat{\phi}} = e^{-\frac{i}{\lambda}(2M\omega-m)t+i\omega\phi} = e^{-in_R t+in_L\phi} \quad (4.4)$$

$$m' = m, \quad \omega' = \frac{2M\omega - m}{\lambda}, \quad n_L = m, \quad n_R = \frac{2M\omega - m}{\lambda}$$

n_L i n_R su lijevi i desni naboji pridruženi ∂_ϕ i ∂_t u regiji blizu horizonta. Tada je Boltzmannov faktor

$$e^{-\hbar(\omega-\Omega_H m)/T_H} = e^{-(n_L/T_L)-(n_R/T_R)} \quad (4.5)$$

gdje su bezdimenzionalne temperature

$$T_L = \frac{r_+ - M}{2\pi(r_+ - a)}, \quad T_R = \frac{r_+ - M}{2\pi\lambda r} \quad (4.6)$$

Uzimajući ekstremni limes $J = M^2$ ($a = M$, $r_+ = M$) imamo

$$T_L = \frac{1}{2\pi}, \quad T_R = 0 \quad (4.7)$$

Lijevi modovi su termalno nastanjeni sa Boltzmannovom raspodjelom na temperaturi $1/2\pi$

$$e^{-2\pi n_L} \quad (4.8)$$

4.2 Cardyjeva formula

U bilo kojoj unitarnoj i modularno invarijantnoj konformnoj teoriji polja (CFT), u mikrokanoonskom ansamblu, entropija je dana preko lijevog i desnog centralnog naboja i lijevih i desnih svojstvenih stanja L_0 , \bar{L}_0 kada je $L_0 \gg c_L$ i $\bar{L}_0 \gg c_R$ kao

$$S_{CFT} = 2\pi \left(\sqrt{\frac{c_L L_0}{6}} + \sqrt{\frac{c_R \bar{L}_0}{6}} \right) \quad (4.9)$$

Ovo je Cardyjeva formula [24, 25]. Transformacijom u kanonski ansambl preko definicije lijeve i desne temperature

$$\left(\frac{\partial S_{CFT}}{\partial L_0}\right)_{\bar{L}_0} = \frac{1}{T_L}, \quad \left(\frac{\partial S_{CFT}}{\partial \bar{L}_0}\right)_{L_0} = \frac{1}{T_R} \quad (4.10)$$

imamo, nakon što uvrstimo izraz (4.9) u gornje jednadžbe

$$L_0 = \frac{\pi^2}{6} c_L T_L^2, \quad \bar{L}_0 = \frac{\pi^2}{6} c_R T_R^2 \quad (4.11)$$

Time smo dobili Cardyjev formulu za entropiju preko centralnog naboja i temperature lijevih i desnih modova

$$S_{CFT} = \frac{\pi^2}{3} (c_L T_L + c_R T_R) \quad (4.12)$$

Uz pretpostavku da je geometrija blizu horizonta ekstremne Kerrove crne rupe opisana sa lijevom sektorom dvodimenzionalne konformne teorije polja, pokazali smo da postoji netrivialna temperatura za pobuđena stanja. Individualni modovi korotiraju sa crnom rupom duž ∂_ϕ . Pošto lijevi sektor konformne teorije polja identificiramo sa ekscitacijama duž ∂_ϕ , a $SL(2, \mathbb{R})_R$ sektor je zamrznut, lijevo gibajuća stanja CFT-a su opisana termalnom matricom gustoće sa temperaturama $T_L = 1/2\pi$, $T_R = 0$. Centralni naboji su $c_L = 12J/\hbar$, $c_R = 0$ te uvrštavajući u jednadžbu (4.12) dobivamo

$$S_{CFT} = \frac{\pi^2}{3} \left(\frac{12J}{\hbar} \cdot \frac{1}{2\pi} + 0 \right) = \frac{2\pi J}{\hbar} \quad (4.13)$$

Ako to usporedimo sa entropijom ekstremne Kerrove crne rupe koja je dana Bekenstein - Hawkingovom formulom (2.19), vidimo da su te dvije entropije iste!

$$S_{CFT} = S_{BH} \quad (4.14)$$

5

Zaključak

SUMIRAJMO najbitnije rezultate ovog diplomskog rada. Promatrali smo jedan vid AdS/CFT korespondencije, Kerr/CFT korespondenciju. Posebnost ovog vida korespondencije leži u tome što se ne oslanja na teoriju struna, supersimetrije ili neke druge vidove realizacije kvantne teorije gravitacije, nego se isključivo bazira na simetrijskim svojstvima promatrane geometrije. Prednost takvog pristupa je zasigurno jednostavniji račun kojeg smo morali provesti, no postoje i neke mane. Jedna od najvećih mana jest činjenica da je odabir rubnih uvjeta u prostornoj beskonačnosti proizvoljan. Glavni problem je tad naći odgovarajuće rubne uvjete koji će dati netrivialne difeomorfizme koji će biti generatori asimptotskih simetrija. Moguće rješenje bilo bi potpuno automatiziranje procesa provjere putem računala, no to nije trivialan zadatak. Guica, Hartman, Song i Strominger [5] su našli jedne rubne uvjete koji pojačavaju $U(1)$ simetriju u Virasoro, što nam daje netrivialan centralni naboj, nužan za račun mikroskopske entropije preko Cardyjeve formule. Ne možemo reći da su to jedini konzistentni rubni uvjeti koji daju korespondenciju, jer postoje i drugi rubni uvjeti [19, 20] koji će dati korespondenciju. To je očita mana, jer ostavlja velike proizvolj-

nosti prilikom definiranja teorije. No unatoč tome, činjenica da korespondencija postoji ima veliki značaj koji samo dodatno potvrđuje AdS/CFT korespondenciju i holografski princip.

U ovom radu smo detaljno razradili ovu temu. Krenuli smo od geometrije Kerrove crne rupe te smo pokazali kako doći do geometrije blizu horizonta. Nakon toga smo uzeli ekstremni limes.

Iako je to idealizacija koja je uzeta da bi računi ispali jednostavniji, postoje indikacije da takve crne rupe i postoje. Jedan od primjera je supermasivna crna rupa GRS 1915+105 [26] sa masom $M = 14.0 \pm 4.4 M_{\odot}$, koja ima bezdimenzionalni parametar spina $a_* = \frac{cJ}{GM^2} = (0.988 \pm 0.003)$. Bezdimenzionalni parametar spina opisuje brzinu vrtnje crne rupe i raspon mu je od $a_* = 0$ za Schwarzschildovu crnu rupu do $a_* = 1$ za Kerrovu crnu rupu (maksimalna ekstremnost). Drugi primjer je crna rupa u središtu galaksije NGC 1365 čiji je bezdimenzionalan parametar spina $a_* > 0.84$ sa 90% razinom pouzdanosti. Eksperimentalni dokazi uvijek daju dodatnu težinu teorijskim istraživanjima.

Nakon toga smo proveli račun traženja asimptotskih Killingovih vektora za dane rubne uvjete te smo dobili traženi difeomorfizam. Zatim smo, koristeći kovarijantni formalizam Barnicha i Brandta [17], našli izraz za centralni naboj za danu geometriju. Centralni naboj iznosi $c_L = 12J/\hbar$ te zajedno sa temperaturom $T_L = /2\pi$, dobivenu iz razmatranja Frolov-Thorne vakuuma, dobivamo izraz za entropiju preko Cardijeve formule. Ključ korespondencije je činjenica da su entropije dobivene preko termodinamike (Bekenstein-Hawking) i kvantne fizike (Cardy) jednake. To daje potvrdu cjelokupnog računa.

Iako je ovo poučan i opširan problem, on nije riješen. Postoje otvorena pitanja poput skrivenih simetrija, da li se korespondencija može proširiti na ne-ekstremne slučajeve i druga zanimljiva pitanja. U svakom slučaju radi se o problemu na kojem će se moći otkrivati novi uvidi u teoriju kvantne gravitacije.



Općeniti pojmovi vezani uz mnogostrukosti

A.1 Riemannova metrika

Neka je \mathcal{M} glatka mnogostrukost dimenzije n . Riemannova metrika na \mathcal{M} je (glatko) kovarijantno 2-tenzorsko polje $g \in \mathcal{T}^2(\mathcal{M})$ koje je

1. Simetrično, tj. $g(X, Y) = g(Y, X)$,
2. Pozitivno definitno, tj. $g(X, X) > 0$ za $X \neq 0$.

Dakle, Riemannovom metrikom je na svakom tangencijalnom prostoru $\mathcal{T}_p\mathcal{M}$ određen skalarni produkt. Mnogostrukost sa Riemannovom metrikom, (\mathcal{M}, g) , naziva se Riemannova mnogostrukost.

Primjer:

Euklidska metrika \bar{g} na \mathbb{R}^n u standardnim koordinatama definirana je kao

$$\bar{g} = \delta_{ij} dx^i dx^j \quad (\text{A.1})$$

odnosno

$$\bar{g} = (dx^1)^2 + \dots + (dx^n)^2 \quad (\text{A.2})$$

ili

$$(\bar{g}_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.3})$$

A.2 Pseudo-Riemannova metrika

Kovarijantni 2-tenzor g na n -dimenzionalnom vektorskom prostoru V nazivamo *nede-generiranim* ako je $g(X, Y) = 0$ za svaki $Y \in V$ ako i samo ako je $X = 0$.

Odgovarajućim izborom baze za V , nede-generirani simetrični 2-tenzor ima za matrični prikaz matricu kojoj su elementi dijagonale $-1, 1$. Broj pozitivnih i negativnih elemenata dijagonale ne ovisi o izboru baze (Sylvesterov teorem o inerciji). *Signatura* od g je par $(p, n - p)$ pozitivnih i negativnih predznaka u bilo kojem matričnom prikazu.

Pseudo-Riemannova metrika na \mathcal{M} je glatko simetrično 2-tenzorsko polje g koje je nede-generirano u svakoj točki. Pseudo-Riemannova metrika sa signaturom $(n - 1, 1)$ (ponekad: $(-1, 1, \dots, 1)$) naziva se *Lorentzovom* (Minkowski – Lorentzovom) metrikom. Općenito, glatka mnogostrukost ne mora dopuštati postojanje Lorentzove metrike.

U neeuklidskoj geometriji, Poincaréov model poluravnine je gornji dio kompleksne ravnine \mathbb{H} , gdje je $\mathbb{H} = \{x + iy | y > 0; x, y \in \mathbb{R}\}$, koji zajedno sa Poincaréovom metrikom čini model dvodimenzionalne hiperbolne metrike.

A.3 Poincaréov metrički tenzor

Poincaréov metrički tenzor u Poincaréovom modelu poluravnine, je dan na \mathbb{H} kao

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2} = \frac{dz d\bar{z}}{y^2} \quad (\text{A.4})$$

gdje je $dz = dx + idy$. Takav metrički tenzor je invarijantan na djelovanje grupe $SL(2, \mathbb{R})$. Odnosno, ako zapišemo

$$z' = x' + iy' = \frac{az + b}{cz + d}$$

za $ad - bc = 1$ imamo

$$x' = \frac{ac(x^2 + y^2) + x(ad + bc) + bd}{|cz + d|^2}$$

i

$$y' = \frac{y}{|cz + d|^2}$$

Infinitesimali se transformiraju kao

$$dz' = \frac{dz}{(cz + d)^2}$$

pa je

$$dz' d\bar{z}' = \frac{dz d\bar{z}}{|cz + d|^4}$$

čime postaje očito da je metrički tenzor (A.4) invarijantan na djelovanje $SL(2, \mathbb{R})$ grupe.

A.4 Izometrije

Neka su (\mathcal{M}, g) i $(\tilde{\mathcal{M}}, \tilde{g})$ Riemannove mnogostrukosti. Glatko preslikavanje $F : \mathcal{M} \rightarrow \tilde{\mathcal{M}}$ naziva se izometrijom, ako je difeomorfizam za koji vrijedi

$$F^* \tilde{g} = g$$

Ako postoji izometrija između \mathcal{M} i $\tilde{\mathcal{M}}$, kažemo da su mnogostrukosti izometrične. Općenito govoreći, izometrija je preslikavanje između metričkih prostora koje čuva udaljenost.

A.5 Preslikavanja između mnogostrukosti

Razmotrite dvije mnogostrukosti \mathcal{M} i $\tilde{\mathcal{M}}$, koje mogu imati različite dimenzije, sa koordinatnim sustavima x^μ i y^α . Ako imamo preslikavanje $\phi : \mathcal{M} \rightarrow \tilde{\mathcal{M}}$ i funkciju $f : \tilde{\mathcal{M}} \rightarrow \mathbb{R}$. Tada možemo napraviti kompoziciju ϕ i f da konstruiramo preslikavanje $(f \circ \phi) : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ koje je funkcija na \mathcal{M} . Takva se konstrukcija naziva *povlačenje* (engl. *pullback*) f za ϕ i označava se sa $\phi^* f$, a definirano je kao

$$\phi^* f = (f \circ \phi)$$

Dakle, funkcije možemo povlačiti unatrag, no ne možemo ih pogurati naprijed. Ako imamo funkciju $g : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$, ne možemo napraviti kompoziciju g sa ϕ da dobijemo funkciju na $\tilde{\mathcal{M}}$. Ali, ako vektor promatramo kao operator derivacije koji preslikava glatke funkcije u realne brojeve, tada možemo definirati *guranje* (engl. *pushforward*) vektora. Ako je $V(p)$ vektor u točki p na \mathcal{M} , definiramo guranje vektora $\phi_* V$ u točki $\phi(p)$ na $\tilde{\mathcal{M}}$ tako da dajemo da ono djeluje na funkcije na $\tilde{\mathcal{M}}$:

$$(\phi_* V)(f) = V(\phi^* f)$$

A.6 Asimptotska prostor vremena i ADM dekompozicija

Ako bismo htjeli definirati veličine poput mase i zakretnog impulsa u općoj teoriji relativnosti, htjeli bismo promatrati izolirane sustave (sustavi koji ne osjećaju vanjske utjecaje). No niti jedan fizikalni sustav se ne može sasvim izolirati od ostatka svemira. Ako želimo promatrati na primjer strukturu kondenzirane zvijezde, htjeli bismo zanemariti utjecaj daleke tvari i kozmološke zakrivljenosti na zvijezdu i tretirati taj sustav kao da se zvijezda nalazi u prostor-vremenu koje je ravno (Minkowski) na velikim udaljenostima od same zvijezde.

Zato se uvodi pojam *asimptotski ravnog* prostor-vremena, koje predstavlja idealno izoliran sustav u općoj teoriji relativnosti [7].

Definicija *Glatko (prostorno i vremenski orijentabilno) prostor-vrijeme $(\tilde{\mathcal{M}}, \tilde{g}_{ab})$ se naziva asimptotski jednostavno, ako postoji druga glatka Lorentzova mnogostrukost (\mathcal{M}, g_{ab}) tako da vrijedi*

1. $\tilde{\mathcal{M}}$ je otvorena podmногоstrukost od \mathcal{M} sa glatkom granicom $\partial\mathcal{M} = \mathcal{I}$;
2. postoji glatko skalarno polje Ω na \mathcal{M} , takvo da je $g_{ab} = \Omega^2 \tilde{g}_{ab}$ na $\tilde{\mathcal{M}}$ te takvo da je $\Omega = 0$, $d\Omega \neq 0$ na \mathcal{I} ;
3. svaki nul geodezik na $\tilde{\mathcal{M}}$ dobiva buduću i prošlu krajnju točku na \mathcal{I} .

Asimptotski jednostavno prostor-vrijeme se naziva asimptotski ravno, ako je $\tilde{R}_{ab} = 0$ u okolini \mathcal{I} .

U tom slučaju koristimo kanonsku formu opće teorije relativnosti ili 3+1 dekompoziciju da bismo definirali masu [27]. 3+1 dekompozicija pretpostavlja da je prostor-vrijeme podijeljeno (raslojeno) na familiju prostornih površina Σ_t , označenih sa njihovom vremenskom koordinatom t , i s koordinatama na kojima je svaka hiperploha dana sa x^i . Dinamičke varijable te teorije su metrički tenzor trodimenzionalnog prostornog izreza γ_{ij} i konjugirani momenti $\pi^{ij}(t, x^k)$. Preko tih varijabli možemo definirati Hamiltonijan i napisati jednadžbe gibanja preko Hamiltonovih jednadžbi.

Znamo da, ako nam Hamiltonijan ne ovisi eksplicitno o vremenu, tada je njegova vrijednost, energija, konstantna. Vremenski izrez u 3+1 dekompoziciji će biti pridružen energiji sustava. On se može integrirati da bismo dobili globalnu vrijednost koju nazivamo ADM masa (ili ekvivalentno ADM energija).

Drugi način da definiramo energiju, moment i masu sustava, je da promatramo asimptotski ravna prostor-vremena. Tada su, po Noetherinom teoremu, ADM energija, masa i moment dani preko asimptotskih simetrija u prostornoj beskonačnosti.

Više možete naći u [28].

B

Izvod NHEK metrike

Zanima nas regija blizu horizonta Kerrove crne rupe u ekstremnom limesu, odnosno metrika blizu horizonta ekstremne (ili ekstremalne) Kerrove crne rupe.

Prvo uzmemo linijski element za Kerrovu crnu rupu u Boyer-Lindquistovim koordinatama:

$$ds^2 = -\frac{\Delta}{\rho^2} \left(d\hat{t} - a \sin^2 \theta d\theta d\hat{\phi} \right)^2 + \frac{\sin^2 \theta}{\rho^2} \left((\hat{r}^2 + a^2) d\hat{\phi} - a d\hat{t} \right)^2 + \frac{\rho^2}{\Delta} d\hat{r}^2 + \rho^2 d\theta^2 \quad (\text{B.1})$$

Pri čemu su pokrate

$$\Delta \equiv \hat{r}^2 - 2M\hat{r} + a^2, \quad \rho^2 \equiv \hat{r}^2 + a^2 \cos^2 \theta, \quad a \equiv \frac{GJ}{M}, \quad M \equiv M_{ADM} \quad (\text{B.2})$$

Sljedeći originalan članak za dobivanje takozvane 'geometrije grla' Kerrove crne rupe [29], možemo metriku zapisati kao

$$ds^2 = -e^{-2\nu} dt^2 + e^{2\psi} (d\hat{\phi} - \omega dt)^2 + \rho^2 (\Delta^{-1} d\hat{r}^2 + d\theta^2) \quad (\text{B.3})$$

Gornje definicije za ρ i Δ vrijede, no sada su nam

$$e^{2\nu} \equiv \frac{\Delta \rho^2}{(\hat{r}^2 + a^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2 \theta}, \quad e^{2\psi} \equiv \Delta \sin^2 \theta e^{-2\nu}, \quad \omega \equiv \frac{2M\hat{r}a}{\Delta \rho^2} e^{2\nu} \quad (\text{B.4})$$

Ukupna masa je M , zakretni impuls je $J = Ma$, u sustavu smo gdje je $G = 1$, te je $a = GJ/M$.

Za ekstremalni limit je

$$a^2 = M^2, \quad \Delta = (\hat{r} - M)^2 \quad (\text{B.5})$$

Horizont događaja dobivamo tako da pustimo $g_{rr} \rightarrow \infty$ odnosno $g^{rr} = 0$ te dobivamo $\hat{r} = M$. Vrijednost ω na horizontu se naziva kutna brzina horizonta te ju možemo jednostavno izvesti

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{2M\hat{r}a}{\Delta \rho^2} e^{2\nu} = \frac{2M\hat{r}a}{\Delta \rho^2} \cdot \frac{\Delta \rho^2}{(\hat{r}^2 + a^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2 \theta} = \\ &= \frac{2M\hat{r}a}{(\hat{r}^2 + a^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2 \theta} \xrightarrow{\text{extrem.}} \frac{2M^3}{4M^4} = \frac{1}{2M} \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

Da bismo opisali geometriju blizu horizonta uvodimo koordinate

$$\hat{r} = M + \lambda r, \quad \hat{t} = \frac{t}{\lambda}, \quad \hat{\phi} = \phi + \frac{t}{2M\lambda} \quad (\text{B.7})$$

i uzimamo limit $\lambda \rightarrow 0$. Pomak sa $\hat{\phi}$ na ϕ čini $\partial/\partial t$ tangentnim horizontu, odnosno, koordinate korotiraju sa horizontom.

Pišemo diferencijale te gledamo dobiveni linijski element

$$d\hat{r} = \lambda dr, \quad d\hat{t} = \frac{dt}{\lambda}, \quad d\hat{\phi} = d\phi + \frac{dt}{2M\lambda} \quad (\text{B.8})$$

Za prvi dio metrike (B.3) imamo

$$\begin{aligned}
-e^{2\nu} d\hat{t}^2 &= -\frac{\lambda^2 r^2 (M^2(1 + \cos^2 \theta) + \lambda^2 r^2 + 2\lambda r M)}{(2M^2 + \lambda^2 r^2 + 2M\lambda r)^2 - \lambda^2 r^2 M^2 \sin^2 \theta} \cdot \frac{dt^2}{\lambda} \\
&\xrightarrow{\lambda \rightarrow 0} -\frac{M^2 r^2 (1 + \cos^2 \theta)}{4M^4} dt^2 = -\frac{1 + \cos^2 \theta}{2} \cdot \frac{r^2}{2M^2} dt^2 = \\
&= \left\{ \text{uz zamjenu } 2M^2 \equiv r_0^2 \right\} = -\left(\frac{1 + \cos^2 \theta}{2} \right) \frac{r^2}{r_0^2} dt^2
\end{aligned} \tag{B.9}$$

Zatim gledamo drugi dio. Prefaktor $e^{2\psi}$ je

$$\begin{aligned}
e^{2\psi} &= \Delta \sin^2 \theta e^{2\nu} = \Delta \sin^2 \theta \cdot \frac{(\hat{r}^2 + a^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2 \theta}{\Delta \rho^2} \\
&\xrightarrow{\lambda \rightarrow 0} \sin^2 \theta \cdot \frac{4M^4}{M^2(1 + \cos^2 \theta)} = \frac{2r_0^2 \sin^2 \theta}{1 + \cos^2 \theta}
\end{aligned} \tag{B.10}$$

Da bismo riješili zagradu, moramo vidjeti kakva je ovisnost ω o λ :

$$\begin{aligned}
\omega &= \frac{2M\hat{r}a}{(\hat{r}^2 + a^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2 \theta} = \\
&= \frac{2M^2(M + r\lambda)}{((M + r\lambda)^2 + M^2)^2 - ((M + r\lambda)^2 - 2M(M + r\lambda) + M^2) M^2 \sin^2 \theta} = \\
&= \frac{2M^3 \left(1 + \frac{r\lambda}{M}\right)}{(4M^4 + 8M^2 r^2 \lambda^2 + r^4 \lambda^4 + 8M^3 r \lambda + 4M r^3 \lambda^3) - M^2 r^2 \lambda^2 \sin^2 \theta} = \\
&= \frac{2M^3 \left(1 + \frac{r\lambda}{M}\right)}{4M^4 \left(1 + \frac{2r\lambda}{M} + \lambda \mathcal{O}(\lambda)\right)} = \\
&= \left\{ \text{Nazivnik razvijemo oko } \lambda \rightarrow 0 \right\} = \frac{1 - \frac{r\lambda}{M} + \lambda \mathcal{O}(\lambda)}{2M}
\end{aligned} \tag{B.11}$$

Pa nam zagrada postaje

$$\begin{aligned}
(d\hat{\phi} - \omega d\hat{t})^2 &= \left(d\phi + \frac{dt}{2M\lambda} - \frac{1}{2M} \left(\left(1 + \frac{r\lambda}{M} \right) + \lambda \mathcal{O}(\lambda) \right) \frac{dt}{\lambda} \right)^2 = \\
&= \left(d\phi + \cancel{\frac{dt}{2M\lambda}} - \cancel{\frac{dt}{2M\lambda}} - \frac{r dt}{2M^2} - \cancel{\mathcal{O}(\lambda)} \right)^2 = \\
&= \left(d\phi - \frac{r}{r_0^2} dt \right)^2
\end{aligned} \tag{B.12}$$

Na kraju nam još ostaju

$$\begin{aligned}
\frac{\rho^2}{\Delta} d\hat{r}^2 &= \frac{\hat{r}^2 + M^2 \cos^2 \theta}{(\hat{r} - M)^2} \cdot \lambda^2 dr^2 = \\
&= \frac{(M + \lambda r)^2 + M^2 \cos^2 \theta}{(M + \lambda r - M)^2} \cdot \lambda^2 dr^2 \xrightarrow{\lambda \rightarrow 0} \frac{M^2(1 + \cos^2 \theta)}{r^2} dr^2 = \\
&= \left(\frac{1 + \cos^2 \theta}{2} \right) \frac{r_0^2}{r^2} dr^2
\end{aligned} \tag{B.13}$$

i

$$\begin{aligned}
\rho^2 d\theta^2 &= (\hat{r}^2 + M^2 \cos^2 \theta) d\theta^2 = ((M + \lambda r)^2 + M^2 \cos^2 \theta) d\theta^2 \xrightarrow{\lambda \rightarrow 0} \\
&= \left(\frac{1 + \cos^2 \theta}{2} \right) r_0^2 d\theta^2
\end{aligned} \tag{B.14}$$

Kada sve to skupa zapišemo dobijemo linijski element

$$ds^2 = \left(\frac{1 + \cos^2 \theta}{2} \right) \left[-\frac{r^2}{r_0^2} dt^2 + \frac{r_0^2}{r^2} dr^2 + r_0^2 d\theta^2 \right] + \frac{2r_0^2 \sin^2 \theta}{1 + \cos^2 \theta} \left(d\phi + \frac{r}{r_0^2} dt \right)^2 \tag{B.15}$$

Ovakvo definirano prostor-vrijeme nije asimptotski ravno. Ako stavimo $\theta = 0$ ili $\theta = \pi$, metrika postane AdS_2 . Također, osim $\partial/\partial t$ i $\partial/\partial \phi$ simetrija, (B.15) je invarijantna na $r \rightarrow Cr, t \rightarrow t/C$ za bilo koju konstantu C . To nam daje dilatacijsku simetriju AdS_2 . Da bismo pokazali da je (B.15) invarijantna na (analogonom) globalne vremenske translacije AdS_2 .

Zato uvodimo nove koordinate koje su povezane sa (r, t) na isti način kao što su globalne koordinate AdS_2 povezane sa Poincaréovim koordinatama. Uz $r_0 = 1$ imamo

$$r = (1 + y^2)^{1/2} \cos \tau + y, \quad t = \frac{(1 + y^2)^{1/2} \sin \tau}{r} \quad (\text{B.16})$$

Dok novu aksijalnu koordinatu φ izabiremo tako da je $g_{\varphi y} = 0$

$$\phi = \varphi + \log \left| \frac{\cos \tau + y \sin \tau}{1 + (1 + y^2)^{1/2} \sin \tau} \right| \quad (\text{B.17})$$

Diferenciranjem dobijemo diferencijale

$$dr = \left(1 + \frac{y \cos \tau}{(1 + y^2)^{1/2}} \right) dy - (1 + y^2)^{1/2} \sin \tau d\tau \quad (\text{B.18})$$

$$dt = \frac{1 + y^2 + y(1 + y^2)^{1/2} \cos \tau}{(y + (1 + y^2)^{1/2} \cos \tau)^2} d\tau - \frac{\sin \tau}{(1 + y^2)^{1/2} (y + (1 + y^2)^{1/2} \cos \tau)^2} dy \quad (\text{B.19})$$

$$\begin{aligned} d\phi = d\varphi - \frac{(1 + y^2)^{1/2} - y \cos \tau + \sin \tau}{(\cos \tau + y \sin \tau) (1 + (1 + y^2)^{1/2} \sin \tau)} d\tau + \\ + \frac{\sin \tau ((1 + y^2)^{1/2} - y \cos \tau + \sin \tau)}{(\cos \tau + y \sin \tau) ((1 + y^2)^{1/2} + (1 + y^2) \sin \tau)} dy \end{aligned} \quad (\text{B.20})$$

Uvrštavanjem u (B.15) dobili smo novi linijski element

$$ds^2 = \left(\frac{1 + \cos^2 \theta}{2} \right) \left[-(1 + y^2) d\tau^2 + \frac{dy^2}{1 + y^2} + d\theta^2 \right] + \frac{2 \sin^2 \theta}{1 + \cos^2 \theta} (d\varphi + y d\tau)^2 \quad (\text{B.21})$$

Ovakvo rješenje, poznato pod nazivom 'geometrija grla' (engl. *throat geometry*), ima sve simetrije AdS_2 uz translacije u φ : grupa izometrija metrike (B.21) je $SL(2, R) \times U(1)$. Sve geometrijske veličine ovise samo o θ .

Koordinate u (B.21) ($s \tau \in \langle -\infty, \infty \rangle$, $y \in \langle -\infty, \infty \rangle$) pokrivaju čitavo prostor-vrijeme. Površine konstantnog τ su uvijek prostornog tipa pa τ možemo identificirati kao globalnu vremensku funkciju, što znači da ovakvo prostor-vrijeme nema zatvorene vremenske krivulje.

No, Killingov vektor $\partial/\partial\tau$ nije vremenskog tipa posvuda. Vremenskog tipa je za svaki θ kada je $y^2 < 1/3$, ali je asimptotski prostornog tipa za $\sin\theta > (1 + \cos^2\theta)/2$ odnosno $\sin\theta > 0.536$, unutar 32.4° ekvatorijalne ravnine.

To je posljedica rotacije i analogna je ergosferi u slučaju ekstremne Kerrove crne rupe.



Određivanje rubnih uvjeta i difeomorfizama

Rješavamo asimptotske Killingove jednačbe

$$\mathcal{L}_\xi \bar{g}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} \quad (\text{C.1})$$

Zasebno za svaku komponentu metrike, da bismo dobili najopćenitiji oblik difeomorfizma $\xi = \xi^\tau \partial_\tau + \xi^r \partial_r + \xi^\theta \partial_\theta + \xi^\varphi \partial_\varphi$.

Koristeći formulu za račun Liejeve derivacije tenzora

$$\mathcal{L}_\xi g_{\mu\nu} = \xi^\sigma \partial_\sigma g_{\mu\nu} + g_{\sigma\nu} \partial_\mu \xi^\sigma + g_{\mu\sigma} \partial_\nu \xi^\sigma \quad (\text{C.2})$$

dobivamo set od 10 jednačbi

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_\xi g_{\tau\tau} &= \mathcal{O}(r^2) & \mathcal{L}_\xi g_{\tau r} &= \mathcal{O}(r^{-2}) \\
\mathcal{L}_\xi g_{\tau\theta} &= \mathcal{O}(r^{-1}) & \mathcal{L}_\xi g_{\tau\varphi} &= \mathcal{O}(1) \\
\mathcal{L}_\xi g_{rr} &= \mathcal{O}(r^{-3}) & \mathcal{L}_\xi g_{r\theta} &= \mathcal{O}(r^{-2}) \\
\mathcal{L}_\xi g_{r\varphi} &= \mathcal{O}(r^{-1}) & \mathcal{L}_\xi g_{\theta\theta} &= \mathcal{O}(r^{-1}) \\
\mathcal{L}_\xi g_{\theta\varphi} &= \mathcal{O}(r^{-1}) & \mathcal{L}_\xi g_{\varphi\varphi} &= \mathcal{O}(1)
\end{aligned} \tag{C.3}$$

Pišemo jednadžbe po komponentama

$$\mathcal{L}_\xi g_{\tau\tau} = \xi^r \partial_r g_{\tau\tau} + \xi^\theta \partial_\theta g_{\tau\tau} + 2(g_{\tau\tau} \partial_\tau \xi^\tau + g_{\tau\varphi} \partial_\tau \xi^\varphi) = \mathcal{O}(r^2) \tag{C.4}$$

$$\mathcal{L}_\xi g_{\tau r} = g_{\tau\tau} \partial_r \xi^\tau + g_{\tau\varphi} \partial_r \xi^\varphi + g_{rr} \partial_r \xi^r = \mathcal{O}(r^{-2}) \tag{C.5}$$

$$\mathcal{L}_\xi g_{\tau\theta} = g_{\tau\tau} \partial_\theta \xi^\tau + g_{\tau\varphi} \partial_\theta \xi^\varphi + g_{\theta\theta} \partial_\tau \xi^\theta = \mathcal{O}(r^{-1}) \tag{C.6}$$

$$\mathcal{L}_\xi g_{\tau\varphi} = \xi^r \partial_r g_{\tau\varphi} + \xi^\theta \partial_\theta g_{\tau\varphi} + g_{\tau\tau} \partial_\varphi \xi^\tau + g_{\tau\varphi} \partial_\varphi \xi^\varphi + g_{\varphi\varphi} \partial_\tau \xi^\varphi + g_{\tau\varphi} \partial_\tau \xi^\tau = \mathcal{O}(1) \tag{C.7}$$

$$\mathcal{L}_\xi g_{rr} = \xi^r \partial_r g_{rr} + \xi^\theta \partial_\theta g_{rr} + 2g_{rr} \partial_r \xi^r = \mathcal{O}(r^{-3}) \tag{C.8}$$

$$\mathcal{L}_\xi g_{r\theta} = g_{rr} \partial_\theta \xi^r + g_{\theta\theta} \partial_r \xi^\theta = \mathcal{O}(r^{-2}) \tag{C.9}$$

$$\mathcal{L}_\xi g_{r\varphi} = g_{rr} \partial_\varphi \xi^r + g_{\varphi\varphi} \partial_r \xi^\varphi + g_{\tau\varphi} \partial_r \xi^\tau = \mathcal{O}(r^{-1}) \tag{C.10}$$

$$\mathcal{L}_\xi g_{\theta\theta} = \xi^\theta \partial_\theta g_{\theta\theta} + 2g_{\theta\theta} \partial_\theta \xi^\theta = \mathcal{O}(r^{-1}) \tag{C.11}$$

$$\mathcal{L}_\xi g_{\theta\varphi} = g_{\theta\theta} \partial_\varphi \xi^\theta + g_{\varphi\varphi} \partial_\theta \xi^\varphi + g_{\tau\varphi} \partial_\theta \xi^\tau = \mathcal{O}(r^{-1}) \tag{C.12}$$

$$\mathcal{L}_\xi g_{\varphi\varphi} = \xi^\theta \partial_\theta g_{\varphi\varphi} + 2(g_{\varphi\varphi} \partial_\varphi \xi^\varphi + g_{\tau\varphi} \partial_\varphi \xi^\tau) = \mathcal{O}(1) \tag{C.13}$$

Treba napomenuti da smo za račun radili pomoću računalnog programa Mathematica, kod je priložen u dodatku E. Račun se može provesti i rukom, samo su računi dosta veliki¹. Za primjer rješavanja ćemo uzeti jednadžbu (C.4).

Uvrstimo ansatz (3.5) te dobijemo

$$\begin{aligned}
& (\xi_{-1}^\theta r + \xi_0^\theta + \xi_1^\theta r^{-1} + \mathcal{O}(r^{-2}))(-2\Omega\Omega' + 2\Omega(\Lambda\Lambda'\Omega + (\Lambda^2 - 1)\Omega')r^2) + \\
& + (\xi_{-1}^r r + \xi_0^r + \xi_1^r r^{-1} + \mathcal{O}(r^{-2}))(2\Omega^2(\Lambda^2 - 1)r) + \\
& + 2(\Omega^2(\Lambda^2 - 1)r^2 - \Omega^2)(\partial_\tau \xi_{-1}^\tau r + \partial_\tau \xi_0^\tau + \partial_\tau \xi_1^\tau r^{-1} + \mathcal{O}(r^{-2})) + \\
& + 2(\Omega^2\Lambda^2 r)(\partial_\tau \xi_{-1}^\varphi r + \partial_\tau \xi_0^\varphi + \partial_\tau \xi_1^\varphi r^{-1} + \mathcal{O}(r^{-2})) = \mathcal{O}(r^2) \tag{C.14} \\
& \mathcal{O}(r) + 2\Omega^2(\Lambda\Lambda'\Omega + (\Lambda^2 - 1)\Omega')\xi_{-1}^\theta r^3 + \mathcal{O}(r^2) + \\
& + \mathcal{O}(r^2) + 2\Omega^2(\Lambda^2 - 1)\partial_\tau \xi_{-1}^\tau r^3 + \mathcal{O}(r^2) + \mathcal{O}(r) + \mathcal{O}(r^2) = \mathcal{O}(r^2)
\end{aligned}$$

Rubni uvjet nam definira najvišu neišchezavajuću potenciju dane jednadžbe. U ovom slučaju to je r^2 , što znači da svi koeficijenti uz veće potencije moraju iščezavati. Ovdje je to samo r^3 , da smo uzeli drugačiji ansatz (recimo sa još jednim članom uz r^2), imali bismo i više uvjeta, no pokazalo bi se da viši članovi ne doprinose difeomorfizmu.

Dakle dobili smo jednadžbu

$$2\Omega^2(\Lambda^2 - 1)\partial_\tau \xi_{-1}^\tau + 2\Omega^2(\Lambda\Lambda'\Omega + (\Lambda^2 - 1)\Omega')\xi_{-1}^\theta = 0 \tag{C.15}$$

Istim postupkom dobivamo definicijske jednadžbe za koeficijente difeomorfizma

$$\Omega^2(\Lambda^2 - 1)\xi_{-1}^\tau = 0 \tag{C.16}$$

$$\Omega^2\Lambda^2\xi_{-1}^\varphi = 0 \tag{C.17}$$

$$(\Lambda^2 - 2)\xi_{-1}^\tau - (\Lambda^2 - 1)\xi_1^\tau = 0 \tag{C.18}$$

$$\partial_\tau \xi_{-1}^r - 2(\Lambda^2 - 1)\xi_2^\tau + \Lambda^2\xi_{-1}^\varphi - \Lambda^2\xi_1^\varphi = 0 \tag{C.19}$$

$$\Omega^2(\Lambda^2 - 1)\partial_\theta \xi_{-1}^\tau = 0 \tag{C.20}$$

¹Svi računi su prvo provedeni ručno te su onda potvrđeni Mathematicom za svaki slučaj.

$$\Lambda^2 \partial_\theta \xi_{-1}^\varphi + (\Lambda^2 - 1) \partial_\theta \xi_0^\tau = 0 \quad (\text{C.21})$$

$$\partial_\tau \xi_{-1}^\theta - \partial_\theta \xi_{-1}^\tau + (\Lambda^2 - 1) \partial_\theta \xi_1^\tau + \Lambda^2 \partial_\theta \xi_0^\varphi = 0 \quad (\text{C.22})$$

$$\partial_\tau \xi_0^\theta - \partial_\theta \xi_0^\tau + (\Lambda^2 - 1) \partial_\theta \xi_2^\tau + \Lambda^2 \partial_\theta \xi_1^\varphi = 0 \quad (\text{C.23})$$

$$\Omega^2 (\Lambda^2 - 1) \partial_\varphi \xi_{-1}^\tau = 0 \quad (\text{C.24})$$

$$2\Lambda(\Lambda'\Omega + \Omega'\Lambda) \xi_{-1}^\theta + \Omega(\Lambda^2 - 1) \partial_\varphi \xi_0^\tau + \Lambda^2 \Omega \partial_\tau \xi_{-1}^\tau + \Lambda^2 \Omega \partial_\varphi \xi_{-1}^\varphi = 0 \quad (\text{C.25})$$

$$2(\Lambda\Omega\Lambda' + \Omega') \xi_0^\theta - \Omega \partial_\varphi \xi_{-1}^\tau + \Omega(\Lambda^2 - 1) \partial_\varphi \xi_1^\tau + \Omega\Lambda^2 (\partial_\tau \xi_0^\tau + \partial_\tau \xi_{-1}^\varphi + \partial_\varphi \xi_0^\varphi + \xi_{-1}^r) = 0 \quad (\text{C.26})$$

$$2\Omega\Omega' \xi_{-1}^\theta = 0 \quad (\text{C.27})$$

$$2\Omega\Omega' \xi_0^\theta = 0 \quad (\text{C.28})$$

$$\xi_{-1}^\theta = 0 \quad (\text{C.29})$$

$$\partial_\theta \xi_{-1}^r = 0 \quad (\text{C.30})$$

$$\Lambda^2 \xi_{-1}^\tau = 0 \quad (\text{C.31})$$

$$\Lambda^2 \xi_{-1}^\varphi = 0 \quad (\text{C.32})$$

$$\Omega \partial_\theta \xi_{-1}^\theta + \Omega' \xi_{-1}^\theta = 0 \quad (\text{C.33})$$

$$\Omega \partial_\theta \xi_0^\theta + \Omega' \xi_0^\theta = 0 \quad (\text{C.34})$$

$$\partial_\theta \xi_{-1}^\tau = 0 \quad (\text{C.35})$$

$$\partial_\varphi \xi_{-1}^\theta + \Lambda^2 (\partial_\theta \xi_0^\tau + \partial_\theta \xi_{-1}^\varphi) = 0 \quad (\text{C.36})$$

$$\partial_\varphi \xi_0^\theta + \Lambda^2 (\partial_\theta \xi_1^\tau + \partial_\theta \xi_0^\varphi) = 0 \quad (\text{C.37})$$

$$\partial_\varphi \xi_{-1}^\theta = 0 \quad (\text{C.38})$$

$$\Omega \left((\partial_\varphi \xi_0^\tau + \partial_\varphi \xi_{-1}^\varphi) \Lambda + \Lambda' \xi_{-1}^\theta \right) + \Lambda \Omega' \xi_{-1}^\theta = 0 \quad (\text{C.39})$$

Treba napomenuti da smo izostavili eksplicitne ovisnosti komponenata, no imamo na umu da one ovise o τ , θ i φ , isto kao i Λ i Ω .

Nakon što pojednostavimo dobivamo

$$\begin{aligned} \xi_{-1}^\tau &= 0 & \xi_{-1}^\varphi &= 0 & \xi_1^\tau &= 0 \\ \xi_{-1}^\theta &= 0 & \partial_\theta \xi_0^\tau &= 0 & \partial_\theta \xi_0^\varphi &= 0 \\ \partial_\varphi \xi_0^\tau &= 0 & \xi_0^\theta &= 0 & \partial_\theta \xi_{-1}^r &= 0 \end{aligned} \quad (\text{C.40})$$

Jedine bitne jednadžbe koje su nam ostale su

$$\partial_\tau \xi_{-1}^r - 2(\Lambda^2 - 1) \xi_2^\tau - \Lambda^2 \xi_1^\varphi = 0 \quad (\text{C.41})$$

$$(\Lambda^2 - 1) \partial_\theta \xi_2^\tau + \Lambda^2 \partial_\theta \xi_1^\varphi = 0 \quad (\text{C.42})$$

$$\partial_\tau \xi_0^\tau + \partial_\varphi \xi_0^\varphi + \xi_{-1}^r = 0 \quad (\text{C.43})$$

Ako na jednadžbu (C.43) djelujemo sa ∂_φ možemo iskoristiti Schwarzov uvjet integrabilnosti, odnosno simetriju drugih derivacija.

$$\partial_{ij} = \partial_{ji}$$

$$\begin{aligned} &\equiv \partial_\tau \partial_\varphi \xi_0^\tau \xrightarrow{\text{(B.40)}} 0 \\ &\quad \underbrace{\partial_\varphi \partial_\tau \xi_0^\tau}_{\text{simetrijom}} + \partial_\varphi \partial_\varphi \xi_0^\varphi + \partial_\varphi \xi_{-1}^r = 0 \end{aligned}$$

što nam ostavlja jednostavnu diferencijalnu jednadžbu koju možemo integrirati

$$\partial_\varphi \partial_\varphi \xi_0^\varphi(\tau, \varphi) + \partial_\varphi \xi_{-1}^r(\tau, \varphi) = 0 / \int$$

$$\xi_{-1}^r = C(\tau) - \partial_\varphi \xi_0^\varphi \quad (\text{C.44})$$

Na kraju možemo napisati zasebne komponente difeomorfizma

$$\begin{aligned} \xi^\tau &= C_1(\tau) + \xi_2^\tau r^{-2} + \mathcal{O}(r^{-3}) \\ \xi^r &= \xi_{-1}^r + \mathcal{O}(1) \\ \xi^\theta &= \xi_1^\theta r^{-1} + \mathcal{O}(r^{-2}) = \mathcal{O}(r^{-1}) \\ \xi^\varphi &= \xi_0^\varphi + \xi_1^\varphi r^{-1} + \mathcal{O}(r^{-2}) \end{aligned} \quad (\text{C.45})$$

Usporedbom sa člankom [5] vidimo da konstanta u τ komponenti ne ovisi o τ , te da su $\xi_2^\tau = 0$ i $\xi_1^\varphi = 0$. Ako stavimo, u jednadžbu (C.44), da nam je $C(\tau) = 0$ te da su $\xi_0^\varphi = \epsilon(\varphi)$ tada je $\xi_{-1}^r = -\epsilon'(\varphi)$. Što se slaže sa člankom.

U konačnici smo reproducirali difeomorfizam

$$\xi = [C + \mathcal{O}(r^{-3})]\partial_\tau + [-r\epsilon'(\varphi) + \mathcal{O}(1)]\partial_r + \mathcal{O}(r^{-1})\partial_\theta + [\epsilon(\varphi) + \mathcal{O}(r^{-2})]\partial_\varphi \quad (\text{C.46})$$

Jedno od mogućih objašnjenja razloga što smo zanemarili τ ovisnost je to da nam egzaktni Killingov vektor koji generira rotacijsku $U(1)$ izometriju nema τ ovisnosti. To također objašnjava izbor funkcije $\epsilon(\varphi)$.

Sada kada imamo generator, možemo provjeriti da li on zadovoljava Virasoro algebru. Uz $\epsilon(\varphi) = -e^{-in\varphi}$ difeomorfizam ξ je oblika

$$\xi_n = -e^{-in\varphi}\partial_\varphi - inre^{-in\varphi}\partial_r \quad (\text{C.47})$$

Kao što smo rekli, izbor je motiviran $U(1)$ izometrijom, jer za $n = 0$ dobivamo generator ξ_0 koji je upravo generator $U(1)$ rotacijske izometrije.

Liejeva zagrada je dana izrazom

$$[\xi_m, \xi_n] = (\xi_m^\nu \partial_\nu \xi_n^\mu - \xi_n^\nu \partial_\nu \xi_m^\mu) \partial_\mu \quad (\text{C.48})$$

Uvrštavamo r i φ komponente difeomorfizma

$$\begin{aligned}
[\xi_m, \xi_n] &= (\xi_m^\nu \partial_\nu \xi_n^r - \xi_n^\nu \partial_\nu \xi_m^r) \partial_r + (\xi_m^\nu \partial_\nu \xi_n^\varphi - \xi_n^\nu \partial_\nu \xi_m^\varphi) \partial_\varphi = \\
&= (\xi_m^r \partial_r \xi_n^r + \xi_m^\varphi \partial_\varphi \xi_n^r - \xi_n^r \partial_r \xi_m^r - \xi_n^\varphi \partial_\varphi \xi_m^r) \partial_r + \\
&+ (\xi_m^r \partial_r \xi_n^\varphi + \xi_m^\varphi \partial_\varphi \xi_n^\varphi - \xi_n^r \partial_r \xi_m^\varphi - \xi_n^\varphi \partial_\varphi \xi_m^\varphi) \partial_\varphi = \\
&= [-imre^{-im\varphi} \cdot (-inre^{-in\varphi}) + (-e^{-im\varphi}) \cdot (-n^2re^{-in\varphi}) - \\
&- (-inre^{-in\varphi}) \cdot (-ime^{-im\varphi}) - (-e^{-im\varphi}) \cdot (-m^2re^{-in\varphi})] \partial_r + \\
&+ [(-e^{-im\varphi}) \cdot (ine^{-in\varphi}) - (-e^{-in\varphi}) \cdot (ime^{-im\varphi})] \partial_\varphi = \\
&= [re^{-i(m+n)\varphi}(n^2 - m^2)] \partial_r + [-ie^{-i(n+m)\varphi}(n - m)] \partial_\varphi = \\
&= (m - n)[ie^{-i(m+n)\varphi} \partial_\varphi - (m + n)re^{-i(m+n)\varphi} \partial_r]
\end{aligned}$$

Ako gornji izraz pomnožimo sa i , vidimo da uz

$$\xi_{m+n} = -e^{-i(m+n)\varphi} \partial_\varphi - i(m + n)re^{-i(m+n)\varphi} \partial_r$$

dobivamo upravo izraz za Virasoro algebru bez centralnog člana

$$i[\xi_m, \xi_n] = (m - n)\xi_{m+n} \quad (\text{C.49})$$

Možemo rezimirati bitnije rezultate dobivene u člancima [5, 19, 20] u jednoj tablici u kojoj ćemo navesti njihove rubne uvjete, dobivene difeomorfizme i algebre pojedinih modova.

Rubni uvjeti	Difeomorfizam	Lijevi modovi $U(1)$	Desni modovi $SL(2, \mathbb{R})$
Guica et. al. [5] $\mathcal{O} \begin{pmatrix} r^2 & r^{-2} & r^{-1} & 1 \\ & r^{-3} & r^{-2} & r^{-1} \\ & & r^{-1} & r^{-1} \\ & & & 1 \end{pmatrix}$	$\xi = [C + \mathcal{O}(r^{-3})]\partial_r +$ $+ [-r\epsilon'(\varphi) + \mathcal{O}(1)]\partial_r + \mathcal{O}(r^{-1})\partial_\theta +$ $+ [\epsilon(\varphi) + \mathcal{O}(r^{-2})]\partial_\varphi$	$\xi_\epsilon = \epsilon(\varphi)\partial_\varphi - r\epsilon'(\varphi)\partial_r$ $\epsilon_n(\varphi) = -e^{-in\varphi}, \quad \xi_n = \xi(\epsilon_n)$ $i[\xi_m, \xi_n] = (m - n)\xi_{m+n}$ $U(1) \text{ je pojačana u Virasoro.}$ $\text{Centralni naboj je: } c_L = 12J/\hbar$	Nema pojačavajna $SL(2, \mathbb{R})$ u Virasoro.
Matsuo et. al. [19] $\mathcal{O} \begin{pmatrix} 1 & r^{-3} & r^{-3} & r^{-2} \\ & r^{-4} & r^{-4} & r^{-3} \\ & & r^{-3} & r^{-3} \\ & & & r^{-2} \end{pmatrix}$	$\xi = [\epsilon(\tau) + \frac{\epsilon''(\tau)}{2r^2} + \mathcal{O}(r^{-3})]\partial_r +$ $+ [-r\epsilon'(\tau) + \frac{\epsilon'''(\tau)}{2r} + \mathcal{O}(r^{-2})]\partial_r + \mathcal{O}(r^{-3})\partial_\theta +$ $+ [C - \frac{\epsilon''(\tau)}{r} + \mathcal{O}(r^{-3})]\partial_\varphi$	$U(1) \text{ se ne pojačava u Virasoro.}$	$\xi_\epsilon = \epsilon(\tau)\partial_\tau - r\epsilon'(\tau)\partial_r$ $\epsilon(\tau) = \tau^{1+n}$ $[\xi_n, \xi_m] = (m - n)\xi_{m+n}$ $SL(2, \mathbb{R}) \text{ se pojačava u Virasoro,}$ $\text{ali bez centralnog naboja: } c_R = 0$ $\text{Postoji kvazilokalni naboj}$ $\text{dobiven iz Brown-York tenzora.}$
Matsuo et. al. [20] $\mathcal{O} \begin{pmatrix} r^2 & r^{-1} & r^{-2} & 1 \\ & r^{-3} & r^{-3} & r^{-1} \\ & & r^{-1} & r^{-1} \\ & & & 1 \end{pmatrix}$	$\xi = [\epsilon_\tau(\tau) + \mathcal{O}(r^{-1})]\partial_r +$ $+ [-r\epsilon'_\tau(\tau) - r\epsilon'_\varphi(\varphi) + \mathcal{O}(1)]\partial_r + \mathcal{O}(r^{-1})\partial_\theta +$ $+ [\epsilon_\varphi(\varphi) + \mathcal{O}(r^{-1})]\partial_\varphi$	$l_n = \epsilon_\varphi(\varphi)\partial_\varphi - r\epsilon'_\varphi(\varphi)\partial_r$ $\epsilon_n(\varphi) = -e^{-in\varphi}$ $i[l_n, l_m] = (n - m)l_{m+n}$ $U(1) \text{ je pojačana u Virasoro s}$ $\text{centralnim nabojem: } c_L = 12J/\hbar$	$\bar{l}_n = -i\epsilon_\tau(\tau)\partial_\tau + ir\epsilon'_\tau(\tau)\partial_r$ $\epsilon_\tau(\tau) = \tau^{1+n}$ $i[\bar{l}_n, \bar{l}_m] = (n - m)\bar{l}_{m+n}$ $SL(2, \mathbb{R}) \text{ je pojačana u Virasoro s}$ $\text{centralnim nabojem: } c_R = 0$

Tablica C.1 – Tablica prikazuje usporedbu različitih rubnih uvjeta danih u radovima [5, 19, 20] te rezultirajuće algebre i centralne naboje.

D

Virasoro algebra

Virasoro algebra je centralna ekstenzija Wittove algebre. Ta ekstenzija je (slijedimo izvod dan u [30]) jedinstvena do na izbor nekog parametra c , tako da je Virasoro algebra u biti klasa izomorfnih Liejevih algebra. Općenita centralna ekstenzija Wittove algebre se može zapisati kao¹

$$[L_m, L_n] = (m - n)L_{m+n} + c_{m,n} \quad (\text{D.1})$$

definirana sa setom konstanti $c_{m,n}$. Iz Jacobijevog identiteta imamo

$$[[L_m, L_n], L_p] + [[L_n, L_p], L_m] + [[L_p, L_m], L_n] = 0 \quad (\text{D.2})$$

Svaki član možemo raspisati koristeći (D.1)

¹Podrazumijeva se da vrijedi $[L_m, c] = 0$.

$$\begin{aligned}
[[L_m, L_n], L_p] &= [(m-n)L_{m+n} + c_{m,n}, L_p] = \\
&= (m-n)[L_{m+n}, L_p] = \\
&= (m-n)((m+n-p)L_{m+n+p} + c_{m+n,p})
\end{aligned} \tag{D.3}$$

to napravimo za svaki član te vratimo u Jacobijev identitet (D.2)

$$\begin{aligned}
&L_{m+n+p} \overbrace{((m+n)(m+n-p) + (n-p)(n+p-m) + (p-m)(p+m-n))}^{=0} + \\
&+ (m-n)c_{m+n,p} + (n-p)c_{n+p,m} + (p-m)c_{p+m,n} = 0
\end{aligned} \tag{D.4}$$

što nam daje

$$(m-n)c_{m+n,p} + (n-p)c_{n+p,m} + (p-m)c_{p+m,n} = 0 \tag{D.5}$$

Ako transformiramo generatore algebre tako da dodamo konstantu, sama algebra se neće promijeniti

$$L_m \rightarrow L'_m = L_m + b(m) \tag{D.6}$$

To se može pokazati

$$\begin{aligned}
[L'_m, L'_n] &= [L_m + b(m), L_n + b(n)] = [L_m + b(m), L_n] + \overbrace{[L_m + b(m), b(n)]}^{=0} = \\
&= [L_m, L_n] = (m-n)L_{m+n} + c_{m,n} = \\
&= (m-n)(L'_{m+n} - b(m+n)) + c_{m,n} = \\
&= (m-n)L'_{m+n} - b(m+n)(m-n) + c_{m,n} = \\
&= (m-n)L'_{m+n} + c'_{m,n}
\end{aligned}$$

pri čemu je

$$c'_{m,n} = c_{m,n} - b(m+n)(m-n) = c_{m,n} + c_{m,n}^{cob}$$

Dobili smo originalan oblik algebre uz redefiniciju konstanti $c_{m,n}$. Uzimajući to u obzir, uz definicije

$$b(m) = \frac{1}{m}c_{m,0} \quad (m \neq 0), \quad b(0) = \frac{1}{2}c_{1,-1}$$

nam je

$$\begin{aligned} c'_{0,n} &= c_{0,n} + c_{0,n}^{cob} = c_{0,n} + \frac{1}{n}c_{n,0} \cdot n = c_{0,n} + c_{n,0} = 0, \quad (n \neq 0) \\ c'_{1,-1} &= c_{1,-1} + c_{1,-1}^{cob} = c_{1,-1} - \frac{1}{2}c_{1,-1} \cdot 2 = 0, \end{aligned}$$

gdje smo iskoristili činjenicu da je Virasoro algebra kompleksna Liejeva algebra i moraju vrijediti antikomutacijske relacije $[L_m, L_n] = -[L_n, L_m]$. Stoga smo, bez gubitka općenitosti, mogli izabrati $c_{0,n} = 0$ i $c_{1,-1} = 0$ od samog početka. Ako stavimo $p = 0$, jednačba (D.5) nam postaje

$$(m-n) \underbrace{c_{m+n,0}}_{=-c_{0,m+n}=0} + n \underbrace{c_{n,m}}_{=-c_{m,n}} - mc_{m,n} = 0 \Rightarrow (m+n)c_{m,n} = 0$$

Pošto je $m+n \neq 0$ mora biti $c_{m,n} = 0$, no kad je $m+n = 0$, odnosno $m = -n$ vrijedi

$$c_{m,n} = c(m, n) = c(m)\delta_{m,-n} \quad (\text{D.7})$$

te zbog antisimetrije koeficijenta $c_{m,n}$ vrijedi da je $c(-m) = -c(m)$.

Funkcionalan oblik $c(m)$ se može naći ako se ponovo vratimo Jacobijevom identitetu, no sada sa oblikom algebre

$$[L_m, L_n] = (m-n)L_{m+n} + c(m)\delta_{m,-n} \quad (\text{D.8})$$

Tada imamo

$$\begin{aligned}
& (m-n)[L_{m+n}, L_p] + (n-p)[L_{n+p}, L_m] + (p-m)[L_{p+m}, L_n] = 0 \\
& (m-n)[(m+n-p)L_{m+n+p} + c(m+n)\delta_{m+n,-p}] + \\
& (n-p)[(n+p-m)L_{m+p+n} + c(n+p)\delta_{n+p,-m}] + \\
& (p-m)[(p+m-n)L_{p+m+n} + c(p+m)\delta_{p+m,-n}] = 0 \\
& (m-n)c(m+n)\delta_{m+n,-p} + (n-p)c(n+p)\delta_{n+p,-m} + \\
& + (p-m)c(p+m)\delta_{p+m,-n} = 0 \\
& (m-n)c(m+n)\delta_{m+n,-p} + (n+m+n)c(n-m-n) + \\
& + (-n-m-m)c(-n-m+m) = 0 \\
& (m-n)c(m+n)\delta_{m+n,-p} + (m+2n)c(-m) + (-n-2m)c(-n) = 0 \\
& [(m-n)c(m+n) - (m+2n)c(m) + (n+2m)c(n)]\delta_{n+p+m,0} = 0
\end{aligned}$$

odnosno

$$(m-n)c(m+n) - (m+2n)c(m) + (n+2m)c(n) = 0$$

Za $n = 1$ imamo

$$\begin{aligned}
& (m-1)c(m+1) - (m+2)c(m) + (1+2m)c(1) = 0 \\
& (m-1)c(m+1) - (m+2)c(m) = 0 \\
& c(m+1) = \frac{m+2}{m-1}c(m), \quad m \geq 2
\end{aligned}$$

Rješavanjem rekurzije dobijemo

$$c(m+1) = \frac{1}{3!} \frac{(m+2)!}{(m-1)!} c(2)$$

ako definiramo $c(2) = c/2$ imamo

$$c(m+1) = \frac{1}{12}(m+2)(m+1)mc$$

Konačno imamo (uz $m + 1 \rightarrow m$)

$$\begin{aligned} c(m) &= \frac{c}{12}m(m^2 - 1), \quad m \geq 2 \\ c(-m) &= -c(m), \quad c(0) = c(1) = c(-1) = 0 \end{aligned} \tag{D.9}$$

Treba još pokazati da je ova ekstenzija netrivialna, odnosno da ne postoji $b(m)$, takav da je

$$-(m - n)b(m + n) = \frac{c}{12}m(m^2 - 1)\delta_{m+n,0}$$

što nije moguće jer bismo za $m + n = 0$ imali uvjet

$$-2mb(0) = \frac{c}{12}m(m^2 - 1)$$

što očito ne može biti ispunjeno za svaki m . Analognom procedurom sa \bar{L}_m generatorima dobili bismo set centralnih članova sa istim svojstvima, definiranim sa nekom novom konstantom \bar{c} . Pokazali smo da Virasoro algebra, centralna ekstenzija Wittove algebre ima sljedeća svojstva

$$\begin{aligned} [L_m, L_n] &= (m - n)L_{m+n} + \frac{c}{12}m(m^2 - 1)\delta_{m+n,0} \\ [\bar{L}_m, \bar{L}_n] &= (m - n)\bar{L}_{m+n} + \frac{\bar{c}}{12}m(m^2 - 1)\delta_{m+n,0} \\ [L_m, \bar{L}_n] &= 0 \end{aligned} \tag{D.10}$$

Generatore L_m i \bar{L}_m možemo smatrati kao koeficijente u Laurentovom razvoju holomorfnog i antiholomorfnog tenzora energije-impulsa u dvije dimenzije. Zato se Virasoro algebra često opisuje kao kvantna verzija Wittove algebre ili obratno, Wittova algebra kao klasični limes Virasoro algebre.

E

Mathematica kod

Koristimo kod Package SurfaceCharges u kombinaciji s paketom Riemannian Geometry and Tensor Calculus (RG & TC) [31, 32].

Predefiniranje funkcija

Koristimo paket Riemannian Geometry & Tensor Calculus (RGTC) od Sotirios Bonanosa

```
In[1]:= Off[General::spell]; Off[General::spell1];
```

```
In[2]:= << EDCRGTCcode.m // Quiet
```

Definiramo koordinatni sustav i metriku (u globalnim koordinatama). Metrika u koordinatama $(\tau, r, \theta, \varphi)$ je dana sa (linijski element):

$$ds^2 = 2 G J \Omega^2 \left(- (1 + r^2) d\tau^2 + \frac{dr^2}{1+r^2} + d\theta^2 + \Lambda^2 (d\varphi + r d\tau)^2 \right).$$

```
In[1]:= Unprotect[metric];
```

```
In[2]:= coord = {\tau, r, \theta, \varphi};
```

```
In[3]:= dim = 4;
```

```
In[4]:= metric = 2 G J \Omega[\theta]^2 * {\{- (1 + r^2 * (1 - \Lambda[\theta]^2)), 0, 0, r \Lambda[\theta]^2\},
    {0, \frac{1}{1 + r^2}, 0, 0\}, {0, 0, 1, 0\}, {r \Lambda[\theta]^2, 0, 0, \Lambda[\theta]^2\}} // FullSimplify;
```

```
In[5]:= simpRules = TrigRules;
```

Eksplcitno (treba inicijalizirati ukoliko želimo koristiti RGTC paket s eksplcitnom metrikom)

```
In[6]:= RGtensors[metric, coord]
```

$$g_{dd} = \begin{pmatrix} 2 G J (-1 - r^2 + r^2 \Lambda[\theta]^2) \Omega[\theta]^2 & 0 & 0 & 2 G J r \Lambda[\theta]^2 \Omega[\theta]^2 \\ 0 & \frac{2 G J \Omega[\theta]^2}{1+r^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 G J \Omega[\theta]^2 & 0 \\ 2 G J r \Lambda[\theta]^2 \Omega[\theta]^2 & 0 & 0 & 2 G J \Lambda[\theta]^2 \Omega[\theta]^2 \end{pmatrix}$$

$$\text{LineElement} = \frac{2 G J d[r]^2 \Omega[\theta]^2}{1 + r^2} + 2 G J d[\theta]^2 \Omega[\theta]^2 + 4 G J r d[\tau] d[\varphi] \Lambda[\theta]^2 \Omega[\theta]^2 + 2 G J d[\varphi]^2 \Lambda[\theta]^2 \Omega[\theta]^2 + 2 G J d[\tau]^2 (-1 - r^2 + r^2 \Lambda[\theta]^2) \Omega[\theta]^2$$

$$g_{UU} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2 G J (1+r^2) \Omega[\theta]^2} & 0 & 0 & \frac{r}{2 G J (1+r^2) \Omega[\theta]^2} \\ 0 & \frac{1+r^2}{2 G J \Omega[\theta]^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2 G J \Omega[\theta]^2} & 0 \\ \frac{r}{2 G J (1+r^2) \Omega[\theta]^2} & 0 & 0 & -\frac{-1-r^2+r^2 \Lambda[\theta]^2}{2 G J (1+r^2) \Lambda[\theta]^2 \Omega[\theta]^2} \end{pmatrix}$$

```
gUU computed in 0.016 sec
```

```
Gamma computed in 0. sec
```

```
Riemann(dddd) computed in 0.031 sec
```

```
Riemann(Uddd) computed in 0.031 sec
```

```
Ricci computed in 0.016 sec
```

```
Weyl computed in 0.031 sec
```

```
Einstein computed in 0.094 sec
```

```
All tasks completed in 0.234375 seconds
```

Christoffelovi simboli (1-> τ , 2-> r , 3-> θ , 4-> φ)

```
In[7]:= listaffine := Table[If[UnsameQ[GUdd[[v, λ, μ]], 0],
  {Style[Subsuperscript[Γ, Row[{coord[[λ]], coord[[μ]]}], coord[[v]], 18],
  "=", Style[GUdd[[v, λ, μ]], 14]}],
{λ, 1, dim}, {v, 1, dim}, {μ, 1, dim}] // FullSimplify;

In[8]:= TableForm[Partition[DeleteCases[Flatten[listaffine], Null], 3]] // FullSimplify
Out[8]/TableForm=
```

$$\begin{aligned} \Gamma_{\tau r}^{\tau} &= -\frac{r(-2+\Lambda[\theta]^2)}{2(1+r^2)} \\ \Gamma_{\tau \theta}^{\tau} &= \frac{\Omega'[\theta]}{\Omega[\theta]} \\ \Gamma_{\tau \tau}^r &= -\left(r+r^3\right)\left(-1+\Lambda[\theta]^2\right) \\ \Gamma_{\tau \varphi}^r &= -\frac{1}{2}\left(1+r^2\right) \Lambda[\theta]^2 \\ \Gamma_{\tau \tau}^{\theta} &= \frac{\Omega'[\theta]+r^2\left(\Omega'[\theta]-\Lambda[\theta]\left(\Omega[\theta] \Lambda'[\theta]+\Lambda[\theta] \Omega'[\theta]\right)\right)}{\Omega[\theta]} \\ \Gamma_{\tau \varphi}^{\theta} &= -\frac{r \Lambda[\theta]\left(\Omega[\theta] \Lambda'[\theta]+\Lambda[\theta] \Omega'[\theta]\right)}{\Omega[\theta]} \\ \Gamma_{\tau r}^{\varphi} &= \frac{1-r^2+r^2 \Lambda[\theta]^2}{2+2 r^2} \\ \Gamma_{\tau \theta}^{\varphi} &= \frac{r \Lambda'[\theta]}{\Lambda[\theta]} \\ \Gamma_{r \tau}^{\tau} &= -\frac{r(-2+\Lambda[\theta]^2)}{2(1+r^2)} \\ \Gamma_{r \varphi}^{\tau} &= -\frac{\Lambda[\theta]^2}{2(1+r^2)} \\ \Gamma_{r r}^r &= -\frac{r}{1+r^2} \\ \Gamma_{r \theta}^r &= \frac{\Omega'[\theta]}{\Omega[\theta]} \\ \Gamma_{r r}^{\theta} &= -\frac{\Omega'[\theta]}{\Omega[\theta]+r^2 \Omega[\theta]} \\ \Gamma_{r \tau}^{\varphi} &= \frac{1-r^2+r^2 \Lambda[\theta]^2}{2+2 r^2} \\ \Gamma_{r \varphi}^{\varphi} &= \frac{r \Lambda[\theta]^2}{2+2 r^2} \\ \Gamma_{\theta \tau}^{\tau} &= \frac{\Omega'[\theta]}{\Omega[\theta]} \\ \Gamma_{\theta r}^{\tau} &= \frac{\Omega'[\theta]}{\Omega[\theta]} \\ \Gamma_{\theta \theta}^{\theta} &= \frac{\Omega'[\theta]}{\Omega[\theta]} \\ \Gamma_{\theta \tau}^{\varphi} &= \frac{r \Lambda'[\theta]}{\Lambda[\theta]} \\ \Gamma_{\theta \varphi}^{\varphi} &= \frac{\Lambda'[\theta]}{\Lambda[\theta]}+\frac{\Omega'[\theta]}{\Omega[\theta]} \\ \Gamma_{\varphi r}^{\tau} &= -\frac{\Lambda[\theta]^2}{2(1+r^2)} \\ \Gamma_{\varphi \tau}^r &= -\frac{1}{2}\left(1+r^2\right) \Lambda[\theta]^2 \\ \Gamma_{\varphi \tau}^{\theta} &= -\frac{r \Lambda[\theta]\left(\Omega[\theta] \Lambda'[\theta]+\Lambda[\theta] \Omega'[\theta]\right)}{\Omega[\theta]} \\ \Gamma_{\varphi \varphi}^{\theta} &= -\frac{\Lambda[\theta]\left(\Omega[\theta] \Lambda'[\theta]+\Lambda[\theta] \Omega'[\theta]\right)}{\Omega[\theta]} \\ \Gamma_{\varphi r}^{\varphi} &= \frac{r \Lambda[\theta]^2}{2+2 r^2} \\ \Gamma_{\varphi \theta}^{\varphi} &= \frac{\Lambda'[\theta]}{\Lambda[\theta]}+\frac{\Omega'[\theta]}{\Omega[\theta]} \end{aligned}$$

Metrika je kovarijantno konstantna: $\nabla_{\sigma} g_{\mu \nu}=0$:

```
In[9]:= covD[metric]
```

3 | *DiplomskiKod.nb*

```
Out[9]= {{ {0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0},
           {0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0},
           {0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0},
           {0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0} }
```

Kovarijantne derivacije su definirane u paketu:

```
covD[xU,{1}][[μ,ν]]→∇νxμ=xμ;ν
```

```
covD[xd][[μ,ν]]→∇νxμ=xμ;ν
```

```
Raise[covD[xd],[2]][[μ,ν]]→∇νxμ=xμ;ν
```

```
covD(xUU,{1,2}][[μ,ν,σ]]→∇σxμν
```

```
covD(xdd)[[μ,ν,σ]]→∇σxμν
```

Kod kontravarijantnih vektora (x^μ) moramo specificirati broj dignutih indeksa. Dizanje i spuštanje indeksa se vrši pomoću naredbe Raise.

U slučaju podignutog indeksa na kovarijantnoj derivaciji, moramo podignuti indeks derivacije pomoću pozadinske metrike: $\nabla^\sigma x^{\mu\nu} = g^{\sigma\rho} \nabla_\rho x^{\mu\nu}$. Analogno vrijedi i za vektore.

Lieva derivacija $\mathcal{L}_{\xi_n} g_{\mu\nu} \rightarrow \text{LieD}[xU, \text{metric}]$

Killingovi vektori (dani u članku)

```
In[10]:= (*U(1) izometrija*)
```

```
In[11]:= ξ0 = {0, 0, 0, -1};
```

```
In[12]:= (*SL(2,R) izometrije*)
```

```
In[13]:= ξ1 = {2, 0, 0, 0};
```

```
In[14]:= ξ2 = {2 Sin[τ]  $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ , -2 Cos[τ]  $\sqrt{1+x^2}$ , 0,  $\frac{2 \text{Sin}[\tau]}{\sqrt{1+x^2}}$ };
```

```
In[15]:= ξ3 = {-2 Cos[τ]  $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ , -2 Sin[τ]  $\sqrt{1+x^2}$ , 0,  $-\frac{2 \text{Cos}[\tau]}{\sqrt{1+x^2}}$ };
```

Komutator Killingovih vektora $\xi_a = \xi_a^\mu \partial_\mu$ je dan izrazom $[\xi_1, \xi_2] = (\xi_1^\nu \partial_\nu \xi_2^\mu - \xi_2^\nu \partial_\nu \xi_1^\mu) \partial_\mu$.

```
In[16]:= commutator[x_List, y_List, var_List] :=  
Module[{dem, a, b},  
dem = Length[xIN];  
Table[Sum[  
x[[b]] D[y[[a]], xIN[[b]]] - y[[b]] D[x[[a]], xIN[[b]]],  
{b, dem}], {a, dem}]]
```

Provjera da li je matrica dobivenih jednadžbi simetrična (znamo da jest eksplicitno, a i iz toga da moramo imati zbog simetričnih rubnih uvjeta)

```
In[17]:= func[mat_?SymmetricMatrixQ] := UpperTriangularize[mat];  
func[mat_?(Not@SymmetricMatrixQ[#] &)] := mat;
```

Račun centralnog naboja

Započinjemo račun centralnog naboja.

Difeomorfizmi:

$$\text{In[19]:= } \xi U_m = \{0, -r \, i \, m \, e^{-i m \varphi}, 0, -e^{-i m \varphi}\};$$

$$\text{In[20]:= } \xi U_n = \{0, -r \, i \, n \, e^{-i n \varphi}, 0, -e^{-i n \varphi}\};$$

Perturbacija pozadinske metrike $h_{\mu\nu} = \mathcal{L}_{\xi_n} g_{\mu\nu}$

$$\text{In[21]:= } h_{\mu\nu} = \text{LieD}[\xi U_n, \text{metric}] // \text{FullSimplify}$$

$$\text{Out[21]= } \left\{ \begin{aligned} & \{-4 \, i \, e^{-i n \varphi} G J n r^2 (-1 + \Lambda[\theta]^2) \Omega[\theta]^2, 0, 0, 0\}, \\ & \left\{0, -\frac{4 \, i \, e^{-i n \varphi} G J n \Omega[\theta]^2}{(1+r^2)^2}, 0, -\frac{2 \, e^{-i n \varphi} G J n^2 r \Omega[\theta]^2}{1+r^2}\right\}, \{0, 0, 0, 0\}, \\ & \left\{0, -\frac{2 \, e^{-i n \varphi} G J n^2 r \Omega[\theta]^2}{1+r^2}, 0, 4 \, i \, e^{-i n \varphi} G J n \Lambda[\theta]^2 \Omega[\theta]^2\right\} \end{aligned} \right\}$$

$$\text{In[22]:= } \text{MatrixForm}[h_{\mu\nu}]$$

$$\text{Out[22]/MatrixForm=}$$

$$\begin{pmatrix} -4 \, i \, e^{-i n \varphi} G J n r^2 (-1 + \Lambda[\theta]^2) \Omega[\theta]^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{4 \, i \, e^{-i n \varphi} G J n \Omega[\theta]^2}{(1+r^2)^2} & 0 & -\frac{2 \, e^{-i n \varphi} G J n^2 r \Omega[\theta]^2}{1+r^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2 \, e^{-i n \varphi} G J n^2 r \Omega[\theta]^2}{1+r^2} & 0 & 4 \, i \, e^{-i n \varphi} G J n \Lambda[\theta]^2 \Omega[\theta]^2 \end{pmatrix}$$

$$h^{\mu\nu} = g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} h_{\alpha\beta}$$

$$\text{In[23]:= } hU_{\mu\nu} = \text{Raise}[h_{\mu\nu}, \{1, 2\}] // \text{FullSimplify}$$

$$\text{Out[23]= } \left\{ \begin{aligned} & \left\{ \frac{i \, e^{-i n \varphi} n r^2}{G J (1+r^2)^2 \Omega[\theta]^2}, -\frac{e^{-i n \varphi} n^2 r^2}{2 G J (1+r^2) \Omega[\theta]^2}, 0, \frac{i \, e^{-i n \varphi} n r}{G J (1+r^2)^2 \Omega[\theta]^2} \right\}, \\ & \left\{ -\frac{e^{-i n \varphi} n^2 r^2}{2 G J (1+r^2) \Omega[\theta]^2}, -\frac{i \, e^{-i n \varphi} n}{G J \Omega[\theta]^2}, 0, \frac{e^{-i n \varphi} n^2 r (-1-r^2+r^2 \Lambda[\theta]^2)}{2 G J (1+r^2) \Lambda[\theta]^2 \Omega[\theta]^2} \right\}, \\ & \{0, 0, 0, 0\}, \left\{ \frac{i \, e^{-i n \varphi} n r}{G J (1+r^2)^2 \Omega[\theta]^2}, \frac{e^{-i n \varphi} n^2 r (-1-r^2+r^2 \Lambda[\theta]^2)}{2 G J (1+r^2) \Lambda[\theta]^2 \Omega[\theta]^2}, \right. \\ & \left. 0, \frac{i \, e^{-i n \varphi} n ((1+r^2)^2 - r^2 (2+r^2) \Lambda[\theta]^2)}{G J (1+r^2)^2 \Lambda[\theta]^2 \Omega[\theta]^2} \right\} \end{aligned} \right\}$$

$$\text{In[24]:= } hU_{\mu\nu} // \text{MatrixForm}$$

$$\text{Out[24]/MatrixForm=}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{i \, e^{-i n \varphi} n r^2}{G J (1+r^2)^2 \Omega[\theta]^2} & -\frac{e^{-i n \varphi} n^2 r^2}{2 G J (1+r^2) \Omega[\theta]^2} & 0 & \frac{i \, e^{-i n \varphi} n r}{G J (1+r^2)^2 \Omega[\theta]^2} \\ -\frac{e^{-i n \varphi} n^2 r^2}{2 G J (1+r^2) \Omega[\theta]^2} & -\frac{i \, e^{-i n \varphi} n}{G J \Omega[\theta]^2} & 0 & \frac{e^{-i n \varphi} n^2 r (-1-r^2+r^2 \Lambda[\theta]^2)}{2 G J (1+r^2) \Lambda[\theta]^2 \Omega[\theta]^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{i \, e^{-i n \varphi} n r}{G J (1+r^2)^2 \Omega[\theta]^2} & \frac{e^{-i n \varphi} n^2 r (-1-r^2+r^2 \Lambda[\theta]^2)}{2 G J (1+r^2) \Lambda[\theta]^2 \Omega[\theta]^2} & 0 & \frac{i \, e^{-i n \varphi} n ((1+r^2)^2 - r^2 (2+r^2) \Lambda[\theta]^2)}{G J (1+r^2)^2 \Lambda[\theta]^2 \Omega[\theta]^2} \end{pmatrix}$$

$$h = g^{\mu\nu} h_{\mu\nu}$$

```
In[25]= h = Sum[gUU[[a, b]] hμν[[a, b]], {a, 1, 4}, {b, 1, 4}] // Simplify
```

```
Out[25]= 0
```

Možemo koristiti i multiDot iz paketa RGTC, koji kontrahira parove indeksa pojedinih tenzora.

```
In[26]= multiDot[gUU, hμν, {1, 1}, {2, 2}]
```

```
Out[26]= 0
```

```
In[27]= deter =
```

$$\sqrt{-\text{Det}[\text{metric}]} /. \Lambda \rightarrow \left(\frac{2 \sin[\theta]}{1 + \cos[\theta]^2} \right) \& /. \Omega \rightarrow \left(\frac{\sqrt{1 + \cos[\theta]^2}}{\sqrt{2}} \right) \& // \text{FullSimplify}$$

```
Out[27]= 2 \sqrt{G^4 J^4 (1 + \cos[\theta]^2)^2 \sin[\theta]^2}
```

Bitno je ručno sve simplificirati jer nismo rekli *Mathematici* da su sve konstante pozitivne

```
In[28]= determin = 2 G^2 J^2 (1 + Cos[θ]^2) Sin[θ]
```

```
Out[28]= 2 G^2 J^2 (1 + Cos[θ]^2) Sin[θ]
```

```
In[29]= ξdm = Lower[ξUm, {1}] // FullSimplify
```

```
Out[29]= {-2 e^{-i m φ} G J r Δ[θ]^2 Ω[θ]^2, -\frac{2 i e^{-i m φ} G J m r Ω[θ]^2}{1 + r^2}, 0, -2 e^{-i m φ} G J Δ[θ]^2 Ω[θ]^2}
```

Uzimamo definiciju k_{ξ_m} iz članka Guica et. al.

```

In[30]:= kGuica = Module[{σ, μ, ν},
  Sum[ $\frac{1}{4}$  epsilon[3, 4, μ, ν] (-ξUm[ν] covD[hUμν, {1, 2}][[μ, σ, σ]] +
    ξdm[σ] Raise[covD[hUμν, {1, 2}], {3}][[μ, σ, ν]] -
    hUμν[[ν, σ] covD[ξUm, {1}][[μ, σ]] +
     $\frac{1}{2}$  hUμν[[σ, ν]] (Raise[covD[ξdm], {2}][[σ, μ]] + covD[ξUm, {1}][[μ, σ]])],
  {σ, 1, 4}, {μ, 1, 4}, {ν, 1, 4}]] // FullSimplify

Out[30]= 
$$\frac{i e^{-i (m+n) \varphi} n \left( n (-m+n) r^2 + 2 (1+r^2) \Lambda[\theta]^2 \right)}{8 G J (1+r^2) \Omega[\theta]^2}$$


In[31]:= int2 = kGuica / e-i (m+n) φ /. Λ →  $\left( \frac{2 \sin[\#]}{1 + \cos[\#]^2} \& \right)$  /. Ω →  $\left( \frac{\sqrt{1 + \cos[\#]^2}}{\sqrt{2}} \& \right)$ 

Out[31]= 
$$\frac{i n \left( n (-m+n) r^2 + \frac{8 (1+r^2) \sin[\theta]^2}{(1+\cos[\theta]^2)^2} \right)}{4 G J (1+r^2) (1+\cos[\theta]^2)}$$


In[32]:= INT =  $\frac{2}{4 G}$  Limit[Integrate[int2 * determin, {θ, 0, π}], r → ∞]

Out[32]=  $\frac{1}{2} i J n (4 - m n + n^2)$ 

In[33]:= INT /. n → -m // Simplify

Out[33]=  $-i J m (2 + m^2)$ 

```

Provjera računa pomoću SurfaceCharges koda

SurfaceCharges-Code

Prije pokretanja uzimamo SurfaceCharges kod od Goeffreyja Comperea. Definiramo difeomorfizme, dane iz članaka

```
In[71]:= Clear[m, n];

In[72]:= Lm = {0, -r i m e^{-i m \varphi}, 0, -e^{-i m \varphi}} (* \xi_m *)
Out[72]:= {0, -i e^{-i m \varphi} m r, 0, -e^{-i m \varphi}}

In[73]:= Ln = Lm /. {m -> n} (* \xi_n *)
Out[73]:= {0, -i e^{-i n \varphi} n r, 0, -e^{-i n \varphi}}

In[74]:= Lmn = Lm /. {m -> (m + n)};

Provjerimo da li će nam komutator dati točan izraz za Virasoro algebru  $i[\xi_m, \xi_n] - (m - n) \xi_{m+n} = 0$ 

In[75]:= Factor[Simplify[ICommutator[Lm, Ln] - (m - n) Lmn]]
Out[75]:= {0, 0, 0, 0}

Lieva derivacija pozadinske metrike po difeomorfizmu  $\mathcal{L}_{\xi_n} g_{\mu\nu}$ 

In[76]:= cLgLn = Simplify[Liediffdd[metric, coord, Ln]]
Out[76]:= {{-4 i e^{-i n \varphi} G J n r^2 (-1 + \Lambda[\theta]^2) \Omega[\theta]^2, 0, 0, 0},
  {0, -\frac{4 i e^{-i n \varphi} G J n \Omega[\theta]^2}{(1 + r^2)^2}, 0, -\frac{2 e^{-i n \varphi} G J n^2 r \Omega[\theta]^2}{1 + r^2}}, {0, 0, 0, 0},
  {0, -\frac{2 e^{-i n \varphi} G J n^2 r \Omega[\theta]^2}{1 + r^2}, 0, 4 i e^{-i n \varphi} G J n \Lambda[\theta]^2 \Omega[\theta]^2}}
```

$$\text{Out[77]/MatrixForm} = \begin{pmatrix} -4 i e^{-i n \varphi} G J n r^2 (-1 + \Lambda[\theta]^2) \Omega[\theta]^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{4 i e^{-i n \varphi} G J n \Omega[\theta]^2}{(1 + r^2)^2} & 0 & -\frac{2 e^{-i n \varphi} G J n^2 r \Omega[\theta]^2}{1 + r^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2 e^{-i n \varphi} G J n^2 r \Omega[\theta]^2}{1 + r^2} & 0 & 4 i e^{-i n \varphi} G J n \Lambda[\theta]^2 \Omega[\theta]^2 \end{pmatrix}$$

Poisson bracket faktor 8π je ukomponiran

```
In[78]:= PreCentralCharge = Series[Simplify[
  Series[ChargesEinstein[Lm, cLgLn, -1, {1, 2}] / G, {r, \infty, 0}], {r, \infty, 0}]
Signature of the metric: -1 .

The surface charge is inversely proportional to Newton
constant and should be integrated on the  $\tau$ ,  $r$  = constant surface

Out[78]:= \frac{i e^{-i (m+n) \varphi} n (-m + n) + 2 \Lambda[\theta]^2 \sqrt{G^4 J^4 \Lambda[\theta]^2 \Omega[\theta]^8}}{8 G^2 J \pi \Omega[\theta]^2} + O\left[\frac{1}{r}\right]^1
```

9 | *DiplomskiKod.nb*

Provjera s Iyer-Wald formalizmom

In[79]:= **Series**[ChargeSuppl, {r, ∞, 0}]

Out[79]= $O\left[\frac{1}{r}\right]^2$

Račun centralnog naboja

In[80]:= **CentralCharge** =

12 Coefficient[**Factor**[**Normal**[**2 π i PreCentralCharge** /. {n → -m}]], m^3]

Out[80]=
$$\frac{6 \sqrt{G^4 J^4 \Lambda[\theta]^2 \Omega[\theta]^8}}{G^2 J \Omega[\theta]^2}$$

In[81]:=
$$\frac{6 G^2 J^2 \Lambda[\theta] \Omega[\theta]^4}{G^2 J \Omega[\theta]^2}$$

Out[81]= $6 J \Lambda[\theta] \Omega[\theta]^2$

Integriramo naboj po rubu

In[82]:= **Integrate**[$6 J \Lambda[\theta] \Omega[\theta]^2 /. \Lambda \rightarrow \left(\frac{2 \sin[\#]}{1 + \cos[\#]^2} \&\right) /. \Omega \rightarrow \left(\frac{\sqrt{1 + \cos[\#]^2}}{\sqrt{2}} \&\right)$, {θ, 0, π}]

Out[82]= 12 J

Dobili smo dobar rezultat do na faktor $1/\hbar$.

Bibliografija

- [1] H. Nastase, “Introduction to AdS-CFT,” (2007), hep-th/0712.0689.
- [2] A. V. Ramallo, “Introduction to the AdS/CFT correspondence,” (2013), hep-th/1310.4319.
- [3] J. D. Brown and M. Henneaux, “Central Charges in the Canonical Realization of Asymptotic Symmetries: An Example from Three-Dimensional Gravity,” Commun.Math.Phys. **104**, 207 (1986).
- [4] A. Strominger, “Black hole entropy from near horizon microstates,” JHEP **9802**, 009 (1998), hep-th/9712251.
- [5] M. Guica, T. Hartman, W. Song, and A. Strominger, “The Kerr/CFT Correspondence,” Phys.Rev. **D80**, 124008 (2009), hep-th/0809.4266.
- [6] M. Visser, “The Kerr spacetime: A Brief introduction,” (2007), gr-qc/0706.0622.
- [7] R. Wald, *General Relativity* (University of Chicago Press, 2010), ISBN 9780226870373.
- [8] P. Townsend, “Black holes: Lecture notes,” (1997), gr-qc/9707012.
- [9] D. Raine and E. Thomas, *Black Holes: An Introduction*, Black Holes: An Introduction (Imperial College Press, 2005), ISBN 9781860945861.
- [10] E. Poisson, *A Relativist’s Toolkit* (Cambridge University Press, 2004), ISBN 9781139451994.
- [11] J. D. Bekenstein, “Black holes and entropy,” Phys. Rev. D **7**, 2333 (1973).

- [12] J. Bardeen, B. Carter, and S. Hawking, “The four laws of black hole mechanics,” *Communications in Mathematical Physics* **31**, 161 (1973), ISSN 0010-3616.
- [13] M. Banados, M. Henneaux, C. Teitelboim, and J. Zanelli, “Geometry of the (2+1) black hole,” *Phys.Rev.* **D48**, 1506 (1993), gr-qc/9302012.
- [14] D. Anninos, W. Li, M. Padi, W. Song, and A. Strominger, “Warped AdS(3) Black Holes,” *JHEP* **0903**, 130 (2009), hep-th/0807.3040.
- [15] O. Coussaert and M. Henneaux, “Selfdual solutions of (2+1) Einstein gravity with a negative cosmological constant,” (1994), hep-th/9407181.
- [16] I. Bengtsson and P. Sandin, “Anti de Sitter space, squashed and stretched,” *Class.Quant.Grav.* **23**, 971 (2006), gr-qc/0509076.
- [17] G. Barnich and F. Brandt, “Covariant theory of asymptotic symmetries, conservation laws and central charges,” *Nucl.Phys.* **B633**, 3 (2002), hep-th/0111246.
- [18] S. Silva, “On superpotentials and charge algebras of gauge theories,” *Nucl.Phys.* **B558**, 391 (1999), hep-th/9809109.
- [19] Y. Matsuo, T. Tsukioka, and C.-M. Yoo, “Another Realization of Kerr/CFT Correspondence,” *Nucl.Phys.* **B825**, 231 (2010), hep-th/0907.0303.
- [20] Y. Matsuo, T. Tsukioka, and C.-M. Yoo, “Yet Another Realization of Kerr/CFT Correspondence,” *Europhys.Lett.* **89**, 60001 (2010), hep-th/0907.4272.
- [21] I. Bredberg, C. Keeler, V. Lysov, and A. Strominger, “Cargese Lectures on the Kerr/CFT Correspondence,” *Nucl.Phys.Proc.Suppl.* **216**, 194 (2011), hep-th/1103.2355.
- [22] J. B. Hartle and S. W. Hawking, “Path-integral derivation of black-hole radiance,” *Phys. Rev. D* **13**, 2188 (1976).
- [23] V. P. Frolov and K. S. Thorne, “Renormalized stress-energy tensor near the horizon of a slowly evolving, rotating black hole,” *Phys. Rev. D* **39**, 2125 (1989).

- [24] J. Cardy, “Operator content of two-dimensional conformally invariant theories,” Nucl. Phys. B **270**, 186 (1986).
- [25] H. Blöte, J. Cardy, and M. Nightingale, “Conformal invariance, the central charge, and universal finite-size amplitudes at criticality,” Phys. Rev. Lett. **56**, 742 (1986).
- [26] J. E. McClintock, R. Shafee, R. Narayan, R. A. Remillard, S. W. Davis, et al., “The Spin of the Near-Extreme Kerr Black Hole GRS 1915+105,” Astrophys.J. **652**, 518 (2006), astro-ph/0606076.
- [27] R. L. Arnowitt, S. Deser, and C. W. Misner, “The Dynamics of general relativity,” Gen.Rel.Grav. **40**, 1997 (2008), gr-qc/0405109.
- [28] J. Frauendiener, “Conformal infinity,” Living Reviews in Relativity **7** (2004).
- [29] J. M. Bardeen and G. T. Horowitz, “The Extreme Kerr throat geometry: A Vacuum analog of $AdS(2) \times S^2$,” Phys.Rev. **D60**, 104030 (1999), hep-th/9905099.
- [30] de Azcárraga, J.A. and Izquierdo, J.M., *Lie Groups, Lie Algebras, Cohomology and Some Applications in Physics*, Cambridge Monographs on Mathematical Physics (Cambridge University Press, 1998), ISBN 9780521597005.
- [31] G. Compere, “Computing conserved charges in gravity using Mathematica,” URL <http://staff.science.uva.nl/~compere/package.html>.
- [32] S. Bonanos, “Riemannian Geometry and Tensor Calculus in Mathematica,” URL <http://www.inp.demokritos.gr/~sbonano/RGTC/>.