Naturalne funkcje sklejane III stopnia

Sprawozdanie do zadania P.2.9

Jan Mazur 281141

Wrocław, 9 grudnia 2016

1 Wstęp

Interpolacja to proces polegający na wyznaczaniu w danym przedziale tzw. funkcji interpolacyjnej, która przyjmuje w nim z góry zadane wartości, w ustalonych punktach nazywanych węzłami. [5] Często stosowana jest interpolacja wielomianowa, ponieważ funkcje te mają sporo przydatnych własności, co implikuje istnienie wielu narzędzi matematycznych do ich analizy. Jednakże nie zawsze jest to dobra metoda. Zastosować można wtedy inny sposób interpolacji - interpolację funkcjami sklejanymi.

Przedstawię obie metody, skupiając się jednak na interpolacji funkcjami sklejanymi. Porównam ich błędy w stosunku do funkcji interpolowanej.

Wszelkie testy i obliczenia zostały wykonane w środowisku Jupyter Notebook przy użyciu języka programowania **Julia** w wersji **0.5.0**. Znaleźć można je w dołączonym do sprawozdania pliku **program.ipynb**.

2 Interpolacja wielomianowa

Interpolacja wielomianowa polega na znalezieniu wielomianu n-tego stopnia, który w $n+1$ węzłach będzie miał te same wartości co funkcja interpolowana. Rozważmy wielomiany interpolacyjne w postaci Newtona dla następujących funkcji:

$$f(x) = sin(x),\ x \in [0, \pi] \tag{1}$$

$$f(x) = e^x,\ x \in [0, 4] \tag{2}$$

$$f(x) = (x^2+1)^{-1},\ x \in [-5, 5] \tag{3}$$

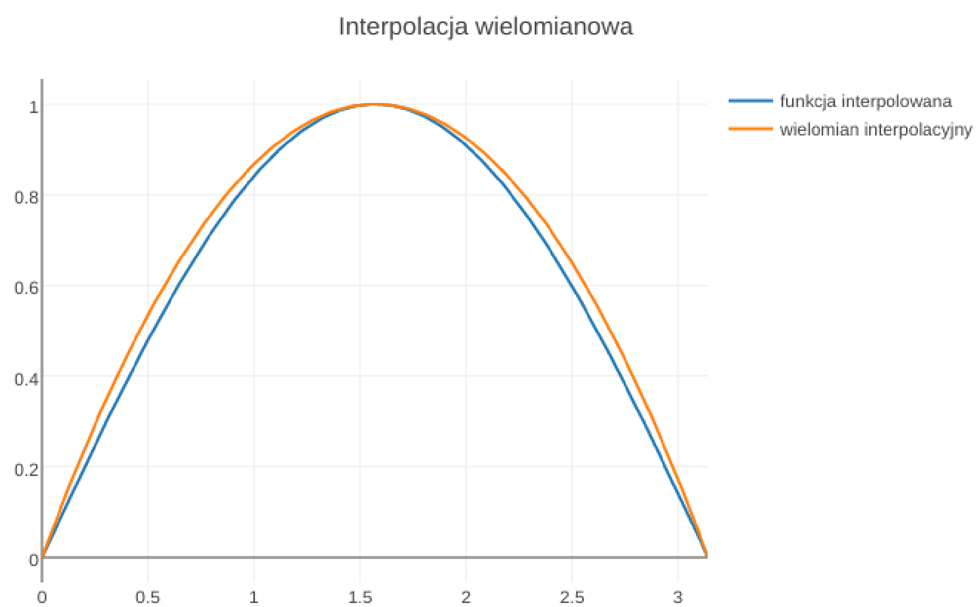
$$f(x) = x/(x^2+\frac{1}{4}),\ x \in [-\pi, \pi] \tag{4}$$

Przed przystąpieniem do obliczeń ustalmy najpierw funkcję błędu:

Definicja 1. $E_N^{(n)} := \max_{x \in D_N} |f(x) - s(x)))|$

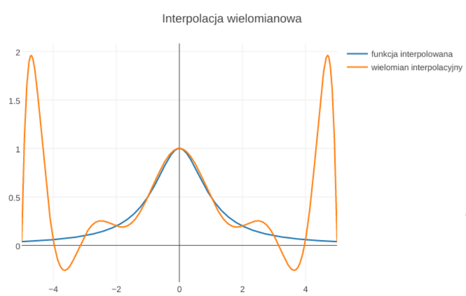
Gdzie s jest funkcją interpolacyjną w n+1 parami różnych węzłach z przedziału $[a,b]$, f funkcją interpolowaną a D_N zbiorem parami różnych równoodległych punktów z przedziału $[a,b]$.

Tabela błędów dla N = 1000				
Węzły	Funkcje			
	$\sin x$	e^x	$(x^2+1)^{-1}$	$x/(x^2+\frac{1}{4})$
3	5.59122e-02	1.80850e-03	2.90187e-07	dupa
5	5.60067e-02	1.80973e-03	2.99754e-07	dupa
10	5.60096e-02	1.81196e-03	3.00628e-07	dupa
50	5.60096e-02	1.81210e-03	3.00631e-07	dupa
100	5.60096e-02	1.81210e-03	3.00631e-07	dupa

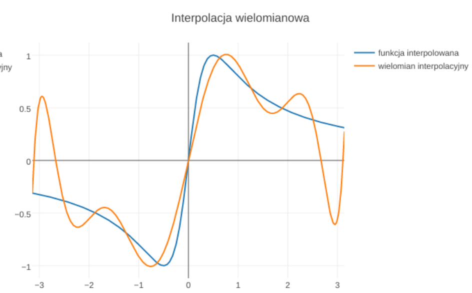


Rysunek 1: Interpolacja funkcji (1) w 3 węzłach

W przypadku funkcji (1) i (2) błąd wielomianu interpolacyjnego jest niewielki. Natomiast przy funkcjach (3) i (4) zaobserwować można tzw. efekt Runge'go[6]. Polega on na tym, że przy zwiększaniu ilości węzłów uzyskujemy coraz większy



(a) Interpolacja funkcji (3)



(b) Interpolacja funkcji (4)

błąd na końcach przedziałów interpolacji. Rozwiązaniem tego problemu może być interpolacja funkcjami sklejanymi.

Obliczenia dla innych funkcji i kombinacji punktów interpolacji oraz N można znaleźć w pliku **program.ipynb**.

3 Funkcje sklejane

Definicja 2. ***Funkcją sklejaną*** *$S(x)$ stopnia s, określoną na przedziale $[a, b]$ nazywamy dowolną funkcję spełniającą warunki:*

- *w każdym przedziale $[t_i, t_{i+1}]$, gdzie $a = t_0 < t_i < ... < t_n = b$, S jest wielomianem stopnia co najwyżej s.*
- *S oraz jej pochodne rzędu 1,2,...,s-1 są ciągłe na całym przedziale $[a, b]$.*

Aby ujednoznacznić istnienie takiej funkcji n-tego stopnia wyznaczanej przez $n + 1$ punktów t_i definiuje się dodatkowe warunki:

Definicja 3. *Funkcję sklejaną $S(x)$ stopnia s, określoną na przedziale $[a, b]$ nazywamy* ***naturalną*** *gdy: $S^{(s-1)}(a) = S^{(s-1)}(b) = 0$.*

Rozważmy interpolacje naturalną funkcją sklejaną III stopnia gdzie t_i będą węzłami interpolacji.

4 Interpolacja naturalną funkcją sklejaną III stopnia

Definicja 4. *Naturalna funkcja sklejana III stopnia S, interpolująca funkcję f w punktach $a = x_0 < x_i < ... < x_n = b$ w przedziale $[a, b]$ spełnia warunki:*

- *w każdym przedziale $[x_i, x_{i+1}]$ S jest wielomianem stopnia co najwyżej 3.*
- *Dla wszystkich x_i $S(x_i) = f(x_i)$.*

Wprowadźmy oznaczenie:

Definicja 5. $M_k := S''(x_k)$

Twierdzenie 1. *Wielkośći M_k spełniają układ równań liniowych:*
$\lambda_k M_{k-1} + 2M_k + (1-\lambda_k)M_{k+1} = 6f[x_{k-1}, x_k, x_{k+1}] \qquad (k = 0, 1, ..., n)$
gdzie: $\lambda_k := h_k/(h_k + h_{k+1})$, *oraz* $h_k = x_k - x_{k-1}$

Układ równań z powyższego twierdzenia w postaci macierzowej ma trójprzekątniową macierz z dominującą przekątną. Można go więc rozwiązać w czasie liniowym.

4.1 Algorytm rozwiązujący układ równań ze względu na M_k w czasie linowym

$$q_0 := u_0 := 0 \tag{5}$$

$$\left.\begin{aligned} p_k &:= \lambda_k q_{k-1} + 2 \\ q_k &:= (\lambda_k - 1)/p_k \\ u_k &:= (d_k - \lambda_k u_{k-1})/p_k \end{aligned}\right\} (k = 1, 2, ..., n-1)$$

gdzie

$$d_k = 6f[x_{k-1}, x_k, xk+1] \ (k = 1, 2, ..., n-1)$$

Wówczas

$$\begin{aligned} M_{n-1} &= u_{n-1} \\ M_k &= u_k + q_k M_{k+1} \ (k = n-2, n-3, ..., 1) \end{aligned}$$

Naturalna funkcja sklejana III stopnia interpolująca funkcję f w przedziale $[a, b]$ i punktach $a = x_0 < x_i < ... < x_n = b$ dana jest wzorem:

$$\begin{aligned} S(x) = h_k^{-1}[&\frac{1}{6}M_{k-1}(x_k - x)^3 + \frac{1}{6}M_k(x - x_{k-1})^3 \\ &+ (f(x_{k-1}) - \frac{1}{6}M_{k-1}h_k^2)(x_k - x) \\ &+ (f(x_k) - \frac{1}{6}M_k h_k^2)(x_{k-1} - x)] \end{aligned} \tag{6}$$

5 Testy

Po zaimplementowaniu algorytmu znajdującego naturalną funkcję sklejaną III stopnia dla danej funkcji interpolowanej wykonałem testy dla funkcji(1) (2) (3) (4).

6 Wnioski

Jeśli zwykła interpolacja bardzo odstaje w niektórych miejscach to lepiej interpolować splinem. Spliney dobrze odwzorowują kształt a niekoniecznie dokładne wartości funkcji.

Czy punkty równoodległe?

Literatura

[1] David Kincaid, Ward Cheney - "Analiza Numeryczna"

[2] https://www.math.ntnu.no/emner/TMA4215/2008h/cubicsplines.pdf

[3] Weisstein, Eric W. "Cubic Spline." From MathWorld–A Wolfram Web Resource. http://mathworld.wolfram.com/CubicSpline.html

[4] https://en.wikipedia.org/wiki/Spline_interpolation

[5] https://pl.wikipedia.org/wiki/Interpolacja_(matematyka)

[6] https://en.wikipedia.org/wiki/Runge%27s_phenomenon