

Obliczanie wartości funkcji \arctan i arccot

Sprawozdanie do zadania P.1.4

Jan Mazur 281141

Wrocław, 7 listopada 2016

1 Wstęp

Zadanie polega na obliczaniu wartości funkcji $f(x) = \arctan(x)$ oraz $f(x) = \operatorname{arccot}(x)$, przy wykorzystaniu jedynie podstawowych działań arytmetycznych ($+$, $-$, $*$, $/$).

Przedstawię różne sposoby obliczania tych funkcji - szereg Taylora, szereg Eulera oraz nieskończony ułamek łańcuchowy. Dokładność wszystkich metod porównam z funkcjami bibliotecznymi. Wartości funkcji $f(x) = \operatorname{arccot}(x)$ będę wyliczał za pomocą wzorów matematycznych z wcześniej wyliczonej wartości funkcji $f(x) = \arctan(x)$.

Wszelkie obliczenia wykonane zostały przy użyciu języka programowania Julia w wersji 0.5.0, symulując 500-bitową mantysę zmiennopozycyjnego zapisu liczb maszynowych.

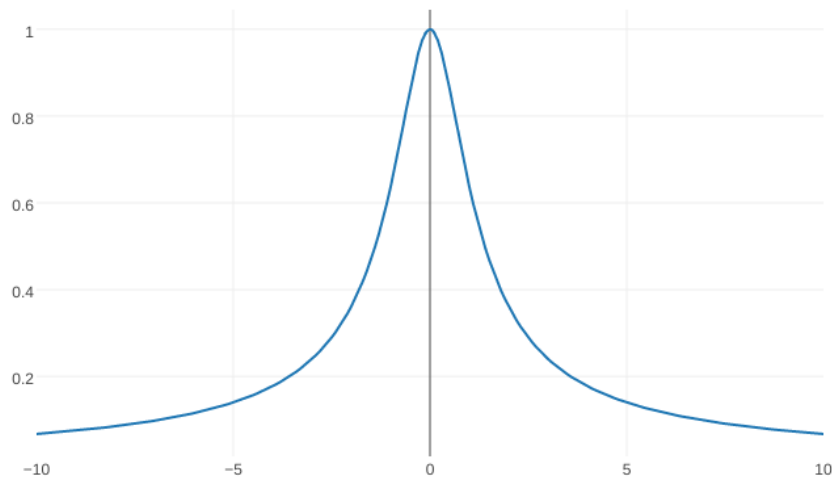
Kod źródłowy który został użyty do obliczeń, oraz do generowania wykresów znajduje się w pliku o rozszerzeniu .ipynb

2 Uwarunkowanie zadania

Przed przystąpieniem do jakichkolwiek obliczeń sprawdzam uwarunkowanie zadania. Wystarczy, że sprawdzę jak uwarunkowane jest obliczanie funkcji $\arctan(x)$, ponieważ wartości funkcji $\operatorname{arccot}(x)$ będę uzyskiwał odpowiednio przekształcając uzyskane wartości funkcji $\arctan(x)$. Wskaźnik uwarunkowania wynosi:

$$\operatorname{cond}(\arctan(x)) = \frac{x}{(1+x^2)\arctan x} \quad (1)$$

Maksimum globalne wskaźnika uwarunkowania wynosi 1 zatem można powiedzieć, że zadanie jest dobrze uwarunkowane.



Rysunek 1: wskaźnik uwarunkowania

3 Szereg Taylora

Pierwszy sposób obliczania wartości funkcji $\arctan(x)$ opiera się o rozwinięcie w szereg Taylora

$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}; \quad |x| \leq 1 \quad (2)$$

Szereg ten jest zbieżny tylko dla x z przedziału $[-1, 1]$. Tabelka z iteracjami i błędami.

4 Szereg Eulera

Funkcję \arctan rozwinąć można w inny szereg - szereg Eulera:

$$\arctan z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n} (n!)^2}{(2n+1)!} \frac{z^{2n+1}}{(1+z^2)^{n+1}} \quad (3)$$

Szereg ten zbiega nieznacznie szybciej niż metoda poprzednia. Jest zbieżny na całej prostej. Tabelka z iteracjami i błędami.

5 Nieskończony ułamek łańcuchowy

Funkcja \arctan może zostać zapisana również za pomocą nieskończonego ułamka łańcuchowego:

$$\arctan(x) = \frac{x}{1 + \frac{(1x)^2}{3 + \frac{(2x)^2}{5 + \frac{(3x)^2}{7 + \frac{(4x)^2}{9 + \ddots}}}}} \quad (4)$$

Metoda ta okazuje się być najszybciej zbieżna ze wszystkich przeze mnie analizowanych. Jest zbieżna na całej prostej.

Tabela z iteracjami i błędami.

6 Zbijanie argumentu

Opisane przeze mnie metody są dobrze zbieżne w przedziale $[-1, 1]$, natomiast poza tym przedziałem są zbieżne dużo wolniej, albo nawet wcale. Aby zaradzić temu problemowi skorzystałem ze wzoru:

$$\arctan(x) = 2 \arctan\left(\frac{x}{1 + \sqrt{1 + x^2}}\right) \quad (5)$$

Funkcja w argumencie \arctan po prawej stronie ma zbiór wartości równy $(-1, 1)$, więc wystarczy przed obliczeniami raz skorzystać z tego wzoru, aby znaleźć się w przedziale zbieżności opisanych metod. Doświadczenia numeryczne pokazują jednak, że opłaca się zmniejszyć argument jak najbardziej, czyli skorzystać z tego wzoru kilkakrotnie.

7 Obliczanie $\operatorname{arccot}(x)$

W celu obliczenia wartości funkcji $\operatorname{arccot}(x)$ skorzystam ze wzoru:

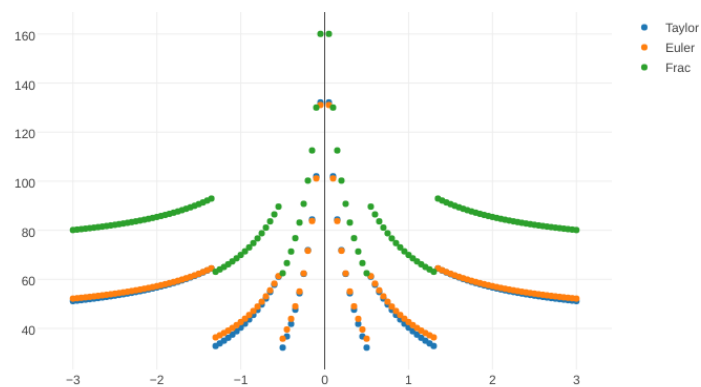
$$\arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \operatorname{arccot}(x), \text{ if } x > 0 \quad (6)$$

Do obliczenia $\arctan(\frac{1}{x})$ użyję opisanych wcześniej metod. Jakaś tabela z wynikami i iteracjami.

8 Porównanie zbieżności metod

8.1 $\arctan(x)$

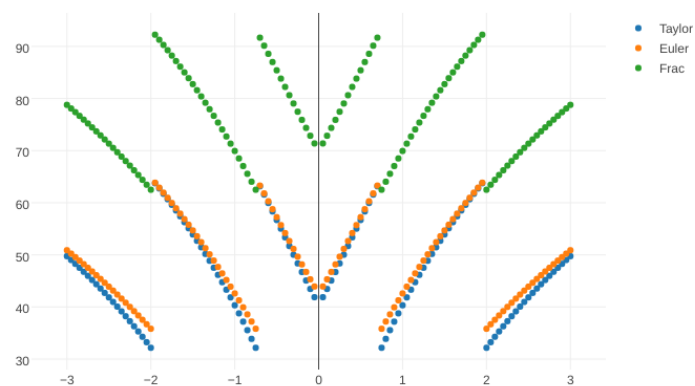
Ilość dokładnych cyfr znaczących \arctan przy 50 iteracjach i redukcji argumentu do 0.5



Rysunek 2: porównanie ilości dokładnych cyfr znaczących

8.2 $\operatorname{arccot}(x)$

Ilość dokładnych cyfr znaczących arccot przy 50 iteracjach i redukcji argumentu do 0.5



Rysunek 3: porównanie ilości dokładnych cyfr znaczących

9 Wnioski

Bla bla bla Taylor najwolniej zbieżny i tylko w $[-1,1]$, euler troche szybszy, ale zbieżny na całym \mathbb{R} . Nieskończony ułamek najszybciej zbieżny i zbieżny na całym \mathbb{R} . Bardzo opłaca się zbijanie argumentu do poziomu 0.1

Literatura

- [1] <http://mathworld.wolfram.com/EulersContinuedFraction.html>
(ostatni dostęp do strony 7 listopada 2016).
- [2] <http://mathworld.wolfram.com/e.html> (ostatni dostęp do strony 7 listopada 2016).