Naturalne funkcje sklejane III stopnia

Sprawozdanie do zadania P.2.9

Jan Mazur 281141

Wrocław, 9 grudnia 2016

1 Wstęp

"Interpolacja to metoda numeryczna polegająca na wyznaczaniu w danym przedziale tzw. funkcji interpolacyjnej, która przyjmuje w nim z góry zadane wartości, w ustalonych punktach nazywanych węzłami." [5] Najczęściej stosowana jest interpolacja wielomianami, ponieważ mają one sporo przydatnych własności, co imlikuje istnienie wielu narzędzi matematycznych do ich analizy. Jednakże nie zawsze jest to dobra metoda. Zastosować wtedy można inny sposób interpolacji - interpolację funkcjami sklejanymi. Przedstawię obię metody, skupiając się jednak na interpolacjami funkcjami sklejanymi. Porównam ich błędy w stosunku do funkcji interpolowanej.

Wszelkie testy i obliczenia zostały wykonane w środowisku Jupyter Notebook przy użyciu języka programowania Julia w wersji 0.5.0. Znaleźć można je w dołączonym pliku program.ipynb.

Zanim przystąpimy do obliczeń ustalmy najpierw funkcję błędu:

Definicja 1. $E_N^{(n)} := \max_{x \in D_N} |f(x) - s(x)))|$

Gdzie s jest funkcją interpolacyjną w n+1 parami różnych węzłach z przedziału $[a, b]$, f funkcją interpolowaną a D_N zbiorem parami różnych równoodległych punktów z przedziału $[a, b]$.

2 Interpolacja wielomianowa

Interpolacja wielomianowa polega na znalezieniu wielomianu n-tego stopnia, który w $n + 1$ węzłach będzie miał te same wartości co funkcja interpolowana. Rozwiązaniem tego problemu jest interpolacja Lagrange'a. Rozważmy wielomiany interpolacyjne w postaci Newtona dla następujących funkcji:

$$f(x) = sin(x),\ x \in [0, \pi] \tag{1}$$

$$f(x) = e^x,\ x \in [0, 4] \tag{2}$$

$$f(x) = (x^2+1)^{-1},\ x \in [-5,5] \tag{3}$$

$$f(x) = x/(x^2+\frac{1}{4}),\ x \in [-\pi,\pi] \tag{4}$$

W przypadku funkcji (1) i (2) błąd wielomianu interpolacyjnego jest niewielki. Natomiast przy funkcjach (3) i (4) zaobserwować można tzw. efekt Runge'go[6]. Polega on na tym, że przy zwiększaniu ilości węzłów uzyskujemy coraz większy błąd na końcach przedziałów interpolacji. Rozwiązaniem tego problemu może być interpolacja funkcjami sklejanymi.

3 Funkcje sklejane

Definicja 2. ***Funkcją sklejaną*** *S(x) stopnia s, określoną na przedziale* $[a,b]$ *nazywamy dowolną funkcję spełniającą warunki:*

- *w każdym przedziale* $[t_i, t_{i+1}]$*, gdzie* $a = t_0 < t_i < ... < t_n = b$*, S jest wielomianem stopnia co najwyżej s.*
- *S oraz jej pochodne rzędu 1,2,...,s-1 są ciągłe na całym przedziale* $[a,b]$.

Aby ujednoznacznić istnienie takiej funkcji n-tego stopnia wyznaczanej przez $n+1$ punktów t_i definiuje się dodatkowe warunki:

Definicja 3. *Funkcję sklejaną S(x) stopnia s, określoną na przedziale* $[a,b]$ *nazywamy* ***naturalną*** *gdy:* $S^{(s-1)}(a) = S^{(s-1)}(b) = 0$.

Rozważmy interpolacje naturalną funkcją sklejaną III stopnia gdzie t_i będą węzłami interpolacji.

4 Interpolacja naturalną funkcją sklejaną III stopnia

Definicja 4. *Naturalna funkcja sklejana III S, stopnia s, interpolująca funkcję f w punktach* $a = x_0 < x_i < ... < x_n = b \in [a,b]$ *spełnia warunki:*

- *w każdym przedziale* $[x_i, x_{i+1}]$ *S jest wielomianem stopnia co najwyżej s.*
- *Dla wszystkich* x_i $S(x_i) = f(x_i)$.

Wprowadźmy oznaczenie:

Definicja 5. $M_k := S''(x_k)$

Twierdzenie 1. *Wielkośći* M_k *spełniają układ równań liniowych:*
$\lambda_k M_{k-1} + 2M_k + (1-\lambda_k)M_{k+1} = 6f[x_{k-1}, x_k, x_{k+1}]$ $\qquad (k = 0,1,...,n)$
gdzie: $\lambda_k := h_k/(h_k + h_{k+1})$*, oraz* $h_k = x_k - x_{k-1}$

Układ równań z powyższego twierdzenia w postaci macierzowej ma trójprzekątniową macierz z dominującą przekątną. Można go więc rozwiązać w czasie liniowym.

4.1 Algorytm rozwiązywania układu równań ze względu na M_k

`algorytm`

Naturalna funkcja sklejana III stopnia interpolująca funkcję f w przedziale $[a, b]$ i punktach $a = x_0 < x_i < ... < x_n = b$ dana jest wzorem:

$$S(x) = h_k^{-1} \tag{5}$$

5 Testy

Wykresiki i liczenie błędów.

Wybór punktów interpolacyjnych.

6 Wnioski

Jeśli zwykła interpolacja bardzo odstaje w niektórych miejscach to lepiej interpolować splinem.

Czy punkty równoodległe?

Literatura

[1] David Kincaid, Ward Cheney - "Analiza Numeryczna"

[2] `https://www.math.ntnu.no/emner/TMA4215/2008h/cubicsplines.pdf`

[3] Weisstein, Eric W. "Cubic Spline." From MathWorld–A Wolfram Web Resource. `http://mathworld.wolfram.com/CubicSpline.html`

[4] `https://en.wikipedia.org/wiki/Spline_interpolation`

[5] `https://pl.wikipedia.org/wiki/Interpolacja_(matematyka)`

[6] `https://en.wikipedia.org/wiki/Runge%27s_phenomenon`