Obliczanie wartośći funkcji arctan i arccot

Sprawozdanie do zadania P.1.4

Jan Mazur 281141

Wrocław, 13 listopada 2016

1 Wstęp

Zadanie polega na obliczaniu wartośći funkcji $f(x) = \arctan(x)$ oraz $f(x) = \mathrm{arccot}(x)$, przy wykorzystaniu jedynie podstawowych działań arytmetycznych ($+$, $-$, $*$, $/$).

Przedstawię różne sposoby obliczania wartości tych funkcji - szereg Taylora, szereg Eulera oraz nieskończony ułamek łańcuchowy. Dokładność wszystkich metod porównam z funkcjami biblioteczymi. Wartośći funkcji $\mathrm{arccot}(x)$ będę wyliczał za pomocą wzorów matematycznych używając wcześniej wyliczonej wartośći funkcji $\arctan(x)$.

Wszelkie obliczenia wykonane zostały przy użyciu języka programowania **Julia** w wersji **0.5.0**, symulując 1000-bitową mantysę zmiennopozycjnego zapisu liczb maszynowych.

Kod źródłowy który został użyty do obliczeń, oraz do generowania wykresów znajduje się w pliku o rozszerzeniu .ipynb

2 Uwarunkowanie zadania

Przed przystąpieniem do jakichkolwiek obliczeń sprawdzam uwarunkowanie zadania. Wyznaczam wskaźniki urarunkowania obliczania wartości obu funkcji:

$$cond(\arctan(x)) = \frac{x}{(1+x^2)\arctan(x)}$$

$$cond(\mathrm{arc\,ctg}(x)) = \frac{x}{(1+x^2)\,\mathrm{arc\,ctg}(x)}$$

Po prostej analizie obu funkcji dostajemy własności:

$$cond(\arctan(x)) \leqslant 1$$

$$cond(\mathrm{arc\,ctg}(x)) \leqslant 1$$

Oba wskaźniki uwarunkowania są ograniczone przez niewielką stałą, więc zadanie jest dobrze uwarunkowane.

3 Szereg Taylora

Pierwszy sposób obliczania wartości funkcji $\arctan(x)$ opiera się o rozwinięcie jej w szereg Taylora [2]

$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}; \qquad |x| \leqslant 1 \tag{1}$$

Algorytm oblicza n-tą sumę częściową powyższego szeregu.
Szereg ten jest zbieżny tylko dla $x \in [-1, 1]$, a funkcja $\arctan(x)$ określona jest dla wszystkich rzeczywistych x. Problem ten rozwiążemy w punkcie 6.

n-ta suma częściowa	błąd bezwzględny
1	3.63e-02
2	5.31e-03
3	9.35e-04
4	1.80e-04
5	3.66e-05
⋮	⋮
30	5.72e-21
40	4.10e-27
50	3.13e-33

Tabela 1: Błędy bezwzględne przy obliczaniu kolejnych sum częściowych w punkcie $x = 0.5$

4 Szereg Eulera

Funkcję $\arctan(x)$ wyrazić można również za pomocą innego szeregu - szeregu Eulera [4]:

$$\arctan(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!} \frac{x^{2n+1}}{(1+x^2)^{n+1}} \tag{2}$$

W tym przypadku algorytm również liczy n-tą sumę częściową szeregu.
Z kryterium d'Alemberta ten szereg jest zbieżny dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$.
Szereg ten zbiega nieznacznie szybciej niż szereg opisany w punkcie 3.

n-ta suma częściowa	błąd bezwzględny
1	6.36e-02
2	1.03e-02
3	1.78e-03
4	3.18e-04
5	5.80e-05
$\vdots$	$\vdots$
30	8.54e-23
40	7.60e-30
50	6.98e-37

Tabela 2: Błędy bezwzględne przy obliczaniu kolejnych sum częściowych w punkcie $x = 0.5$

5 Nieskończony ułamek łańcuchowy

Funkcja arctan może zostać zapisana również za pomocą nieskończonego ułamka łańcuchowego [4][1]:

$$\arctan(x) = \cfrac{x}{1 + \cfrac{(1x)^2}{3 + \cfrac{(2x)^2}{5 + \cfrac{(3x)^2}{7 + \cfrac{(4x)^2}{9 + \ddots}}}}} \tag{3}$$

Dany ułamek jest zbieżny dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$.
Algorytm oblicza ułamek do zadanego n-tego reduktu. Metoda ta okazuje się być najszybciej zbieżna ze wszystkich przeze mnie analizowanych.

n-ty redukt	błąd bezwzględny
1	1.56e+00
2	2.10e-03
3	1.20e-04
4	6.80e-06
5	3.82e-07
$\vdots$	$\vdots$
30	1.77e-38
40	5.13e-51
50	1.48e-63

Tabela 3: Błędy bezwzględne przy obliczaniu kolejnych reduktów ułamka dla $x = 0.5$

6 Redukcja argumentu

Opisane przeze mnie metody są dobrze zbieżnie w przedziale $[-1, 1]$, natomiast poza tym przedziałem są zbieżne dużo wolniej, albo nawet wcale. Aby zaradzić temu problemowi skorzystałem ze wzoru [5]:

$$\arctan(x) = 2\arctan\left(\frac{x}{1+\sqrt{1+x^2}}\right) \tag{4}$$

Co prawda wymaga on obliczania pierwiastka, czego treść zadania nie dopuszcza, jednakże prostym algorytmem obliczania pierwiastka zgodnym z treścią zadania jest metoda babilońska [6], którą pozwolę sobię pominąć.

Funkcja w argumencie $\arctan(x)$ po prawej stronie równości ma zbiór wartości równy $(-1, 1)$, zatem wystarczy przed obliczeniami raz skorzystać z tego wzoru, aby znaleźć się w przedziale zbieżności opisanych metod. Doświadczenia numeryczne pokazują jednak, że opłaca się zmniejszyć argument jak najbardziej, czyli skorzystać z tego wzoru kilkukrotnie, redukując argument do określonej z góry wartości. Można zaobserwować to na wykresach w punkcie 8 jako "skoki" wykresu.

7 Obliczanie arccot(x)

W celu obliczenia wartośći funkcji $\operatorname{arccot}(x)$ skorystam ze wzoru [5]:

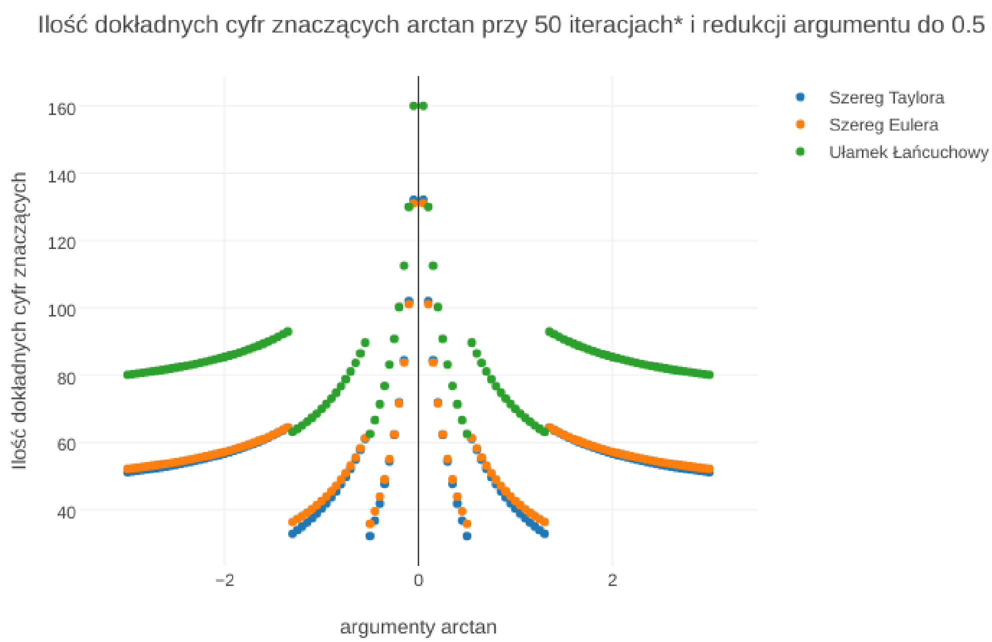
$$\arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \operatorname{arccot}(x) \tag{5}$$

Do obliczenia $\arctan(\frac{1}{x})$ użyję opisanych wcześniej metod.

8 Porównanie zbieżności metod

Używam słowa "iteracja" mając na myśli krok algorytmu. W przypadku szeregów jest to policzenie kolejnej sumy częściowej a w przypadku ułamka łańcuchowego, policzenie ułamka z jednym reduktem więcej.

8.1 Dla funkcji arctan(x)

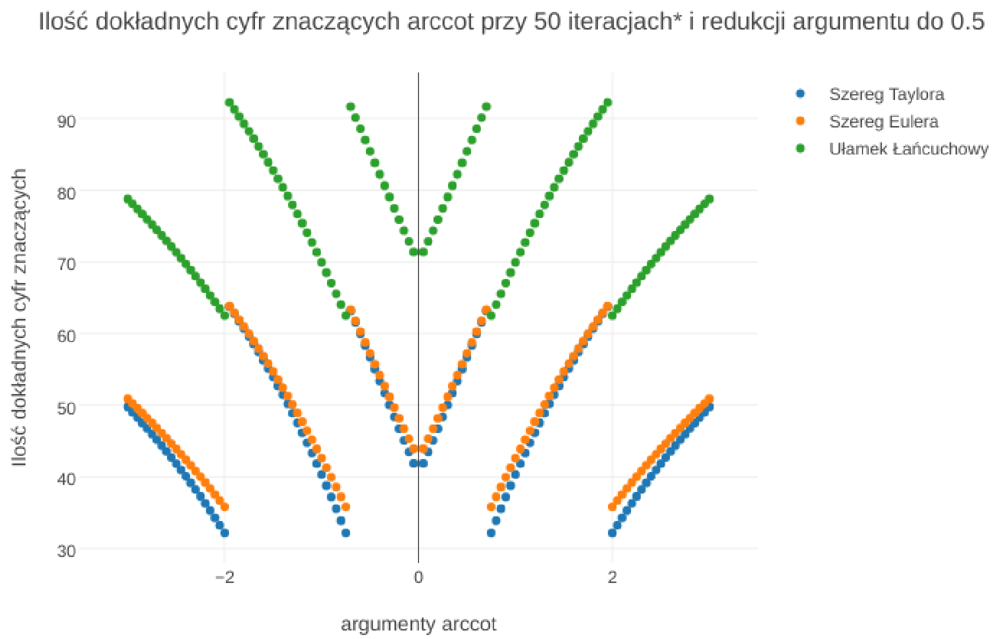


Rysunek 1: porownanie ilości dokładnych cyfr znaczących

Na wykresie widać, że metoda obliczania wartości funkcji arctan(x) za pomocą ułamka łańcuchowego daje zdecydowanie lepszą dokładność niż metody wykorzystujące szeregi. Dla argumentów blisko zera metoda wykorzystująca szereg Taylora jest nieznacznie lepsza niż metoda wykorzystująca rozwinięcie w szereg Eulera. W każdym innym miejscu okazuje się ona być najgorszą metodą. Dla coraz bardziej odległych od zera argumentów, metody są coraz gorzej zbieżne.

"Skoki" wwykresu w obrębie jednego koloru związane są z redukcją argumentu. Obliczamy wtedy wartość funkcji dla argumentu, dla którego metoda jest zbieżna dużo szybciej.

8.2 Dla funkcji arccot(x)



Rysunek 2: porownanie ilości dokładnych cyfr znaczących

Na tym wykresie zaobserwować możemy analogiczne rzeczy co na wykresie powyżej. Analogia wynika z liczenia odwrotności argumentu arccot jako argument arctan. W tym przypadku szybkość zbieżności metod rośnie wraz ze wzrostem odległości argumentu od zera.

9 Wnioski

Po rozważeniu 3 różnych metod obliczania wartości podanych w zadaniu funkcji stwierdzam, iż najlepszą metodą jest metoda wykorzystująca postać nieskończonego ułamka łańcuchowego. Wzór ten jest prawdziwy dla wszystkich argumentów funkcji a ponadto zbiega dużo szybciej niż pozostałe metody.

Dodatkowo bardzo opłacalną operacją jest redukcja argumentu dla którego liczymy wartość funkcji.

Literatura

[1] Oskar Perron - ”Die Lehre von den Kettenbrüchen”

[2] G. R Fichtenholz - ”Rachunek różniczkowy i całkowy” - tom I, rodział III, paragraf 5

[3] Weisstein, Eric W. "Euler's Continued Fraction." From MathWorld–A Wolfram Web Resource. http://mathworld.wolfram.com/EulersContinuedFraction.html (ostatni dostęp 13 listopada 2016)

[4] Weisstein, Eric W. "Inverse Tangent." From MathWorld–A Wolfram Web Resource.http://mathworld.wolfram.com/InverseTangent.html (ostatni dostęp 13 listopada 2016)

[5] https://en.wikipedia.org/wiki/Inverse_trigonometric_functions (ostatni dostęp 13 listopada 2016)

[6] https://en.wikipedia.org/wiki/Methods_of_computing_square_roots (ostatni dostęp 13 listopada 2016)