Praktische Informatik 3: Funktionale Programmierung

Vorlesung 9 vom 11.01.2021: Signaturen und Eigenschaften

Christoph Lüth

Deutsches Forschungszentrum für Künstliche Intelligenz GmbH

Universität Bremen

Wintersemester 2020/21

Organisatorisches

- Anmeldung zur **Klausur**:
  - Ab **Dienstag** bis **Ende der Woche** auf stud.ip (unverbindlich)
  - Ersetzt **nicht** die **Modulanmeldung**
- Klausurtermine:
  - Klausur: 03.02.2020, 10:00/11:30/15:00
  - Wiederholungstermin: 21.04.2020, 10:00/11:30/15:00
- Probeklausur (alte Klausuren vom letzten Jahr) werden veröffentlicht.
- Fragenkatalog für mündliche Prüfung
- Es gibt noch eine Extra-Sendung zur mündlichen Prüfung.

Fahrplan

- Teil I: Funktionale Programmierung im Kleinen
- **Teil II: Funktionale Programmierung im Großen**
  - Abstrakte Datentypen
  - Signaturen und Eigenschaften
- Teil III: Funktionale Programmierung im richtigen Leben

Abstrakte Datentypen und Signaturen

- Letzte Vorlesung: **Abstrakte Datentypen**
  - Typ plus Operationen
- Heute: **Signaturen** und **Eigenschaften**

Definition (Signatur)

Die **Signatur** eines abstrakten Datentyps besteht aus den Typen, und der Signatur der darüber definierten Funktionen.

- Keine direkte Repräsentation in Haskell
- Signatur: Typ eines Moduls

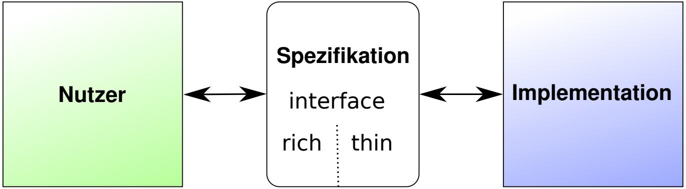
I. Eigenschaften

Signatur und Eigenschaften

- Signatur genug, um ADT **typkorrekt** zu benutzen
  - Insbesondere Anwendbarkeit und Reihenfolge
- Signatur beschreibt nicht die **Bedeutung** (Semantik):
  - Was wird gelesen?
  - Wie verhält sich die Abbildung?
- Signatur ist **Sprache** (Syntax) um **Eigenschaften** zu beschreiben

Axiome als Interface

- Axiome müssen **gelten**
  - für alle Werte der freien Variablen zu `True` auswerten
- Axiome **spezifizieren**:
  - nach außen das **Verhalten** (viele Operationen und Eigenschaften — *rich interface*)
  - nach innen die **Implementation** (wenig Operationen und Eigenschaften — *thin interface*)
- Signatur + Axiome = **Spezifikation**



Eigenschaften endlicher Abbildungen

Übung 9.1: Was denkt ihr?

Überlegt mindestens **drei** weitere Eigenschaften endlicher Abbildungen!

1. Aus der **leeren** Abbildung kann **nichts** gelesen werden.

Eigenschaften endlicher Abbildungen

Übung 9.1: Was denkt ihr?

Überlegt mindestens **drei** weitere Eigenschaften endlicher Abbildungen!

1. Aus der **leeren** Abbildung kann **nichts** gelesen werden.
2. Wenn etwas **gelesen** wird an der **gleichen** Stelle, an der etwas **geschrieben** worden ist, erhalte ich den geschriebenen Wert.
3. Wenn etwas **gelesen** wird an einer **anderen** Stelle, an der etwas **geschrieben** worden ist, kann das Schreiben vernachlässigt werden.
4. An der **gleichen** Stelle **zweimal geschrieben** überschreibt der zweite den ersten Wert.
5. An unterschiedlichen Stellen **geschrieben** kommutiert.

Formalisierung von Eigenschaften

- Ziel: Eigenschaften **formal** beschreiben, um sie testen oder beweisen zu können.

Definition (Axiome)

Axiome sind Prädikate über den Operationen der Signatur

- Elementare Prädikate P:
  - Gleichheit `s == t`, Ordnung `s < t`
  - Selbstdefinierte Prädikate
- Zusammengesetzte Prädikate
  - Negation `not p`, Konjunktion `p && q`, Disjunktion `p || q`
  - **Implikation** `p ==> q`

Endliche Abbildung: Signatur für `Map`

- Adressen und Werte sind Parameter
- Typ `Map` α β, Operationen:

```
data Map α β
```

```
empty  :: Map α β
```

```
lookup :: Ord α ⇒ α → Map α β → Maybe β
```

```
insert :: Ord α ⇒ α → β → Map α β → Map α β
```

```
delete :: Ord α ⇒ α → Map α β → Map α β
```

Axiome für `Map`

- Lesen aus leerer Abbildung undefiniert:

Axiome für Map

- Lesen aus leerer Abbildung undefiniert:

```
lookup a (empty :: Map Int String) == Nothing
```

- Lesen an vorher geschriebener Stelle liefert geschriebenen Wert:

Axiome für `Map`

- Lesen aus leerer Abbildung undefiniert:

```
lookup a (empty :: Map Int String) == Nothing
```

- Lesen an vorher geschriebener Stelle liefert geschriebenen Wert:

```
lookup a (insert a v (s :: Map Int String)) == Just v
```

```
lookup a (delete a (s :: Map Int String)) == Nothing
```

- Lesen an anderer Stelle liefert alten Wert:

Axiome für `Map`

- Lesen aus leerer Abbildung undefiniert:

```
lookup a (empty :: Map Int String) == Nothing
```

- Lesen an vorher geschriebener Stelle liefert geschriebenen Wert:

```
lookup a (insert a v (s :: Map Int String)) == Just v
```

```
lookup a (delete a (s :: Map Int String)) == Nothing
```

- Lesen an anderer Stelle liefert alten Wert:

```
a ≠ b ⟹ lookup a (delete b s) == lookup a (s :: Map Int String)
```

- Schreiben an dieselbe Stelle überschreibt alten Wert:

Axiome für `Map`

- Lesen aus leerer Abbildung undefiniert:

```
lookup a (empty :: Map Int String) == Nothing
```

- Lesen an vorher geschriebener Stelle liefert geschriebenen Wert:

```
lookup a (insert a v (s :: Map Int String)) == Just v
```

```
lookup a (delete a (s :: Map Int String)) == Nothing
```

- Lesen an anderer Stelle liefert alten Wert:

```
a ≠ b ⟹ lookup a (delete b s) == lookup a (s :: Map Int String)
```

- Schreiben an dieselbe Stelle überschreibt alten Wert:

```
insert a w (insert a v s) == insert a w (s :: Map Int String)
```

- Schreiben über verschiedene Stellen kommutiert:

Axiome für Map

- Lesen aus leerer Abbildung undefiniert:

```
lookup a (empty :: Map Int String) == Nothing
```

- Lesen an vorher geschriebener Stelle liefert geschriebenen Wert:

```
lookup a (insert a v (s :: Map Int String)) == Just v
```

```
lookup a (delete a (s :: Map Int String)) == Nothing
```

- Lesen an anderer Stelle liefert alten Wert:

```
a ≠ b ⟹ lookup a (delete b s) == lookup a (s :: Map Int String)
```

- Schreiben an dieselbe Stelle überschreibt alten Wert:

```
insert a w (insert a v s) == insert a w (s :: Map Int String)
```

- Schreiben über verschiedene Stellen kommutiert:

```
a ≠ b ⟹ insert a v (delete b s) == delete b (insert a vs)
```

- Sehr **viele** Axiome (insgesamt 13)!

Thin vs. Rich Interfaces

- Benutzersicht: **reiches** Interface
  - Viele Operationen und Eigenschaften
- Implementationssicht: **schlankes** Interface
  - Wenig Operation und Eigenschaften
- Konversion dazwischen („Adapter“)

Thin vs. Rich Maps

- Rich interface:

```
insert :: Ord α ⇒ α → β → Map α β → Map α β
```

```
delete :: Ord α ⇒ α → Map α β → Map α β
```

- Thin interface:

```
put :: Ord α ⇒ α → Maybe β → Map α β → Map α β
```

- Konversion von thin auf rich:

```
insert a v = put a (Just v)
```

```
delete a = put a Nothing
```

Axiome für `Map` (thin interface)

- Lesen aus leerer Abbildung undefiniert:

Axiome für `Map` (thin interface)

- Lesen aus leerer Abbildung undefiniert:

```
lookup a empty == Nothing
```

- Lesen an vorher geschriebener Stelle liefert geschriebenen Wert:

Axiome für `Map` (thin interface)

- Lesen aus leerer Abbildung undefiniert:

```
lookup a empty == Nothing
```

- Lesen an vorher geschriebener Stelle liefert geschriebenen Wert:

```
lookup a (put a v s) == v
```

- Lesen an anderer Stelle liefert alten Wert:

Axiome für `Map` (thin interface)

- Lesen aus leerer Abbildung undefiniert:

```
lookup a empty == Nothing
```

- Lesen an vorher geschriebener Stelle liefert geschriebenen Wert:

```
lookup a (put a v s) == v
```

- Lesen an anderer Stelle liefert alten Wert:

```
a ≠ b ⟹ lookup a (put b c s) == lookup a s
```

- Schreiben an dieselbe Stelle überschreibt alten Wert:

Axiome für `Map` (thin interface)

- Lesen aus leerer Abbildung undefiniert:

```
lookup a empty == Nothing
```

- Lesen an vorher geschriebener Stelle liefert geschriebenen Wert:

```
lookup a (put a v s) == v
```

- Lesen an anderer Stelle liefert alten Wert:

```
a ≠ b ⟹ lookup a (put b c s) == lookup a s
```

- Schreiben an dieselbe Stelle überschreibt alten Wert:

```
put a w (put a v s) == put a w s
```

- Schreiben über verschiedene Stellen kommutiert:

Axiome für `Map` (thin interface)

- Lesen aus leerer Abbildung undefiniert:

```
lookup a empty == Nothing
```

- Lesen an vorher geschriebener Stelle liefert geschriebenen Wert:

```
lookup a (put a v s) == v
```

- Lesen an anderer Stelle liefert alten Wert:

```
a ≠ b ⟹ lookup a (put b c s) == lookup a s
```

- Schreiben an dieselbe Stelle überschreibt alten Wert:

```
put a w (put a v s) == put a w s
```

- Schreiben über verschiedene Stellen kommutiert:

```
a ≠ b ⟹ put a v (put b w s) == put b w (put a v s)
```

Axiome für `Map` (thin interface)

- Lesen aus leerer Abbildung undefiniert:

```
lookup a empty == Nothing
```

- Lesen an vorher geschriebener Stelle liefert geschriebenen Wert:

```
lookup a (put a v s) == v
```

- Lesen an anderer Stelle liefert alten Wert:

```
a ≠ b ⟹ lookup a (put b c s) == lookup a s
```

- Schreiben an dieselbe Stelle überschreibt alten Wert:

```
put a w (put a v s) == put a w s
```

- Schreiben über verschiedene Stellen kommutiert:

```
a ≠ b ⟹ put a v (put b w s) == put b w (put a v s)
```

Thin: 5 Axiome
Rich: 13 Axiome

Quick Question

Übung 9.2: Gleichheiten

Betrachtet die letzten beiden Fälle:

$$\texttt{put a w (put a v s)} == \texttt{put a w s}$$

$$\texttt{a} \neq \texttt{b} \Longrightarrow \texttt{put a v (put b w s)} == \texttt{put b w (put a v s)}$$

Wiese müssen wir die Fälle $\texttt{a} == \texttt{b}$ und $\texttt{a} \neq \texttt{b}$, aber nicht $\texttt{w} == \texttt{v}$ und $\texttt{w} \neq \texttt{v}$ unterscheiden?

Quick Question

Übung 9.2: Gleichheiten

Betrachtet die letzten beiden Fälle:

$$\texttt{put a w (put a v s)} == \texttt{put a w s}$$

$$\texttt{a} \neq \texttt{b} \Longrightarrow \texttt{put a v (put b w s)} == \texttt{put b w (put a v s)}$$

Wiese müssen wir die Fälle $\texttt{a} == \texttt{b}$ und $\texttt{a} \neq \texttt{b}$, aber nicht $\texttt{w} == \texttt{v}$ und $\texttt{w} \neq \texttt{v}$ unterscheiden?

Lösung: Im Gegensatz zu $\texttt{a}$ und $\texttt{b}$ gelten beide Axiome sowohl für $\texttt{w} == \texttt{v}$ als auch für $\texttt{w} \neq \texttt{v}$:

$$\texttt{put a w (put a w s)} == \texttt{put a w s}$$

$$\texttt{a} \neq \texttt{b} \Longrightarrow \texttt{put a w (put b w s)} == \texttt{put b w (put a w s)}$$

II. Testen von Eigenschaften

Axiome als Eigenschaften

- Axiome können **getestet** oder **bewiesen** werden
- Tests finden Fehler, Beweis zeigt Korrektheit

> **E. W. Dijkstra, 1972**
>
> Program testing can be used to show the presence of bugs, but never to show their absence.

- Arten von Tests:
  - Unit tests (JUnit, HUnit)
  - Black Box vs.White Box
  - Coverage-based (z.B. path coverage, MC/DC)
  - Zufallsbasiertes Testen
- Funktionale Programme eignen sich **sehr gut** zum Testen

Zufallsbasiertes Testen in Haskell

- Werkzeug: *QuickCheck*
- Zufällige Werte einsetzen, Auswertung auf `True` prüfen
- Polymorphe Variablen nicht testbar
  - Deshalb Typvariablen **instantiieren**
  - Typ muss genug Element haben (hier `Map Int String`)
  - Durch Signatur Typinstanz erzwingen
- **Freie Variablen** der Eigenschaft werden Parameter der Testfunktion

Axiome mit *QuickCheck* testen

- Eigenschaften als **monomorphe Haskell-Prädikate**
- Für das Lesen:

```
prop1 :: TestTree
prop1 = QC.testProperty "read_empty" $ λa→
  lookup a (empty :: Map Int String) == Nothing
```

```
prop2 :: TestTree
prop2 = QC.testProperty "lookup_put␣eq" $ λa v s→
  lookup a (put a v (s :: Map Int String)) == v
```

- *QuickCheck*-Axiome mit `QC.testProperty` in *Tasty* eingebettet
- Es werden N Zufallswerte generiert und getestet (Default $N = 100$)

Axiome mit *QuickCheck* testen

- **Bedingte** Eigenschaften:
  - `A` $\Longrightarrow$ `B` mit `A`, `B` Eigenschaften
  - Typ ist `Property`
  - Es werden solange Zufallswerte generiert, bis N die Vorbedingung erfüllende gefunden und getestet wurden, andere werden ignoriert.

```
prop3 :: TestTree
prop3 = QC.testProperty "lookup_put␣other" $ λa b v s→
  a ≠ b ⟹ lookup a (put b v s) == lookup a (s :: Map Int String)
```

Axiome mit *QuickCheck* testen

- **Schreiben**:

```
prop4 :: TestTree
prop4 = QC.testProperty "put_put␣eq" $ λa v w s→
  put a w (put a v s) == put a w (s :: Map Int String)
```

- **Schreiben** an anderer Stelle:

```
prop5 :: TestTree
prop5 = QC.testProperty "put_put␣other" $ λa v b w s→
  a ≠ b ⟹ put a v (put b w s) == put b w (put a v s :: Map Int String)
```

- Test benötigt **Gleichheit** und **Zufallswerte** für `Map a b`

Beobachtbare und Abstrakte Typen

- **Beobachtbare** Typen: interne Struktur bekannt
  - Vordefinierte Typen (Zahlen, Zeichen), algebraische Datentypen (Listen)
  - Viele Eigenschaften und Prädikate bekannt
- **Abstrakte** Typen: interne Struktur unbekannt
  - Wenige Eigenschaften bekannt, Gleichheit nur wenn definiert
- Beispiel `Map`:
  - beobachtbar: Adressen und Werte
  - abstrakt: Speicher

Beobachtbare Gleichheit

- Auf abstrakten Typen: nur **beobachtbare** Gleichheit
  - Zwei Elemente sind gleich, wenn alle Operationen die gleichen Werte liefern
- Bei **Implementation**: Instanz für `Eq` (`Ord` etc.) entsprechend definieren
  - Die Gleichheit `==` muss die **beobachtbare** Gleichheit sein.
- Abgeleitete Gleichheit (`deriving Eq`) wird **immer** exportiert!

Zufallswerte selbst erzeugen

- Problem: **Zufällige** Werte von **selbstdefinierten** Datentypen
  - Gleichverteiltheit nicht immer erwünscht (z.B. [α])
  - Konstruktion nicht immer offensichtlich (z.B. `Map`)
- In *QuickCheck*:
  - **Typklasse** `class Arbitrary` α für Zufallswerte
  - Eigene **Instanziierung** kann Verteilung und Konstruktion berücksichtigen

```haskell
instance (Ord a, QC.Arbitrary a, QC.Arbitrary b)⇒
          QC.Arbitrary (Map a b) where
```

  - Zufallswerte in Haskell?

Zufällige Maps erzeugen

- Erster Ansatz: zufällige Länge, dann aus sovielen zufälligen Werten `Map` konstruieren
  - Berücksichtigt `delete` nicht
- Besser: über einen **smart constructor** zufällige Maps erzeugen
  - Muss entweder in `Map` implementiert werden
  - oder benötigt Zugriff auf interne Struktur

Was stimmt hier nicht?

Übung 9.3: `Map` als balancierte Bäume.

Warum ist diese Implementierung von `Map` als binärer Baum falsch?

```
data Map α β = Empty
             | Node α β Int (Map α β) (Map α β)
             deriving Eq
```

Was stimmt hier nicht?

Übung 9.3: Map als balancierte Bäume.

Warum ist diese Implementierung von Map als binärer Baum falsch?

```
data Map α β = Empty
             | Node α β Int (Map α β) (Map α β)
             deriving Eq
```

Lösung: Weil die abgeleitete Gleichheit nicht die beobachtbare Gleichheit ist. Die Gleichheit darf nur prüfen, ob die gleichen Schlüssel/Wert-Paare enthalten sind:

```
toList :: Map α β → [(α, β)]
toList = fold (λk x l r → l++[(k,x)]++r) []
```

```
instance (Eq α, Eq β)⇒ Eq (Map α β) where
  t1 == t2 = toList t1 == toList t2
```

III. Syntax und Semantik

Signatur und Semantik

Stacks

Typ: $\texttt{St}\ \alpha$

Initialwert:

```
empty :: St α
```

Wert ein/auslesen:

```
push :: α→ St α→ St α
top  :: St α→ α
pop  :: St α→ St α
```

Last in first out (LIFO).

Queues

Typ: $\texttt{Qu}\ \alpha$

Initialwert:

```
empty :: Qu α
```

Wert ein/auslesen:

```
enq   :: α→ Qu α→ Qu α
first :: Qu α→ α
deq   :: Qu α→ Qu α
```

First in first out (FIFO)

Gleiche Signatur, unterschiedliche Semantik.

Eigenschaften von `Stack`

- Last in first out (LIFO):

$$\texttt{top}\ (\texttt{push}\ a_1\ (\texttt{push}\ a_2\ \ldots\ (\texttt{push}\ a_n\ \texttt{empty}))) = a_1$$

Eigenschaften von `Stack`

- Last in first out (LIFO):

$$\texttt{top (push } a_1 \texttt{ (push } a_2 \ \ldots \ \texttt{(push } a_n \texttt{ empty)))} = a_1$$

```
top (push a s) == a
```

```
pop (push a s) == s
```

```
push a s ≠ empty
```

Eigenschaften von `Queue`

- First in first out (FIFO):

$$\texttt{first}\ (\texttt{enq}\ a_1\ (\texttt{enq}\ a_2\ \ldots\ (\texttt{enq}\ a_n\ \texttt{empty}))) = a_n$$

Eigenschaften von `Queue`

- First in first out (FIFO):

$$\texttt{first}\ (\texttt{enq}\ a_1\ (\texttt{enq}\ a_2\ \ldots\ (\texttt{enq}\ a_n\ \texttt{empty}))) = a_n$$

$\texttt{first (enq a empty)} == \texttt{a}$

$\texttt{q} \neq \texttt{empty} \implies \texttt{first (enq a q)} == \texttt{first q}$

$\texttt{deq (enq a empty)} == \texttt{empty}$

$\texttt{q} \neq \texttt{empty} \implies \texttt{deq (enq a q)} = \texttt{enq a (deq q)}$

$\texttt{enq a q} \neq \texttt{empty}$

Implementation von Stack: Liste

Sehr einfach: ein Stack ist eine Liste

```haskell
data St α = St [α]  deriving (Show, Eq)
```

```haskell
empty =  St []
```

```haskell
push a (St s) = St (a:s)
```

```haskell
top  (St [])  = error "St: top on empty stack"
top  (St s)   = head s
```

```haskell
pop  (St [])  = error "St: pop on empty stack"
pop  (St s)   = St (tail s)
```

Implementation von `Queue`

- Mit einer Liste?
  - Problem: am Ende anfügen oder abnehmen (`last`/`init`) ist teuer ($O(n)$).
- Deshalb **zwei** Listen:
  - Erste Liste: zu entnehmende Elemente
  - Zweite Liste: hinzugefügte Elemente **rückwärts**
  - Invariante: erste Liste leer gdw. Queue leer

Repräsentation von `Queue`

Operation	Resultat	Interne Repräsentation	`first`

Repräsentation von `Queue`

Operation	Resultat	Interne Repräsentation	`first`
`empty`	$\langle\,\rangle$	$([], [])$	`error`

Repräsentation von `Queue`

Operation	Resultat	Interne Repräsentation	`first`
`empty`	$\langle\,\rangle$	([], [])	`error`
`enq 9`	$\langle 9 \rangle$	([9], [])	9

Repräsentation von `Queue`

Operation	Resultat	Interne Repräsentation	`first`
`empty`	$\langle\ \rangle$	([], [])	`error`
`enq 9`	$\langle 9 \rangle$	([9], [])	9
`enq 4`	$\langle 4 \to 9 \rangle$	([9], [4])	9

Repräsentation von `Queue`

Operation	Resultat	Interne Repräsentation	`first`
`empty`	$\langle\ \rangle$	([], [])	`error`
`enq 9`	$\langle 9 \rangle$	([9], [])	9
`enq 4`	$\langle 4 \to 9 \rangle$	([9], [4])	9
`enq 7`	$\langle 7 \to 4 \to 9 \rangle$	([9], [7, 4])	9

Repräsentation von `Queue`

Operation	Resultat	Interne Repräsentation	`first`
`empty`	$\langle\ \rangle$	([], [])	`error`
`enq 9`	$\langle 9 \rangle$	([9], [])	9
`enq 4`	$\langle 4 \to 9 \rangle$	([9], [4])	9
`enq 7`	$\langle 7 \to 4 \to 9 \rangle$	([9], [7, 4])	9
`deq`	$\langle 7 \to 4 \rangle$	([4, 7], [])	4

Repräsentation von `Queue`

Operation	Resultat	Interne Repräsentation	`first`
`empty`	$\langle\,\rangle$	([], [])	`error`
`enq 9`	$\langle 9 \rangle$	([9], [])	9
`enq 4`	$\langle 4 \rightarrow 9 \rangle$	([9], [4])	9
`enq 7`	$\langle 7 \rightarrow 4 \rightarrow 9 \rangle$	([9], [7, 4])	9
`deq`	$\langle 7 \rightarrow 4 \rangle$	([4, 7], [])	4
`enq 5`	$\langle 5 \rightarrow 7 \rightarrow 4 \rangle$	([4, 7], [5])	4

Repräsentation von `Queue`

Operation	Resultat	Interne Repräsentation	`first`
`empty`	$\langle\ \rangle$	([], [])	`error`
`enq 9`	$\langle 9 \rangle$	([9], [])	9
`enq 4`	$\langle 4 \rightarrow 9 \rangle$	([9], [4])	9
`enq 7`	$\langle 7 \rightarrow 4 \rightarrow 9 \rangle$	([9], [7, 4])	9
`deq`	$\langle 7 \rightarrow 4 \rangle$	([4, 7], [])	4
`enq 5`	$\langle 5 \rightarrow 7 \rightarrow 4 \rangle$	([4, 7], [5])	4
`enq 3`	$\langle 3 \rightarrow 5 \rightarrow 7 \rightarrow 4 \rangle$	([4, 7], [3, 5])	4

Repräsentation von `Queue`

Operation	Resultat	Interne Repräsentation	`first`
`empty`	$\langle\ \rangle$	([], [])	`error`
`enq 9`	$\langle 9 \rangle$	([9], [])	9
`enq 4`	$\langle 4 \rightarrow 9 \rangle$	([9], [4])	9
`enq 7`	$\langle 7 \rightarrow 4 \rightarrow 9 \rangle$	([9], [7, 4])	9
`deq`	$\langle 7 \rightarrow 4 \rangle$	([4, 7], [])	4
`enq 5`	$\langle 5 \rightarrow 7 \rightarrow 4 \rangle$	([4, 7], [5])	4
`enq 3`	$\langle 3 \rightarrow 5 \rightarrow 7 \rightarrow 4 \rangle$	([4, 7], [3, 5])	4
`deq`	$\langle 3 \rightarrow 5 \rightarrow 7 \rangle$	([7], [3, 5])	7

Repräsentation von `Queue`

Operation	Resultat	Interne Repräsentation	`first`
`empty`	$\langle\ \rangle$	([], [])	`error`
`enq 9`	$\langle 9 \rangle$	([9], [])	9
`enq 4`	$\langle 4 \rightarrow 9 \rangle$	([9], [4])	9
`enq 7`	$\langle 7 \rightarrow 4 \rightarrow 9 \rangle$	([9], [7, 4])	9
`deq`	$\langle 7 \rightarrow 4 \rangle$	([4, 7], [])	4
`enq 5`	$\langle 5 \rightarrow 7 \rightarrow 4 \rangle$	([4, 7], [5])	4
`enq 3`	$\langle 3 \rightarrow 5 \rightarrow 7 \rightarrow 4 \rangle$	([4, 7], [3, 5])	4
`deq`	$\langle 3 \rightarrow 5 \rightarrow 7 \rangle$	([7], [3, 5])	7
`deq`	$\langle 3 \rightarrow 5 \rangle$	([5, 3], [])	5

Repräsentation von `Queue`

Operation	Resultat	Interne Repräsentation	`first`
`empty`	$\langle\ \rangle$	([], [])	`error`
`enq 9`	$\langle 9 \rangle$	([9], [])	9
`enq 4`	$\langle 4 \to 9 \rangle$	([9], [4])	9
`enq 7`	$\langle 7 \to 4 \to 9 \rangle$	([9], [7, 4])	9
`deq`	$\langle 7 \to 4 \rangle$	([4, 7], [])	4
`enq 5`	$\langle 5 \to 7 \to 4 \rangle$	([4, 7], [5])	4
`enq 3`	$\langle 3 \to 5 \to 7 \to 4 \rangle$	([4, 7], [3, 5])	4
`deq`	$\langle 3 \to 5 \to 7 \rangle$	([7], [3, 5])	7
`deq`	$\langle 3 \to 5 \rangle$	([5, 3], [])	5
`deq`	$\langle 3 \rangle$	([3], [])	3

Repräsentation von `Queue`

Operation	Resultat	Interne Repräsentation	`first`
`empty`	$\langle\,\rangle$	([], [])	`error`
`enq 9`	$\langle 9 \rangle$	([9], [])	9
`enq 4`	$\langle 4 \to 9 \rangle$	([9], [4])	9
`enq 7`	$\langle 7 \to 4 \to 9 \rangle$	([9], [7, 4])	9
`deq`	$\langle 7 \to 4 \rangle$	([4, 7], [])	4
`enq 5`	$\langle 5 \to 7 \to 4 \rangle$	([4, 7], [5])	4
`enq 3`	$\langle 3 \to 5 \to 7 \to 4 \rangle$	([4, 7], [3, 5])	4
`deq`	$\langle 3 \to 5 \to 7 \rangle$	([7], [3, 5])	7
`deq`	$\langle 3 \to 5 \rangle$	([5, 3], [])	5
`deq`	$\langle 3 \rangle$	([3], [])	3
`deq`	$\langle\,\rangle$	([], [])	`error`

Repräsentation von `Queue`

Operation	Resultat	Interne Repräsentation	`first`
`empty`	$\langle\ \rangle$	([], [])	`error`
`enq 9`	$\langle 9 \rangle$	([9], [])	9
`enq 4`	$\langle 4 \to 9 \rangle$	([9], [4])	9
`enq 7`	$\langle 7 \to 4 \to 9 \rangle$	([9], [7, 4])	9
`deq`	$\langle 7 \to 4 \rangle$	([4, 7], [])	4
`enq 5`	$\langle 5 \to 7 \to 4 \rangle$	([4, 7], [5])	4
`enq 3`	$\langle 3 \to 5 \to 7 \to 4 \rangle$	([4, 7], [3, 5])	4
`deq`	$\langle 3 \to 5 \to 7 \rangle$	([7], [3, 5])	7
`deq`	$\langle 3 \to 5 \rangle$	([5, 3], [])	5
`deq`	$\langle 3 \rangle$	([3], [])	3
`deq`	$\langle\ \rangle$	([], [])	`error`
`deq`	`error`		

Implementation: Datentyp

- Datentyp:

```
data Qu α = Qu [α] [α]
```

- Invariante:

1. Anfang der Schlange ist der **Kopf** der ersten Liste
2. Wenn erste Liste leer, dann ist auch die zweite Liste leer

- Invariante prüfen und ggf. herstellen (**smart constructor**):

```
queue :: [α] → [α] → Qu α
queue [] ys = Qu (reverse ys) []
queue xs ys = Qu xs ys
```

Implementation: Gleichheit

Übung 9.4:

Warum reicht für Gleichheit auf Schlangen nicht `derive Eq` und wie implementieren wir es dann?

Implementation: Gleichheit

Übung 9.4:

Warum reicht für Gleichheit auf Schlangen nicht `derive Eq` und wie implementieren wir es dann?

Lösung:

- Gegenbeispiel:

$$q_1 = \texttt{deq (enq 7 (enq 4 (enq 9 empty)))}, q_2 = \texttt{enq (7 (enq 4 empty))}$$

- Zwei Schlangen sind gleich, wenn der **Inhalt gleich** ist:

```
instance Eq α⇒ Eq (Qu α) where
  Qu xs1 ys1 == Qu xs2 ys2 =
    xs1 ++ reverse ys1 == xs2 ++ reverse ys2
```

Implementation: Operationen

- Leere Schlange: alles leer

```
empty :: Qu α
empty = Qu [] []
```

- Erstes Element steht vorne in erster Liste

```
first :: Qu α → α
first (Qu [] _)      = error "Queue: first of empty Q"
first (Qu (x:xs) _) = x
```

- Bei `enq` und `deq` Invariante prüfen (Funktion `queue`)

```
enq    :: α → Qu α → Qu α
enq x (Qu xs ys) = queue xs (x:ys)
```

```
deq    :: Qu α → Qu α
deq (Qu [] _ )      = error "Queue: deq of empty Q"
deq (Qu (_:xs) ys) = queue xs ys
```

Zusammenfassung

- **Signatur**: Typ und Operationen eines ADT
- **Axiome**: über Typen formulierte Eigenschaften
- **Spezifikation** = Signatur + Axiome
  - Interface zwischen Implementierung und Nutzung
  - Testen zur Erhöhung der Konfidenz und zum Fehlerfinden
  - Beweisen der Korrektheit
- `QuickCheck`:
  - Freie Variablen der Eigenschaften werden Parameter der Testfunktion
  - $\Longrightarrow$ für bedingte Eigenschaften