Naturalne funkcje sklejane III stopnia

Sprawozdanie do zadania P.2.9

Jan Mazur 281141

Wrocław, 10 grudnia 2016

1 Wstęp

Interpolacja to proces polegający na wyznaczaniu w danym przedziale tzw. funkcji interpolacyjnej, która przyjmuje w nim z góry zadane wartości, w ustalonych punktach nazywanych węzłami. [5] Często stosowana jest interpolacja wielomianowa, ponieważ funkcje te mają sporo przydatnych własności, co implikuje istnienie wielu narzędzi matematycznych do ich analizy. Jednakże nie zawsze jest to dobra metoda. Zastosować można wtedy inny sposób interpolacji - interpolację funkcjami sklejanymi.

Przedstawię obie metody, skupiając się jednak na interpolacji funkcjami sklejanymi. Porównam ich błędy w stosunku do funkcji interpolowanej.

Wszelkie testy i obliczenia zostały wykonane w środowisku Jupyter Notebook przy użyciu języka programowania **Julia** w wersji **0.5.0**, w arytmetyce **Float64**. Znaleźć można je w dołączonym do sprawozdania pliku **program.ipynb**.

2 Interpolacja wielomianowa

Interpolacja wielomianowa polega na znalezieniu wielomianu n-tego stopnia, który w $n + 1$ węzłach będzie miał te same wartości co funkcja interpolowana. Rozważmy wielomiany interpolacyjne w postaci Newtona dla następujących funkcji:

$$f(x) = sin(x),\ x \in [0, \pi] \tag{1}$$

$$f(x) = e^x,\ x \in [0, 4] \tag{2}$$

$$f(x) = (x^2 + 1)^{-1},\ x \in [-5, 5] \tag{3}$$

$$f(x) = x/(x^2 + \frac{1}{4}),\ x \in [-\pi, \pi] \tag{4}$$

Przed przystąpieniem do obliczeń ustalmy najpierw funkcję błędu:

Definicja 1. $E_N^{(n)} := \max_{x \in D_N} |f(x) - s(x)))|$

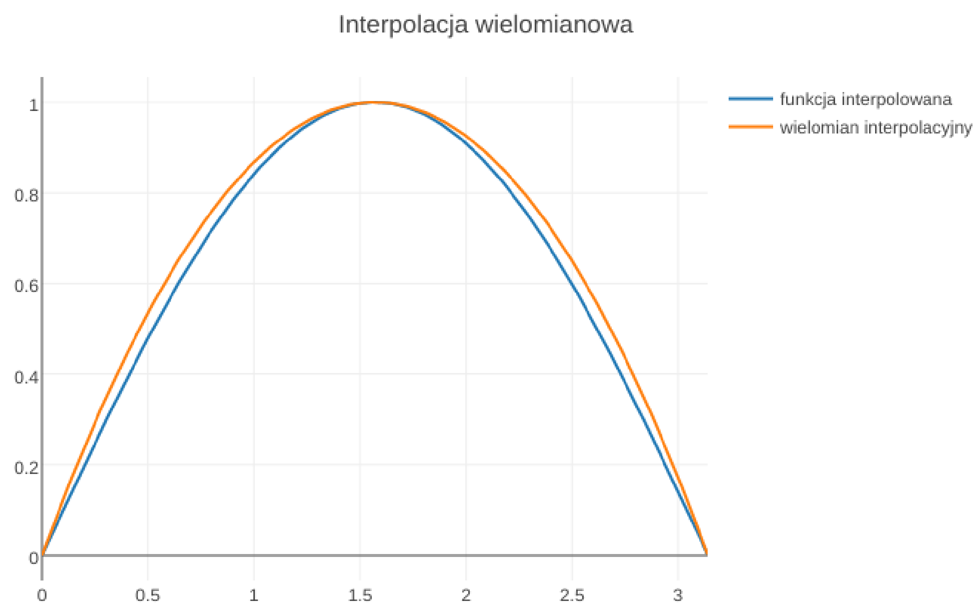
Gdzie s jest funkcją interpolacyjną w n+1 parami różnych węzłach z przedziału $[a, b]$, f funkcją interpolowaną a D_N zbiorem parami różnych równoodległych punktów z przedziału $[a, b]$.

Tabela błędów dla N = 1000				
Węzły równoodległe	Funkcje			
	$\sin x$	e^x	$(x^2+1)^{-1}$	$x/(x^2+\frac{1}{4})$
3	5.60096e-02	6.32501e+00	6.46229e-01	9.51746e-01
5	1.81210e-03	3.38690e-01	4.38350e-01	7.95510e-01
10	3.00631e-07	3.34978e-05	3.00285e-01	3.76380e+00
20	2.13510e-14	1.20082e-12	8.57536e+00	2.00083e+02
50	2.01285e-05	7.62863e-05	6.60565e+05	8.65842e+07

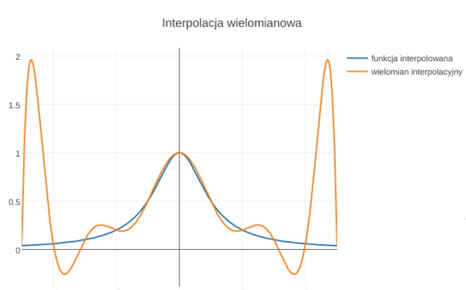
W przypadku funkcji (1) i funkcji (2) obserwujemy wzrost dokładności wraz ze wzrostem ilości węzłów. Oczywiście, ze względu na arytmetykę, w której wykonujemy obliczenia, przy dużej ilości węzłów obserwujemy efekt utraty cyfr znaczących.

Z kolei funkcje (3) i (4) nie interpolują się w sposób jakiego byśmy oczekiwali. Zwiększenie ilości węzłów nie powoduje zwiększenia dokładności. Wprost przeciwnie - zmniejsza ją. Efekt ten nazywa się efektem Runge'go. Polega on na tym, że dla pewnych funkcji błąd interpolacji na końach przedziału zwiększa się wraz ze wzrostem ilości węzłów. Zaradzić można temu stosując inny sposób interpolacji, np. interpolację funkcjami sklejanymi.

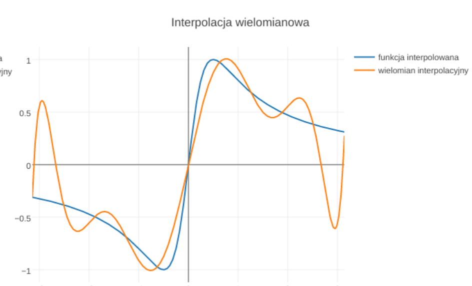
Więcej obliczeń można znaleźć w pliku **program.ipynb**.



Rysunek 1: Interpolacja funkcji (1) w 3 węzłach



(a) Interpolacja funkcji (3)



(b) Interpolacja funkcji (4)

3 Funkcje sklejane

Definicja 2. ***Funkcją sklejaną*** *S(x) stopnia s, określoną na przedziale* $[a, b]$ *nazywamy dowolną funkcję spełniającą warunki:*

- *w każdym przedziale* $[t_i, t_{i+1}]$*, gdzie* $a = t_0 < t_i < ... < t_n = b$*, S jest wielomianem stopnia co najwyżej s.*
- *S oraz jej pochodne rzędu 1,2,...,s-1 są ciągłe na całym przedziale* $[a, b]$*.*

Aby ujednoznacznić istnienie takiej funkcji n-tego stopnia wyznaczanej przez $n + 1$ punktów t_i definiuje się dodatkowe warunki:

Definicja 3. *Funkcję sklejaną S(x) stopnia s, określoną na przedziale* $[a, b]$ *nazywamy* ***naturalną*** *gdy:* $S^{(s-1)}(a) = S^{(s-1)}(b) = 0$*.*

Rozważmy interpolacje naturalną funkcją sklejaną III stopnia gdzie t_i będą węzłami interpolacji.

4 Interpolacja naturalną funkcją sklejaną III stopnia

Definicja 4. *Naturalna funkcja sklejana III stopnia S, interpolująca funkcję f w punktach* $a = x_0 < x_i < ... < x_n = b$ *w przedziale* $[a, b]$ *spełnia warunki:*

- *w każdym przedziale* $[x_i, x_{i+1}]$ *S jest wielomianem stopnia co najwyżej 3.*
- *Dla wszystkich* x_i $S(x_i) = f(x_i)$*.*

Wprowadźmy oznaczenie:

Definicja 5. $M_k := S''(x_k)$

Twierdzenie 1. *Wielkośći* M_k *spełniają układ równań liniowych:*
$\lambda_k M_{k-1} + 2M_k + (1 - \lambda_k)M_{k+1} = 6f[x_{k-1}, x_k, x_{k+1}]$ $\qquad (k = 0, 1, ..., n)$
gdzie: $\lambda_k := h_k/(h_k + h_{k+1})$*, oraz* $h_k = x_k - x_{k-1}$

Układ równań z powyższego twierdzenia w postaci macierzowej ma trójprzekątniową macierz z dominującą przekątną. Można go więc rozwiązać w czasie liniowym.

4.1 Algorytm rozwiązujący układ równań ze względu na M_k w czasie linowym

$$q_0 := u_0 := 0 \tag{5}$$
$$\left.\begin{aligned} p_k &:= \lambda_k q_{k-1} + 2 \\ q_k &:= (\lambda_k - 1)/p_k \\ u_k &:= (d_k - \lambda_k u_{k-1})/p_k \end{aligned}\right\} (k = 1, 2, ..., n - 1)$$

gdzie

$$d_k = 6f[x_{k-1}, x_k, xk+1] \ (k = 1, 2, ..., n-1)$$

Wówczas

$$M_{n-1} = u_{n-1}$$
$$M_k = u_k + q_k M_{k+1} \ (k = n-2, n-3, ..., 1)$$

Naturalna funkcja sklejana III stopnia interpolująca funkcję f w przedziale $[a, b]$ i punktach $a = x_0 < x_i < ... < x_n = b$ dana jest wzorem:

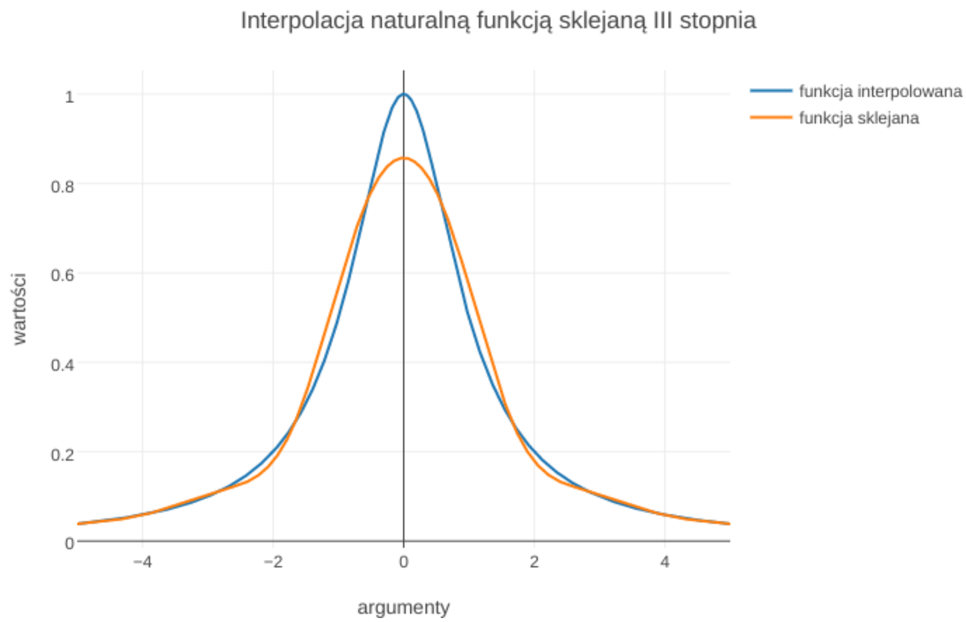
$$\begin{aligned} S(x) = h_k^{-1}[&\frac{1}{6}M_{k-1}(x_k - x)^3 + \frac{1}{6}M_k(x - x_{k-1})^3 \\ &+ (f(x_{k-1}) - \frac{1}{6}M_{k-1}h_k^2)(x_k - x) \\ &+ (f(x_k) - \frac{1}{6}M_k h_k^2)(x_{k-1} - x)] \end{aligned} \tag{6}$$

5 Testy

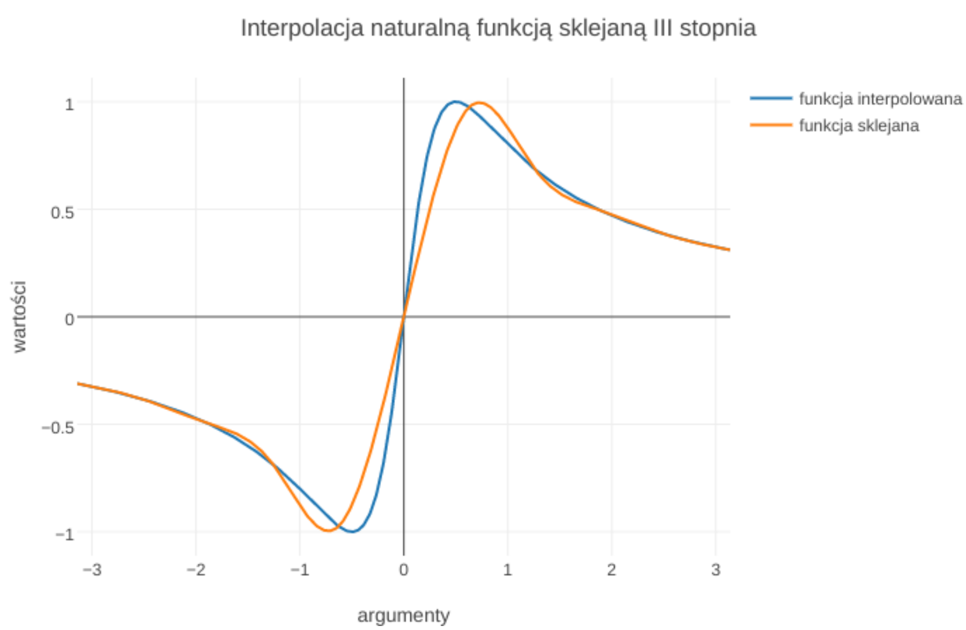
Po zaimplementowaniu algorytmu znajdującego naturalną funkcję sklejaną III stopnia dla danej funkcji interpolowanej wykonałem testy dla funkcji(1) (2) (3) (4).

Tabela błędów dla N = 1000				
Węzły równoodległe	Funkcje			
	$\sin x$	e^x	$(x^2+1)^{-1}$	$x/(x^2+\frac{1}{4})$
3	2.00170e-02	7.82994e+00	6.01194e-01	9.51746e-01
5	1.06607e-03	2.41584e+00	2.79309e-01	7.78300e-01
10	3.98466e-05	5.17255e-01	1.42857e-01	1.27153e-01
20	1.95842e-06	1.18143e-01	1.23295e-02	5.81372e-03
50	4.39481e-08	1.78329e-02	1.47830e-04	6.99450e-04

Wyeliminowaliśmy efekt Runge'go w dwóch ostatnich funkcjach, jednakże funkcje sklejane niezbyt dokładnie odwzorowują funkcję. Mimo wielokrotnego zwiększania ilości węzłów, błąd maleje niewiele. W przypadku dwóch pierwszych funkcji lepiej sprawdzała się interpolacja wielomianowa.



Rysunek 3: Interpolacja funkcji (3) w 10 węzłach



Rysunek 4: Interpolacja funkcji (4) w 11 węzłach

6 Wnioski

W przypadku niektórych funkcji, interpolacja wielomianowa nie sprawdza się. Błąd interpolacji na końcach przedziałów rośnie wraz ze wzrostem ilości węzłów. Warto zastosować wtedy interpolacje funkcjami sklejanymi. Efekt Runge'go zostanie wtedy wyeliminowany.

Funkcje sklejane dobrze odwzorowują ogólny kształt funkcji, jednak ich dokładność wraz ze zwiększaniem ilości węzłów rośnie bardzo powoli. W szczególności dużo wolniej niż dla interpolacji wielomianowej gdy efekt Runge'go nie występuje. Zatem gdy dla danej funkcji błąd interpolacji nie rośnie na końcach przedziałów dobrze jest interpolować wielomianem, w przeciwnym wypadku funkcją sklejaną.

Literatura

[1] David Kincaid, Ward Cheney - "Analiza Numeryczna"

[2] `https://www.math.ntnu.no/emner/TMA4215/2008h/cubicsplines.pdf`

[3] Weisstein, Eric W. "Cubic Spline." From MathWorld–A Wolfram Web Resource. `http://mathworld.wolfram.com/CubicSpline.html`

[4] `https://en.wikipedia.org/wiki/Spline_interpolation`

[5] `https://pl.wikipedia.org/wiki/Interpolacja_(matematyka)`

[6] `https://en.wikipedia.org/wiki/Runge%27s_phenomenon`