第二章 逻辑代数基础

2.1 三种基本逻辑运算

2.1.1 逻辑变量

逻辑变量： 逻辑代数中用来表达事物状态的量。通常用大写字母表示。
事物的状态：开、关；行、止；同意、不同意。

逻辑变量的取值： **0 ， 1**

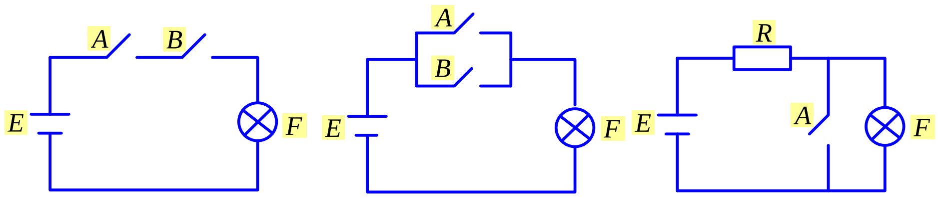
举例：

A：表示是否同意某事。

规定：**A=1**（同意） **A=0**（不同意）

2.1.2 三种基本逻辑运算（与、或、非）

考察电路中开关**A**、**B**的状态如何影响灯泡**F**的状态。（逻辑关系）



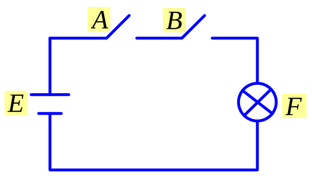
逻辑变量：输入逻辑变量（自变量）**A　B**　输出逻辑变量（因变量）**F**

规定：

开关合上：**A=1　B=1**　　开关断开：**A=0　B=0**

灯亮：**F=1**　　灯灭：**F=0**

1、与运算（逻辑乘）

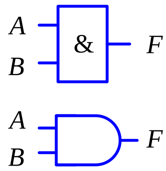


与逻辑运算真值表

A	B	F
0	0	**0**
0	1	**0**
1	0	**0**
1	1	**1**

表达式：$F = A \bullet B = AB$

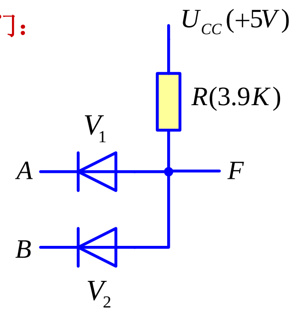
逻辑符号：



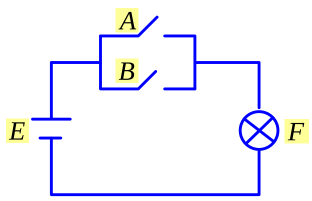
国标符号

美国符号

二极管与门：



2、或运算（逻辑加）

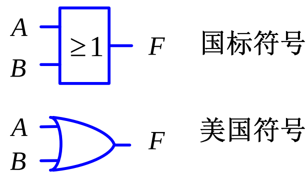


或逻辑运算真值表

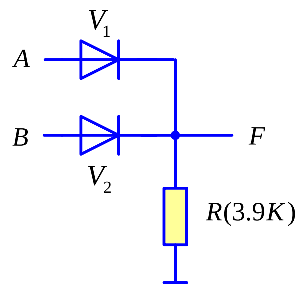
A	B	F
0	0	**0**
0	1	**1**
1	0	**1**
1	1	**1**

表达式： $F = A + B$

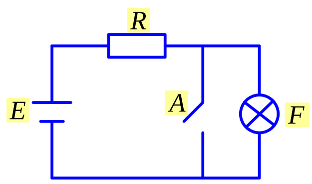
逻辑符号：



二极管或门：



3、非运算（逻辑反）

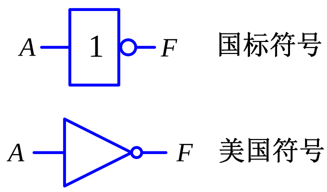


非逻辑运算真值表

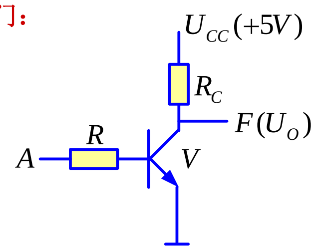
A	F
0	1
1	0

表达式： $F = \overline{A}$

逻辑符号：



三极管非门：



2.1.3 逻辑函数

逻辑函数：用来表达输入逻辑变量（自变量）与输出逻辑变量（因变量）之间逻辑关系的函数。

$$F = f(A, B, C \cdots)$$

举例： $F_1 = A + BC$

$F_2 = (A+B)(A+C)$

A	B	C	F_1	F_2
0	0	0	**0**	**0**
0	0	1	**0**	**0**
0	1	0	**0**	**0**
0	1	1	**1**	**1**
1	0	0	**1**	**1**
1	0	1	**1**	**1**
1	1	0	**1**	**1**
1	1	1	**1**	**1**

逻辑函数的相等：

对于形式不同的两个逻辑函数，如果

1、输入变量相同

2、真值表相同

2.2 逻辑代数的基本定律和规则

2.2.1 基本定律

1、常量之间的逻辑关系

$0 \cdot 0 = 0$

$0 \cdot 1 = 1 \cdot 0 = 0$

$1 \cdot 1 = 1$

$0 + 0 = 0$

$0 + 1 = 1 + 0 = 1$

$1 + 1 = 1$

$\overline{0} = 1 \quad \overline{1} = 0$

2、变量和常量之间的逻辑关系

0－1律： $A \cdot 0 = 0 \quad A + 1 = 1$

自等律： $A \cdot 1 = A \quad A + 0 = A$

重叠律： $A \cdot A = A \quad A + A = A$

互补律： $A \cdot \overline{A} = 0 \quad A + \overline{A} = 1$

3、与普通代数相似的定律

交换律： $A \bullet B = B \bullet A \quad A + B = B + A$

结合律： $(A \bullet B) \bullet C = A \bullet (B \bullet C) \quad (A + B) + C = A + (B + C)$

分配律： $A \bullet (B + C) = A \bullet B + A \bullet C \quad A + BC = (A + B)(A + C)$

4、逻辑代数中的特殊规律

反演律（摩根定律）： $\overline{A \bullet B} = \overline{A} + \overline{B} \quad \overline{A + B} = \overline{A} \bullet \overline{B}$

还原律： $\overline{\overline{A}} = A$

2.2.2 三个重要规则

1、代入规则

任何一个逻辑等式，如果将等式两边出现的某一变量都代之以同一逻辑函数，则等式仍然成立。

举例：

$$\overline{A + B} = \overline{A} \bullet \overline{B}$$

用 $B = C + D$ 代替等式两边的**B**，则有：

$$\overline{A + C + D} = \overline{A} \bullet \overline{C + D} = \overline{A} \bullet \overline{C} \bullet \overline{D}$$

2、反演规则

对于任意一个逻辑函数F，将表达式中

$$\begin{array}{l} \bullet \to + \quad + \to \bullet \\ 0 \to 1 \quad 1 \to 0 \\ \text{原变量} \to \text{反变量} \quad \text{反变量} \to \text{原变量} \end{array}$$

得到新的表达式为F的反函数，记为：$\overline{F}$

举例： 求函数 $F = \overline{AB + C} \bullet D + AC$ 的反函数。

$$\overline{F} = [\overline{(\overline{A} + \overline{B}) \bullet \overline{C}} + \overline{D}] \bullet (\overline{A} + \overline{C})$$

注意：

1、原式中变量的运算顺序不变

2、不属于单变量上的非号保留不变

3、对偶规则

对于任意一个逻辑函数F，将表达式中

$$\begin{array}{l} \bullet \to + \quad + \to \bullet \\ 0 \to 1 \quad 1 \to 0 \end{array}$$

得到新的表达式为F的对偶函数，记为：F'

举例： 求函数 $F = \overline{AB + C} \bullet D + AC$ 的对偶函数。

$$F' = [\overline{(A + B) \bullet C} + D] \bullet (A + C)$$

注意：

1、原式中变量的运算顺序不变

2、不属于单变量上的非号保留不变

2.2.3 若干常用公式

合并律： $AB+A\overline{B}=A$

吸收律： $A+AB=A$

$A+\overline{A}B=A+B$

证明： $A+\overline{A}B=(A+\overline{A})(A+B)=1\cdot(A+B)=A+B$

$AB+\overline{A}C+BC=AB+\overline{A}C$

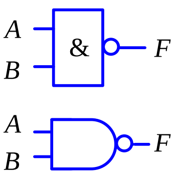
证明：

$$AB+\overline{A}C+BC=AB+\overline{A}C+(A+\overline{A})BC$$
$$=\underline{AB}+\underline{\overline{A}C}+\underline{ABC}+\underline{\overline{A}BC}=AB+\overline{A}C$$

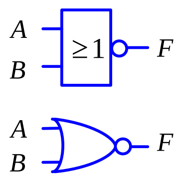
2.3 复合逻辑

2.3.1 复合逻辑运算和复合门

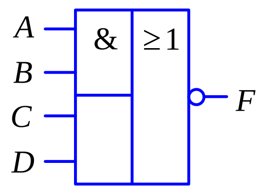
与非 $F=\overline{AB}$



或非 $F=\overline{A+B}$



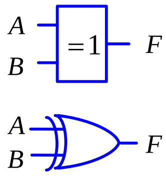
与或非 $F=\overline{AB+CD}$



异或运算：

$$F = A\overline{B} + \overline{A}B = A \oplus B$$

逻辑符号：



异或逻辑运算真值表

A	B	F
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

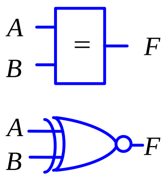
输入变量取值相同时，**F=0**

输入变量取值不同时，**F=1**

同或运算：

$$F = AB + \overline{A}\,\overline{B} = A \odot B$$

逻辑符号：



同或逻辑运算真值表

A	B	F
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

输入变量取值相同时，**F=1**

输入变量取值不同时，**F=0**

异或运算与同或运算的关系：

异或运算：

$$F = A\overline{B} + \overline{A}B = A \oplus B$$

同或运算：

$$F = AB + \overline{A}\,\overline{B} = A \odot B$$

异或逻辑运算真值表

A	B	F
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

同或逻辑运算真值表

A	B	F
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

互为反函数： $\overline{A \oplus B} = A \odot B$　　$\overline{A \odot B} = A \oplus B$

互为对偶函数： $(A \oplus B)' = A \odot B$　　$(A \odot B)' = A \oplus B$

异或运算与同或运算的一些性质：

1、因果互换性

异或逻辑运算真值表

A	B	F
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

同或逻辑运算真值表

A	B	F
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

$$F = A \oplus B \qquad F = A \odot B$$

$$A = F \oplus B \qquad A = F \odot B$$

$$B = F \oplus A \qquad B = F \odot A$$

2、常用公式（见书**P21**页表**2.3.3**）

反演律： $\overline{A\oplus B}=\overline{A}\odot\overline{B}$　　$\overline{A\odot B}=\overline{A}\oplus\overline{B}$

奇偶律： $A\oplus A=0$　　$A\oplus A\oplus A=A$

$A\odot A=1$　　$A\odot A\odot A=A$

推广**1**：

$$A\oplus A\oplus A\oplus\cdots\oplus A=\begin{cases}0 & \text{（偶数个}A\text{）}\\ A & \text{（奇数个}A\text{）}\end{cases}$$

推广**2**：

$$A\oplus B\oplus C\oplus D\cdots\cdots=\begin{cases}0 & \text{（偶数个1）}\\ 1 & \text{（奇数个1）}\end{cases}$$

问题：推广**2**中的结论可以用来干什么？

2.3.2 逻辑函数表达式的常用形式

完备集：

对于一个代数系统，若仅用它所定义的一组运算符号就能构成所有的函数，则称这一组运算符号是一个完备集。

逻辑代数中的完备集： **{**与，或，非**}**　**{**与非**}**　**{**或非**}**　**{**与或非**}**

举例：

$$
\begin{aligned}
F &= AB+\overline{A}C && \text{与或式}\\
&=(\overline{A}+B)(A+C) && \text{或与式}\\
&=\overline{\overline{AB}\bullet\overline{\overline{A}C}} && \text{与非与非式}\\
&=\overline{\overline{(\overline{A}+B)}+\overline{(A+C)}} && \text{或非或非式}\\
&=\overline{A\overline{B}+\overline{A}\,\overline{C}} && \text{与或非式}
\end{aligned}
$$

举例：

$$
\begin{aligned}
F &= AB + \overline{A}C \\
&= (\overline{A}+B)(A+C) \\
&= \overline{\overline{AB}\bullet\overline{\overline{A}C}} \\
&= \overline{\overline{(\overline{A}+B)}+\overline{(A+C)}} \\
&= \overline{A\overline{B}+\overline{A}\,\overline{C}}
\end{aligned}
$$

作业：
2-1(2,4,6)，2-2(1,3,5)
证明左式

证明：

$$
\begin{aligned}
F = AB + \overline{A}C &= \overline{\overline{AB+\overline{A}C}} \\
&= \overline{\overline{AB}\bullet\overline{\overline{A}C}} = \overline{(\overline{A}+\overline{B})\bullet(A+\overline{C})} \\
&= \overline{\overline{A}A+\overline{B}A+\overline{A}\,\overline{C}+\overline{B}\,\overline{C}} = \overline{\overline{B}A+\overline{A}\,\overline{C}+\overline{B}\,\overline{C}} \\
&= \overline{\overline{B}A+\overline{A}\,\overline{C}} = \overline{\overline{B}A}\bullet\overline{\overline{A}\,\overline{C}} = (\overline{A}+B)(A+C)
\end{aligned}
$$