

Naturalne funkcje sklepane III stopnia

Sprawozdanie do zadania P.2.9

Jan Mazur 281141

Wrocław, 11 grudnia 2016

1 Wstęp

Interpolacja to proces polegający na wyznaczaniu w danym przedziale tzw. funkcji interpolacyjnej, która przyjmuje w nim z góry zadane wartości, w ustalonych punktach nazywanych węzłami. [5] Często stosowana jest interpolacja wielomianowa, ponieważ funkcje te mają sporo przydatnych własności, co implikuje istnienie wielu narzędzi matematycznych do ich analizy. Jednakże nie zawsze jest to dobra metoda. Zastosować można wtedy inny sposób interpolacji - interpolację funkcjami sklejanymi.

Przedstawię obie metody, skupiając się jednak na interpolacji funkcjami sklejanymi. Porównam ich błędy w stosunku do funkcji interpolowanej.

Wszelkie testy i obliczenia zostały wykonane w środowisku Jupyter Notebook przy użyciu języka programowania **Julia** w wersji **0.5.0**, w arytmetyce **BigFloat** z precyzją 1000. Znaleźć można je w dołączonym do sprawozdania pliku **program.ipynb**.

2 Interpolacja wielomianowa

Interpolacja wielomianowa polega na znalezieniu wielomianu n -tego stopnia, który w $n + 1$ węzłach będzie miał te same wartości co funkcja interpolowana. Rozważmy wielomiany interpolacyjne w postaci Newtona dla następujących funkcji:

$$f(x) = \sin(x), \quad x \in [0, \pi] \quad (1)$$

$$f(x) = e^x, \quad x \in [0, 4] \quad (2)$$

$$f(x) = (x^2 + 1)^{-1}, \quad x \in [-5, 5] \quad (3)$$

$$f(x) = x/(x^2 + \frac{1}{4}), \quad x \in [-\pi, \pi] \quad (4)$$

Przed przystąpieniem do obliczeń ustalmy najpierw funkcję błędu:

Definicja 1. $E_N^{(n)} := \max_{x \in D_N} |f(x) - s(x)|$

Gdzie s jest funkcją interpolacyjną w $n+1$ parami różnych węzłach z przedziału $[a, b]$, f funkcją interpolowaną a D_N zbiorem parami różnych równoodległych punktów z przedziału $[a, b]$.

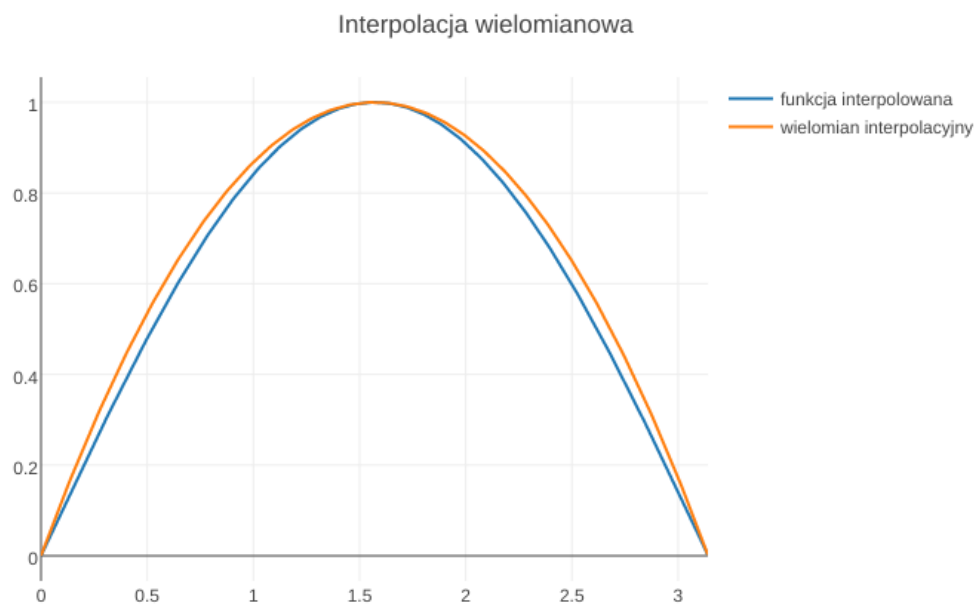
Tabela błędów (1) dla N = 1000				
Węzły równoodległe	Funkcje			
	$\sin x$	e^x	$(x^2 + 1)^{-1}$	$x/(x^2 + \frac{1}{4})$
3	5.600e-02	6.325e+00	6.462e-01	9.517e-01
5	1.812e-03	3.386e-01	4.383e-01	7.955e-01
10	3.006e-07	3.349e-05	3.002e-01	3.763e+00
20	1.106e-18	1.194e-15	8.575e+00	2.000e+02
50	3.473e-63	4.804e-57	6.605e+05	8.658e+07

W przypadku funkcji (1) i funkcji (2) obserwujemy znaczący wzrost dokładności wraz ze wzrostem ilości węzłów.

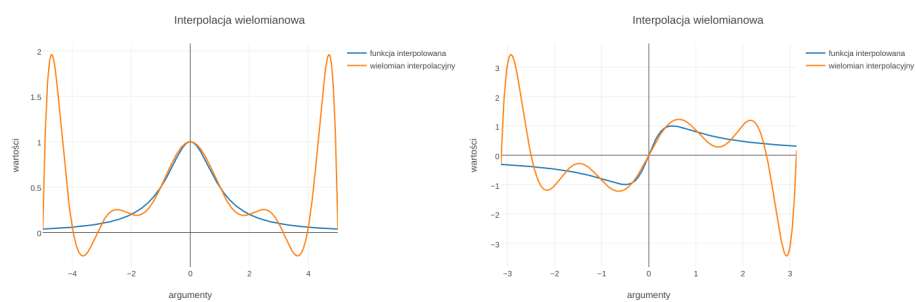
Z kolei funkcje (3) i (4) są interpolowane w sposób jakiego byśmy oczekiwali. Zwiększenie ilości węzłów nie powoduje zwiększenia dokładności. Wprost przeciwnie - zmniejsza ją. Efekt ten nazywa się efektem Runge'go. Polega on na tym, że dla pewnych funkcji błąd interpolacji na końcach przedziału zwiększa się wraz ze wzrostem ilości węzłów. Zaradzić można temu interpolując funkcję w węzłach które są przeskalowanymi zerami odpowiedniego wielomianu Czebyszewa, albo zastosować inny sposób interpolacji - interpolację funkcjami sklejanymi.

Tabela błędów dla N = 1000				
Węzły Czebyszewa	Funkcje			
	$\sin x$	e^x	$(x^2 + 1)^{-1}$	$x/(x^2 + \frac{1}{4})$
3	3.250e-02	3.744e+00	6.005e-01	9.366e-01
5	9.781e-04	1.853e-01	4.020e-01	8.299e-01
10	4.697e-08	5.278e-06	2.691e-01	3.253e-01
20	6.383e-21	6.968e-18	3.758e-02	8.386e-02
50	3.692e-70	5.134e-64	9.682e-05	7.140e-04

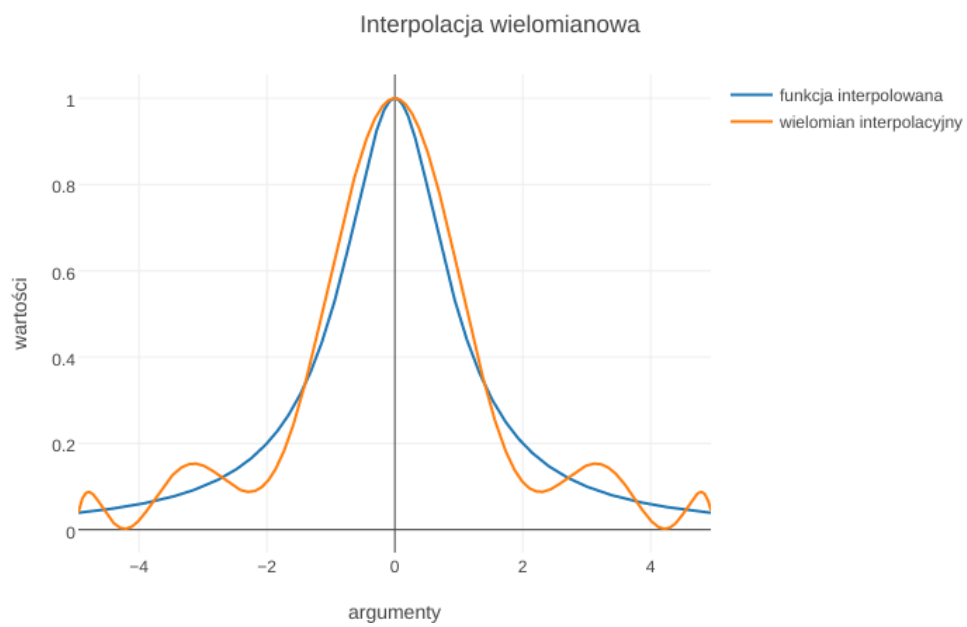
Więcej obliczeń można znaleźć w pliku **program.ipynb**.



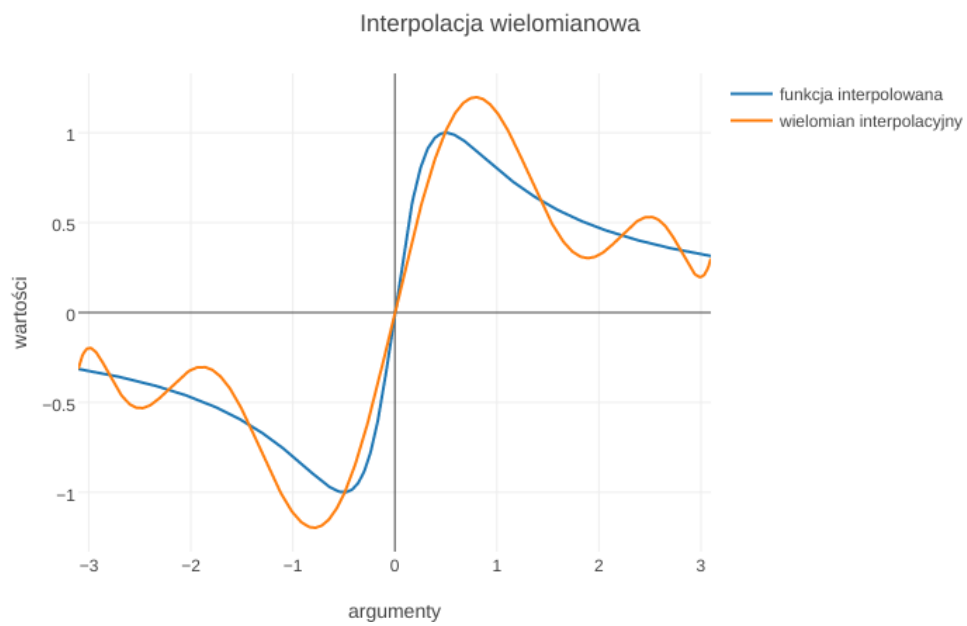
Rysunek 1: Interpolacja funkcji (1) w 3 równoodległych węzłach



(a) Interpolacja funkcji (3) w 11 równoodległych węzłach
 (b) Interpolacja funkcji (4) w 10 równoodległych węzłach



Rysunek 3: Interpolacja funkcji (3) w 11 węzłach Czebyszewa



Rysunek 4: Interpolacja funkcji (4) w 10 węzłach Czebyszewa

3 Funkcje sklepane

Definicja 2. Funkcją sklepaną $S(x)$ stopnia s , określoną na przedziale $[a, b]$ nazywamy dowolną funkcję spełniającą warunki:

- w każdym przedziale $[t_i, t_{i+1}]$, gdzie $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$, S jest wielomianem stopnia co najwyżej s .
- S oraz jej pochodne rzędu $1, 2, \dots, s-1$ są ciągłe na całym przedziale $[a, b]$.

Aby ujednoznaczyć istnienie takiej funkcji n -tego stopnia wyznaczanej przez $n+1$ punktów t_i definiuje się dodatkowe warunki:

Definicja 3. Funkcję sklepaną $S(x)$ stopnia s , określoną na przedziale $[a, b]$ nazywamy **naturalną** gdy: $S^{(s-1)}(a) = S^{(s-1)}(b) = 0$.

Rozważmy interpolację naturalną funkcją sklepaną III stopnia gdzie t_i będą węzłami interpolacji.

4 Interpolacja naturalną funkcją sklepaną III stopnia

Definicja 4. Naturalna funkcja sklepana III stopnia S , interpolująca funkcję f w punktach $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ w przedziale $[a, b]$ spełnia warunki:

- w każdym przedziale $[x_i, x_{i+1}]$ S jest wielomianem stopnia co najwyżej 3.
- Dla wszystkich x_i $S(x_i) = f(x_i)$.

Wprowadźmy oznaczenie:

Definicja 5. $M_k := S''(x_k)$

Twierdzenie 1. Wielkości M_k spełniają układ równań liniowych:

$$\lambda_k M_{k-1} + 2M_k + (1 - \lambda_k)M_{k+1} = 6f[x_{k-1}, x_k, x_{k+1}] \quad (k = 0, 1, \dots, n)$$

gdzie: $\lambda_k := h_k / (h_k + h_{k+1})$, oraz $h_k = x_k - x_{k-1}$

Macierz główna powyższego układu równań jest macierzą trójkątną z dominującą przekątną. Można więc ten układ równań rozwiązać w czasie liniowym.

4.1 Algorytm rozwiązujący układ równań ze względu na M_k w czasie liniowym

$$\left. \begin{aligned} q_0 &:= u_0 := 0 \\ p_k &:= \lambda_k q_{k-1} + 2 \\ q_k &:= (\lambda_k - 1)/p_k \\ u_k &:= (d_k - \lambda_k u_{k-1})/p_k \end{aligned} \right\} (k = 1, 2, \dots, n-1) \quad (5)$$

gdzie

$$d_k = 6f[x_{k-1}, x_k, x_{k+1}] \quad (k = 1, 2, \dots, n-1)$$

Wówczas

$$\begin{aligned} M_{n-1} &= u_{n-1} \\ M_k &= u_k + q_k M_{k+1} \quad (k = n-2, n-3, \dots, 1) \end{aligned}$$

Naturalna funkcja sklejana III stopnia interpolująca funkcję f w przedziale $[a, b]$ i punktach $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ dana jest wzorem:

$$\begin{aligned} S(x) = h_k^{-1} & \left[\frac{1}{6} M_{k-1} (x_k - x)^3 + \frac{1}{6} M_k (x - x_{k-1})^3 \right. \\ & + (f(x_{k-1}) - \frac{1}{6} M_{k-1} h_k^2) (x_k - x) \\ & \left. + (f(x_k) - \frac{1}{6} M_k h_k^2) (x_{k-1} - x) \right] \end{aligned} \quad (6)$$

Dowód powyższego wzoru, oraz dowód poprawności algorytmu można znaleźć w książce "Analiza Numeryczna" - D. Kincaida [1]

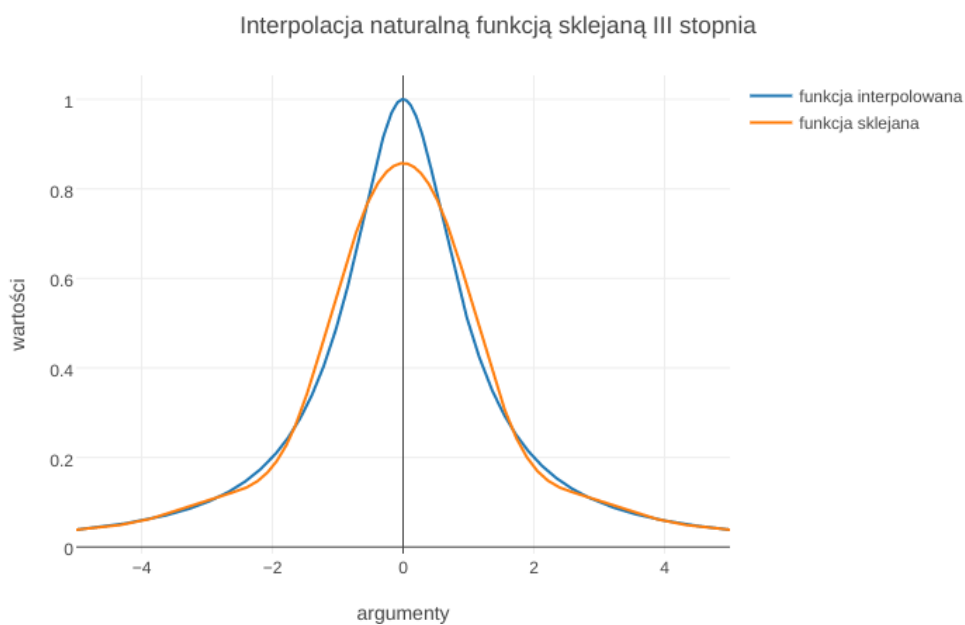
5 Testy

Po zaimplementowaniu algorytmu znajdującego naturalną funkcję sklejaną III stopnia dla danej funkcji interpolowanej wykonałem testy dla funkcji (1) (2) (3) (4).

Tabela błędów dla N = 1000				
Węzły równoodległe	Funkcje			
	$\sin x$	e^x	$(x^2 + 1)^{-1}$	$x/(x^2 + \frac{1}{4})$
3	2.001e-02	7.829e+00	6.011e-01	9.517e-01
5	1.066e-03	2.415e+00	2.793e-01	7.783e-01
10	3.984e-05	5.172e-01	1.428e-01	1.271e-01
20	1.958e-06	1.181e-01	1.232e-02	5.813e-03
50	4.394e-08	1.783e-02	1.478e-04	6.994e-04

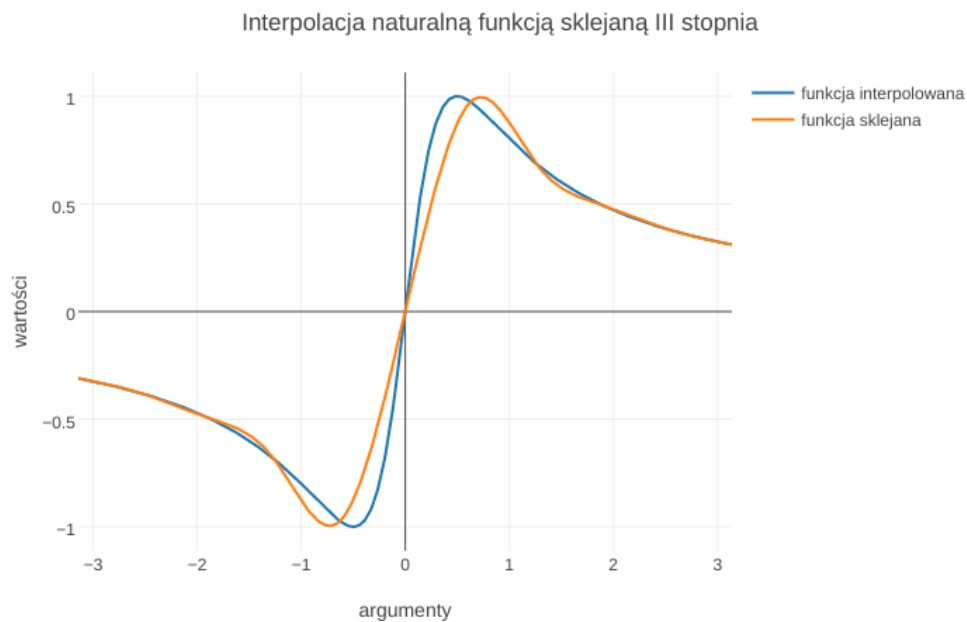
Sprawdziłem także interpolację naturalnymi funkcjami sklejanymi w węzłach Czebyszewa.

Tabela błędów dla $N = 1000$				
Węzły Czebyszewa	Funkcje			
	$\sin x$	e^x	$(x^2 + 1)^{-1}$	$x/(x^2 + \frac{1}{4})$
3	2.679e-02	4.785e+00	5.525e-01	9.517e-01
5	1.742e-03	1.308e+00	2.793e-01	7.783e-01
10	1.742e-04	1.065e-01	2.848e-01	2.114e-01
20	9.921e-06	7.039e-03	5.315e-02	3.329e-02
50	2.476e-07	1.727e-04	1.154e-03	3.893e-03



Rysunek 5: Interpolacja funkcji (3) w 10 węzłach

Wyeliminowaliśmy efekt Runge'go w dwóch ostatnich funkcjach, jednakże funkcje sklepane niezbyt dokładnie odwzorowują funkcję interpolowaną. Mimo wielokrotnego zwiększania ilości węzłów, błąd maleje w niewielki sposób. W przypadku dwóch pierwszych funkcji lepiej sprawdzała się interpolacja wielomianowa. Interpolacja w węzłach Czebyszewa, w przypadku funkcji sklepanych nie ma sensu.



Rysunek 6: Interpolacja funkcji (4) w 11 węzłach

6 Wnioski

W przypadku niektórych funkcji, interpolacja wielomianowa nie sprawdza się. Błąd interpolacji na końcach przedziałów rośnie wraz ze wzrostem ilości węzłów. Warto zastosować wtedy interpolacje funkcjami sklejanymi, bądź interpolować w węzłach Czebyszewa. Efekt Runge’go zostanie wtedy wyeliminowany. Interpolacja wielomianem w węzłach Czebyszewa co prawda jest dokładna, ale funkcja interpolująca na krańcach przedziałów mocno oscyluje.

Z kolei funkcje sklejane dobrze odwzorowują ogólny kształt funkcji, jednak ich dokładność wraz ze zwiększaniem ilości węzłów rośnie bardzo powoli. W szczególności dużo wolniej niż dla interpolacji wielomianowej gdy efekt Runge’go nie występuje. Zatem gdy dla danej funkcji błąd interpolacji nie rośnie na końcach przedziałów dobrze jest interpolować wielomianem, w przeciwnym wypadku, jeśli zależy nam na odwzorowaniu kształtu, funkcją sklejaną.

Jeśli zaś zależy nam na dokładności, można interpolować wielomianami z węzłami Czebyszewa, jednak w takim wypadku lepiej zastosować techniki aproksymacji.

Literatura

- [1] David Kincaid, Ward Cheney - "Analiza Numeryczna"

- [2] <https://www.math.ntnu.no/emner/TMA4215/2008h/cubicsplines.pdf>
- [3] Weisstein, Eric W. "Cubic Spline." From MathWorld—A Wolfram Web Resource. <http://mathworld.wolfram.com/CubicSpline.html>
- [4] https://en.wikipedia.org/wiki/Spline_interpolation
- [5] [https://pl.wikipedia.org/wiki/Interpolacja_\(matematyka\)](https://pl.wikipedia.org/wiki/Interpolacja_(matematyka))
- [6] https://en.wikipedia.org/wiki/Runge%27s_phenomenon
- [7] prezentacja multimedialna z wykładu - Rafał Nowak