Obliczanie wartośći funkcji arctan i arccot

Sprawozdanie do zadania P.1.4

Jan Mazur 281141

Wrocław, 7 listopada 2016

1 Wstęp

Zadanie polega na obliczaniu wartośći funkcji $f(x) = \arctan(x)$ oraz $f(x) = \operatorname{arccot}(x)$, przy wykorzystaniu jedynie podstawowych działań arytmetycznych ($+$, $-$, $*$, $/$).

Przedstawię różne sposoby obliczania tych funkcji - szereg Taylora, szereg Eulera oraz nieskończony ułamek łańcuchowy. Dokładność wszystkich metod porównam z funkcjami biblioteczymi. Wartośći funkcji $f(x) = \operatorname{arccot}(x)$ będę wyliczał za pomocą wzorów matematycznych z wcześniej wyliczonej wartośći funkcji $f(x) = \arctan(x)$

Wszelkie obliczenia wykonane zostały wykonane przy użyciu języka programowania Julia w wersji 0.5.0, symulując 500-bitową mantysę zmiennopozycjnego zapisu liczb maszynowych.

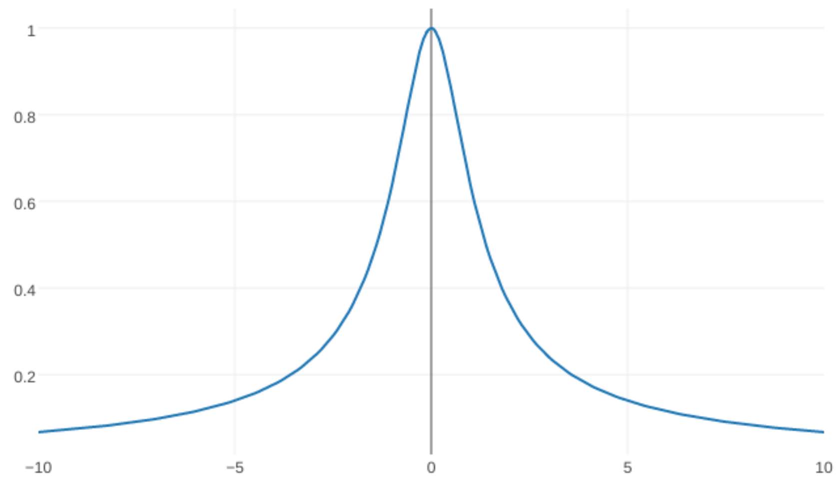
Kod źródłowy który został użyty do obliczeń, oraz do generowania wykresów znajduje się w pliku o rozszerzeniu .ipynb

2 Uwarunkowanie zadania

Przed przystąpieniem do jakichkolwiek obliczeń sprawdzam uwarunkowanie zadania. Wystarczy, że sprawdzę jak uwarunkowane jest obliczanie funkcji $\arctan(x)$, ponieważ wartośći funkcji $\operatorname{arccot}(x)$ będę uzyskiwał odpowiednio przekształcając uzyskane wartości funkcji $arctan(x)$. Wskaźnik uwarunkowania wynosi:

$$cond(\arctan(x)) = \frac{x}{(1+x^2)\arctan x} \tag{1}$$

Maksimum globalne wskaźnika uwarunkowania wynosi 1 zatem można powiedzieć, że zadanie jest dobrze uwarunkowane.



Rysunek 1: wskaźnik uwarunkowania

3 Szereg Taylora

Pierwszy sposób obliczania wartości funkcji $\arctan(x)$ opiera się o rozwinięcie w szereg Taylora

$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} \, ; \qquad |x| \leqslant 1 \tag{2}$$

Szereg ten jest zbieżny tylko dla x z przedziału $[-1, 1]$. Tabelka z iteracjami i błędami.

4 Szereg Eulera

Funkcję arctan rozwinąć można w inny szereg - szereg Eulera:

$$\arctan z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!} \frac{z^{2n+1}}{(1+z^2)^{n+1}} \tag{3}$$

Szereg ten zbiega nieznacznie szybciej niż metoda poprzednia. Jest zbieżny na całej prostej. Tabelka z iteracjami i błędami.

5 Nieskończony ułamek łańcuchowy

Funkcja arctan może zostać zapisana również za pomocą nieskończonego ułamka łańcuchowego:

$$\arctan(x) = \cfrac{x}{1 + \cfrac{(1x)^2}{3 + \cfrac{(2x)^2}{5 + \cfrac{(3x)^2}{7 + \cfrac{(4x)^2}{9 + \ddots}}}}} \tag{4}$$

Metoda ta okazuje się być najszybciej zbieżna ze wszystkich przeze mnie analizowanych. Jest zbieżna na całej prostej.

Tabelka z iteracjami i błędami.

6 Zbijanie argumentu

Opisane przeze mnie metody są dobrze zbieżnie w przedziale $[-1, 1]$, natomiast poza tym przedziałem są zbieżne dużo wolniej, albo nawet wcale. Aby zaradzić temu problemowi skorzystałem ze wzoru:

$$\arctan(x) = 2\arctan\left(\frac{x}{1+\sqrt{1+x^2}}\right) \tag{5}$$

Funkcja w argumencie arctan po prawej stronie ma zbiór wartości równy $(-1, 1)$, więc wystarczy przed obliczeniami raz skorzystać z tego wzoru, aby znaleźć się w przedziale zbieżności opisanych metod. Doświadczenia numeryczne pokazują jednak, że opłaca się zmniejszyć argument jak najbardziej, czyli skorzystać z tego wzoru kilkukrotnie.

7 Obliczanie arccot(x)

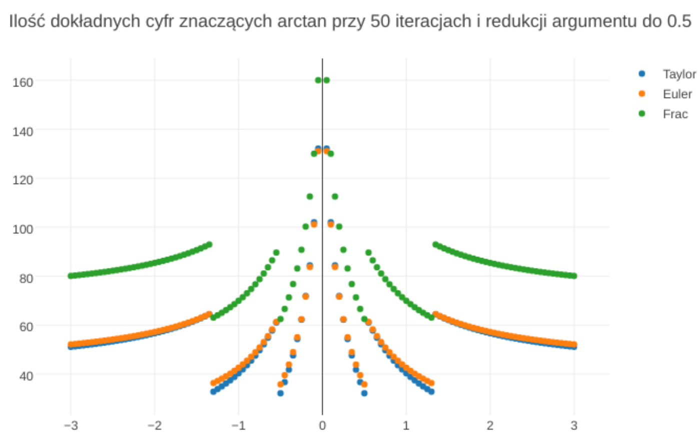
W celu obliczenia wartośći funkcji $\operatorname{arccot}(x)$ skorystam ze wzoru:

$$\arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \operatorname{arccot}(x)\,, \text{ if } x > 0 \tag{6}$$

Do obliczenia $\arctan(\frac{1}{x})$ użyję opisanych wcześniej metod. Jakaś tabelka z wynikami i iteracjami.

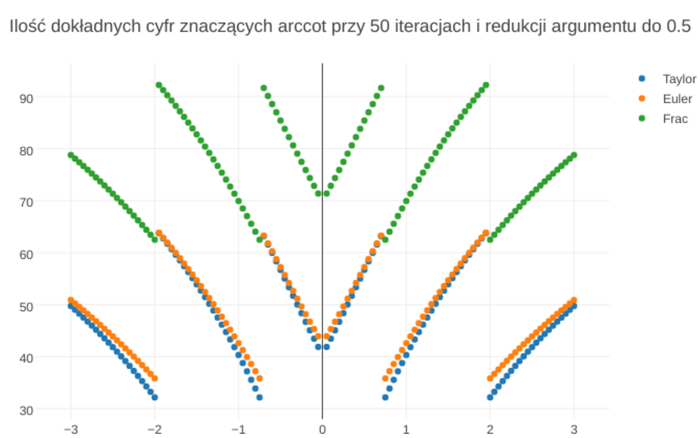
8 Porównanie zbieżności metod

8.1 $Dla funkcji \arctan(x)$



Rysunek 2: porownanie ilości dokładnych cyfr znaczących

8.2 $Dla funkcji \mathbf{arccot}(x)$



Rysunek 3: porownanie ilości dokładnych cyfr znaczących

9 Wnioski

Bla bla bla Taylor najwolniej zbieżny i tylko w [-1,1] , euler troche szybszy, ale zbieżny na całym R. Nieskończony ułamek najszybciej zbieżny i zbieżny na całym R. Bardzo opłaca się zbijanie argmentu do poziomu 0.1

Literatura

[1] `http://mathworld.wolfram.com/EulersContinuedFraction.html` (ostatni dostęp do strony 7 listopada 2016).

[2] `http://mathworld.wolfram.com/e.html` (ostatni dostęp do strony 7 listopada 2016).