Praktische Informatik 3: Funktionale Programmierung

Vorlesung 2 vom 09.11.2020: Funktionen

Christoph Lüth

Deutsches Forschungszentrum für Künstliche Intelligenz GmbH

Universität Bremen

Wintersemester 2020/21

Fahrplan

- **Teil I: Funktionale Programmierung im Kleinen**
  - Einführung
  - Funktionen
  - Algebraische Datentypen
  - Typvariablen und Polymorphie
  - Funktionen höherer Ordnung I
  - Rekursive und zyklische Datenstrukturen
  - Funktionen höherer Ordnung II
- Teil II: Funktionale Programmierung im Großen
- Teil III: Funktionale Programmierung im richtigen Leben

Inhalt und Lernziele

- Definition von **Funktionen**
  - Syntaktische Feinheiten
- Bedeutung von Haskell-Programmen
  - Striktheit
- Leben ohne Variablen
  - Funktionen statt Schleifen
  - Zahllose Beispiele

Lernziele

Wir wollen einfache Haskell-Programme schreiben können, eine Idee von ihrer Bedeutung bekommen, und ein Leben ohne veränderliche Variablen führen.

I. Definition von Funktionen

Definition von Funktionen

- Zwei wesentliche Konstrukte:
  - Fallunterscheidung
  - Rekursion

Definition von Funktionen

- Zwei wesentliche Konstrukte:
  - Fallunterscheidung
  - Rekursion

Satz

Fallunterscheidung und Rekursion auf natürlichen Zahlen sind **Turing-mächtig**.

- Funktionen müssen **partiell** sein können.
  - Insbesondere nicht-terminierende Rekursion
- Fragen: wie schreiben Funktionen in Haskell auf (**Syntax**), und was bedeutet das (**Semantik**)?

Haskell-Syntax: Charakteristika

- **Leichtgewichtig**
  - Wichtigstes Zeichen:
- Funktionsapplikation: `f a`
  - Klammern sind optional
  - **Höchste** Priorität (engste Bindung)
- Abseitsregel: Gültigkeitsbereich durch Einrückung
  - Keine Klammern (`{` . . . `}`) (optional)
  - Auch in anderen Sprachen (Python, Ruby)

Haskell-Syntax: Funktionsdefinition

Generelle Form:

- **Signatur:**

```
max :: Int→ Int→ Int
```

- **Definition:**

```
max x y = if x < y then y else x
```

  - Kopf, mit Parametern
  - Rumpf (evtl. länger, mehrere Zeilen)
  - Typisches Muster: Fallunterscheidung, dann rekursiver Aufruf
  - Was gehört zum Rumpf (Geltungsberereich)?

Haskell-Syntax I: Die Abseitsregel

Funktionsdefinition:

```
f x1 x2 x3...xn = e
```

- **Gültigkeitsbereich** der Definition von `f`:
  alles, was gegenüber `f` eingerückt ist.
- Beispiel:

  ```
  f x = hier faengts an
    und hier gehts weiter
        immer weiter
  g y z = und hier faengt was neues an
  ```

- Gilt auch verschachtelt.
- Kommentare sind passiv (heben das Abseits nicht auf).

Haskell-Syntax II: Kommentare

- Pro Zeile: Ab -- bis Ende der Zeile

```
f x y = irgendwas  -- und hier der Kommentar!
```

- Über mehrere Zeilen: Anfang {-, Ende -}

```
{-
   Hier faengt der Kommentar an
   erstreckt sich ueber mehrere Zeilen
   bis hier                               -}
f x y = irgendwas
```

  - Kann geschachtelt werden.

Haskell-Syntax III: Bedingte Definitionen

- Statt verschachtelter Fallunterscheidungen ...

```
f x y = if B1 then P else
        if B2 then Q else R
```

... **bedingte Gleichungen**:

```
f x y
  | B1 = P
  | B2 = Q
```

- Auswertung der Bedingungen von oben nach unten
- Wenn keine Bedingung wahr ist: **Laufzeitfehler**! Deshalb:

```
  | otherwise = R
```

Haskell-Syntax IV: Lokale Definitionen

- Lokale Definitionen mit `where` oder `let`:

```
f x y
  | g = P y
  | otherwise = f x where
    y = M
    f x = N x
```

```
f x y =
 let y = M
     f x = N x
 in  if g then P y
          else f x
```

- `f`, `y`, ... werden **gleichzeitig** definiert (Rekursion!)
- Namen `f`, `y` und Parameter (`x`) **überlagern** andere
- Es gilt die **Abseitsregel**
  - Deshalb: Auf gleiche Einrückung der lokalen Definition achten!

Jetzt seit ihr dran!

Übung 2.1: Syntax

In dem Beispielprogramm auf der vorherigen Folie, welche der Variablen `f`, `x` und `y` auf den rechten Seiten wird wo gebunden?

Jetzt seit ihr dran!

Übung 2.1: Syntax

In dem Beispielprogramm auf der vorherigen Folie, welche der Variablen `f`, `x` und `y` auf den rechten Seiten wird wo gebunden?

Lösung:

```
f x y
  | g = P y
  | otherwise = f x where
    y = M
    f x = N x
```

II. Auswertung von Funktionen

Auswertung von Funktionen

- Auswertung durch **Anwendung** von Gleichungen
- **Auswertungsrelation** $s \to t$:
  - Anwendung einer Funktionsdefinition
  - Anwendung von elementaren Operationen (arithmetisch, Zeichenketten)
- Frage: spielt die **Reihenfolge** eine Rolle?

Auswertung von Ausdrücken

```
inc :: Int → Int
inc x = x+ 1
```

```
dbl :: Int → Int
dbl x = 2*x
```

- Reduktion von `inc (dbl (inc 3))`

Auswertung von Ausdrücken

```
inc :: Int → Int
inc x = x+ 1
```

```
dbl :: Int → Int
dbl x = 2*x
```

- Reduktion von `inc (dbl (inc 3))`
- Von **außen** nach **innen** (outermost-first):

```
inc (dbl (inc 3))
```

Auswertung von Ausdrücken

```
inc :: Int → Int
inc x = x+ 1
```

```
dbl :: Int → Int
dbl x = 2*x
```

- Reduktion von `inc (dbl (inc 3))`
- Von **außen** nach **innen** (outermost-first):

```
inc (dbl (inc 3))   → dbl (inc 3)+ 1
```

Auswertung von Ausdrücken

```
inc :: Int → Int
inc x = x+ 1
```

```
dbl :: Int → Int
dbl x = 2*x
```

- Reduktion von `inc (dbl (inc 3))`
- Von **außen** nach **innen** (outermost-first):

```
inc (dbl (inc 3))   → dbl (inc 3)+ 1
                    → 2*(inc 3)+ 1
```

Auswertung von Ausdrücken

```
inc :: Int → Int
inc x = x+ 1
```

```
dbl :: Int → Int
dbl x = 2*x
```

- Reduktion von `inc (dbl (inc 3))`
- Von **außen** nach **innen** (outermost-first):

```
inc (dbl (inc 3))  → dbl (inc 3)+ 1
                   → 2*(inc 3)+ 1
                   → 2*(3+ 1)+ 1 → 2*4+1 → 8+1 → 9
```

Auswertung von Ausdrücken

```
inc :: Int → Int
inc x = x+ 1
```

```
dbl :: Int → Int
dbl x = 2∗x
```

- Reduktion von `inc (dbl (inc 3))`
- Von **außen** nach **innen** (outermost-first):

```
inc (dbl (inc 3))  → dbl (inc 3)+ 1
                   → 2∗(inc 3)+ 1
                   → 2∗(3+ 1)+ 1 → 2∗4+1 → 8+1 → 9
```

- Von **innen** nach **außen** (innermost-first):

```
inc (dbl (inc 3))
```

Auswertung von Ausdrücken

```
inc :: Int → Int
inc x = x+ 1
```

```
dbl :: Int → Int
dbl x = 2*x
```

- Reduktion von `inc (dbl (inc 3))`
- Von **außen** nach **innen** (outermost-first):

```
inc (dbl (inc 3))  → dbl (inc 3)+ 1
                   → 2*(inc 3)+ 1
                   → 2*(3+ 1)+ 1 → 2*4+1 → 8+1 → 9
```

- Von **innen** nach **außen** (innermost-first):

```
inc (dbl (inc 3))  → inc (dbl (3+1))
```

Auswertung von Ausdrücken

```
inc :: Int → Int
inc x = x+ 1
```

```
dbl :: Int → Int
dbl x = 2*x
```

- Reduktion von `inc (dbl (inc 3))`
- Von **außen** nach **innen** (outermost-first):

```
inc (dbl (inc 3))  → dbl (inc 3)+ 1
                   → 2*(inc 3)+ 1
                   → 2*(3+ 1)+ 1 → 2*4+1 → 8+1 → 9
```

- Von **innen** nach **außen** (innermost-first):

```
inc (dbl (inc 3))  → inc (dbl (3+1)) → inc (dbl 4)
```

Auswertung von Ausdrücken

```
inc :: Int → Int
inc x = x+ 1
```

```
dbl :: Int → Int
dbl x = 2*x
```

- Reduktion von `inc (dbl (inc 3))`
- Von **außen** nach **innen** (outermost-first):

```
inc (dbl (inc 3))  → dbl (inc 3)+ 1
                   → 2*(inc 3)+ 1
                   → 2*(3+ 1)+ 1 → 2*4+1 → 8+1 → 9
```

- Von **innen** nach **außen** (innermost-first):

```
inc (dbl (inc 3))  → inc (dbl (3+1)) → inc (dbl 4)
                   → inc (2*4)
```

Auswertung von Ausdrücken

```
inc :: Int → Int
inc x = x+ 1
```

```
dbl :: Int → Int
dbl x = 2*x
```

- Reduktion von `inc (dbl (inc 3))`
- Von **außen** nach **innen** (outermost-first):

```
inc (dbl (inc 3))  → dbl (inc 3)+ 1
                   → 2*(inc 3)+ 1
                   → 2*(3+ 1)+ 1 → 2*4+1 → 8+1 → 9
```

- Von **innen** nach **außen** (innermost-first):

```
inc (dbl (inc 3))  → inc (dbl (3+1)) → inc (dbl 4)
                   → inc (2*4) → inc 8
```

Auswertung von Ausdrücken

```
inc :: Int → Int
inc x = x+ 1
```

```
dbl :: Int → Int
dbl x = 2*x
```

- Reduktion von `inc (dbl (inc 3))`
- Von **außen** nach **innen** (outermost-first):

```
inc (dbl (inc 3))  → dbl (inc 3)+ 1
                   → 2*(inc 3)+ 1
                   → 2*(3+ 1)+ 1 → 2*4+1 → 8+1 → 9
```

- Von **innen** nach **außen** (innermost-first):

```
inc (dbl (inc 3))  → inc (dbl (3+1)) → inc (dbl 4)
                   → inc (2*4) → inc 8
                   → 8+1
```

Auswertung von Ausdrücken

```
inc :: Int → Int
inc x = x+ 1
```

```
dbl :: Int → Int
dbl x = 2*x
```

- Reduktion von `inc (dbl (inc 3))`
- Von **außen** nach **innen** (outermost-first):

```
inc (dbl (inc 3))  → dbl (inc 3)+ 1
                   → 2*(inc 3)+ 1
                   → 2*(3+ 1)+ 1 → 2*4+1 → 8+1 → 9
```

- Von **innen** nach **außen** (innermost-first):

```
inc (dbl (inc 3))  → inc (dbl (3+1)) → inc (dbl 4)
                   → inc (2*4) → inc 8
                   → 8+1 → 9
```

Auswertung von Ausdrücken

```
inc :: Int → Int
inc x = x+ 1
```

```
dbl :: Int → Int
dbl x = 2*x
```

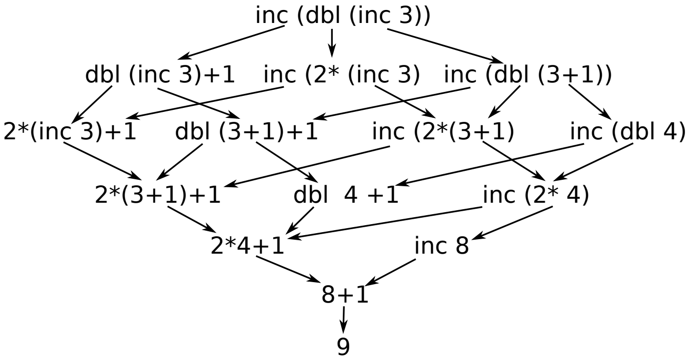
- Volle Reduktion von `inc (dbl (inc 3))`:

Auswertung von Ausdrücken

```
inc :: Int → Int
inc x = x+ 1
```

```
dbl :: Int → Int
dbl x = 2*x
```

- Volle Reduktion von `inc (dbl (inc 3))`:



Konfluenz

- Es kommt immer das gleiche heraus?
- Sei $\stackrel{*}{\to}$ die Reduktion in null oder mehr Schritten.

Definition (Konfluenz)

$\stackrel{*}{\to}$ ist **konfluent** gdw:
Für alle r, s, t mit $s \stackrel{*}{\leftarrow} r \stackrel{*}{\to} t$ gibt es u so dass $s \stackrel{*}{\to} u \stackrel{*}{\leftarrow} t$.

Konfluenz

- Wenn wir von Laufzeitfehlern abstrahieren, gilt:

Theorem (Konfluenz)

Die Auswertungsrelation $\xrightarrow{*}$ für funktionale Programme ist ***konfluent****.*

- Beweisskizze:

  Sei `f x = E` und $s \xrightarrow{*} t$:

$$\begin{tikzcd} f\ s \arrow[r, "*"] \arrow[d, "*"] & f\ t \\ E\begin{bmatrix} s \\ x \end{bmatrix} & \end{tikzcd}$$

Konfluenz

- Wenn wir von Laufzeitfehlern abstrahieren, gilt:

Theorem (Konfluenz)

Die Auswertungsrelation $\stackrel{*}{\to}$ für funktionale Programme ist ***konfluent****.*

- Beweisskizze:

  Sei `f x = E` und $s \stackrel{*}{\to} t$:

$$\begin{tikzcd}
f\ s \arrow[r, "*"] \arrow[d, "*"] & f\ t \arrow[d, "*"] \\
E\begin{bmatrix} s \\ x \end{bmatrix} \arrow[r, "*"] & E\begin{bmatrix} t \\ x \end{bmatrix}
\end{tikzcd}$$

Auswirkung der Auswertungsstrategie

- Auswertungsstrategie ist also egal?

Auswirkung der Auswertungsstrategie

- Auswertungsstrategie ist also egal?
- Beispiel:

```haskell
repeat :: Int→ String→ String
repeat n s = if n == 0 then ""
             else s ++ repeat (n-1) s
```

```haskell
undef :: String
undef = undef
```

- Auswertung von `repeat 0 undef`:

Auswirkung der Auswertungsstrategie

- Auswertungsstrategie ist also egal?
- Beispiel:

```haskell
repeat :: Int→ String→ String
repeat n s = if n == 0 then ""
             else s ++ repeat (n-1) s
```

```haskell
undef :: String
undef = undef
```

- Auswertung von `repeat 0 undef`:

repeat 0 undef

Auswirkung der Auswertungsstrategie

- Auswertungsstrategie ist also egal?
- Beispiel:

```haskell
repeat :: Int→ String→ String
repeat n s = if n == 0 then ""
             else s ++ repeat (n-1) s
```

```haskell
undef :: String
undef = undef
```

- Auswertung von `repeat 0 undef`:

repeat 0 undef

repeat 0 undef

""

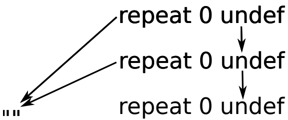
Auswirkung der Auswertungsstrategie

- Auswertungsstrategie ist also egal?
- Beispiel:

```haskell
repeat :: Int→ String→ String
repeat n s = if n == 0 then ""
             else s ++ repeat (n-1) s
```

```haskell
undef :: String
undef = undef
```

- Auswertung von `repeat 0 undef`:



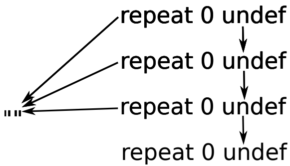
Auswirkung der Auswertungsstrategie

- Auswertungsstrategie ist also egal?
- Beispiel:

```
repeat :: Int→ String→ String
repeat n s = if n == 0 then ""
             else s ++ repeat (n-1) s
```

```
undef :: String
undef = undef
```

- Auswertung von `repeat 0 undef`:



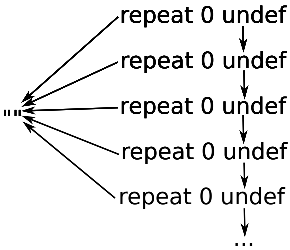
Auswirkung der Auswertungsstrategie

- Auswertungsstrategie ist also egal?
- Beispiel:

```
repeat :: Int→ String→ String
repeat n s = if n == 0 then ""
             else s ++ repeat (n-1) s
```

```
undef :: String
undef = undef
```

- Auswertung von `repeat 0 undef`:



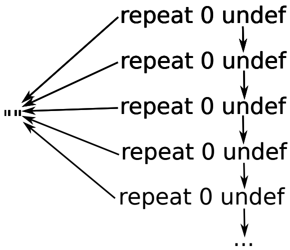
Auswirkung der Auswertungsstrategie

- Auswertungsstrategie ist also egal?
- Beispiel:

```haskell
repeat :: Int→ String→ String
repeat n s = if n == 0 then ""
             else s ++ repeat (n-1) s
```

```haskell
undef :: String
undef = undef
```

- Auswertung von `repeat 0 undef`:



- outermost-first **terminiert**
- inntermost-first terminiert **nicht**

Termination und Normalform

Definition (Termination)

$\rightarrow$ ist **terminierend** gdw. es **keine unendlichen** Ketten gibt:

$$t_1 \rightarrow t_2 \rightarrow t_3 \rightarrow \ldots t_n \rightarrow \ldots$$

Theorem (Normalform)

Sei $\xrightarrow{*}$ konfluent und terminierend, dann wertet jeder Term zu genau einer ***Normalform*** *aus, die nicht weiter ausgewertet werden kann.*

- Daraus folgt: **terminierende** funktionale Programme werten unter jeder Auswertungsstragie jeden Ausdruck zum gleichen Wert aus (der Normalform).

Auswirkung der Auswertungsstrategie

- Auswertungsstrategie nur für **nicht-terminierende** Programme relevant.
- Leider ist nicht-Termination **nötig** (Turing-Mächtigkeit)
- Gibt es eine **semantische** Charakterisierung?
- Auswertungsstrategie und Parameterübergabe:
  - Outermost-first entspricht **call-by-need**, verzögerte Auswertung.
  - Innermost-first entspricht **call-by-value**, strikte Auswertung

Zum Mitdenken. . .

Übung 2.2:

Warum entspricht outermost-first call-ny-need und innermost-first call-by-value?

Zum Mitdenken...

Übung 2.2:

Warum entspricht outermost-first call-ny-need und innermost-first call-by-value?

Lösung: Der Aufruf einer Funktion `f x = E` entspricht hier der Ersetzung der linken Seite `f` durch die rechte Seite `E`, mit den Parametern `x` entsprechend ersetzt.

Wenn wir beispielsweise Auswertung des Ausdrucks `dbl (dbl (dbl (7+3)))` betrachten, dann wird innermost-first zuerst `7+3` reduziert, dann `dbl 10` etc, d.h. jeweils die **Argumente** der Funktion — Funktionen bekommen nur Werte übergeben.

Bei outermost-first wird zuerst das äußerste `dbl` reduziert, was dem Aufruf der Funktion `dbl` mit dem nicht ausgewerteten Argument `dbl (dbl (7+3))` entspricht (verzögerte Auswertung).

III. Semantik und Striktheit

Bedeutung (Semantik) von Programmen

- **Operationale** Semantik:
  - Durch den **Ausführungsbegriff**
  - Ein Programm **ist**, was es **tut**.
  - In diesem Fall: $\rightarrow$
- **Denotationelle** Semantik:
  - Programme werden auf **mathematische Objekte** abgebildet (Denotat).
  - Für funktionale Programme: **rekursiv** definierte Funktionen

Äquivalenz von operationaler und denotationaler Semantik

Sei P ein funktionales Programm, $\stackrel{*}{\rightarrow}$ die dadurch definierte Reduktion, und $[\![P]\!]$ das Denotat. Dann gilt für alle Ausdrücke t und Werte v

$$t \stackrel{*}{\rightarrow} v \iff [\![P]\!](t) = v$$

Striktheit

Definition (Striktheit)

Funktion f ist **strikt** $\iff$ Ergebnis ist undefiniert, sobald ein Argument undefiniert ist.

- **Denotationelle** Eigenschaft (nicht operational)
- Haskell ist nach **Sprachdefinition nicht-strikt**
  - `repeat 0 undef` **muss** `""` ergeben.
  - Meisten Implementationen nutzen verzögerte Auswertung
- Andere Programmiersprachen:
  - Java, C, etc. sind call-by-value (nach Sprachdefinition) und damit strikt
  - Fallunterscheidung ist **immer** nicht-strikt, Konjunktion und Disjunktion meist auch.

Jetzt seit ihr dran!

Übung 2.3: Strikte Fallunterscheidung

Warum ist Fallunterscheidung immer nicht-strikt, auch in Java?

Jetzt seit ihr dran!

Übung 2.3: Strikte Fallunterscheidung

Warum ist Fallunterscheidung immer nicht-strikt, auch in Java?

Lösung: Betrachte

```
y = x == 0 ? -1 : 100/x;
```

```
if (x == 0) {
  y= -1;
  } else {
  y= 100/x;
  }
```

Wäre die Fallunterscheidung strikt, würden erst **beide** Fälle ausgewertet; es wäre nicht mehr möglich, die Auswertung undefinierter Ausdrücke abzufangen. Das gleich gilt für das Programm rechts.

IV. Leben ohne Variablen

Rekursion statt Schleifen

Fakultät imperativ:

```
r= 1;
while (n > 0) {
  r= n* r;
  n= n- 1;
  }
```

- Veränderliche Variablen werden zu Funktionsparametern
- Iteration (while-Schleifen) werden zu Rekursion
- Endrekursion verbraucht keinen Speicherplatz

Rekursion statt Schleifen

Fakultät imperativ:

```
r= 1;
while (n > 0) {
  r= n* r;
  n= n- 1;
  }
```

Fakultät rekursiv:

```
fac' n r =
  if n ≤ 0 then r
  else fac' (n-1) (n*r)
```

```
fac n = fac' n 1
```

- Veränderliche Variablen werden zu Funktionsparametern
- Iteration (while-Schleifen) werden zu Rekursion
- Endrekursion verbraucht keinen Speicherplatz

Rekursive Funktionen auf Zeichenketten

- Test auf die leere Zeichenkette:

```
null :: String → Bool
null xs = xs == ""
```

- Kopf und Rest einer nicht-leeren Zeichenkette (vordefiniert):

```
head :: String → Char
tail :: String → String
```

DEMO

Suche in einer Zeichenkette

- Suche nach einem Zeichen in einer Zeichenkette:

```
count1 :: Char→ String→ Int
```

- In einem leeren String: kein Zeichen kommt vor
- Ansonsten: Kopf vergleichen, zum Vorkommen im Rest addieren

```
count1 c s =
  if null s then 0
  else if head s == c then 1+ count1 c (tail s)
                      else count1 c (tail s)
```

- Übung: wie formuliere ich `count` mit Guards? (Lösung in den Quellen)

Suche in einer Zeichenkette

- Endrekursiv:

```
count3 c s = count3' c s 0
count3' c s r =
  if null s then r
  else count3' c (tail s) (if head s == c then 1+r else r)
```

Suche in einer Zeichenkette

- Endrekursiv:

```
count3 c s = count3' c s 0
count3' c s r =
  if null s then r
  else count3' c (tail s) (if head s == c then 1+r else r)
```

- Endrekursiv mit lokaler Definition

```
count4 c s = count4' s 0 where
  count4' s r =
    if null s then r
    else count4' (tail s) (if head s == c then 1+r else r)
```

Strings konstruieren

- `:` hängt Zeichen vorne an Zeichenkette an (vordefiniert)

```
(:) :: Char → String → String
```

- Es gilt: Wenn `not (null s)`, dann `head s : tail s == s`
- Mit `(:)` wird `(++)` definiert:

```
(++) :: String → String → String
xs ++ ys
  | null xs   = ys
  | otherwise = head xs : (tail xs ++ ys)
```

- `quadrat` konstruiert ein Quadrat aus Zeichen:

```
quadrat :: Int → Char → String
quadrat n c = repeat n (repeat n (c: "") ++ "\n")
```

Strings analysieren

- Warum immer nur Kopf/Rest?
- Letztes Zeichen (dual zu `head`):

```
last1 :: String→ Char
last1 s = if null s then last1 s
          else if null (tail s) then head s
               else last1 (tail s)
```

- Besser: mit Fehlermeldung

```
last :: String→ Char
last s
  | null s = error "last:␣empty␣string"
  | null (tail s) = head s
  | otherwise     = last (tail s)
```

Strings analysieren

- Anfang der Zeichenkette (dual zu `tail`):

```
init :: String→ String
init s
  | null s = error "init:␣empty␣string"        -- nicht s
  | null (tail s) = ""
  | otherwise     = head s : init (tail s)
```

- Damit: Wenn `not (null s)`, dann `init s ++ (last s: "") == s`

Strings analysieren: das Palindrom

- Palindrom: vorwärts und rückwärts gelesen gleich.
- Rekursiv:
  - Alle Wörter der Länge 1 oder kleiner sind Palindrome
  - Für längere Wörter: wenn erstes und letztes Zeichen gleich sind und der Rest ein Palindrom.
- Erste Variante:

```
palin1 :: String → Bool
palin1 s
  | length s ≤ 1     = True
  | head s == last s = palin1 (init (tail s))
  | otherwise        = False
```

DEMO

Strings analysieren: das Palindrom

- Problem: Groß/Kleinschreibung, Leerzeichen, Satzzeichen irrelevant.
- Daher: nicht-alphanumerische Zeichen entfernen, alles Kleinschrift:

```
clean :: String→ String
clean s
  | null s = ""
  | isAlphaNum (head s) = toLower (head s) : clean (tail s)
  | otherwise = clean (tail s)
```

- Erweiterte Version:

```
palin2 s = palin1 (clean s)
```

Fortgeschritten: Vereinfachung von palin1

- Das hier ist nicht so schön:

```
palin1 s
  | length s ≤ 1      = True
  | head s == last s = palin1 (init (tail s))
  | otherwise         = False
```

- Was steht da eigentlich:

```
palin1' s = if length s ≤ 1 then True
            else if head s == last s then palin1' (init (tail s))
                                     else False
```

- Damit:

```
palin3 s = length s ≤ 1 || head s == last s && palin3 (init (tail s))
```

  - Terminiert nur wegen Nicht-Striktheit von ||

Zusammenfassung

- **Bedeutung** von Haskell-Programmen:
  - Auswertungsrelation $\rightarrow$
  - Auswertungsstrategien: innermost-first, outermost-first
  - Auswertungsstrategie für terminierende Programme irrelevant
- **Striktheit**
  - Haskell ist **spezifiziert** als nicht-strikt
  - Meist implementiert durch verzögerte Auswertung
- Leben **ohne Variablen**:
  - Rekursion statt Schleifen
  - Funktionsparameter statt Variablen
- Nächste Vorlesung: Datentypen