FE_UAN

LIVRO DE F SICA I

Por ''*Salmos*'' *Agostinho Kusseiala*

Electrónica & Telecomunicações

2003/2004

01. Medição

Para expressar quantitativamente uma lei física necessitamos de um sistema de unidades. Do mesmo modo, para medir uma grandeza física é necessário definir *a priori* a unidade na qual esta grandeza será medida.

Existe uma enorme quantidade de grandezas físicas, mas apenas algumas são consideradas fundamentais, sendo as demais derivadas delas. Tempo (*segundo*), espaço (*metro*), massa(*quilograma*) e carga elétrica(Coulomb) são exemplos de unidades fundamentais. Velocidade (*metro/segundo*), aceleração (metro/segundo^2) e força (quilograma.metro/segundo^2) são exemplos de unidades derivadas.

Por razões históricas, o tempo foi a primeira quantidade a ser mensurada. Este conceito surge a partir da duração do dia, da presença da luminosidade do Sol; e a sua ausência: a noite.

Com a evolução da humanidade e com os deslocamentos das comunidades surge o conceito de distância, de comprimento, de temperatura e etc.

A partir da necessidade de quantificar as mercadorias para troca surge o conceito de peso, e mais tarde a noção de massa.

Outras grandezas surgem com o avançar da tecnologia e o desenvolvimento do método científico tais como pressão, intensidade luminosa, potência, carga elétrica, corrente elétrica, campo eletromagnético, calor específico, entropia e etc.

De certo modo, cada cultura tecnológica autônoma desenvolveu um próprio sistema de unidades. Mas a interação entre as sociedades, de certo modo impôs que existisse uma uniformização para que as trocas acontecessem de modo transparente e inteligível pata as partes. A Inglaterra medieval era praticamente isolada comercialmente do resto da Europa e isso contribuiu para que lá se estabelecesse um sistema de unidades diferente do restante: polegada, pé, milha, libra e etc.

Algumas unidades fundamentais:

Grandeza	Sistema Internacional - SI	CGS
Comprimento	Metro - m	Centímetro - cm
Tempo	Segundo - s	Segundo - s
Massa	Quilograma - kg	Grama - s
Carga elétrica	Coulomb - C	

Algumas unidades derivadas:

Grandeza	Sistema Internacional - SI	CGS
Velocidade	m/s	cm/s
Aceleração	m/s^2	cm/s^2
Força	$kg.m/s^2$ = Newton	$g.cm/s^2$ = Dina
Energia	$kg.m^2/s^2$ = Joule	$g.cm^2/s^2$ = Erg

02. Vetores e escalares

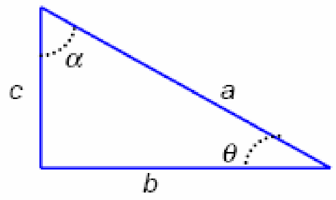
Algumas grandezas físicas ficam completamente definidas quando informamos um número e uma unidade. Quando dizemos que a temperatura de uma pessoa é 37^0C a informação está completa. *A temperatura é uma grandeza escalar*. Se dissermos que a velocidade de um automóvel é de 50km/h não definimos completamente a informação. Não foi dito em que direção e sentido esse corpo se movimentava. A necessidade dessa informação complementar - direção e sentido - *caracteriza a velocidade como um vetor*.

Os vetores são *representados por setas*, e costuma-se representar um vetor com módulo maior que outro por uma seta de tamanho maior. Usamos basicamente de dois modos de representar os vetores, o *método geométrico* e o *método analítico*.

Um pouco de trigonometria

Vamos considerar um triângulo retângulo com hipotenusa a e catetos b e c respectivamente. O teorema de Pitágoras diz que:

$$a^2 = b^2 + c^2$$



As funções seno e cosseno são definidas como:

$$\text{sen}\theta = \frac{c}{a} = \cos\alpha$$

$$\cos\theta = \frac{b}{a} = \text{sen}\alpha$$

E do Teorema de Pitágoras, encontramos que:

$$\text{sen}^2\theta + \cos^2 = 1$$

$$\frac{\text{sen}\theta}{\cos\theta} = \tan\theta = \frac{c}{a} = \cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\text{sen}\alpha}$$

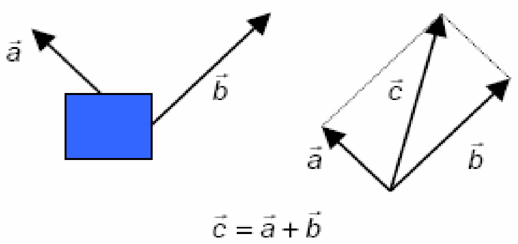
Método geométrico

No *método geométrico*, a visualização dos vetores fica mais óbvia, mas não é adequado para a operações com diversos vetores.

A força é uma grandeza vetorial. Quando consideramos duas forças atuando sobre um dado corpo, o efeito resultante será igual à atuação de uma única força que seja a soma vetorial das duas forças mencionadas.

A soma desses dois vetores pode ser efetuada usando-se a regra do paralelogramo.

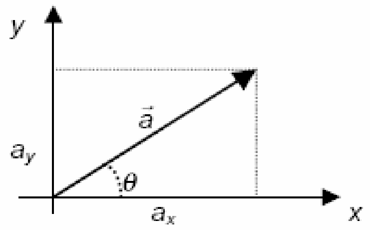
Método geométrico



Método analítico

O *método analítico* consiste basicamente em definir um sistema de coordenadas cartesianas e decompor os vetores segundo as suas componentes nestes eixos.

Vamos considerar um sistema de coordenadas bidimensional, definido pelos eixos x e y , como mostrados na figura ao lado. O vetor $\vec{a}$ tem componentes cartesianas a_x e a_y que tem a forma:



$$a_x = a \,.\, \cos\theta$$
$$a_y = a \,.\, sen\theta$$

Ou de maneira inversa:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$$
$$\tan\theta = \frac{a_y}{a_x}$$

Uma maneira de representar vetores é através de suas componentes num dado sistema de coordenadas, como foi antecipado na figura anterior. Desse modo:

$$\vec{a} = \hat{i}a_x + \hat{j}a_y$$

onde $\hat{i}$ e $\hat{j}$ são vetores unitários (ou versores) que apontam nas direções dos eixos x e y respectivamente e têm módulos iguais a *um*.

A soma de dois vetores será então definida como:

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} \quad onde \quad \begin{cases} \vec{a} = \hat{i}a_x + \hat{j}a_y \\ e \\ \vec{b} = \hat{i}b_x + \hat{j}b_y \end{cases} \Rightarrow \quad \vec{c} = \hat{i}\left(a_x + b_x\right) + \hat{j}\left(a_y + b_y\right)$$

ou seja:

$$\vec{c} = \hat{i}c_x + \hat{j}c_y \quad onde \quad \begin{cases} c_x = a_x + b_x \\ e \\ c_y = a_y + b_y \end{cases}$$

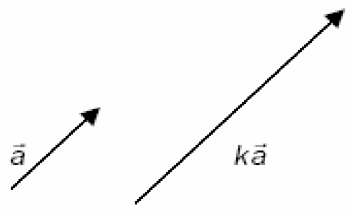
Multiplicação de vetores

As operações com vetores são utilizadas de maneira muito ampla na Física, para expressar as relações que existem entre as diversas grandezas.

Multiplicação de um vetor por um escalar

Sejam dois vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ e um escalar k. Definimos a multiplicação mencionada como:

$$\vec{b} = k\vec{a}$$

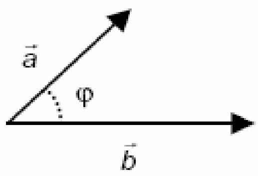


O vetor $k\vec{a}$ tem a mesma direção do vetor $\vec{a}$. Terá mesmo sentido se k for positivo e sentido contrário se k for negativo.

Produto escalar

Define-se o produto escalar de dois vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ como a operação:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ab\cos\varphi$$



onde φ é o ângulo formado pelos dois vetores.

Podemos dizer que o produto escalar de dois vetores é igual ao módulo do primeiro vezes a componente do segundo no eixo determinado pelo primeiro, ou vice-versa. Isso pode-se resumir na propriedade :

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$$

Uma aplicação do produto escalar é a definição de trabalho *W* executado por uma força constante que atua ao longo de um percurso *d:*

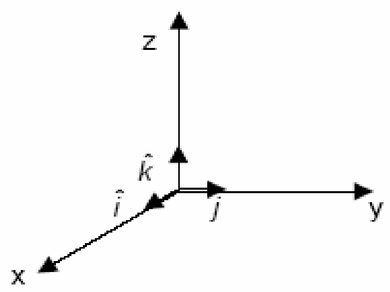
$$W = \vec{F}.\vec{d} = Fd\cos\theta$$

Usando o conceito de vetor unitário encontramos que:

$$\hat{i} \cdot \hat{i} = |\hat{i}||\hat{i}|\cos 0^0 = 1$$
$$\hat{j} \cdot \hat{j} = 1$$
$$\hat{k} \cdot \hat{k} = 1$$

e de modo equivalente:

$$\hat{i} \cdot \hat{j} = |\hat{i}||\hat{j}|\cos 90^0 = 0$$
$$\hat{i} \cdot \hat{k} = 0$$
$$\hat{j} \cdot \hat{k} = 0$$



Podemos utilizar a decomposição de um vetor segundo as suas componentes cartesianas e definir o produto escalar:

$$\vec{a} = \hat{i}a_x + \hat{j}a_y + \hat{k}a_z$$

$$\vec{b} = \hat{i}b_x + \hat{j}b_y + \hat{k}b_z$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \left(\hat{i}a_x + \hat{j}a_y + \hat{k}a_z\right) \cdot \left(\hat{i}b_x + \hat{j}b_y + \hat{k}b_z\right)$$

e portanto:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

Fica fácil perceber que:

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = a^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2$$

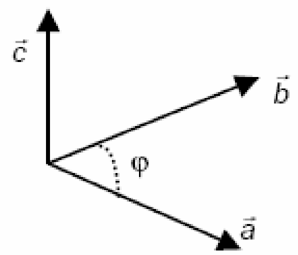
Como $\vec{a} \cdot \vec{b} = ab\cos\varphi$, temos que $\cos\varphi = \dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{a\ b}$, e assim poderemos calcular o ângulo entre os dois vetores, em função de suas componentes cartesianas:

$$\cos\varphi = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}$$

<u>Produto vetorial</u>

Define-se o produto vetorial de dois vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ como a operação:

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$$



e módulo c é definido como:

$$c = ab\,\mathrm{sen}\,\varphi$$

onde $\vec{c}$ é um vetor perpendicular ao plano defino pelos vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ e φ é o ângulo formado por esses dois últimos dois vetores.

Uma aplicação do produto vetorial é a definição da força $\vec{F}$ que atua em uma carga elétrica q que penetra com velocidade $\vec{v}$ numa região que existe um campo magnético $\vec{B}$:

$$\vec{F} = q\,\vec{v} \times \vec{B}$$

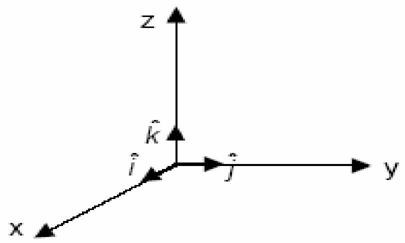
ou ainda:

$$F = q\ v\ B\ sen\varphi$$

Usando a definição de produto vetorial, encontramos que:

$$\hat{i} \times \hat{j} = \hat{k} = -\hat{j} \times \hat{i}$$
$$\hat{j} \times \hat{k} = \hat{i} = -\hat{k} \times \hat{j}$$
$$\hat{k} \times \hat{i} = \hat{j} = -\hat{i} \times \hat{k}$$

$$\hat{i} \times \hat{i} = \hat{j} \times \hat{j} = \hat{k} \times \hat{k} = 0$$



De modo genérico, podemos definir o produto vetorial como:

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \left(\hat{i}a_x + \hat{j}a_y + \hat{k}a_z\right) \times \left(\hat{i}b_x + \hat{j}b_y + \hat{k}b_z\right)$$

e usando os resultados dos produtos vetoriais entre os vetores unitários, encontramos que:

$$\vec{c} = \hat{i}\left(a_y b_z - a_z b_y\right) + \hat{j}\left(a_z b_x - a_x b_z\right) + \hat{k}\left(a_x b_y - a_y b_x\right)$$

Usando as propriedades de matrizes, encontramos que o produto vetorial pode ser expresso como o determinante da matriz definida a seguir:

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{pmatrix}$$

03. Movimento retilíneo

Vivemos num mundo que tem com uma das principais característica o movimento. Mesmo corpos que aparentemente estão em repouso, só estão neste estado em relação a um certo referencial. Quando estamos deitados em nossa cama, tudo à nossa volta parece estar em repouso. E de fato, tudo está em repouso em relação ao nosso corpo. Mas não está em repouso em relação à Lua, ou ao Sol. Se estivéssemos deitado em uma cama de um vagão de um trem dormitório, todos os objetos do quarto ainda nos pareceriam parados, apesar desse conjunto se mover em relação aos trilhos. Daí concluirmos que movimento (ou repouso) é uma característica de um corpo em relação a um certo referencial específico

Quando um objeto real está em movimento, além de sua translação ele também pode tanto girar quanto oscilar. Se fôssemos sempre considerar essas características, o movimento de um corpo seria sempre um fenômeno bastante complicado de se estudar. Acontece, que em diversas situações o fenômeno mais importante é a translação. Desse modo, sem incorrer em grande erro, podemos isolar este tipo movimento e estudá-lo como o único existente.

Devemos ainda considerar que corpos que apresentam apenas o movimento de translação podem ser estudados como partículas, porque todas as partes do corpo com esse movimento descreverão a mesma trajetória.

Num estágio inicial, o estudo ainda pode ser mais simplificado porque matematicamente, uma partícula é tratada como um ponto, um objeto sem dimensões, de tal maneira que rotações e vibrações não estarão envolvidas em seu movimento.

Em resumo: vamos tratar como pontos materiais (ou partículas) os corpos que tenham apenas movimento de translação, e o caso mais simples será quando ele apresentar um movimento retilíneo.

Posição e deslocamento

A localização de uma partícula é fundamental para a análise do seu movimento. O seu movimento é completamente conhecido se a sua posição no espaço é conhecida em todos os instantes.

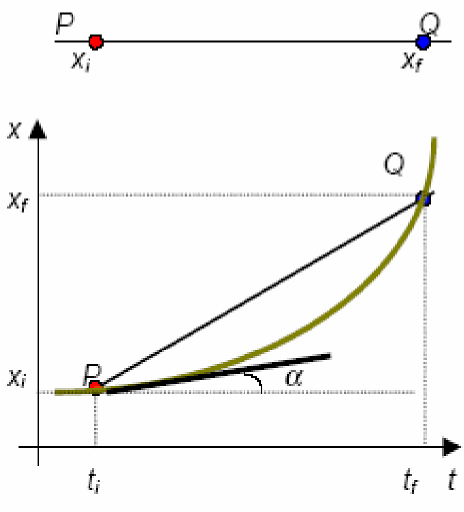
Vamos considerar que esse movimento componha-se de uma trajetória retilínea que tem como posição inicial o ponto P com coordenada x_i no instante t_i e posição final com coordenada x_f no instante t_f.

O deslocamento Δx é uma medida da diferença entre as posições inicial x_i que a partícula ocupou e a sua posição final x_f

$$\Delta x = x_i - x_f$$

e o intervalo de tempo é expresso como:

$$\Delta t = t_f - t_i$$



À medida que o intervalo de tempo Δt diminui o ponto Q se aproxima do ponto P, na figura anterior. No limite quando $\Delta t \to 0$, quando o ponto Q tende ao ponto P, a reta que os une passa a coincidir com a própria tangente à curva no ponto Q, ou seja $v = \tan\alpha$. Assim, a velocidade instantânea em um dado ponto do gráfico espaço versus tempo é a tangente à curva neste ponto específico.

Velocidade média e velocidade escalar média

A velocidade de uma partícula é a razão segundo a qual a sua posição varia com o tempo. Podemos analisar um movimento de diversas maneiras, dependendo da sofisticação dos nossos instrumentos de medida.

A velocidade escalar média é definida como a razão entre a distância percorrida e o tempo gasto no percurso:

$$\left|\overline{v}\right| = \frac{\text{distância percorrida}}{\Delta t}$$

Se uma viagem entre duas cidades distantes de $120km$ durou $1,5h$ nós dizemos que o percurso foi vencido com uma velocidade escalar média de $80km/h$. Na vida cotidiana essa informação é suficiente para descrever uma viagem.

Já a velocidade média é definida como a razão entre o deslocamento e o tempo necessário para esse evento.

$$\overline{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

Para calcularmos a velocidade média da viagem entre as duas cidades, deveríamos saber a ***distância em linha reta*** entre elas. Essa distância seria o deslocamento, que foi definido anteriormente.

No movimento unidimensional percurso e deslocamento são conceitos praticamente idênticos, de modo que só existirá uma diferença marcante entre as velocidades média e escalar média nos movimentos bidimensional ou tridimensional. Percurso é a distância percorrida por uma partícula num certo intervalo de tempo; enquanto que deslocamento é a diferença entre as posições inicial e final da partícula no intervalo de tempo considerado.

Velocidade instantânea e velocidade escalar

A velocidade instantânea v nos dá informações sobre o que está acontecendo num dado momento.

Ela é definida como:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$

Como foi mencionado, a velocidade média representa o que aconteceu entre o início e o fim de uma viagem. Já a velocidade instantânea em um dado momento representa o que aconteceu naquele momento. Colecionando as velocidades instantâneas de cada um dos momentos temos uma informação completa de como variou a velocidade ao longo de toda viagem.

A velocidade escalar é o módulo da velocidade é a velocidade sem qualquer indicação de direção e sentido.

No movimento retilíneo e uniforme a partícula se move com velocidade constante. A sua característica é que a velocidade em qualquer instante é igual à velocidade média. Portanto a equação que define este tipo de movimento é:

$$X = v\,t$$

Aceleração

A aceleração de uma partícula é a razão segundo a qual a sua velocidade varia com o tempo. Ela nos dá informações de como a velocidade está aumentando ou diminuindo à medida que o corpo se movimenta.

Para analisar a variação da velocidade durante um certo intervalo de tempo Δt nós definimos a aceleração média deste intervalo como:

$$\bar{a} = \frac{v_f - v_i}{t_f - t_i} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

Quando queremos saber o valor da aceleração em cada instante do intervalo considerado, deveremos calcular a aceleração instantânea:

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}$$

Quando um corpo em movimento está aumentando a sua velocidade temos que a sua aceleração será positiva pois:

$$V_f > v_i \;\Rightarrow\; \Delta v = v_f - v_i > 0 \;\Rightarrow\; \bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t} \rangle\, 0$$

Se o corpo estiver diminuindo a sua velocidade a sua aceleração será negativa.

Aceleração constante - um caso especial

O exemplo anterior do movimento de um automóvel que varia a sua velocidade é uma situação típica de translação com aceleração constante em alguns trechos e nula em outros.

Vamos considerar o movimento com velocidade constante de uma partícula, entre um instante *inicial* t_0 e um instante posterior t. No instante inicial t_0 a partícula se encontrava na posição inicial x_0 com velocidade inicial v_0 e no instante t ela se encontrava na posição x com velocidade v.

A velocidade média da partícula neste intervalo entre t_0 e t é dada por:

$$\overline{v} = \frac{x - x_0}{t - t_0} = \frac{v + v_0}{2}$$

onde a última igualdade é válida apenas para movimentos com aceleração constante, como esse caso específico.

Podemos colocar as equações anteriores com a seguinte forma que define x:

$$x = x_0 + \overline{v}(t - t_0) = x_0 + \left(\frac{v + v_0}{2}\right)(t - t_0)$$

Como a aceleração é constante, podemos usar a definição de aceleração média que é a própria aceleração constante neste caso presente:

$$a = \overline{a} = \frac{v - v_0}{t - t_0}$$

ou seja:

$$\boxed{v = v_0 + a(t - t_0)}$$

ou ainda

$$(t - t_0) = \frac{v - v_0}{a}$$

Usando este valor de v na equação que define x, encontraremos:

$$x = x_0 + v_0\left(\frac{t - t_0}{2}\right) + [v_0 + a(t - t_0)]\left(\frac{t - t_0}{2}\right)$$

e rearrumando os vários termos teremos:

$$\boxed{x = x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}a(t - t_0)^2}$$

Usando o valor de $(t - t_0)$ na equação que define x encontraremos:

$$x = x_0 + \left(\frac{v + v_0}{2}\right)\left(\frac{v - v_0}{a}\right)$$

ou seja:

$$x - x_0 = \left(\frac{v^2 - v_0^2}{2a}\right)$$

e finalmente:

$$\boxed{v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)}$$

Se estivéssemos considerando um movimento tridimensional, com aceleração constante nas três direções, poderíamos estender facilmente os resultados anteriores para as seguintes equações vetoriais:

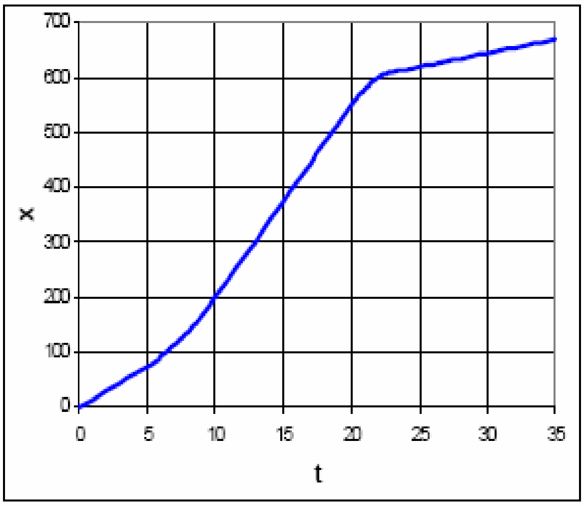
$$\begin{cases} \vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2 \\ \vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t \\ v^2 = v_0^2 + 2\vec{a}\cdot(\vec{r} - \vec{r}_0) \end{cases}$$

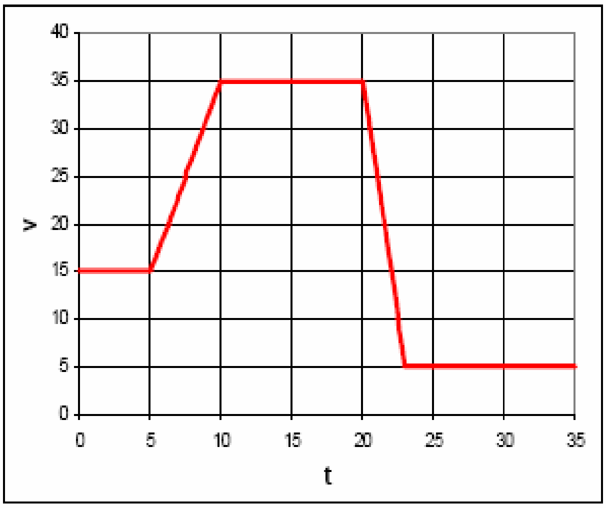
onde fizemos o instante inicial $t_0 = 0$. A última equação é conhecida como *equação de Torricelli*.

Exemplo:

Um motorista viaja ao longo de uma estrada reta desenvolvendo uma velocidade de $15m/s$ quando resolve aumentá-la para $35m/s$ usando uma aceleração constante de $4m/s^2$. Permanece $10s$ com essa velocidade, quando resolve diminui-la para $5m/s$ usando uma aceleração constante de $10m/s^2$.

Trace os gráficos de x *versus* t, v *versus* t e a *versus* t para o todo o movimento mencionado.





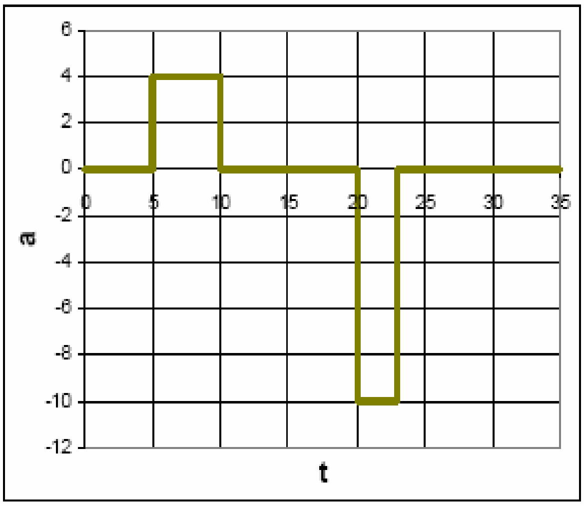


Tabela associada ao exemplo:

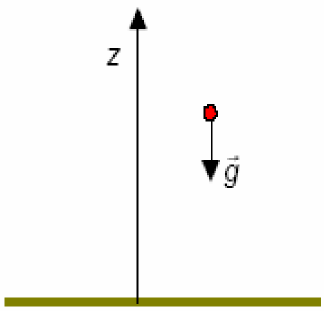
Intervalo	*Aceleração*	*Velocidade*	*Espaço*
$0 \to 5s$	Nula	Constante	Reta ascendente
$5s \to 10s$	Positiva	Reta ascendente	Parábola com concavidade voltada para cima
$10s \to 20s$	Nula	Constante	Reta ascendente
$20s \to 23s$	Negativa	Reta descendente	Parábola com concavidade voltada para baixo
$> 23s$	Nula	Constante	Reta ascendente

Aceleração de queda livre

Podemos particularizar o conjunto de equações vetoriais anteriormente deduzidas, para a situação do movimento de queda livre.

Para todos os efeitos práticos, um corpo que cai próximo à Terra, se comporta como se a superfície fosse plana e a aceleração da gravidade g fosse constante. Iremos usar valor de $g = 9{,}8 m/s^2$, e considerar o eixo z apontando para cima da superifície da Terra.

Para a aceleração, temos que:



$$\boxed{\vec{a} = \vec{g} = -\hat{k}g}$$

Para o espaço percorrido, temos que:

$$\hat{k}z = \hat{k}z_0 + \hat{k}v_0 t + \frac{1}{2}\left(-\hat{k}g\right)t^2$$

$$\boxed{z = z_0 + v_0 t - \frac{gt^2}{2}}$$

Para a velocidade desenvolvida pela partícula, temos que:

$$\hat{k}v = \hat{k}v_0 + \left(-\hat{k}g\right)t$$

ou seja:

$$\boxed{v = v_0 - gt}$$

e também:

$$v^2 = v_0^2 + 2\left(-\hat{k}g\right)\cdot\left(\hat{k}z - \hat{k}z_0\right)$$

$$\boxed{v^2 = v_0^2 - 2g\left(z - z_0\right)}$$

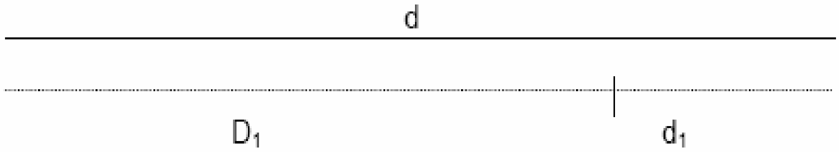
Esta última equação é conhecida como *equação de Torricelli.*

Solução de alguns problemas

Capítulo 2 - Halliday, Resnick e Walker - 4ª. edição	
15	Dois trens trafegam, no mesmo trilho, um em direção ao outro, cada um com uma velocidade escalar de $30km/h$. Quando estão a $60km$ de distância um do outro, um pássaro, que voa a $60km/h$, parte da frente de um trem para o outro. Alcançando o outro trem ele volta para o primeiro, e assim por diante. (Não temos idéia da razão do comportamento deste pássaro.)

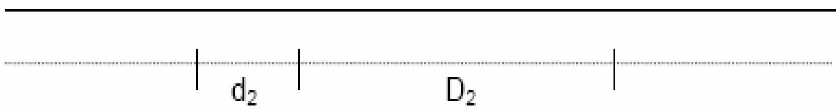
Vamos considerar $d = 60km$ e d_1 a distância que o trem da direita viaja enquanto o pássaro decola dele e atinge o tem da esquerda e t_1 o tempo gasto nesta primeira viagem.. A velocidade de cada trem é $v = 30km/h$ e a velocidade do pássaro é $v_p = 60km/h$.

Para a primeira viagem do pássaro, temos:



$$d = D_1 + d_1 = v_p t_1 + v t_1 = (v_p + v)t_1 \quad \Rightarrow \quad t_1 = \frac{d}{v + v_p}$$

Para a segunda viagem, temos:

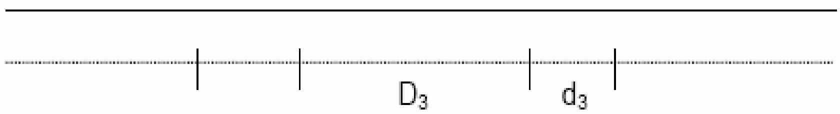


$$d = 2d_1 + (d_2 + D_2) = 2vt_1 + (v_p t_2 + v t_2)$$

$$t_2(v + v_p) = d - 2vt_1 = d - 2v\frac{d}{v + v_p} = d\left(1 - \frac{2v}{v + v_p}\right)$$

$$t_2 = \frac{d}{v + v_p}\left(1 - \frac{2v}{v + v_p}\right) \quad \therefore \quad t_2 = t_1\left(1 - \frac{2v}{v + v_p}\right)$$

Para a terceira viagem, temos



$$d = 2d_1 + 2d_2 + (d_3 + D_3)$$

$$d_3 + D_3 = d - 2d_1 - 2d_2 \quad \therefore \quad vt_3 + v_p t_3 = d - 2vt_1 - 2vt_2$$

$$t_3 = \frac{d}{v+v_p} - 2t_1\frac{v}{v+v_p} - 2t_2\frac{v}{v+v_p} = t_1 - 2t_1\frac{v}{v+v_p} - 2t_2\frac{v}{v+v_p}$$

ou ainda

$$t_3 = t_1\left(1 - \frac{2v}{v+v_p}\right) - 2t_2\frac{v}{v+v_p} = t_2 - 2t_2\frac{v}{v+v_p}$$

ou seja:

$$\boxed{t_3 = t_2\left(1 - \frac{2v}{v+v_p}\right)}$$

Por outro lado, já mostramos que:

$$\boxed{t_2 = t_1\left(1 - \frac{2v}{v+v_p}\right)}$$

$$\boxed{t_1 = \frac{d}{v+v_p} = \frac{60}{30+60} = \frac{2}{3}h = 40\,\text{min}}$$

Podemos inferir então que:

$$t_N = t_{N-1}\left(1 - \frac{2v}{v+v_p}\right)$$

ou seja:

$$t_N = t_1\left(1 - \frac{2v}{v+v_p}\right)^{N-1}$$

Concluímos que t_N é o ene-ésimo termo de uma progressão geométrica cujo primeiro termo $a_1 = t_1 = 40min$ e razão $q = 1 - \frac{2v}{v+v_p} = 1 - \frac{2.30}{30+60} = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$.

a) Quantas viagens o pássaro faz de um trem para o outro, até a colisão?

As viagens do pássaro ficarão cada vez com um percurso menor até tornarem-se infinitesimais, por isso serão necessárias um número infinito de viagens de um trem para o outro.

b) Qual a distância total percorrida pelo pássaro?

O tempo necessário para o percurso será a soma dos termos da progressão:

$$S = \frac{a_1(1-q^N)}{1-q}$$

e quando $|q| < 1$ e N tende a infinito:

$$S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{t_1}{\dfrac{2v}{v+v_p}} = t_1\left(\frac{v+v_p}{2v}\right) = \left(\frac{d}{v+v_p}\right)\left(\frac{v+v_p}{2v}\right) = \frac{d}{2v}$$

ou seja

$$t = \frac{d}{2v} = \frac{60}{2.30} = 1h$$

$$D_p = v_p t = 60km/h\ .\ 1h = 60km$$

Uma forma direta de resolver este problema, mas que no entanto perde-se todo o detalhamento dos acontecimentos, é calcular o tempo necessário para a colisão dos dois trens:

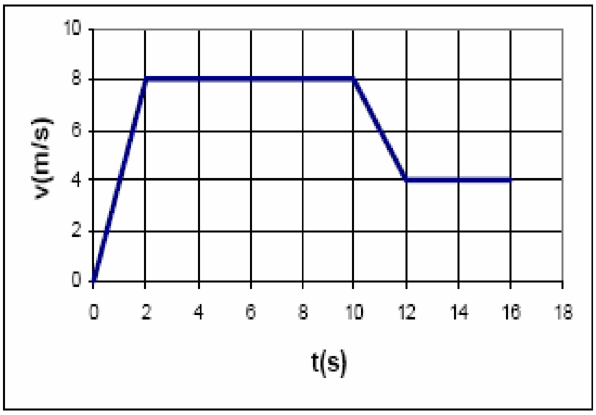
$$d = (\ v + v\ )\ t = 2vt \quad \Rightarrow \quad t = \frac{d}{2v} = \frac{60}{2.30} = 1h$$

Esse tempo t é aquele que o pássaro tem para as suas viagens, logo a distância percorrida será:

$$D_p = v_p\, t = 60km$$

Capítulo 2 - Halliday, Resnick e Walker - 4ª. edição

19 Qual a posição final de um corredor, cujo gráfico velocidade x tempo é dado pela figura ao lado, 16 segundos após ter começado a correr?



A distância percorrida por uma partícula é a área abaixo da curva num gráfico v versus t. Podemos demonstrar a afirmação anterior de vários modos, por exemplo:

Método 1:

$$Área = d = \int_{x_i}^{x_f} dx = \int_{t_i}^{t_f} v\, dt$$

$$d = Área = A_1 + A_2 + A_3 + A_4$$

onde A_1 é a área do triângulo que tem como base *(0-2)*, A_2 é a área do retângulo que tem com base *(2-10)*, A_3 é a área do paralelogramo que tem como base *(10-12)* e A_4 é a área do retângulo que tem como base *(11-16)*.

$$d = \frac{1}{2}(2x8) + (8x8) + \left[\frac{1}{2}(2x4) + (2x4)\right] + (4x4)$$

$$d = 100m$$

Método 2: Usar as equações da cinemática diretamente para cada percurso, e calcular as distâncias correspondentes.

:apítulo 2 - Halliday, Resnick e Walker - 4ª. edição

4 A cabeça de uma cascavel pode acelerar $50m/s^2$ no instante do ataque. Se um carro, partindo do repouso, também pudesse imprimir essa aceleração, em quanto tempo atingiria a velocidade de $100km/h$?

$$v = 100km/h = 10^2 \frac{10^3 m}{3600s} \cong 27m/s$$

$$v = v_0 + at \ ; \ t = \frac{v}{a} = \frac{27\,m/s}{50\,m/s^2}$$

$$t = 0{,}54s$$

:apítulo 2 - Halliday, Resnick e Walker - 4ª. edição

8 Um jumbo precisa atingir uma velocidade de $360km/h$ para decolar. Supondo que a aceleração da aeronave seja constante e que a pista seja de $1{,}8km$, qual o valor mínimo desta aceleração?

$v = 360km/h$
$d = 1{,}8km$
$v_0 = 0$

$$v^2 = (v_0)^2 + 2ad \ \therefore \ a = v^2/2d$$

$$a = 36000\ km/h^2 = 2{,}7\ m/s^2$$

se $g = 9{,}8m/s^2$ teremos $a = 0{,}27\ g$

:apítulo 2 - Halliday, Resnick e Walker - 4ª. edição

1 Um carro a $97km/h$ é freiado e pára em $43m$.

a) Qual o módulo da aceleração (na verdade, da desaceleração) em unidades SI e em unidades g ? Suponha que a aceleração é constante.

$$v^2 = (v_0)^2 - 2ad \ \therefore \ a = (v_0)^2/2d = 8{,}28m/s^2$$

$$Se\ g = 9{,}8m/s^2 \ \ temos\ que\ \ a = 0{,}84\ g$$

$v_0 = 96km/h = 26{,}7\ m/s$
$d = 43m$
$v = 0$

b) Qual é o tempo de frenagem? Se o seu tempo de reação $t_{reação}$, para freiar é de $400ms$, a quantos "tempos de reação" corresponde o tempo de frenagem?

$v = v_0 - at \therefore t = v_0/a$ ou seja: $t = 3{,}22s$

$$t_{reação} = 400ms = 400\ .\ 10^{-3}s = 0{,}4s$$

$$T = t + t_{reação}$$

$$T = 3{,}62s$$

Capítulo 2 - Halliday, Resnick e Walker - 4ª. edição

43 Em uma estrada seca, um carro com pneus em bom estado é capaz de freiar com uma desaceleração de $4,92 m/s^2$ (suponha constante).

a) Viajando inicialmente a $24,6 ms$, em quanto tempo esse carro conseguirá parar?

$$v = v_0 - at \;\therefore\; t = v_0/a = 24,6/4,92$$

$$t = 5s$$

$a = 4,92 m/s^2$
$v_0 = 24,6\ m/s$
$v = 0$

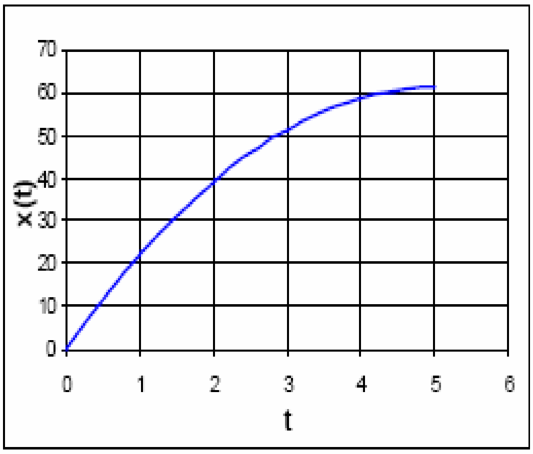
b) Que distância percorre nesse tempo?

$$v^2 = (v_0)^2 - 2ad \;\therefore\; d = (v_0)^2/2a = (24,6)^2/(2.4,92)$$

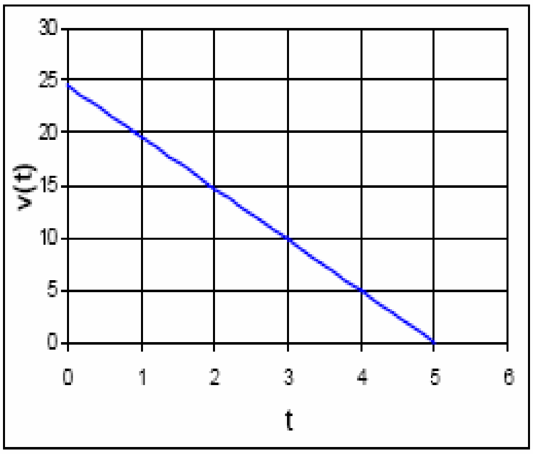
$$d = 61,5m$$

c) Faça os gráficos *x versus t* e *v versus t* para a desaceleração.

$x(t) = 24,6t - 2,46t^2$ em metros



$v(t) = 24,6 - 4,92t$ em m/s



Capítulo 2 - Halliday, Resnick e Walker - 4ª. edição

45 Os freios de um carro são capazes de produzir uma desaceleração de $5,2 m/s^2$.

a) Se você está dirigindo a 140km/h e avista, de repente, um posto policial, qual o tempo mínimo necessário para reduzir a velocidade até o limite permitido de 80km/h ?

$$v = v_0 - at$$

$$t = (v_0 - v)/a = 16,8/5,2$$

$$t = 3,2s$$

$v_0 = 140km/h = 39,2m/s$
$v = 80km/h = 22,4m/s$
$a = 5,2m/s^2$

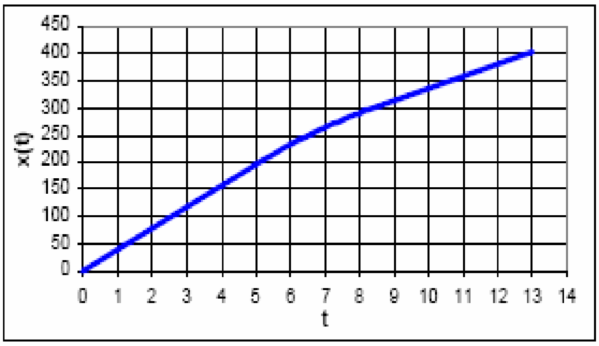
b) Trace o gráfico x versus t e v versus t para esta desaceleração.
Consideramos que até o instante $t = 5s$ o carro vinha desenvolvendo a velocidade de $39{,}2m/s$, quando começou a freiar até $3{,}2s$ mais tarde, quando passou a desenvolver a velocidade de $22{,}4m/s$.

O gráfico *x versus t* é uma reta para $0 < t < 5s$,

é uma parábola com concavidade para baixo para
$5s < t < 8{,}2s$

e volta a ser uma reta para
$t > 8{,}2s$.

Nestes intervalos temos respectivamente: movimento uniforme, movimento uniformemente acelerado e novamente movimento uniforme.



Capítulo 2 - Halliday, Resnick e Walker - 4ª. edição

54 Quando a luz verde de um sinal de trânsito acende, um carro parte com aceleração constante $a = 2{,}2m/s^2$. No mesmo instante, um caminhão, com velocidade constante de $9{,}5m/s$, ultrapassa o automóvel.

a) A que distância, após o sinal, o automóvel ultrapassará o caminhão?

Automóvel *Caminhão*

$x = at^2/2$ $X = V\,t$

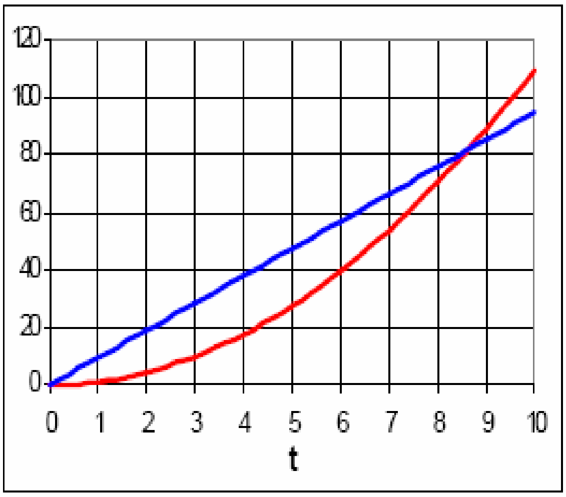
No instante $t = t_E$ o automóvel vai alcançar o caminhão, logo:

$$x_E = X_E$$

$$\frac{at_E^2}{2} = Vt_E \Rightarrow t_E = \frac{2V}{a} = \frac{2.9{,}5}{2{,}2}$$

$$t_E = 8{,}6s$$

$$X_E = V\,t_E = 9{,}5.8{,}6 = 81{,}7m.$$

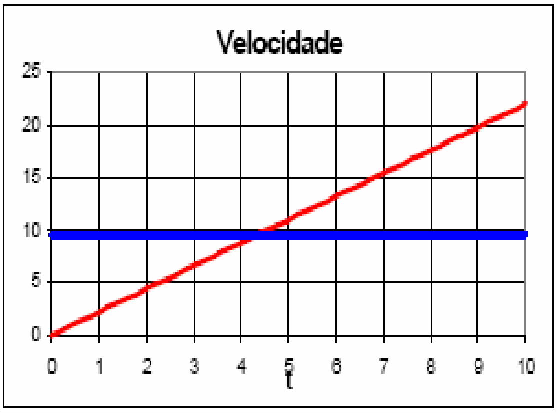


Curva azul = X = Caminhão
Curva vermelha = x = Automóvel

b) Qual a velocidade do carro nesse instante?

$$v_E = v_0 + a\, t_E = 2,2 + 8,6$$

$$v_E = 18,9 m/s$$



Capítulo 2 - Halliday, Resnick e Walker - 4ª. edição	
57	Dois trens, em movimento retilíneo, viajam na mesma direção e em sentidos opostos, um a $72km/h$ e o outro a $144km/h$. Quando estão a $950m$ um do outro, os maquinistas se avistam e aplicam os freios. Determine se haverá colisão, sabendo-se que a desaceleração em cada um dos trens é de $1,0m/s^2$.

Vamos chamar x e X as distâncias que cada trem percorrerá antes de parar. Neste instante teremos $v = V = 0$.

$v_0 = 72km/h = 20m/s$
$V_0 = 144km/h = 40m/s$
$d = 950m$
$a = 1m/s^2$

$$v^2 = (v_0)^2 - 2ax \;\therefore\; x = (v_0)^2/2a$$

$$V^2 = (V_0)^2 - 2aX \;\therefore\; X = (V_0)^2/2a$$

A distância D necessária para os dois trens pararem é $D = x + X$

$$D = \frac{v_0^2 + V_0^2}{2a} = 1000m$$

Como essa distância D é maior que a distância d disponível, acontecerá a colisão entre os dois trens.

Capítulo 2 - Halliday, Resnick e Walker - 4ª. edição	
61	Considere que a chuva cai de uma nuvem, 1700m acima da superfície da Terra. Se desconsiderarmos a resistência do ar, com que velocidade as gotas de chuva atingiriam o solo? Seria seguro caminhar ao ar livre num temporal?

$$v^2 = (v_0)^2 + 2ah = 2gh$$

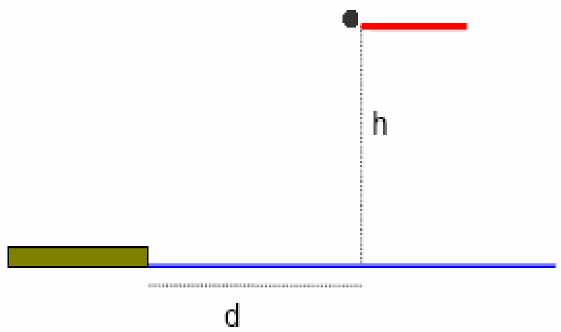
$v_0 = 0$
$a = g = 9,8m/s^2$
$h = 1700m$

$$v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2.9,8.1700} = 182,5m/s$$

$$v = 657km/h$$

Decididamente não seria seguro caminhar ao ar livre num temporal com gotas alcançando a superfície da terra com esta velocidade.

Capítulo 2 - Halliday, Resnick e Walker - 4ª. edição	
69	Um objeto é largado de uma ponte $45m$ acima da água. O objeto cai dentro de um barco que se desloca com velocidade constante e estava a $12m$ do ponto de impacto no instante em que o objeto foi solto. Qual a velocidade do barco?



$h = 45m$
$v_0 = 0$
$d = 12m$

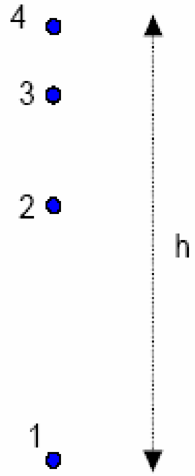
$$\left.\begin{array}{l} d = vt \\ h = \dfrac{g\,t^2}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad t = \frac{d}{V} \quad \therefore \quad h = \frac{gd^2}{2V^2}$$

$$V = d\sqrt{\frac{g}{2h}} = 12\sqrt{\frac{9,8}{2.45}} = 3,9m/s$$

$$V = 14,1km/h$$

Capítulo 2 - Halliday, Resnick e Walker - 4ª. edição	
78	Do cano de um chuveiro, a água pinga no chão, $200cm$ abaixo. As gotas caem em intervalos regulares, e a primeira gota bate no chão, no instante em que a quarta gota começa a cair. Determine as posições da segunda e terceira gotas, no instante em que a primeira gota bate no chão.

Seja t_i o tempo de vôo da i-ésima gota:



$$h = h_1 = \frac{gt_1^2}{2}$$

$$h_2 = \frac{gt_2^2}{2}$$

$$h_3 = \frac{gt_3^2}{2}$$

Como existe um intervalo Δt entre cada gota, temos que $t_1 = 3\Delta t$; $t_2 = 2\Delta t$ e $t_3 = \Delta t$. Logo

$$\frac{h_2}{h_1} = \frac{t_2^2}{t_1^2} = \frac{(2\Delta t)^2}{(3\Delta t)^2} = \frac{4}{9} \quad \therefore \quad h_2 = \frac{4}{9} h_1 = \frac{8}{9} m$$

$$\frac{h_3}{h_1} = \frac{t_3^2}{t_1^2} = \frac{(\Delta t)^2}{(3\Delta t)^2} = \frac{1}{9} \quad \therefore \quad h_3 = \frac{1}{9} h_1 = \frac{2}{9} m$$

Capítulo 2 - Halliday, Resnick e Walker - 4ª. edição	
79	Uma bola de chumbo é deixada cair de um trampolim localizado a $5,2m$ acima da superfície de um lago. A bola bate na água com uma certa velocidade e afunda com a mesma velocidade constante. Ele chegará ao fundo $4,8s$ após ter sido largada.

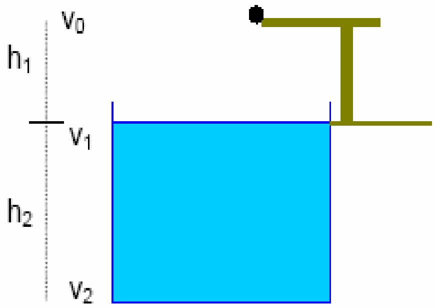
a) Qual a profundidade do lago?

$h_1 = 5,2m$

$t = t_1 + t_2 = 4,8s$

$$h_1 = \frac{g t_1^2}{2} \quad \therefore \quad t_1 = \sqrt{\frac{2h_1}{g}}$$

$t_1 = 1,03s$ e $t_2 = 3,77s$



$$v_1^2 = v_0^2 + 2gh_1 \quad \therefore \quad v_1 = \sqrt{2gh_1} = 10,09 m/s$$

$h_2 = v_1\, t_2 = 38,06m$

b) Qual a velocidade média da bola?

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{espaço}{tempo} = \frac{h_1 + h_2}{t_1 + t_2} = \frac{5,2 + 38,06}{4,8} = 9,01 m/s$$

c) Suponha que toda água do lago seja drenada. A bola é atirada do trampolim, e novamente chega ao fundo do lago 4,8s depois. Qual a velocidade inicial da bola?

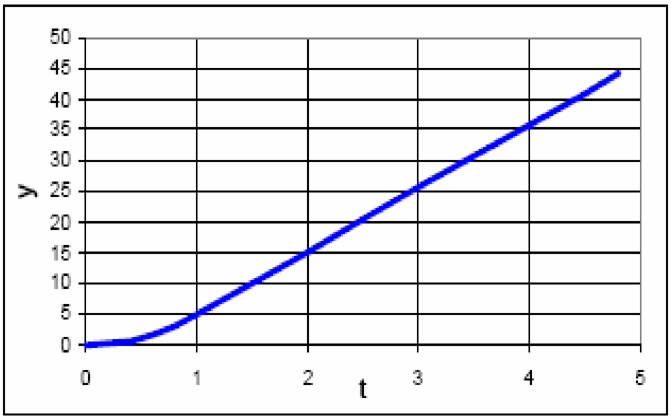
Vamos considerar V_0 a nova velocidade inicial:

$$h = V_0 t + \frac{gt^2}{2} \quad \therefore \quad V_0 = \frac{h}{t} - \frac{gt}{2} = 7,92 - 23,52 = -15,60 m/s$$

Na equação acima o sinal de g é positivo significando que o referencial positivo foi tomado como apontando para baixo. Desse modo, como V_0 calculado é negativo, a bola foi lançada para cima.

$0 < t < 1{,}03s$

O movimento da bola de chumbo é de queda livre, portanto a curva no gráfico *y versus t* será uma parábola e a curva no gráfico *v versus t* será uma reta inclinada em relação à horizontal.



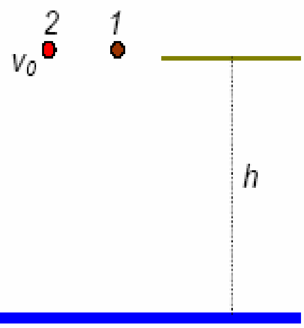
$t > 1{,}03s$

O movimento da bola de chumbo é de retilíneo e uniforme, portanto a curva no gráfico *y versus t* será uma reta inclinada em relação à horizontal e a curva no gráfico *v versus t* será uma reta paralela à horizontal.

Capítulo 2 - Halliday, Resnick e Walker - 4ª. edição

82 Uma pedra é largada de uma ponte a *43m* acima da superfície da água. Outra pedra é atirada para baixo *1s* após a primeira pedra cair. Ambas chegam na água ao mesmo tempo.

a) Qual era a velocidade inicial da segunda pedra?



$h = 44m$

$\Delta t = 1s$

$t_2 = t_1 - \Delta t$

$$h = \frac{gt_1^2}{2} \quad \therefore \quad t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}} = 2{,}99s \cong 3s$$

O tempo gasto pela segunda pedra será:

$$t_2 = t_1 - \Delta t = 2s$$

Logo:

$$h = v_0 t_2 + \frac{gt_2^2}{2} \quad \therefore \quad v_0 = \frac{h}{t_2} - \frac{gt_2}{2}$$

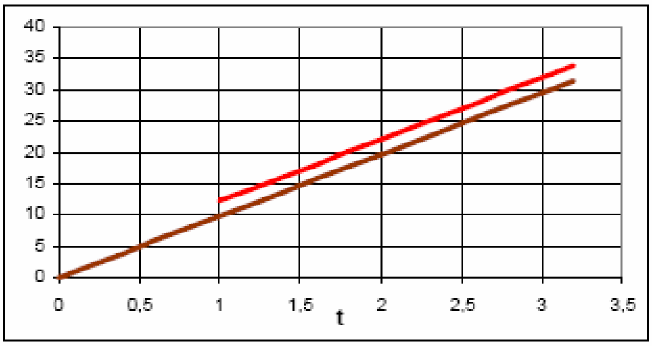
$$v_0 = 12{,}2m/s$$

b) Faça o gráfico da velocidade versus tempo para cada pedra, considerando t = 0 o instante em que a primeira pedra foi largada.

Curvas das velocidade:

Vermelho = primeira pedra

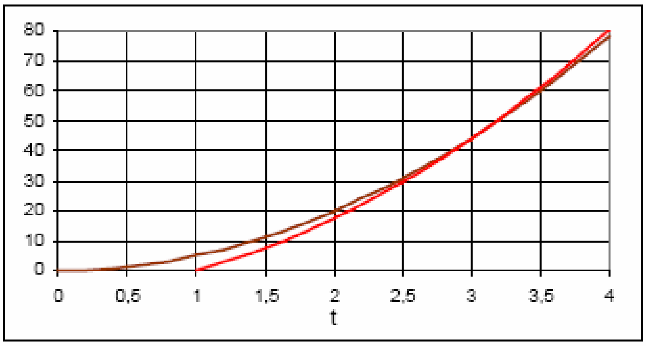
Marrom = segunda pedra



Curvas das distâncias:

Vermelho = primeira pedra

Marrom = segunda pedra



04. Movimento em duas e três dimensões

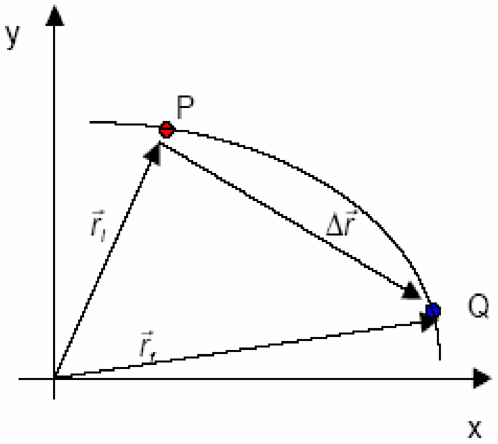
A nossa experiência cotidiana está repleta de exemplos de movimentos bi e tridimensionais. Podemos até dizer que são raras as situações com movimentos unidimensionais. Quando saímos de nossa cama para a sala, certamente usamos um movimento bidimensional ao chegar até a porta e caminhando pelo corredor para atingir a sala. Num automóvel em movimento, além do movimento bidimensional, segundo os pontos cardeais, as estradas têm elevações e baixios, de modo que percorremos um caminho tridimensional.

Posição e deslocamento

Vamos considerar um sistema de coordenadas *x-y* para analisar o movimento de uma partícula do ponto inicial *P* ocupado no instante t_i até o ponto final *Q* ocupado no instante t_f.

A ponto inicial P é localizado pelo vetor posição $\vec{r}_i$ e o ponto final Q é localizado pelo vetor posição $\vec{r}_f$.

O vetor deslocamento é definido por:



$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_f - \vec{r}_i$$

Onde

$$\vec{r}_i = \hat{i}x_i + \hat{j}y_i + \hat{k}z_f$$

$$\vec{r}_f = \hat{i}x_f + \hat{j}y_f + \hat{k}z_f$$

$$\Delta\vec{r} = \hat{i}\,\Delta x + \hat{j}\,\Delta y + \hat{k}\,\Delta z$$

Velocidade média e velocidade instantânea

A velocidade pode ser entendida como a variação no tempo do vetor deslocamento.

Definimos a velocidade média em duas ou três dimensões fazendo uma extensão da definição usada para o movimento retilíneo, ou seja:

$$\overline{\vec{v}} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}_f - \vec{r}_i}{t_f - t_i}$$

ou ainda:

$$\overline{\vec{v}} = \hat{i}\,\frac{\Delta x}{\Delta t} + \hat{j}\,\frac{\Delta y}{\Delta t} + \hat{k}\,\frac{\Delta z}{\Delta t}$$

A velocidade instantânea é definida como:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

e em coordenadas cartesianas:

$$\vec{v} = \hat{i} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} + \hat{j} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} + \hat{k} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta t}$$

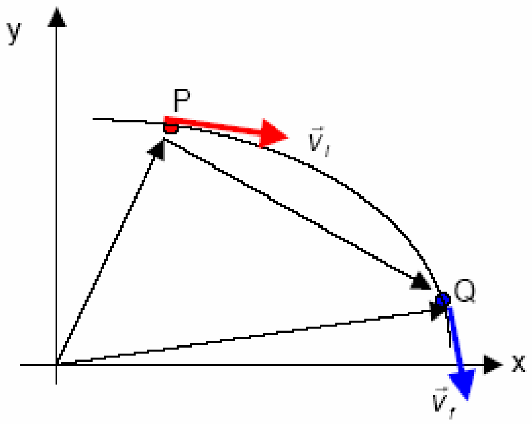
$$\vec{v} = \hat{i} \frac{dx}{dt} + \hat{j} \frac{dy}{dt} + \hat{k} \frac{dz}{dt}$$

ou seja:

$$\vec{v} = \hat{i} v_x + \hat{j} v_y + \hat{k} v_z$$

Aceleração média e aceleração instantânea

Quando uma partícula se move com velocidade $\vec{v}_i$ no instante t_i e com velocidade $\vec{v}_f$ no instante t_f, definimos a sua aceleração média como:



$$\bar{\vec{a}} = \frac{\vec{v}_f - \vec{v}_i}{t_f - t_i} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

A aceleração instantânea é definida como:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

e em coordenadas cartesianas:

$$\vec{a} = \hat{i} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v_x}{\Delta t} + \hat{j} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v_y}{\Delta t} + \hat{k} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v_z}{\Delta t}$$

$$\vec{a} = \hat{i} \frac{dv_x}{dt} + \hat{j} \frac{dv_y}{dt} + \hat{k} \frac{dv_z}{dt}$$

ou seja:

$$\vec{a} = \hat{i} a_x + \hat{j} a_y + \hat{k} a_z$$

Movimento num plano com aceleração constante

Vamos considerar que a partícula se mova no plano *x-y* com aceleração constante. Para um movimento nesse plano teremos:

$$\begin{cases} \vec{r} = \hat{i}x + \hat{j}y \\ \vec{v} = \hat{i}v_x + \hat{j}v_y \\ \vec{a} = \hat{i}a_x + \hat{j}a_y \end{cases}$$

e considerando que a aceleração é constante teremos as equações para o movimento segundo o eixo x:

$$x = x_0 + v_{0x}(t - t_0) + \frac{1}{2}a_x(t - t_0)^2$$
$$v_x = v_{0x} + a_x(t - t_0)$$
$$v_x^2 = v_{0x}^2 + 2a_x(x - x_0)$$

e as equações para o movimento segundo o eixo y :

$$y = y_0 + v_{0y}(t - t_0) + \frac{1}{2}a_y(t - t_0)^2$$
$$v_y = v_{0y} + a_y(t - t_0)$$
$$v_y^2 = v_{0y}^2 + 2a_y(y - y_0)$$

As equações anteriores podem ser sintetizadas nas formas vetoriais:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2$$
$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}\,t$$
$$v^2 = v_0^2 + 2\vec{a}\cdot(\vec{r} - \vec{r}_0)$$

Movimento de projéteis

O movimento dos projéteis é uma situação onde uma partícula se move num plano, com movimento de aceleração constante em uma direção e movimento de velocidade constante em outra direção.

Vamos considerar que $a_x = 0$ e que $a_y = -g$, e desse modo, as equações para esse movimento serão para o eixo x:

$$x - x_0 = v_{0x}t \qquad (1)$$

e para o eixo y:

$$y - y_0 = v_{0y}t - \frac{1}{2}g\,t^2 \qquad (2)$$

$$v_y = v_{0y} - g\,t \qquad (3)$$

$$v_y^2 = v_{0y}^2 - 2g(y - y_0)^2 \qquad (4)$$

Considerando $x_0 = y_o = 0$, na equação (1), temos

$$t = \frac{x}{v_{0x}}$$

usando esse resultado na equação (2), temos:

$$y = v_{0y}\left(\frac{x}{v_{0x}}\right) - \frac{g}{2}\left(\frac{x}{v_{0x}}\right)^2$$

ou seja

$$y = \left(\frac{v_{0y}}{v_{0x}}\right)x - \left(\frac{g}{2v_{0x}^2}\right)x^2$$

A equação anterior é do tipo:

$$y = b\,x - c\,x^2$$

Se completarmos os quadrados na equação anterior, teremos:

$$\left(y - \frac{b^2}{4c}\right) = -c\left(x - \frac{b}{2c}\right)^2$$

Essa é a equação de uma parábola com a concavidade voltada para baixo, e tem como coordenadas do ponto de altura máxima:

$$\begin{cases} x_M = \dfrac{b}{2\,c} \\[2ex] y_M = \dfrac{b^2}{4\,c} \end{cases}$$

Considerando que:

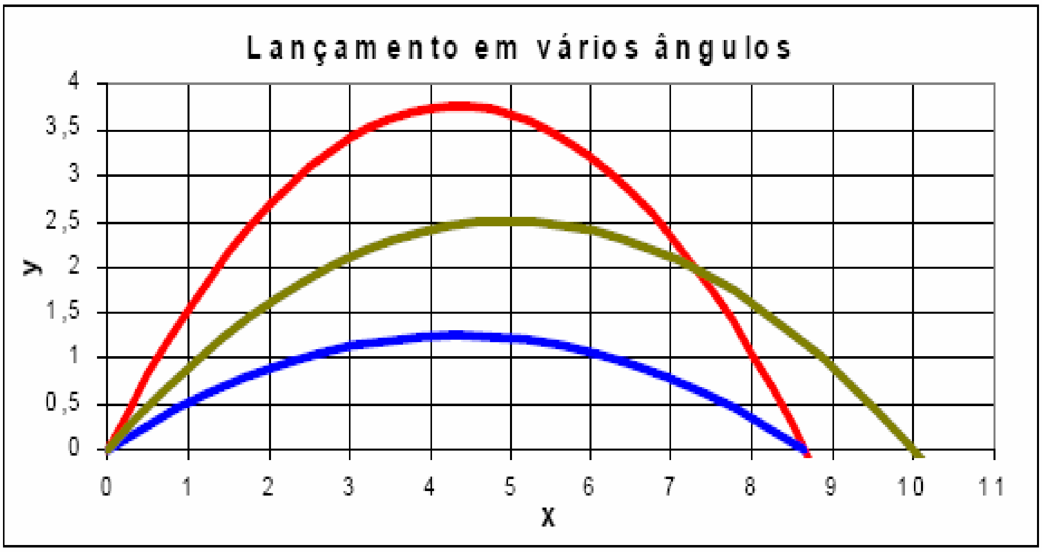
$$\begin{cases} v_{0x} = v_0 \cos\theta_0 \\[2ex] v_{0y} = v_0 \operatorname{sen}\theta_0 \end{cases}$$

encontramos que:

$$\begin{cases} x_M = \dfrac{v_0^2 \operatorname{sen} 2\theta_0}{2g} \\[2ex] y_M = \dfrac{v_0^2 \operatorname{sen}^2 \theta_0}{2g} \end{cases}$$

Como a parábola é uma curva simétrica, a distância percorrida ao longo do eixo x, também conhecida como alcance R tem o valor $R = 2\,x_M$, ou seja:

$$R = \frac{v_0^2 \operatorname{sen} 2\theta_0}{g}$$



com a mesma velocidade inicial e para ângulos de 30^0, 45^0 e 60^0.

Da trigonometria, podemos encontrar que quando dois ângulos diferentes têm o mesmo seno, a soma desses ângulos deve ser igual a 180^0, ou seja:

$$2\alpha + 2\beta = 180^0 \Rightarrow \alpha + \beta = 90^0 \ \therefore \ \alpha = 90^0 - \beta$$

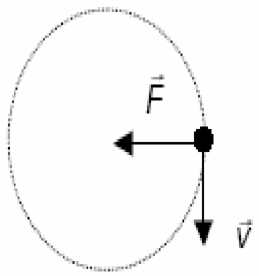
ou seja, dois lançamentos cujos ângulo somam 90^0 têm o mesmo alcance, como mostra a figura anterior para os ângulos 30^0 e 60^0. Podemos mostrar, então, que o alcance máximo é obtido quando o ângulo de lançamento vale 45^0, como mostra a terceira curva da figura anterior.

Uma análise mais realista do movimento dos projéteis deverá levar em conta o seu atrito com o ar. Essa força de atrito é considerada como uma função da velocidade. Num caso mais simples, se a força de atrito for considerada proporcional à velocidade de deslocamento, nós podemos avaliar os seus efeitos no movimento dos projéteis no gráfico a seguir.

Movimento circular e uniforme

Se um corpo está se movimentando em círculos com velocidade constante em módulo, ele necessariamente estará sob a ação de uma força. Essa força $\vec{F}$ pode ter as mais diversas origens: gravitacional, elétrica, magnética, e etc. Mas algumas grandezas ligadas a esse movimento estão relacionadas do seguinte modo:

$$F = m\,a \quad onde \quad a = \frac{v^2}{R}$$



onde m é a massa do corpo, R é o raio da órbita e v é a sua velocidade. A velocidade pode ser definida como:

$$v = \frac{2\pi R}{T} = 2\pi\, f\, R = w\, R$$

onde T é o período, f é a frequência, e w é a frequência angular. A unidade de T é segundo, a unidade de f é 1/segundo = Hertz, e a unidade de w é radiano/segundo. Desse modo, a frequência angular tem como unidade natural o radiano/segundo, mas pode ser expressa em rotações/minuto:

$$1\,\frac{rad}{seg} = 1\,\frac{1}{2\pi}\,\frac{rot}{seg} = \frac{60}{2\pi}\,\frac{rot}{\min}$$

Por exemplo, qual deve ser a velocidade angular, em rotações por minuto, que um corpo deve girar para que a sua aceleração seja 50 vezes a aceleração da gravidade?

$$F = m\frac{v^2}{R} = 50\,m\,g \therefore \frac{v^2}{R} = 50\,g$$

mas, como vimos anteriormente $v = wR$, logo:

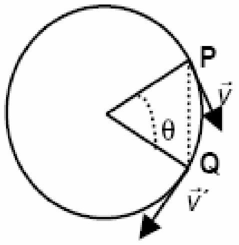
$$w^2 R = 50\,g \;\therefore\; w = \sqrt{\frac{50\,g}{R}}\,rad\,/\,seg$$

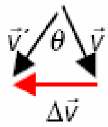
e finalizando:

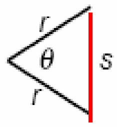
$$w = \frac{60}{2\pi}\sqrt{\frac{50\,g}{R}}\;rot\,/\min$$

onde g = 9,8 m/s^2 e R é o raio da órbita do corpo, ou o raio de centrifugação.

Para deduzir a equação da aceleração usada inicialmente, vamos considerar que num dado instante o corpo está no ponto P com velocidade $\vec{v}$ e que um intervalo de tempo Δt posterior esteja no ponto Q com velocidade seja $\vec{v}'$, de modo que essas duas velocidades tenham o mesmo módulo v.







A variação do vetor velocidade é dado por $\Delta\vec{v} = \vec{v}' - \vec{v}$, e vamos considerar como θ o ângulo formado pelos vetores $\vec{v}$ e $\vec{v}'$. Esse triângulo formado pelos vetores mencionados é isósceles já que os vetores $\vec{v}$ e $\vec{v}'$ têm mesmo módulo. Podemos definir um outro triângulo isósceles formado pela reta que une o centro do triângulo ao ponto P, pela reta que une o centro deste mesmo triângulo ao ponto Q e pela corda s que une os pontos P e Q. Esses dois triângulos são equivalentes pois os lados iguais fazem entre si o mesmo ângulo θ.

A equivalência entre os triângulos é expressa pela equação:

$$\frac{\Delta v}{v} = \frac{s}{r}$$

A trajetória do corpo em movimento circular é, naturalmente, ao longo da curva, e não ao longo da corda s, mas para um intervalo de tempo Δt pequeno, podemos aproximar a corda pela curva. O comprimento da curva a considerar é o espaço percorrido pelo corpo com velocidade constante, ou seja :

$$curva = v\,\Delta t$$

logo

$$corda = s \approx v\,\Delta t$$

portanto

$$\frac{\Delta v}{v} \approx \frac{v\,\Delta t}{r} \quad \therefore \quad \frac{\Delta v}{\Delta t} \approx \frac{v^2}{r}$$

No limite quando $\Delta t \to 0$ a aproximação da corda pela curva torna-se uma igualdade:

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v^2}{r}$$

Vale a pena enfatizar que a direção da aceleração é perpendicular ao vetor velocidade. Deve-se notar, portanto, que não é necessário existir movimento na direção da aceleração.

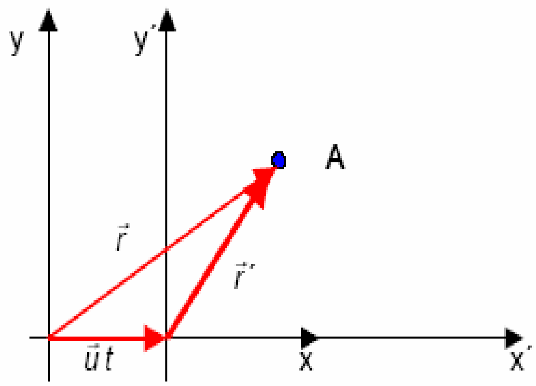
Movimento relativo

Os resultados da observação de um evento dependem do referencial usado pelo observador. Um acontecimento que ocorre no interior de um vagão de um trem tem uma aparência para observadores fixos no interior desse trem e uma outra aparência diferente para observadores fixos nos trilhos.

Vamos considerar dois referenciais S e S', considerando que S' move-se com velocidade constante $\vec{u}$ em relação a S.

Um evento que é localizado no referencial S pelo vetor posição $\vec{r}$, será localizado no referencial S' pelo vetor posição $\vec{r}'$ é esses dois vetores estão relacionados do seguinte modo:

$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{u}\,t$$



A velocidade com que um dado corpo se move é medida de maneira diferente por cada um desses referenciais.

Se para um observador no referencial S a velocidade é $\vec{v}$, para um outro observador no referencial S' a velocidade é $\vec{v}'$. Encontramos a maneira como essas velocidades estão relacionadas derivando a relação entre os vetores posição:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}'}{dt} + \vec{u} \quad \therefore \quad \vec{v} = \vec{v}' + \vec{u}$$

Solução de alguns problemas

Capítulo 4 - Halliday, Resnick e Walker - **Edição antiga**	
"19"	Um malabarista consegue manter simultaneamente cinco bolas no ar, todas atingindo uma altura máxima de $3m$. Encontre o intervalo de tempo entre duas bolas que chegam às suas mãos. Considere que os intervalos são os mesmos para todas as bolas.

Vamos considerar t o tempo necessário para que uma bola atinja a altura máxima de $h = 3m$. Logo $T = 2t$ é o tempo que cada bola permanece no ar até cair de volta nas mãos do malabarista.

Se tivéssemos apenas duas bolas, jogaríamos a primeira bola e após $T/2$ jogaríamos a segunda bola.

Como temos cinco bolas, jogaríamos a primeira, após $T/5$ jogaríamos a segunda, após $T/5$ jogaríamos a terceira, após $T/5$ jogaríamos a quarta e finalmente após T/5 jogaríamos a quinta bola. A seguir pegaríamos a primeira que permaneceu $5T/5$ no ar. Vamos chamar de Δt o intervalo entre a chegada de duas bolas, logo:

$$\Delta t = \frac{T}{5} = \frac{2t}{5}$$

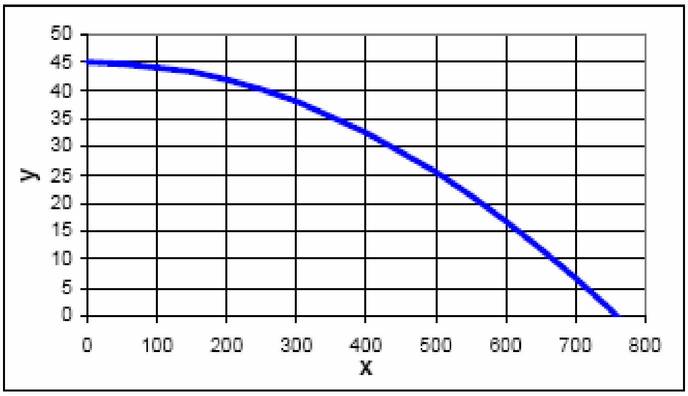
Considerando que o tempo de descida é o mesmo que o de subida, soltando uma da bolas ela terá um movimento tal que:

$$h = \frac{gt^2}{2} \quad \therefore \quad t = \sqrt{\frac{2h}{g}} \quad \Rightarrow \quad \Delta t = \frac{2}{5}\sqrt{\frac{2h}{g}} = 0{,}31s$$

Capítulo 4 - Halliday, Resnick e Walker - 4ª. edição	
22	Um projétil é atirado horizontalmente de uma arma que está $45m$ acima de um solo plano. A velocidade na saída do cano é 250m/s .

a) Por quanto tempo o projétil permanece no ar?

$h = 45m$
$v_{0x} = 250m/s$
$v_{0y} = 0$



$$y - y_0 = v_{0y}t - \frac{gt^2}{2}$$

ou seja:

$$-h = -\frac{gt^2}{2}$$

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = 3{,}03s$$

b) A que distância da arma, na horizontal, ele cai ao solo?

$$d = v_{0x}t = v_{0x}\sqrt{\frac{2h}{g}} = 757{,}5m$$

c) Qual o módulo da componente vertical da velocidade, no instante em que atinge o solo?

$$v_y = v_{0y} - gt = - gt = - 10.3{,}03 = -30{,}3m/s$$

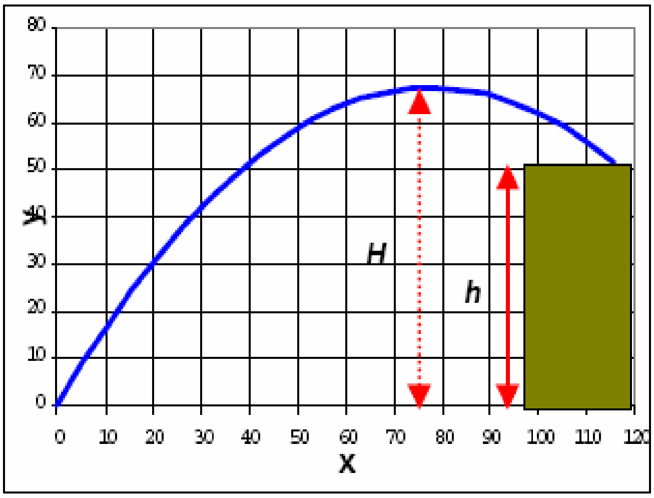
$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 251{,}82m/s$$

Capítulo 4 - Halliday, Resnick e Walker - 4ª. edição	
30	Uma pedra é lançada para o alto de um penhasco de altura h, com uma velocidade inicial de $42m/s$ e uma ângulo de 60^0, acima da horizontal. A pedra cai $5{,}5s$ após o lançamento. Calcule:

a) Calcule a altura h do penhasco.

$v_0 = 42m/s$
$\theta_0 = 60^0$
$t = 5{,}5s$

$v_{0y} = v_0\, sen60^0 = 36{,}37m/s$
$v_{0x} = v_0 \cos 60^0 = 21m/s$



$$y - y_0 = v_{0y}t - \frac{gt^2}{2}$$

ou seja:

$$h - 0 = v_{0y}t - \frac{gt^2}{2}$$

Usando os valores das variáveis, encontramos a altura do penhasco:

$$h = 51{,}81m$$

b) A velocidade da pedra imediatamente antes do impacto no penhasco.

$$v_y = v_{0y} - gt \quad \therefore \quad v_y = -17{,}53m/s$$

$$v_x = v_{0x} = 21m/s$$

$$\vec{v} = \left(21\hat{i} - 17{,}53\,\hat{j}\right)m/s$$

c) A altura máxima H acima do nível do solo.

Na posição da altura máxima a componente vertical da velocidade será nula:

$$v_{yH}^2 = v_{0y}^2 - 2gH = 0 \quad \Rightarrow \quad H = \frac{v_{0y}^2}{2g} = 67{,}48m$$

Poderíamos ainda calcular quanto tempo T foi necessário para o projétil chegar até a altura máxima e qual o valor da componente x_H:

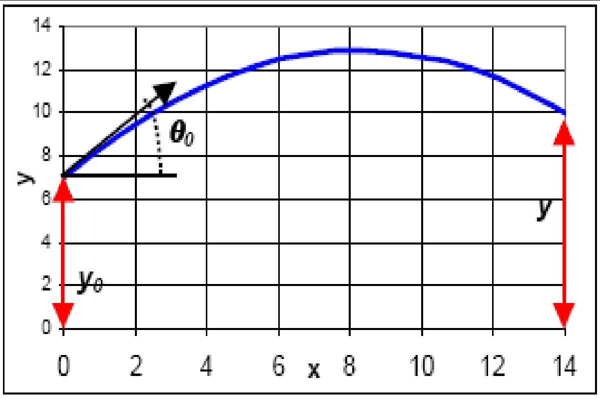
$$v_{Hy} = v_{0y} - gT = 0 \quad \Rightarrow \quad T = \frac{v_{0y}}{g} = 3{,}71s$$

$$x_H = v_{0x}\,T = 77{,}91m$$

Capítulo 4 - Halliday, Resnick e Walker - 4ª. edição

41

Com que velocidade inicial um jogador de basquete deve lançar a bola, num ângulo de $\theta_0 = 55^0$ acima da horizontal, para fazer a cesta, conforme a figura ao lado?



$\theta_0 = 55^0$
$y_0 = 7pés = 2{,}1m$
$y = 10pés = 3\ m$
$x_0 = 0$
$x = 14pés = 4{,}26m$

$$\begin{cases} x - x_0 = v_{0x}t \\ y - y_0 = v_{0y}t - \dfrac{gt^2}{2} \\ v_y = v_{0y} - gt \\ v_y^2 = v_{0y}^2 - 2g(y - y_0) \end{cases}$$

Da primeira equação da esquerda encontramos que $t = x / v_{0x}$, e aplicamos esse resultado na segunda equação:

$$y - y_0 = v_{0y}\left(\frac{x}{v_{0x}}\right) - \frac{g}{2}\left(\frac{x}{v_{0x}}\right)^2 = x\frac{v_0 \operatorname{sen}\theta_0}{v_0\cos\theta_0} - \frac{g}{2}\frac{x^2}{v_0^2\cos^2\theta_0}$$

ou seja:

$$v_0^2 = \frac{gx^2}{2\cos^2\theta_0\left[x\tan\theta_0 - (y - y_0)\right]} = 52,17$$

$$v_0 = 7,22m/s$$

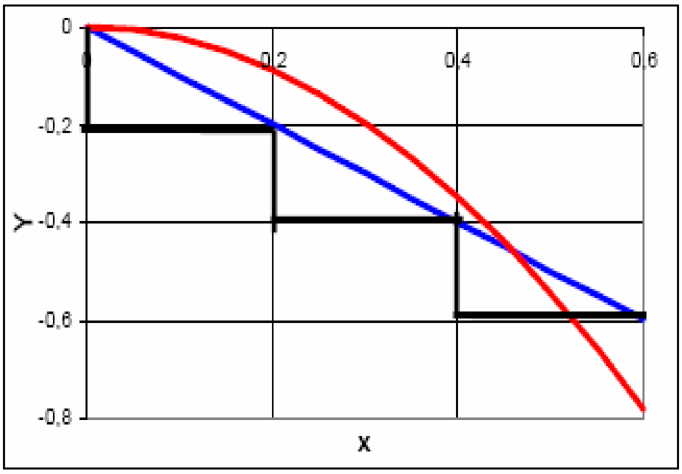
Capítulo 4 - Halliday, Resnick e Walker - 4ª. edição	
47	Uma bola rola, horizontalmente, do alto de uma escadaria com velocidade inicial de *1,5m/s* . Os degraus têm *20cm* de altura por *20cm* de largura. Em qual degrau a bola bate primeiro?

$h = d = 0,2m$

$v_{0x} = 1,5m/s$

$\theta_0 = 0^0$

$v_{0y} = 0$



$$y_{reta} = -x$$

$$y_{bola} = (\tan\theta_0)x - \frac{g}{2(v_0\cos\theta_0)^2}x^2$$

$$y_{bola} = -\left(\frac{g}{2v_0^2}\right)x^2$$

Nós iremos determinar o degrau onde a bola vai bater primeiro, encontrando o ponto onde a reta cruza com a parábola, num ponto x_E, onde:

$$-x_E = -\left(\frac{g}{2v_0^2}\right)x_E^2 \quad \text{ou seja:} \quad x_E = \frac{2v_0^2}{g} = 0,45m$$

Essa distância x_E será equivalente ao n-ésimo degrau, onde:

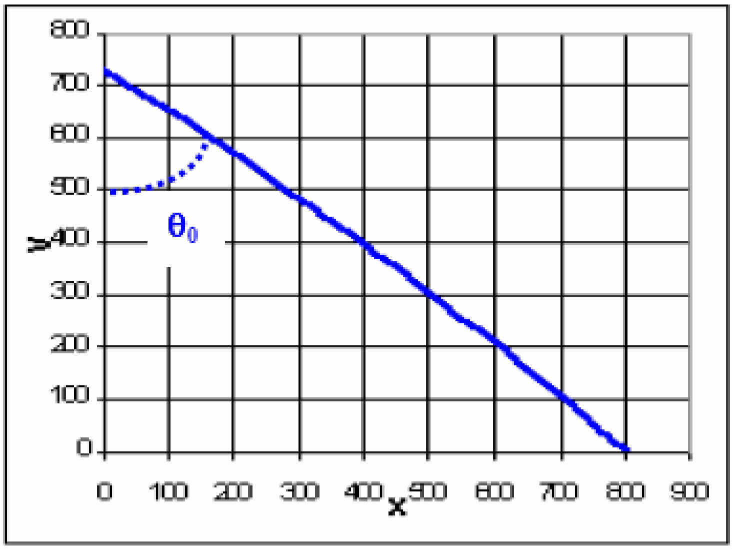
$$\frac{2v_0^2}{g} = nh \quad \therefore \quad n = \frac{2v_0^2}{gh} = 2,29 \Rightarrow 3^0 \text{ degrau}$$

Capítulo 4 - Halliday, Resnick e Walker - 4ª. edição	
49	Um avião mergulhando num ângulo de 53^0 com a vertical a uma altitude de $730m$ lança um projétil, que bate no solo $5s$ depois de ser lançado.

a) Qual a velocidade do avião?

$$v_{0y}t = \frac{gt^2}{2} - h = (-v_0 \cos\theta_0)t$$

$$v_0 = \frac{\frac{h}{t} - \frac{g\,t}{2}}{\cos\theta_0} = 201{,}88m/s$$



b) Que distância o projétil percorreu, horizontalmente, durante o seu vôo?

$$d = v_{0x}t = v_0\,t\,\mathrm{sen}\theta_0 = 806{,}14$$

c) Quais eram as componentes horizontal e vertical de sua velocidade no instante em que caiu no solo?

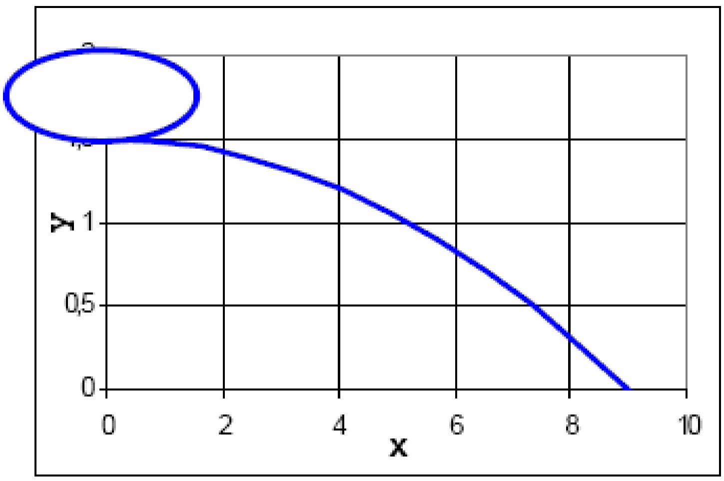
$$v_x = v_{0x} = v_0\,\mathrm{sen}\theta_0 = 161{,}22m/s$$

$$v_y = v_{0y} - gt = -v_0\cos\theta_0 - gt = -121{,}49 - 49{,}00 = 170{,}49m/s$$

Capítulo 4 - Halliday, Resnick e Walker - 4ª. edição	
72	Uma pedra, presa a um cordão de $1{,}5m$ de comprimento, é girada por um menino, fazendo um círculo horizontal a $2m$ acima do solo. Quando o cordão arrebenta, a pedra é lançada horizontalmente, caindo ao solo 10m adiante. Qual era a aceleração centrípeta da pedra enquanto estava em movimento circular?

$y_0 = h = 1{,}5m$
$y = 0$
$r = 1m$
$x_0 = 0$
$x = d = 9m$

$$\begin{cases} x - x_0 = v_{0x}t \\ y - y_0 = v_{0y}t - \dfrac{gt^2}{2} \\ v_y = v_{0y} - gt \\ v_y^2 = v_{0y}^2 - 2g(y - y_0) \end{cases}$$



Usando o conjunto de equações acima para esses problema, encontramos a velocidade de lançamento da pedra:

$$\begin{cases} d = v_{0x}t \\ h = \dfrac{gt^2}{2} \end{cases} \Rightarrow \quad t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \frac{d}{v_{0x}} \quad \therefore \quad v_{0x} = d\sqrt{\frac{g}{2h}} = 16,26m/s$$

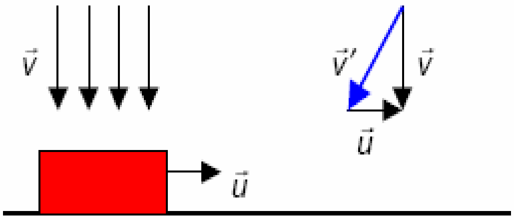
Mas enquanto a pedra estava presa, ela descrevia um movimento circular e uniforme com aceleração dada por:

$$a = \frac{v_{0x}^2}{r} = \frac{gd^2}{2rh} = 264,38m/s^2 = 26,97g$$

Capítulo 4 - Halliday, Resnick e Walker - 4ª. edição

80 A neve cai, verticalmente, com uma velocidade constante de 8m/s . O motorista de um carro, viajando em linha reta numa estrada com uma velocidade de 50km/h , vê os flocos de neve caírem formando um ângulo com a vertical. Qual o valor deste ângulo?

$v = 8m/s$
$u = 50km/h = 13,89m/s$



$$\begin{cases} \vec{r} = \vec{r}' + \vec{u}\,t \\ \vec{v} = \vec{v}' + \vec{u} \end{cases}$$

Onde $\vec{v}$ é a velocidade da neve caindo observada em um referencial fixo na estrada, $\vec{u}$ é a velocidade do referencial móvel em relação à estrada e $\vec{v}'$ é a velocidade da neve caindo observada pelo referencial móvel. Em termos vetoriais, teremos:

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{u}$$

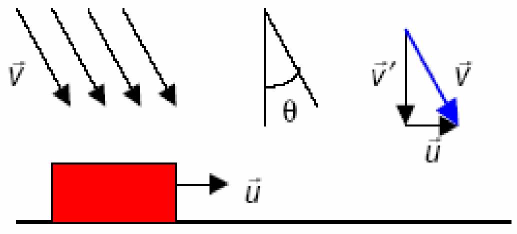
Como neste caso específico os vetores $\vec{v}$ e $\vec{u}$ formam um ângulo reto:

$$v' = \sqrt{v^2 + u^2} = 16,02m/s$$

$$\tan\theta = \frac{u}{v} = 1,73 \quad \therefore \quad \theta = 60^0$$

Capítulo 4 - Halliday, Resnick e Walker - 4ª. edição	
83	Um trem viaja em direção ao sul a 30m/s (em relação ao solo), sob uma chuva que está caindo, também em direção ao sul, sob a ação do vento. As trajetórias das gotas de chuva formam um ângulo de 22^0 com a vertical, conforme registrado por um observador parado no solo. Entretanto, um observador no trem vê as gotas caírem exatamente na vertical. Determine a velocidade da chuva em relação ao solo.

$\theta = 22^0$
$u = 30m/s$



$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{u}$$

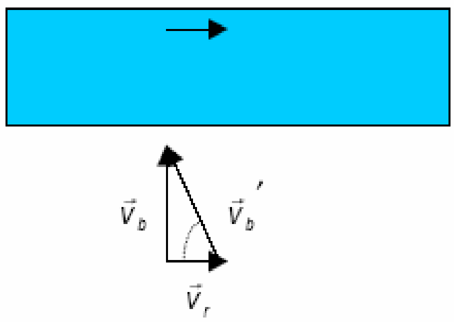
logo

$$u = v\,\text{sen}\theta \quad \therefore \quad v = \frac{u}{\text{sen}\theta} = 80{,}08m/s$$

Capítulo 4 - Halliday, Resnick e Walker - 4ª. edição	
88	Uma mulher pode remar um bote a $6{,}4km/h$, em água parada.

a) Se ela atravessar um rio com uma correnteza de $3{,}2km/h$, em que direção deve aprumar o bote, para alcançar o local diretamente oposto ao seu ponto de partida?

$v_b' = 6{,}4km/h$
$v_r = 3{,}2km/h$



$$\cos\theta = \frac{v_r}{v_b'} = \frac{3{,}2}{6{,}4} = 0{,}5 \quad \therefore \quad \theta = 60^0$$

b) Se o rio tiver $6{,}4km$ de largura, quanto tempo levará para atravessá-lo?

$l = 6{,}4km$

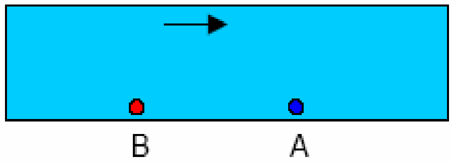
$$v_b = v_b' \,\text{sen}\theta$$

$$l = v_b\, t$$

$$t = \frac{l}{v_b} = \frac{l}{v_b'\,\text{sen}\,\theta} = \frac{6{,}4}{6{,}4 . \text{sen}\,60^0} = 1{,}15h = 1h\ 09min$$

c) Suponha que, em vez de atravessar o rio, ela reme $3{,}2km$ rio abaixo, e depois volte ao ponto de partida. Qual o tempo gasto nesse percurso?

$d = 3,2km$



As velocidades contra a correnteza V_{ab} e a favor da correnteza V_{ba} são definidas como:

$V_{ab} = v_b' - v_r$
$V_{ba} = v_b' + v_r$

Como os movimentos têm velocidades constantes:

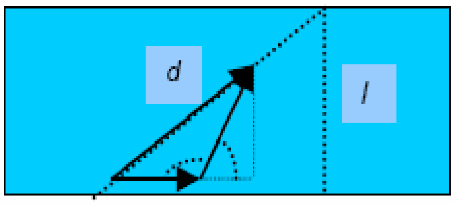
$$d = V_{ab}\, t_{ab} \quad e \quad d = V_{ba}\, t_{ba} \quad \text{onde} \quad t = t_{ab} + t_{ba}$$

$$t = \frac{d}{V_{ab}} + \frac{d}{V_{ba}} = \frac{d(V_{ab} + V_{ba})}{V_{ab}V_{ba}} = \frac{2v_b^{'2}d}{v_b^{'2} - v_r^2} = 1,34h$$

d) Quanto tempo levaria se tivesse remado $3,2km$ rio acima e, depois, voltasse ao ponto de partida?

O mesmo do item anterior

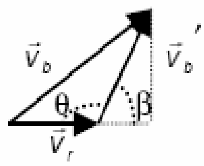
e) Em que direção deveria aprumar o barco, se quisesse atravessar o rio no mais curto intervalo de tempo possível? Qual seria esse tempo?



$l = 6,4km$
$v_b' = 6,4km/h$
$v_r = 3,2km/h$

$$d = v_b\, t$$

onde d é a distância a ser percorrida pelo barco na travessia do rio.



Por equivalência entre os triângulos, podemos mostrar que:

$$\frac{l}{v_b' \operatorname{sen}\beta} = \frac{d}{v_b} = t$$

Para calcular o extremo (mínimo, neste caso) do tempo em relação ao ângulo de inclinação do barco teremos:

$$\frac{dt}{d\beta} = -\frac{l}{v_b'}\frac{\cos\beta}{\operatorname{sen}^2\beta} = 0 \quad \Rightarrow \quad \beta_M = \frac{\pi}{2}$$

Lei de Newtom

Primeira Lei de Newton

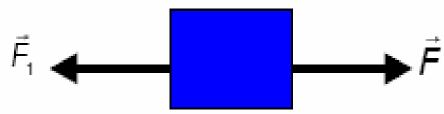
Antes da época de Galileu a maioria dos filósofos pensava que fosse necessária alguma influência ou força para manter um corpo em movimento. Supunham que um corpo em repouso estivesse em seu estado natural. Acreditavam que para um corpo mover-se em linha reta com velocidade constante fosse necessário algum agente externo empurrando-o continuamente, caso contrário ele iria parar.

Foi difícil provar o contrário dada a necessidade de livrar o corpo de certas influências, como o atrito. Estudando o movimento de corpos em superfícies cada vez mais planas e lisas, Galileu afirmou ser necessária uma força para modificar a velocidade de um corpo mas nenhuma força é exigida para manter essa velocidade constante.

Newton enunciou que: *"Um corpo tende a permanecer em repouso ou em movimento retilíneo e uniforme, quando a resultante das forças que atuam sobre si for nula"*.

Sejam $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$ as forças que atuam num corpo. A resultante das forças $\vec{F}$ será a soma vetorial das forças que atuam nesse corpo:

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{F} = 0$$



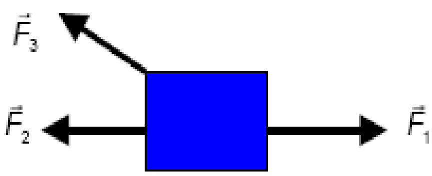
Quando a resultante for nula o corpo permanecerá em repouso ou se deslocará com movimento retilíneo e uniforme.

Segunda Lei de Newton

Newton enunciou que: *"A resultante das forças que atuam sobre um corpo é igual ao produto da sua massa pela aceleração com a qual ele irá se movimentar"*.

Sejam $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ e $\vec{F}_3$ as forças que atuam sobre um corpo de massa m . A resultante das forças $\vec{F}$ será a soma vetorial das forças que atuam nesse corpo, logo:

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \vec{F} = m\vec{a}$$



Terceira Lei de Newton

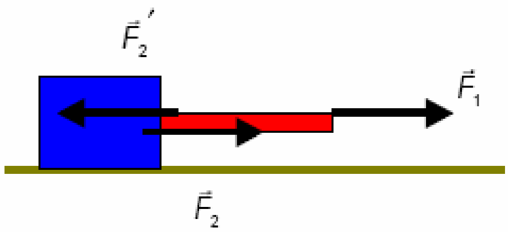
Uma força é apenas um aspecto da interação mútua entre dois corpos. Verifica-se experimentalmente que quando um corpo exerce uma força sobre outro, o segundo sempre exerce uma força no primeiro.

Newton enunciou que: *"Quando um corpo exerce uma força num segundo corpo, este último reagirá sobre o primeiro com uma força de mesma intensidade e sentido contrário"*.

Vamos considerar um corpo sobre uma superfície horizontal plana e lisa, e preso a esse corpo está uma vareta rígida.

Uma força $\vec{F}_1$ é aplicada na vareta, essa força se transmite até o corpo de modo que a vareta exerce uma força $\vec{F}_2$ sobre o corpo e esse corpo reage à ação da vareta exercendo sobre ela uma força $\vec{F}_2'$ com mesmo módulo que $\vec{F}_2$ mas com sentido contrário.

$\vec{F}_2$ e $\vec{F}_2'$ são forças de ação e reação.



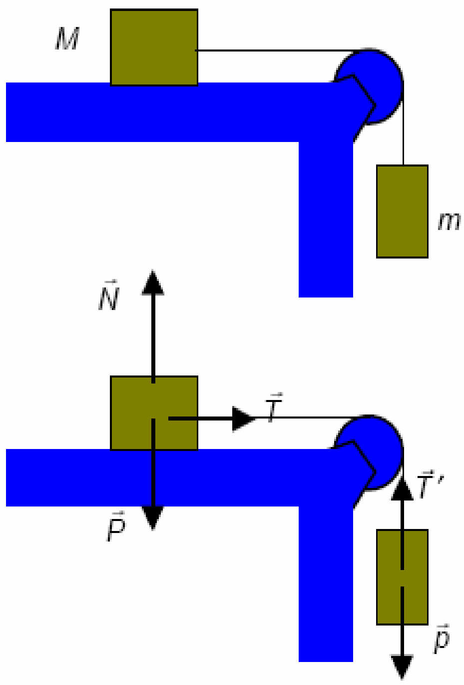
Aplicações das Leis de Newton

Exemplo 5-6 Capítulo 5 - Halliday, Resnick e Walker - 4ª. edição

A figura ao lado mostra um bloco (o bloco deslizante) de massa $M = 3,3kg$. Ele se move livremente sem atrito, sobre uma fina camada de ar na superfície horizontal de uma mesa.
O bloco deslizante está preso a uma corda que passa em volta de uma polia de massa e atritos desprezíveis e tem, na outra extremidade, um segundo bloco (o bloco suspenso) de massa $m = 2,1kg$. O bloco suspenso, ao cair, acelera o bloco deslizante para a direita.
Determine:

a) A aceleração do bloco deslizante.

Usando a segunda Lei de Newton, para cada um dos corpos, teremos



para o corpo deslizante:

$$\vec{N} + \vec{T} + \vec{P} = M\vec{A}$$

e para o corpo suspenso:

$$\vec{T}' + \vec{p} = m\vec{a}$$

Como os dois blocos estão presos por uma corda suposta inextensível e de massa desprezível, eles terão (em módulo) as mesmas velocidades e acelerações.

$$A = a$$

Além disso, a tensão se transmitirá integralmente através da corda:

$$T = T'$$

Para o corpo deslizante a Lei de Newton toma a forma escalar:

$$N - P = 0$$

$$T = Ma$$

e para o segundo corpo:

$$p - T = ma$$

Somando as duas últimas equações, encontramos:

$$p = mg = (M + m)\, a$$

ou seja:

$$a = \left(\frac{m}{m+M}\right)g = 3{,}81 m/s^2$$

b) A aceleração do bloco suspenso

Como já foi mencionado, os dois bloco têm a mesma aceleração, em módulo:

$$a = \left(\frac{m}{m+M}\right)g = 3{,}81 m/s^2$$

c) A tensão na corda

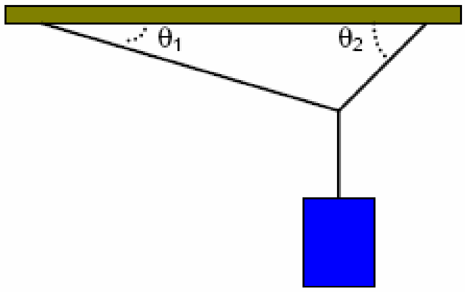
Foi mostrado que:

$$T = Ma$$

logo:

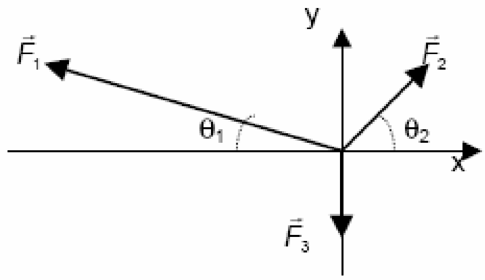
$$T = \left(\frac{mM}{m+M}\right)g = 12{,}57 N$$

Exemplo 5-8 Capítulo 5 - Halliday, Resnick e Walker - 4ª. edição



A figura ao lado mostra um bloco de massa m = 15kg suspenso por três cordas. Quais as tensões nas cordas?

$\theta_1 = 28^0$
$\theta_2 = 47^0$



O peso P do bloco é transmitido pela corda para o nó, de modo que $F_3 = P$.

Como o nó está em repouso, a resultante das forças que atuam nele é nula.
Como a resultante é nula, obviamente a soma das componentes vertical e horizontal das forças também será nula.

$$F_1 \, sen\theta_1 + F_2 \, sen\theta_2 - F_3 = 0$$

$$- F_1 \cos\theta_1 + F_2 \cos\theta_2 = 0$$

Da última equação temos:

$$F_2 = F_1 \frac{\cos\theta_1}{\cos\theta_2}$$

e usando este resultado na primeira, temos:

$$F_3 = F_1\left[\operatorname{sen}\theta_1 + \frac{\cos\theta_1}{\cos\theta_2}\operatorname{sen}\theta_2\right] = F_1\left[\frac{\operatorname{sen}\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\operatorname{sen}\theta_2}{\cos\theta_2}\right] = F_1\frac{\operatorname{sen}(\theta_1+\theta_2)}{\cos\theta_2}$$

ou seja:

$$F_1 = F_3\frac{\cos\theta_2}{\operatorname{sen}(\theta_1+\theta_2)} = 103{,}79N$$

e

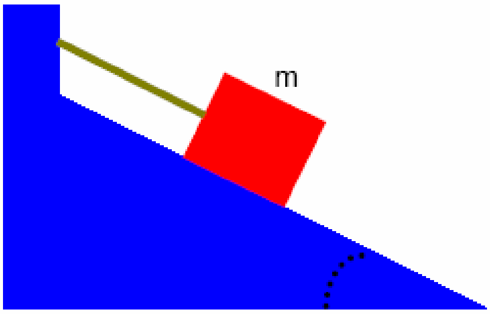
$$F_2 = F_3\frac{\cos\theta_1}{\operatorname{sen}(\theta_1+\theta_2)} = 134{,}37N$$

Exemplo 5-9 Capítulo 5 - Halliday, Resnick e Walker - 4ª. edição

A figura ao lado mostra um bloco de massa $m = 15kg$ seguro por uma corda, sobre um plano inclinado sem atrito.

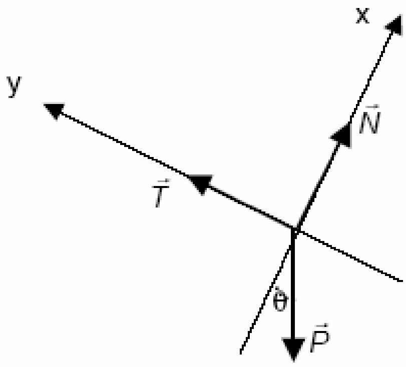
Se $\theta = 27^0$, qual a tensão na corda?

Qual força é exercida pelo plano sobre o bloco?



$$\vec{N} + \vec{P} + \vec{T} = 0$$

$$N - P\cos\theta = 0$$
$$T - P\,sen\theta = 0$$



A força exercida pelo plano sobre o bloco é a força normal N:

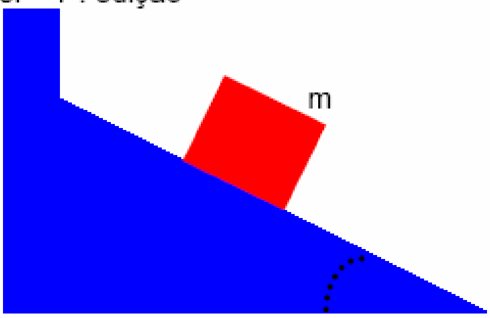
$$T = P\,sen\theta = 9{,}8 \,.\, 15 \,.\, sen27^0$$
$$T = 66{,}73Newtons$$

$$N = P\cos\theta = 9{,}8 \,.\, 15 \,.\, \cos 27^0$$
$$N = 130{,}97Newtons$$

Exemplo 5-10 Capítulo 5 - Halliday, Resnick e Walker - 4ª. edição

A figura ao lado mostra um bloco de massa $m = 15kg$, sobre um plano inclinado sem atrito.

Se $\theta = 27^0$, qual a aceleração do bloco?



$$\vec{N} + \vec{P} = m\vec{a}$$

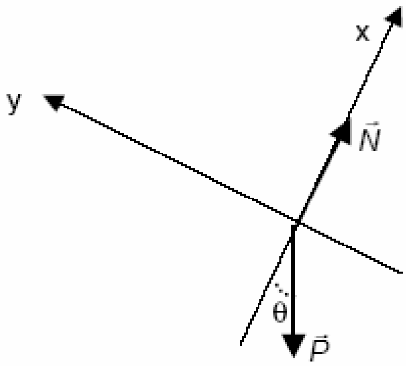
$$P\,sen\theta = ma$$
$$N - P\cos\theta = 0$$

logo:

$$a = g\,sen\theta$$

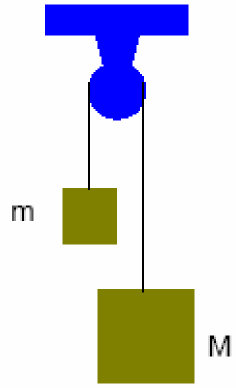
$$a = 9{,}8 \,.\, sen27^0$$

$$a = 4{,}45m/s^2$$



Exemplo 5-11 Capítulo 5 - Halliday, Resnick e Walker - 4ª. edição

A figura ao lado mostra dois blocos ligados por uma corda, que passa por uma polia de massa e atritos desprezíveis. Fazendo $m = 1,3kg$ e $M = 2,8kg$, determine a tensão na corda e o módulo da aceleração (simultânea) dos dois blocos.



Para o corpo da esquerda, temos a equação:

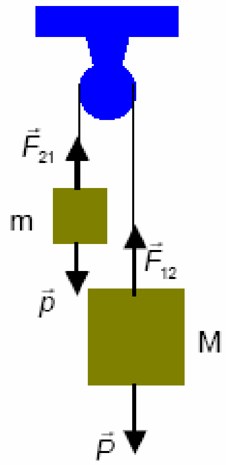
$$\vec{F}_{21} + \vec{p} = m\vec{a} \quad \Rightarrow \quad F_{21} - p = m\,a$$

e para o corpo da direita:

$$\vec{F}_{12} + \vec{P} = M\vec{A} \quad \Rightarrow \quad P - F_{12} = MA$$

A corda é considerada inextensível portanto os corpos terão a mesma aceleração (em módulo).

$$a = A$$



A corda também é considerada de massa desprezível, logo:

$$F_{12} = F_{21} = F$$

As equações terão a forma:

$$F - p = ma$$

$$P - F = Ma$$

Somando as equações:

$$P - p = (M + m)\,a$$

Como $p = mg$ e $P = Mg$

$$a = \left(\frac{M-m}{M+m}\right)g = 3,41m/s^2$$

De uma equação anterior, temos:

$$F = p + ma \quad logo \quad F = mg + m\left(\frac{M-m}{M+m}\right)g = mg\left[\frac{(M+m)+(M-m)}{M+m}\right]$$

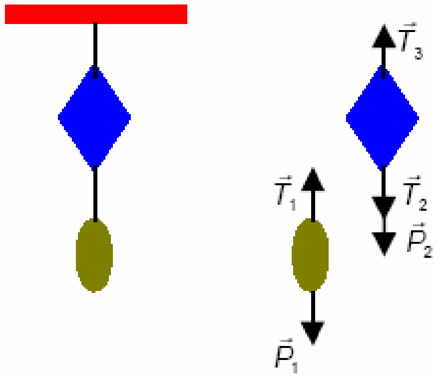
$$F = \left(\frac{2mM}{M+m}\right)g = 16,59N$$

Solução de alguns problemas

Capítulo 5 - Halliday, Resnick e Walker - 4ª. edição	
16	Um móbile grosseiro pende de um teto com duas peças metálicas presas por uma corda de massa desprezível, conforme a figura. São dada as massas das peças.

a) Qual a tensão na corda inferior?

$m_1 = 3,5kg$
$m_2 = 4,5kg$



Como o móbile está em repouso, é nula a resultante das forças que atuam em cada parte dele. Considerando a parte inferior do móbile, teremos:

$$\vec{T}_1 + \vec{P}_1 = 0$$

ou seja:

$$T_1 - P_1 = 0 \quad \therefore \quad T_1 = P_1 = m_1 g$$

$$T_1 = 34,3N$$

b) Qual a tensão na corda superior?

Considerando a parte superior do móbile:

$$\vec{T}_3 + \vec{P}_2 + \vec{T}_2 = 0$$

ou seja:

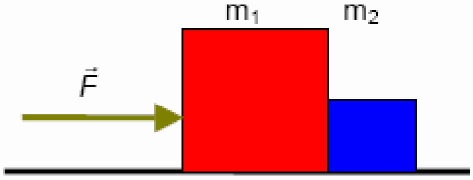
$$T_3 - P_2 - T_2 = 0 \quad \therefore \quad T_3 = P_2 + T_2$$

mas $T_2 = T_1 = P_1$

$$T_3 = P_1 + P_2 = (m_1 + m_2)g$$

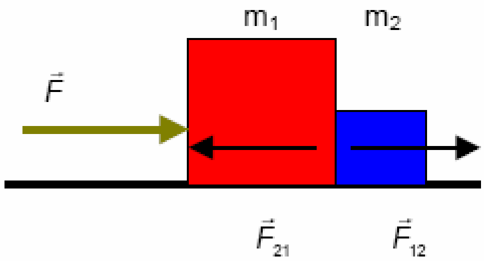
$$T_3 = 78,4N$$

Capítulo 5 - Halliday, Resnick e Walker - 4ª. edição	
40	Dois blocos estão em contato sobre uma mesa sem atrito. Uma força horizontal é aplicada a um dos blocos como mostrado na figura ao lado.



a) Se $m_1 = 2,3kg$, $m_2 = 1,2kg$ e $F = 3,2N$, determine a força de contato entre os dois blocos.

Os blocos 1 e 2 movem-se como um conjunto com aceleração a e a resultante das forças que atuam nesse conjunto é a força externa F, que obedece à equação:



$$\vec{F} = (m_1 + m_2)\vec{a}$$

No entanto, podemos analisar os corpos como se cada fosse uma entidade independente. Ambos estão se movendo com aceleração a, logo:

$$\begin{cases} \vec{F}_{12} = m_2\vec{a} & \Rightarrow \quad F_{12} = m_2 a \\ \vec{F} + \vec{F}_{21} = m_1\vec{a} & \Rightarrow \quad F - F_{21} = m_1 a \end{cases}$$

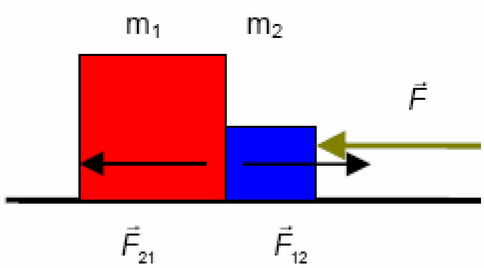
As forças $\vec{F}_{21}$ e $\vec{F}_{12}$ são ação e reação, logo $\vec{F}_{21}$ = - $\vec{F}_{12}$, ou ainda: $F_{12} = F_{21}$. Temos então que:

$$a = \frac{F}{m_1 + m_2} = 0{,}91 m/s^2 \text{ , logo } \quad F_{12} = m_2\left(\frac{F}{m_1 + m_2}\right) = 1{,}09N$$

b) Mostre que se a mesma força F for aplicada em m_2 ao invés de m_1, a força de contato é 2,1N, que não é o mesmo valor obtido em (a). Explique a diferença.

Neste caso temos:

$$\begin{cases} \vec{F}_{21} = m_1\vec{a} & \Rightarrow \quad F_{21} = m_1 a \\ \vec{F} + \vec{F}_{12} = m_2\vec{a} & \Rightarrow \quad F - F_{12} = m_2 a \end{cases}$$



Encontramos que:

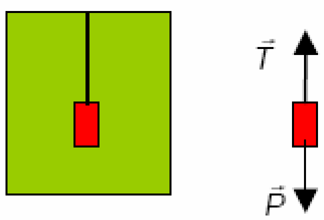
$$a = \frac{F}{m_1 + m_2} = 0{,}91 m/s^2 \text{ , logo } \quad F_{21} = m_1\left(\frac{F}{m_1 + m_2}\right) = 2{,}10N$$

Capítulo 5 - Halliday, Resnick e Walker - 4ª. edição

45 Um objeto está pendurado numa balança de mola presa a um teto de um elevador. A balança marca $65N$, quando o elevador ainda está parado.

a) Qual a indicação na balança, quando o elevador estiver subindo com uma velocidade constante de $7{,}6m/s$?

Vamos considerar T a indicação da balança, e esse é o valor da força vertical que suspende o objeto. Temos então duas forças atuando no objeto: o seu peso e a tensão T. Quando o elevador estiver em repouso ou com velocidade constante, a resultante das forças será nula.



Nessa situação, a balança apresentará uma leitura T_1, que é a mesma de quando o elevador estava parado, e as forças que atuam no objeto devem satisfazer à equação:

$$\vec{T}_1 + \vec{P} = 0 \quad \therefore \quad T_1 - P = 0 \quad \Rightarrow \quad P = T_1 = 65N$$

b) Qual a indicação na balança quando o elevador, subindo com uma velocidade de 7,6m/s, for desacelerado à razão de $2{,}4m/s^2$?

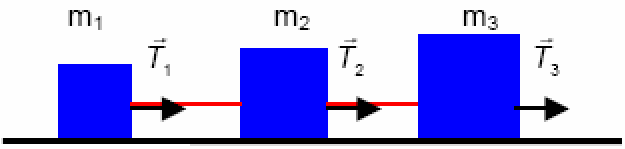
Neste caso, o objeto está acelerado, e portanto a equação tem a forma:

$$\vec{T}_2 + \vec{P} = m\vec{a} \quad \therefore \quad P - T_2 = ma \quad \Rightarrow \quad T_2 = P - ma$$

$$T_2 = P\left(1 - \frac{a}{g}\right) = 49N$$

Capítulo 5 - Halliday, Resnick e Walker - 4ª. edição

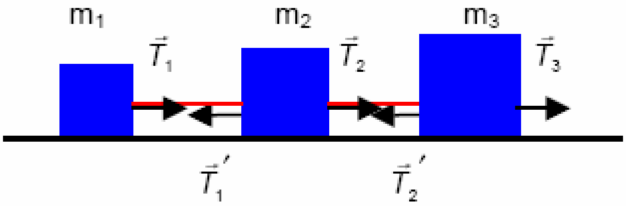
49 Três blocos estão conectados, como na figura ao lado, sobre uma mesa horizontal sem atrito, e puxados para a direita com uma força $T_3=65N$. Se $m_1=12kg$, $m_2=24kg$ e $m_3=31kg$, calcule:



a) A aceleração do sistema.

As forças horizontais que atuam nos corpos estão mostradas no desenho ao lado.

Como as cordas de conexão entre os blocos têm massas desprezíveis $T_1 = T_1'$ e $T_2 = T_2'$.



A resultante de forças que atua neste conjunto é T_3, logo:

$$\vec{T}_3 = (m_1 + m_2 + m_3)\vec{a} \quad \text{ou seja} \quad a = \frac{T_3}{m_1 + m_2 + m_3} = 0{,}97m/s^2$$

b) As tensões T_2 e T_3.

Para o corpo de massa m_1 temos:

$$T_1 = m_1 a = \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2 + m_3}\right) T_3 = 11{,}64N$$

Para o corpo de massa m_2 temos:

$$\vec{T}_2 + \vec{T}_1' = m_2\vec{a} \quad \Rightarrow \quad T_2 - T_1 = m_2 a \quad \therefore \quad T_2 = T_1 + m_2 a$$

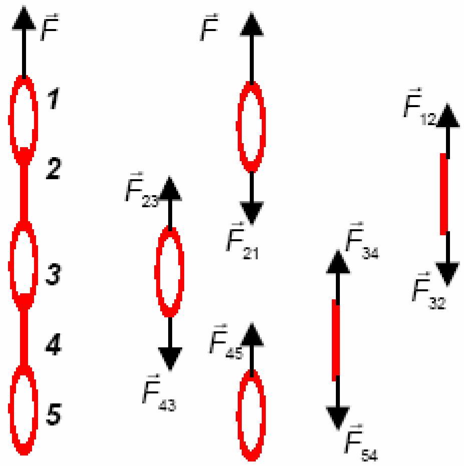
$$T_2 = \left(\frac{m_1}{m_1+m_2+m_3}\right)T_3 + m_2\left(\frac{T_3}{m_1+m_2+m_3}\right)$$

$$T_2 = \left(\frac{m_1+m_2}{m_1+m_2+m_3}\right)T_3 = 34{,}92N$$

Capítulo 5 - Halliday, Resnick e Walker - 4ª. edição	
57	Uma corrente formada por cinco elos, com massa de $0{,}100kg$ cada um, é levantada verticalmente com aceleração constante de $2{,}5m/s^2$, conforme a figura. Determine:

a) As forças que atuam entre os elos adjacentes.

No diagrama das forças que atuam na corrente não colocamos os pesos de cada elo.
Vamos analisar a equação que relaciona as forças atuantes em cada elo:



Elo 5:

$F_{45} - p = ma \quad \therefore \quad F_{45} = m(g+a) = 1{,}23N$

Elo 4:

$$F_{34} - F_{54} - p = ma\ ,$$

mas $F_{54} = F_{45}$, logo:

$$F_{34} = F_{45} + m(g+a) = 2m(g+a) = 2{,}46N$$

Elo 3:

$$F_{23} - F_{43} - p = ma\ ,\ mas\ \ F_{43} = F_{34}\text{, logo:}$$

$$F_{23} = F_{34} + m(g+a) = 3m(g+a) = 3{,}69N$$

Elo 2:

$$F_{12} - F_{32} - p = ma\ ,\ mas\ \ F_{32} = F_{23}\text{, logo:}$$

$$F_{12} = F_{23} + m(g+a) = 4m(g+a) = 4{,}92N$$

b) A força $\vec{F}$ exercida sobre o elo superior pela pessoa que levanta a corrente.
Elo 1:

$$F - F_{21} - p = ma\ ,\ mas\ \ F_{21} = F_{12}\ ,\ logo:$$

$$F = F_{12} + m(g+a) = 5m(g+a) = 6{,}15N$$

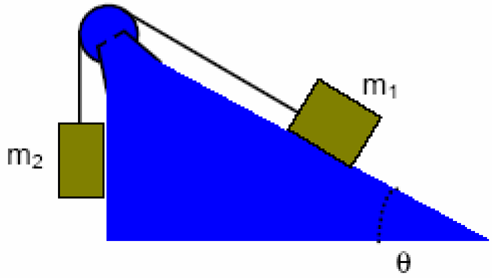
c) A força resultante que acelera cada elo.

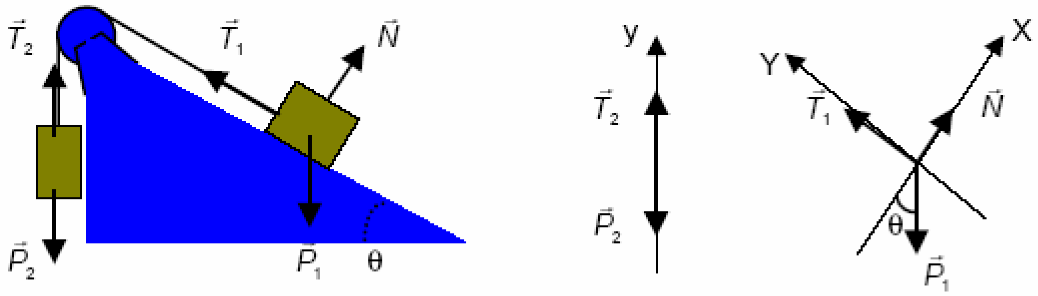
A força resultante sobre cada elo é igual a $ma = 0{,}25N$

Capítulo 5 - Halliday, Resnick e Walker - 4ª. edição

58 Um bloco de massa $m_1 = 3{,}70kg$ está sobre um plano com 30^0 de inclinação, sem atrito, preso por uma corda que passa por uma polia, de massa e atrito desprezíveis, e tem na outra extremidade um outro bloco de massa $m_2 = 2{,}30kg$, pendurado verticalmente, como mostra a figura. Quais são:

a) Os módulos das acelerações de cada bloco?





Aplicando a segunda Lei de Newton para os dois corpos, teremos:

$$\begin{cases} \vec{T}_1 + \vec{P}_1 + \vec{N} = m_1\vec{a}_1 \\ \vec{T}_2 + \vec{P}_2 = m_2\vec{a}_2 \end{cases}$$

Como os dois blocos estão conectados por uma corda inextensível, quando um deles se deslocar de uma distância Δs num intervalo de tempo Δt o outro se deslocará da mesma distância no mesmo intervalo de tempo, logo as suas acelerações serão as mesmas, em módulo. Ou seja:

$$a_1 = a_2 = a$$

Como a corda tem massa desprezível, podemos mostrar que as tensões são iguais, ou seja:

$$T_1 = T_2 = T$$

Vamos supor que o bloco de massa m_2 irá descer. Caso essa suposição não seja verdadeira a aceleração terá o sinal negativo. Para o primeiro bloco, temos as seguintes equações:

$$N - P_1 \cos\theta = 0$$

$$T - P_1 \, sen\theta = m_1 \, a$$

e para o segundo:

$$P_2 - T = m_2 a$$

Somando as duas últimas equações, encontramos:

$$P_2 - P_1 \, sen\theta = (m_1 + m_2) \, a$$

ou seja:

$$a = \left(\frac{m_2 - m_1 \, \text{sen}\theta}{m_2 + m_1} \right) g = 0{,}735 m/s^2$$

b) O sentido da aceleração de m_2 ?

Enquanto $m_2 - m_1 \, sen\theta > 0$ nós teremos o corpo de massa m_2 descendo, e quando a desigualdade for contrária ele subirá. Se tivermos uma igualdade, os dois corpos estarão em equilíbrio.

c) Qual a tensão na corda?

$$T = P_2 - m_2 a = m_2 g - m_2 \left(\frac{m_2 - m_1 \, \text{sen}\theta}{m_2 + m_1} \right) g$$

$$T = \left[\frac{m_1 m_2 (1 + \text{sen}\,\theta)}{m_1 + m_2} \right] g = 20{,}84N$$

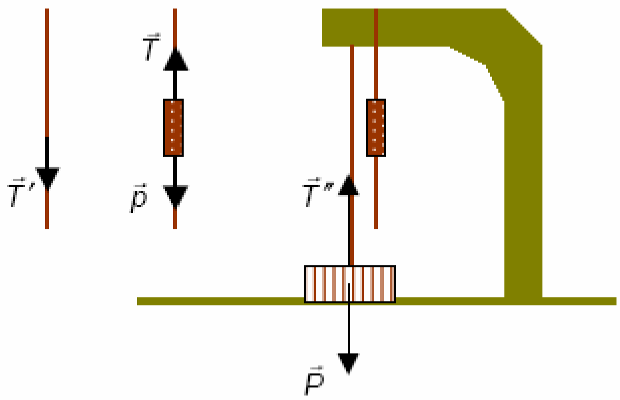
Capítulo 5 - Halliday, Resnick e Walker - 4ª. edição

63 Um macaco de $10kg$ sobe por uma corda de massa desprezível, que passa sobre o galho de uma árvore, sem atrito, e tem presa na outra extremidade uma caixa de $15kg$ que está no solo.

a) Qual o módulo da aceleração mínima que o macaco deve ter para levantar a caixa do solo?

$\vec{T}'$ é a força que o macaco faz na corda.

$\vec{T}$ e $\vec{T}'$ são ação e reação.



Aplicando a segunda Lei de Newton para o macaco:

$$\vec{T} + \vec{p} = m\vec{a} \quad \therefore \quad T - p = ma \quad \therefore \quad T = mg + ma$$

A aceleração mínima a_M que o macaco deverá subir pela corda será aquela tal que T'' é apenas igual ao peso do corpo P que está no chão, deixando-o com resultante nula. Desse modo:

$$T = P = mg + ma_M \quad \therefore \quad ma_M = Mg - mg$$

$$a_M = \left(\frac{M - m}{m}\right) g = 4{,}9 m/s^2$$

b) Se, após levantar a caixa, o macaco parar de subir e ficar agarrado à corda, qual será a sua aceleração?

Neste caso teremos uma máquina de Atwood, como já foi mostrado anteriormente, e o macaco subirá acelerado enquanto o corpo descerá. A aceleração de cada um será:

$$a = \left(\frac{M - m}{M + m}\right) g = 1{,}96 m/s^2 \quad ; \quad a < a_M$$

c) Qual será a tensão na corda?

$$\vec{T} + \vec{p} = m\vec{a} \quad \therefore \quad T - mg = ma$$

$$T = mg + m\left(\frac{M - m}{M + m}\right) g = mg\left(1 + \frac{M - m}{M + m}\right)$$

$$T = \left(\frac{2mM}{m + M}\right) g = 117{,}6 N$$

Capítulo 5 - Halliday, Resnick e Walker - 4ª. edição

70 Um balão de massa M, com ar quente, está descendo verticalmente com uma aceleração a para baixo. Que quantidade de massa deve ser atirada para fora do balão, para que ele suba com uma aceleração a (mesmo módulo e sentido oposto) ? Suponha que a força de subida devido ao ar (empuxo) não varie em função da massa (carga de estabilização) que ele perdeu.

A equação de movimento do balão **antes** que ele atire fora uma massa m , será:

$$\vec{E} + M\vec{g} = m\vec{a}$$

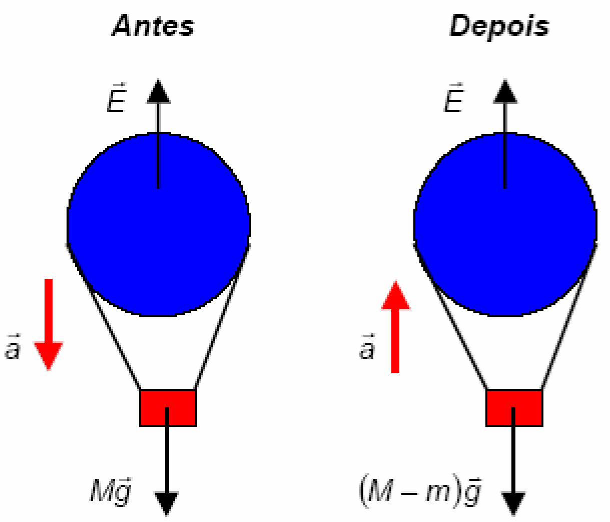
ou seja:

$$M\,g - E = M\,a$$

$$E = M\,(\,g - a\,)$$

A equação depois de atirar, será:

$$\vec{E} + (M - m)\vec{g} = (M - m)\vec{a}$$



ou seja:

$$E - (M - m) g = (M - m) a$$

$$E = (M - m) (g + a)$$

Temos então que:

$$E = M (g - a) = (M - m) (g + a)$$

De onde encontramos que:

$$m = \left(\frac{2a}{g + a} \right) M$$

Movimento circular e uniforme - Força centrípeta

Os corpos que se deslocam com movimento circular e uniforme têm em comum uma aceleração da mesma forma - a mesma equação, independente da força que causa este tipo de movimento.

Se o corpo tiver uma massa m e desenvolver uma velocidade v em um círculo de raio r, a sua aceleração centrípeta será:

$$a_c = \frac{v^2}{r}$$

e a força associada à essa aceleração terá a forma:

$$F_C = ma_c = m\frac{v^2}{r}$$

A força centrípeta não tem origem física, mas é uma característica dos corpos que se movimentam em trajetórias curvas.

Se a força de interação gravitacional mantiver um corpo de massa m_1 girando em torno de um outro corpo de massa m_2 com velocidade v em um círculo de raio r, teremos:

$$F_G = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

e a força centrípeta

$$F_c = m_1\frac{v^2}{r}$$

Mas como a força gravitacional é quem mantém o movimento circular e uniforme, temos que:

$$F_G = F_c \quad \Rightarrow \quad m_1\frac{v^2}{r} = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

O mesmo poderia ser dito para o movimento de uma partícula de massa m_A e carga Q_A que gira em torno de outra partícula de massa m_B e carga Q_B , com velocidade V em um círculo de raio R sob a ação da força elétrica de interação entre essas cargas, ou força de Coulomb:

$$F_E = k\frac{Q_A Q_B}{R^2}$$

e a força centrípeta

$$F_c = m_A\frac{V^2}{R}$$

Mas como a força elétrica é quem mantém o movimento circular e uniforme, temos que:

$$F_E = F_c \quad \Rightarrow \quad m_A\frac{V^2}{R} = k\frac{Q_A Q_B}{R^2}$$

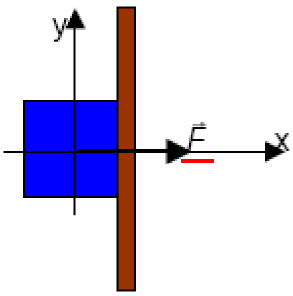
Solução de alguns problemas

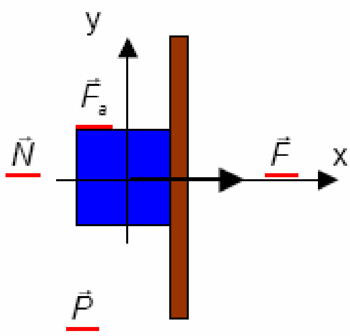
Capítulo 6 - Halliday, Resnick e Walker - 4ª. edição	
11	Uma força horizontal $F = 12N$ comprime um bloco pesando $P = 5N$ contra uma parede vertical. O coeficiente de atrito estático entre a parede e o bloco é $\mu_e = 0{,}60$ e o coeficiente de atrito cinético é $\mu_c = 0{,}40$. Suponha que inicialmente o bloco esteja em repouso.

a) O bloco se moverá?

O bloco está em repouso na direção horizontal, logo:

$$N = F = 12Newtons$$





A força de atrito estático máxima é dada por:

$$F_a = \mu_e N = 0{,}60 \,.\, 12 \quad \therefore \quad F_a = 7{,}2N$$

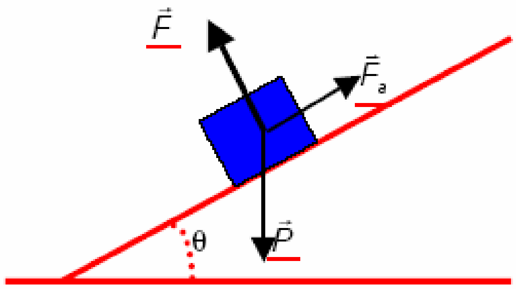
Como o peso do bloco é P = 5N , menor que a força de atrito estático ***máxima***, o bloco não se moverá.

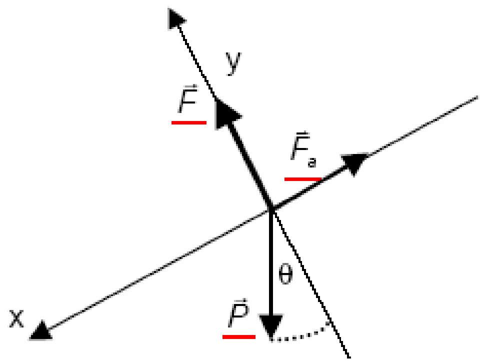
b) Qual a força exercida pela parede sobre o bloco, em notação de vetores unitários?

A força resultante exercida pela parede sobre o bloco será a soma da força normal com a força de atrito. Mas $\vec{F} = 12\hat{i}$, logo teremos que $\vec{N} = -12\hat{i}$. Como o bloco não se move a força de atrito é igual, em módulo, ao peso do bloco, ou seja:

$$\vec{F}_R = -12\hat{i} + 5\hat{j}$$

Capítulo 6 - Halliday, Resnick e Walker - 4ª. edição	
16	Um aluno deseja determinar os coeficientes de atrito estático e cinético entre uma caixa e uma prancha. Ele coloca a caixa sobre a prancha e lentamente vai levantando uma das extremidades da prancha. Quando o ângulo de inclinação faz 30^0 com a horizontal, a caixa começa a deslizar, descendo pela prancha cerca de $2{,}5m$ em $4s$. Quais são os coeficientes de atrito determinados?





Enquanto a caixa está em repouso temos em ação o atrito estático, e ele vai aumentando à medida que o ângulo de inclinação da tábua aumenta. No limiar, quando ela está prestes a começar o movimento, a força de atrito estático máxima que é igual a $\mu_E N$. Pela segunda Lei de Newton

$$\vec{P} + \vec{N} + \vec{F}_{aE} = 0$$

Decompondo as forças segundo os eixos cartesianos, encontramos

$$P\ sen\theta - F_{aE} = 0$$

$$N - P\ cos\theta = 0$$

$$\frac{P\,\text{sen}\,\theta}{P\cos\theta} = \frac{F_{aE}}{N} = \frac{\mu_E N}{N} \quad \Rightarrow \quad \mu_E = \tan\theta$$

Como $\theta = 30^0$:

$$\mu_E = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Quando o movimento se inicia o coeficiente de atrito diminui e passa de estático para cinético. A caixa passa a descer acelerada. Pela segunda Lei de Newton:

$$\vec{P} + \vec{N} + \vec{F}_{aC} = m\vec{a}$$

Decompondo as forças segundo os eixos cartesianos, encontramos

$$N - P\ cos\theta = 0$$
$$P\ sen\theta - F_{aC} = ma$$

Usando a primeira equação, a força de atrito pode ser expressa como:

$$F_{aC} = \mu_C\, N = = \mu_C\, P\ cos\theta$$

Usando esse resultado na segunda equação:

$$P\ sen\theta - \mu_C\, P\ cos\theta = ma$$

ou seja:

$$a = g\ (\ sen\theta - \mu_C\ cos\theta\ )$$

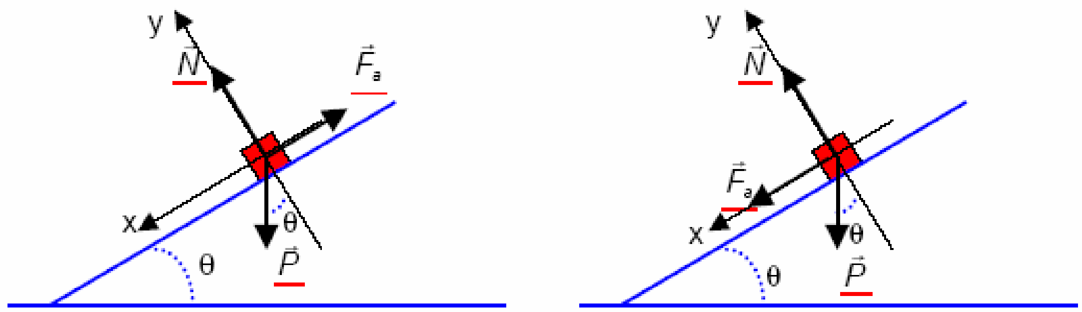
Para esse problema:
$v_0 = 0$
$d = 2{,}5m$
$t = 4s$

$$d = \frac{at^2}{2} \quad \therefore \quad a = \frac{2d}{t^2} = g(\text{sen}\,\theta - \mu_c \cos\theta)$$

$$\mu_c = \frac{1}{\cos\theta}\left(\text{sen}\,\theta - \frac{2d}{gt^2}\right) = 0{,}54$$

Capítulo 6 - Halliday, Resnick e Walker - 4ª. edição	
21	Um bloco desliza para baixo com velocidade constante sobre um plano com inclinação θ. Em seguida, é lançado para cima sobre o mesmo plano com uma velocidade escalar inicial v_0.

a) Que altura do plano alcançará antes de parar?



Quando está descendo o bloco tem velocidade constante, logo aceleração nula, portanto:

$$\vec{N} + \vec{P} + \vec{F}_a = 0$$

Decompondo segundo os eixos cartesianos:

$$\begin{cases} P\,\text{sen}\theta - F_a = 0 \\ N - P\cos\theta = 0 \end{cases}$$

Mas $F_a = \mu_C N = = \mu_C P\,cos\theta$, logo

$$P\,sen\theta = \mu_C P\,cos\theta$$

logo

$$\mu_C = tan\theta$$

Quando está subindo o bloco tem velocidade variável, logo aceleração não nula, portanto:

$$\vec{N} + \vec{P} + \vec{F}_a = m\vec{a}$$

Decompondo segundo os eixos cartesianos:

$$\begin{cases} P\,\text{sen}\theta + F_a = ma \\ N - P\cos\theta = 0 \end{cases}$$

$$ma = P\,sen\theta + \mu_C P\,cos\theta$$

$$ma = P\,sen\theta + tan\theta\,P\,cos\theta$$

$$a = 2g\,sen\theta$$

Como a desaceleração do bloco na subida será $a = 2g\,sen\theta$:

$$v^2 = v_0^2 - 2ad \quad \therefore \quad d = \frac{v_0^2}{2a} \quad \Rightarrow \quad d = \frac{v_0^2}{4g\,\text{sen}\theta}$$

$$h = d\,\text{sen}\theta \quad \therefore \quad h = \frac{v_0^2}{4g}$$

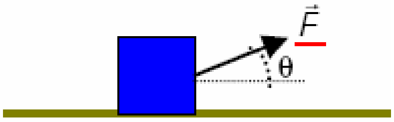
b) Ele deslizará para baixo novamente? Justifique a sua resposta.

Não! Como ele estava deslizando com velocidade constante na descida, a inclinação do plano era suficiente apenas para "compensar" o atrito cinético. Mas o atrito estático máximo é maior que o atrito cinético, logo ao parar (na subida) ele permanecerá parado.

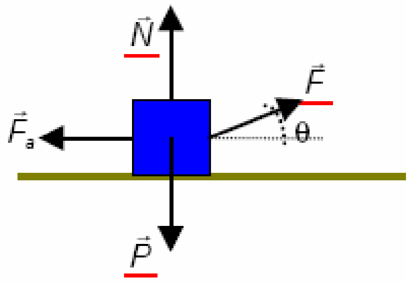
Capítulo 6 - Halliday, Resnick e Walker - 4ª. edição

22 Uma caixa de *68kg* é puxada pelo chão por uma corda que faz um ângulo de *1.*
acima da horizontal.

a) Se o coeficiente de atrito estático for $\mu_e = 0{,}50$, qual a tensão mínima necessária para iniciar o movimento da caixa?



Vamos considerar que a força de atrito estático atingiu o seu máximo, a resultante das forças que atuam no corpo ainda é nula. Nesse caso:



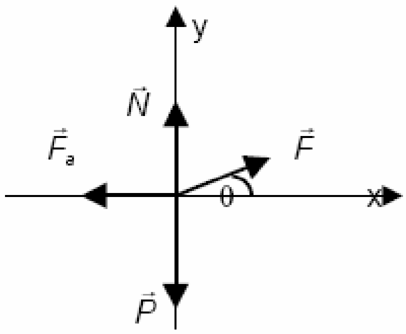
$$\vec{F} + \vec{N} + \vec{F}_a + \vec{P} = 0$$

Considerando o eixo y:

$$N + F\,sen\theta - P = 0$$

ou seja:

$$N = P - F\,sen\theta$$



Considerando o eixo x:

$$F\cos\theta - F_a = 0$$

ou seja:

$$F_a = \mu_e N = F\cos\theta$$

logo:

$$N = \frac{F\cos\theta}{\mu_e} = P - F\,\mathrm{sen}\,\theta$$

e finalmente

$$F = \frac{\mu_e P}{\cos\theta + \mu_e\,\mathrm{sen}\,\theta} = 304{,}19N$$

b) Se o coeficiente de atrito cinético for $\mu_c = 0{,}35$, qual a sua aceleração inicial?
Usando a segunda Lei de Newton:

$$\vec{F} + \vec{N} + \vec{F}_a + \vec{P} = m\vec{a}$$

Considerando o eixo y:

$$N + F\,sen\theta - P = 0$$

ou seja:

$$N = P - F\,sen\theta$$

Considerando o eixo x:

$$F\cos\theta - F_a = ma$$

onde

$$F_a = \mu_c N = \mu_c P - \mu_c F\,sen\theta$$

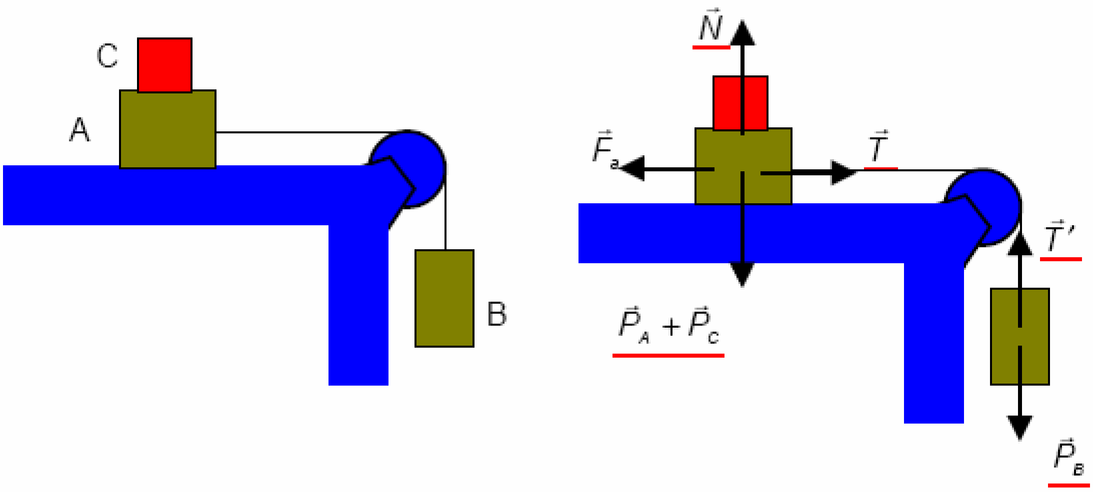
logo:

$$ma = F\cos\theta + \mu_c F\,sen\theta - \mu_c P$$

$$a = \frac{F}{m}(\cos\theta + \mu_c\,\mathrm{sen}\,\theta) - \mu_c g = 1{,}29m/s^2$$

24 Na figura a seguir, A e B são blocos com pesos de *44N* e *22N* , respectivamente

a) Determine o menor peso (bloco C) que deve ser colocado sobre o bloco A para impedi-lo de deslizar, sabendo-se que μ_E entre o bloco A e a mesa é *0,20*.



Para que não exista movimento, a resultante de forças que atuam nos blocos devem ser nulas, e o atrito estático entre o bloco A e a mesa deve ser máximo:

$$\begin{cases} \vec{N} + \vec{T} + \vec{P}_A + \vec{P}_C + \vec{F}_a = 0 \quad \therefore \quad \begin{cases} N - P_A - P_C = 0 \\ T - F_a = 0 \end{cases} \\ \vec{P}_B + \vec{T}' = 0 \quad \therefore \quad [P_B - T' = 0 \end{cases}$$

Como a corda que liga os blocos A e B tem massa desprezível, temos que $T = T'$. Desse modo:

$$T = F_a = \mu_E N = \mu_E (P_A + P_C)$$

Por outro lado:

$$T = T' = P_B \quad \therefore \quad T = P_B = \mu_E (P_A + P_C)$$

ou seja:

$$P_C = \frac{P_B}{\mu_E} - P_A = 66N$$

b) Se o bloco C for repentinamente retirado, qual será a aceleração do bloco A, sabendo-se que μ_C entre A e a mesa é $0,15$?

$$\begin{cases} \vec{N}+\vec{T}+\vec{P}_A+\vec{F}_a=m_A\vec{a} \quad \therefore \quad \begin{bmatrix} N-P_A=0 \\ T-F_a=m_Aa \end{bmatrix} \\ \vec{P}_B+\vec{T}'=m_B\vec{a}' \quad \therefore \quad [P_B-T'=m_Ba' \end{cases}$$

Como a corda que liga os blocos A e B é inextensível, $a = a'$, e desse modo:

$$\begin{cases} T-\mu_C P_A=m_Aa \\ P_B-T=m_Ba \end{cases}$$

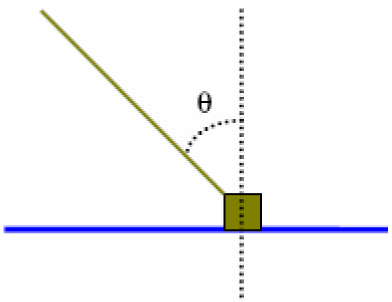
Somando essas duas equações, encontramos:

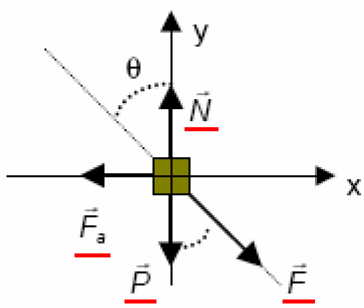
$$P_B - \mu_C P_A = (m_A + m_B)\, a$$

$$a=\left(\frac{P_B-\mu_C P_A}{P_B+P_A}\right)g=2,28m/s^2$$

Capítulo 6 - Halliday, Resnick e Walker - 4ª. edição	
26	Na figura a seguir um trabalhador cuidadoso aplica uma força $\vec{F}$ ao longo do cabo de um esfregão. O cabo faz um ângulo θ com a vertical, sendo μ_E e μ_C os respectivos coeficientes de atrito estático e cinético entre o esfregão e o chão. Despreze a massa do cabo e suponha que toda a massa m esteja no esfregão.

a) Qual o valor de F , se o esfregão se move pelo chão com velocidade constante?





Como o esfregão se move com aceleração nula:

$$\vec{F}+\vec{P}+\vec{F}_a+\vec{N}=0 \quad \therefore \quad \begin{cases} N-P-F\cos\theta=0 \\ F\,\text{sen}\theta-F_a=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N=P+F\cos\theta \\ F_a=\mu_C N=F\,\text{sen}\theta \end{cases}$$

$$\mu_C\ (\ P + F\ cos\theta\ ) = F\ sen\theta$$

logo:

$$F = \left(\frac{\mu_c}{\text{sen}\theta - \mu_c \cos\theta}\right)P$$

b) Mostre que se θ é menor que um determinado valor θ_0 então $\vec{F}$ (ainda aplicada ao longo do cabo) é incapaz de mover o esfregão. Determine θ_0 .

Suponhamos que ao aplicar uma força F no cabo do esfregão, passemos a variar (aumentar) o ângulo θ até que a força de atrito impeça o movimento. Este ângulo será chamado θ_0 . Por maior que seja a força externa F se $\theta < \theta_0$ não existirá movimento. As equações serão equivalentes às anteriores, considerando agora o coeficiente de atrito estático:

$$\vec{F} + \vec{P} + \vec{F}_a + \vec{N} = 0 \quad \therefore \quad \begin{cases} N - P - F\cos\theta_0 = 0 \\ F\,\text{sen}\,\theta_0 - F_a = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N = P + F\cos\theta_0 \\ F_a = \mu_E N = F\,\text{sen}\,\theta_0 \end{cases}$$

$$F = \left(\frac{\mu_E}{\text{sen}\,\theta_0 - \mu_E \cos\theta_0}\right)P$$

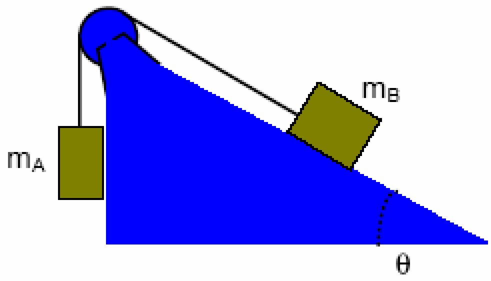
Esse ângulo θ_0 será aquele tal que o denominador acima será nulo, de modo que mesmo com uma força externa F muito grande o esfregão ainda permanecerá em repouso. Temos então que:

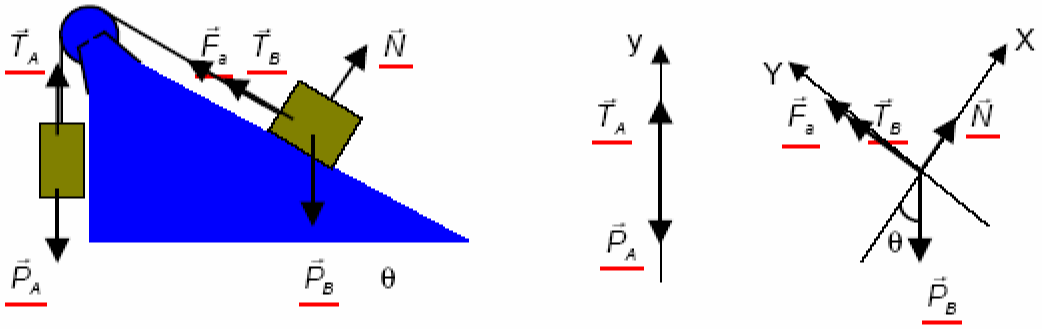
$$\text{sen}\,\theta_0 - \mu_E \cos\theta_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \tan\theta_0 = \mu_E \quad \therefore \quad \theta_0 = arc\tan\mu_E$$

Capítulo 6 - Halliday, Resnick e Walker - 4ª. edição

31 O corpo B na figura pesa $102N$ e o corpo A pesa $32N$. Os coeficientes de atrito entre o bloco e o plano inclinado são $\mu_e = 0,56$ e $\mu_c = 0,25$.

a) Determine a aceleração do sistema se B estiver inicialmente em repouso.
$\theta = 40^0$
$P_B = 102N$
$P_A = 32N$
$\mu_e = 0,56$
$\mu_c = 0,25$





Quando o sistema estiver parado, mas com tendência para que o bloco B se mova para baixo.

$$T_A = P_A \quad \therefore \quad T_B = T_A = P_A$$

O bloco B só poderá mover-se ao longo do plano inclinado, logo é nula a resultante das forças perpendiculares a esse plano que atuam nesse bloco. Ou seja:

$$N - P_B \cos\theta = 0 \quad \therefore \quad N = P_B \cos\theta$$

Mas

$$F_a = \mu_E N = \mu_E P_B \cos\theta$$

Afora a força de atrito, existem outras forças que atuam paralelamente ao plano inclinado. Vamos chamar a resultante dessas forças de F, portanto:

$$F = P_B \operatorname{sen}\theta - T_B = P_B \operatorname{sen}\theta - P_A$$

essa força puxará o bloco para baixo, e ele mover-se-á quando F for maior ou igual a força de atrito estático máxima:

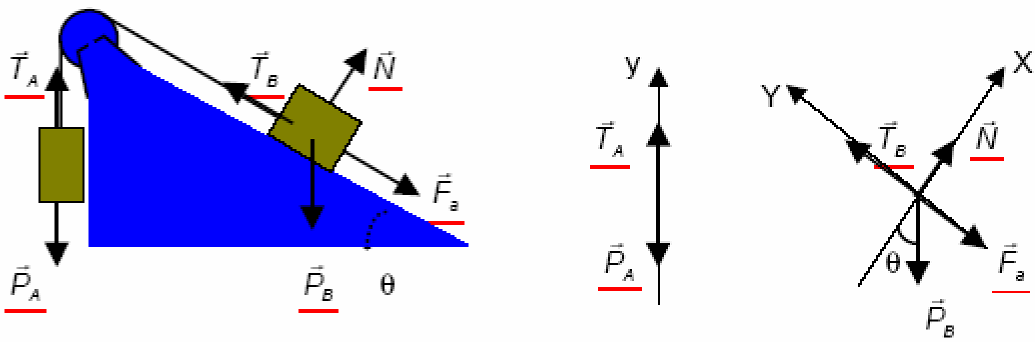
$$\text{Se} \quad F \geq \mu_E N \;\; \textit{acontecerá movimento}$$

Usando os valores dados no enunciado, encontramos que:

$$F = 35{,}56N \quad e \quad \mu_E N = 43{,}75N$$

Conclusão: Se o conjunto, estiver parado, vai permanecer desse modo.

b) Determine a aceleração do sistema se B estiver movendo-se para cima no plano inclinado.



Aplicando a segunda Lei de Newton para os dois corpos, teremos:

$$\begin{cases} \vec{T}_B + \vec{P}_B + \vec{N} + \vec{F}_a = m_B \vec{a}_B \\ \\ \vec{T}_A + \vec{P}_A = m_A \vec{a}_A \end{cases}$$

Como os dois blocos estão conectados por uma corda inextensível, quando um deles se deslocar de uma distância Δs num intervalo de tempo Δt o outro se deslocará da mesma distância no mesmo intervalo de tempo, logo as suas acelerações serão as mesmas, em módulo. Ou seja:

onde $F_a = \mu_c N = \mu_c P_B \cos\theta$, e para o segundo corpo:

$$T - P_A = m_A a$$

Somando as duas últimas equações, encontramos:

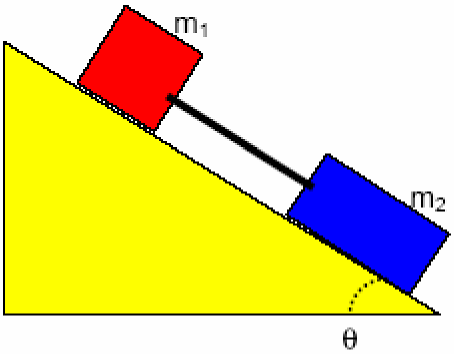
$$P_B \, sen\theta - \mu_c P_B \cos\theta - P_A = (m_A + m_B) \, a$$

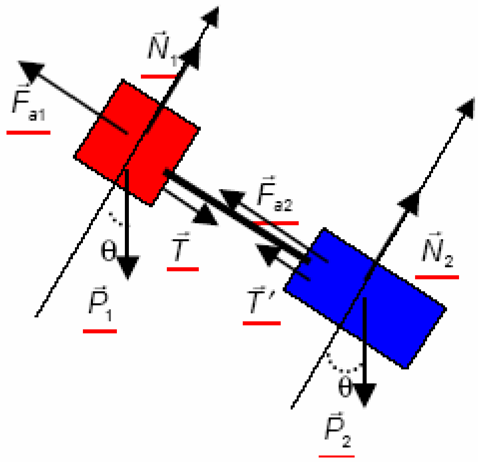
ou seja:

$$a = \left[\frac{m_B(\text{sen}\theta - \mu_c \cos\theta) - m_A}{m_B + m_A} \right] g = +1{,}02 m/s^2$$

Capítulo 6 - Halliday, Resnick e Walker - 4ª. edição	
35	Dois blocos de massas $m_1 = 1{,}65kg$ e $m_2 = 3{,}30kg$, deslizam para baixo sobre um plano inclinado, conectadas por um bastão de massa desprezível com m_1 seguindo m_2 . O ângulo de inclinação é $\theta = 30^0$. O coeficiente de atrito entre m_1 e o plano é $\mu_1 = 0{,}226$ e entre m_2 e o plano é $\mu_2 = 0{,}113$. Calcule:

a) A aceleração conjunta das duas massas.





Corpo 1 *Corpo 2*

$$\vec{T} + \vec{P}_1 + \vec{F}_{a1} + \vec{N}_1 = m_1\vec{a}_1 \qquad \vec{T}' + \vec{P}_2 + \vec{F}_{a2} + \vec{N}_2 = m_2\vec{a}_2$$

Como o bastão é inextensível as acelerações dos blocos são iguais, e como esse bastão tem massa desprezível as forças T e T' têm mesmo módulo. desse modo:

$$T + P_1 \, sen\theta - F_{a1} = m_1 a \qquad -T + P_2 \, sen\theta - F_{a2} = m_2 a$$

$$N_1 - P_1 \cos\theta = 0 \qquad N_2 - P_2 \cos\theta = 0$$

$$T + P_1 \, sen\theta - \mu_1 P_1 \cos\theta = m_1 a$$
$$-T + P_2 \, sen\theta - \mu_2 P_2 \cos\theta = m_2 a$$

Somando essas duas equações, encontramos

$$(P_1 + P_2) \, sen\theta - (\mu_1 P_1 + \mu_2 P_2) \cos\theta = (m_1 + m_2) \, a$$

ou seja:

$$a = \left[\frac{(m_1 + m_2)\text{sen}\theta - (\mu_1 m_1 + \mu_2 m_2)\cos\theta}{m_1 + m_2} \right] g = 3{,}62 m/s^2$$

b) A tensão no bastão.

Temos que:

$$T = m_1 a - P_1 \, sen\theta + \mu_1 P_1 \cos\theta$$

e usando o resultado do cálculo da aceleração, encontramos:

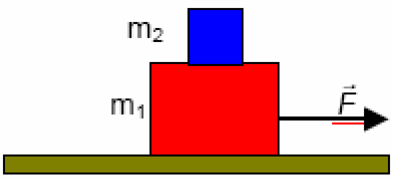
$$T = (\mu_1 - \mu_2) \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} g \cos\theta = 1{,}05N$$

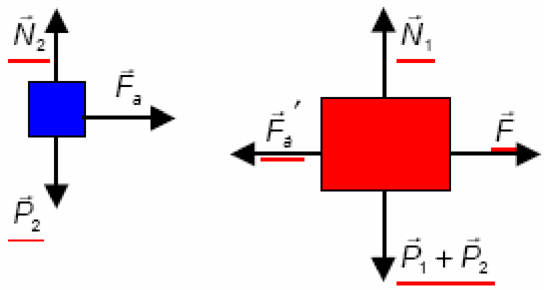
c) Como ficariam as respostas a e b se as massas fossem invertidas?

Se nos resultado da aceleração trocarmos 1 por 2 a equação não se modificará, e portanto não irá alterar o movimento com essa mudança. No entanto a tensão irá trocar de sinal, e isso significa que o bloco que empurrava irá puxar e vice-versa.

Capítulo 6 - Halliday, Resnick e Walker - 4ª. edição	
36	Um bloco de massa $m_2 = 4kg$ é colocado em cima de outro de massa $m_1 = 5kg$. Para fazer o bloco de cima deslizar sobre o de baixo, que é mantido fixo, uma força horizontal de pelo menos $T = 12N$ deve ser aplicada ao de cima. O conjunto dos blocos é agora colocado sobre uma mesa horizontal sem atrito. Determine:

a) A força horizontal máxima que pode ser aplicada ao bloco inferior para que ainda se movimentem juntos.





Como foi mencionado, quando mantemos o bloco de baixo fixo, uma força horizontal de pelo menos $T = 12N$ deve ser aplicada ao de cima, para que ele inicie um movimento. Isso significa que a força de atrito estático máxima entre os dois blocos tem esse valor.

Quando uma força F menor que a limite, atuar no bloco de baixo, o conjunto se moverá com acelerado, logo:

$$F = (m_1 + m_2) a$$

Os dois blocos interagem através da força de atrito, de modo que essa é a única força horizontal que atua no bloco de cima, e portanto:

$$F_a = m_2\, a \quad \therefore \quad a = \frac{F_a}{m_2}$$

logo:

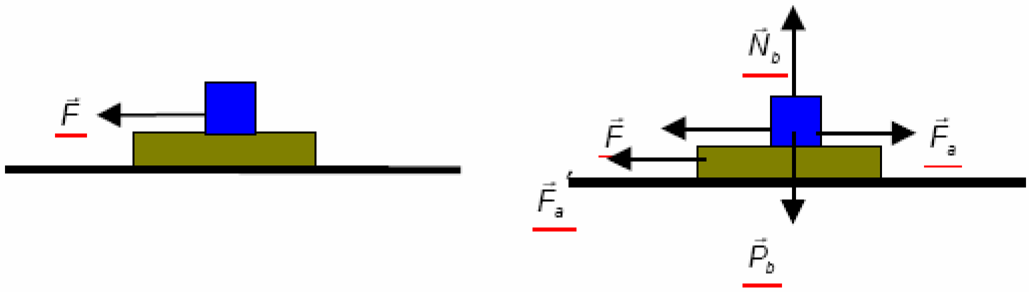
$$F = \left(\frac{m_1 + m_2}{m_2}\right) F_a = \left(\frac{m_1 + m_2}{m_2}\right) T = 27N$$

b) A aceleração resultante dos blocos.

$$a = \frac{F_a}{m_2} = 3m/s^2$$

Capítulo 6 - Halliday, Resnick e Walker - 4ª. edição	
37	Uma tábua de $40kg$ está em repouso sobre um assoalho sem atrito, e um bloco de 10kg está colocado em cima da tábua. O coeficiente de atrito estático μ_E entre o bloco e a tábua é $0,60$, enquanto o de atrito cinético μ_C é $0,40$. O bloco de $10kg$ é puxado por uma força horizontal de $100N$.

a) Qual a aceleração resultante do bloco?



A força de atrito estático máxima é:

$$F_{aE} = \mu_E\, N = \mu_E\, P_b = 58,8N$$

Como a força externa F = 100N a força de atrito estático não será suficiente para manter o bloco e a tábua sem movimento relativo. À medida que o bloco começa a se mover, o atrito enter ele e a tábua passa a ser cinético:

$$F_{aC} = \mu_C\, N = \mu_C\, P_b = 39,2$$

A resultante das forças que atuam no bloco é:

$$\vec{F} + \vec{P}_b + \vec{F}_a + \vec{N}_b = m_b \vec{a}_b \quad \therefore \quad \begin{cases} F - F_{aC} = m_b a_b \\ \\ N_b - P_b = 0 \end{cases}$$

$$a_b = \frac{F - \mu_C P_b}{m_b} = 6{,}08 m/s^2$$

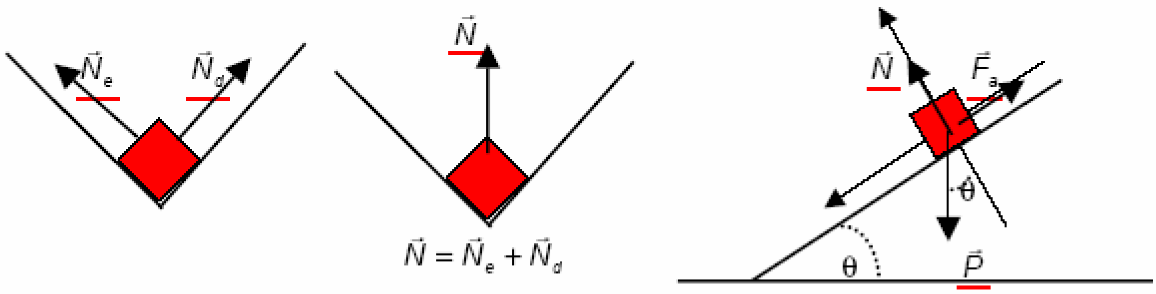
b) Qual a aceleração resultante da tábua?

A única força horizontal que atua na tábua é $F_a{}'$ que é a reação à força de atrito que atua no bloco, logo:

$$F_a' = m_t a_t \quad \therefore \quad a_t = \frac{\mu_C P_b}{m_t} = 0{,}98 m/s^2$$

Capítulo 6 - Halliday, Resnick e Walker - 4ª. edição

39 Uma caixa desliza para baixo através de uma calha de perfil de 90^0, que está inclinada de um ângulo θ em relação à horizontal, conforme mostra a figura. O coeficiente de atrito cinético entre elas é μ_C. Qual a aceleração da caixa em função de μ_C, θ e g?



Como é de 90^0 o ângulo entre os vetores $\vec{N}_e$ e $\vec{N}_d$, e como eles têm o mesmo módulo:

$$N = \sqrt{N_e^2 + N_d^2} = N_e\sqrt{2}$$

Por outro lado:

$$\begin{cases} F_{ae} = \mu_C N_e \\ F_{ad} = \mu_C N_d \end{cases} \Rightarrow \quad F_a = F_{ae} + F_{ad} = \mu_C (N_e + N_d) = 2\mu_C N_e = 2\mu_C \frac{N}{\sqrt{2}}$$

$$F_a = \sqrt{2}\mu_C N$$

Com essa última equação, temos um problema em três dimensões transformado em um outro problema equivalente em duas dimensões. Usando a figura acima da direita:

$$\vec{N} + \vec{P} + \vec{F}_a = m\vec{a} \quad \therefore \quad \begin{cases} N - P\cos\theta = 0 \\ P\,\mathrm{sen}\theta - F_a = ma \end{cases}$$

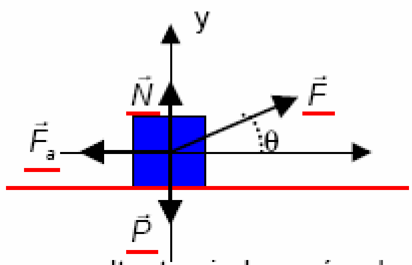
$$ma = mg\,\mathrm{sen}\theta - F_a = mg\,\mathrm{sen}\theta - \sqrt{2}\mu_C N = mg\,\mathrm{sen}\theta - \sqrt{2}\mu_C mg\cos\theta$$

$$a = g\left(\mathrm{sen}\theta - \sqrt{2}\mu_C \cos\theta\right)$$

Capítulo 6 - Halliday, Resnick e Walker - 4ª. edição	
41	Uma caixa de areia inicialmente em repouso, é puxada pelo chão por uma corda onde a tensão não pode ultrapassar 1100N . O coeficiente de atrito estático entre o chão e a caixa é 0,35 .

a) Qual deverá ser o ângulo da corda em relação à horizontal, de forma a permitir puxar a maior quantidade de areia possível?

A maior dificuldade será colocar a caixa em movimento. Devemos encontrar o ângulo adequado para que a força externa seja suficiente para equilibrar a força de atrito estático máximo



Quando a caixa estiver prestes a se mover, a força resultante ainda será nula:

$$\vec{T}+\vec{P}+\vec{N}+\vec{F}_a=0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} T\cos\theta - F_a = 0 \\ \\ T\,\text{sen}\,\theta + N - P = 0 \end{cases}$$

$$\frac{F_a}{N}=\frac{\mu_E N}{N}=\frac{T\cos\theta}{P-T\,\text{sen}\,\theta}$$

$$\mu_E(\,P - T\,\text{sen}\theta\,) = T\cos\theta \quad \therefore \quad P(\theta\,) = T\,(\,\cos\theta + \mu_E\,\text{sen}\theta\,)/\mu_E$$

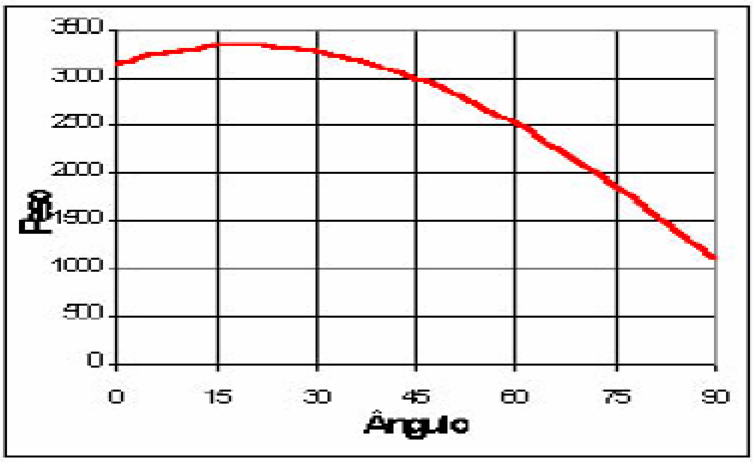
$$\frac{dP}{d\theta}=\frac{T}{\mu_E}\left(-\,\text{sen}\,\theta+\mu_E\cos\theta\right)=0 \quad \Rightarrow \quad \tan\theta_0=\mu_E$$

$$\theta_0 = arc\ tan\ \mu_E = 19{,}29^0$$

b) Qual o peso da caixa de areia nessa situação?

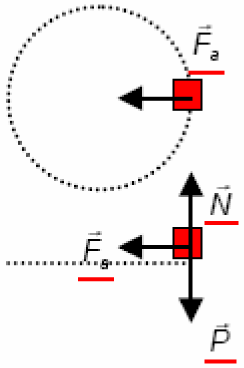
$$P(\theta_0) = T_M\,(\,\cos\theta_0 + \mu_E\,\text{sen}\theta_0)/\mu_E = 3329{,}77N$$

Gráfico do peso máximo possível de ser arrastado pela corda, em função do ângulo de aplicação da força externa.



Capítulo 6 - Halliday, Resnick e Walker - 4ª. edição	
47	Se o coeficiente de atrito estático dos pneus numa rodovia é $0,25$, com que velocidade máxima um carro pode fazer uma curva plana de $47,5m$ de raio, sem derrapar?

A resultante das forças que atuam no corpo é:



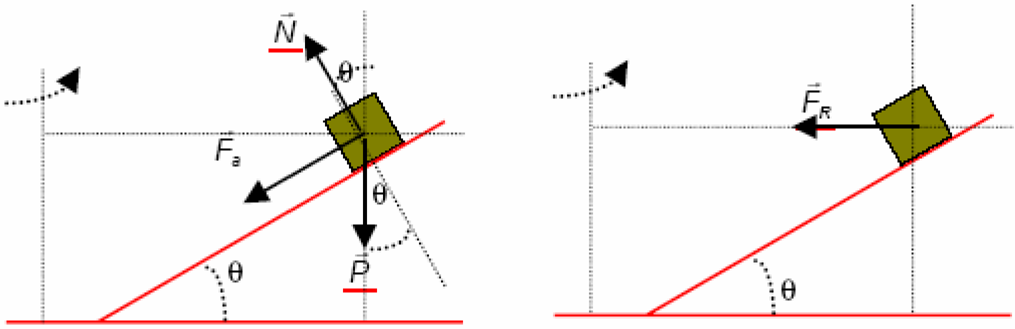
$$\vec{N} + \vec{P} + \vec{F}_a = m\vec{a} \quad \therefore \quad \begin{cases} N - P = 0 \\ F_a = ma \end{cases}$$

A força resultante é a força de atrito, pois na direção vertical existe um equilíbrio entre as forças que atuam no carro. E é essa força resultante que possibilita o corpo descrever uma trajetória circular com velocidade constante. Desse modo a força de atrito será a força centrípeta.

$$F_a = ma \quad \Rightarrow \quad \mu_E mg = \frac{mv^2}{R} \quad \therefore \quad v = \sqrt{\mu_E Rg} = 10,78m/s = 38,80km/h$$

Capítulo 6 - Halliday, Resnick e Walker - 4ª. edição	
51	Uma curva circular de uma auto-estrada é projetada para velocidades de $60km/h$.

a) Se o raio da curva é de $150m$, qual deve ser o ângulo de inclinação da rodovia?



Vamos considerar uma situação que envolva os dois itens, a estrada é inclinada e tem atrito. O desenho da direita mostra a força resultante, e como já foi dito é conhecida como força centrípeta. Usando a segunda Lei de Newton:

$$\vec{N} + \vec{P} + \vec{F}_a = m\vec{a} \quad \therefore \quad \begin{cases} N\cos\theta - F_a \operatorname{sen}\theta - P = 0 \\ N\operatorname{sen}\theta + F_a\cos\theta = ma \end{cases}$$

Da primeira equação da direita, encontramos que:

$$N = \frac{P}{\cos\theta - \mu_E \operatorname{sen}\theta}$$

e usando esse valor na segunda equação:

$$\left(\frac{P}{\cos\theta - \mu_E \operatorname{sen}\theta}\right)\operatorname{sen}\theta + \mu_E\left(\frac{P}{\cos\theta - \mu_E \operatorname{sen}\theta}\right)\cos\theta = ma$$

ou seja:

$$a = \left(\frac{\operatorname{sen}\theta + \mu_E \cos\theta}{\cos\theta - \mu_E \operatorname{sen}\theta}\right)g = \left(\frac{\mu_E + \tan\theta}{1 - \mu_E \tan\theta}\right)g$$

ou ainda:

$$\tan\theta = \frac{a - \mu_E g}{g + \mu_E a}$$

Quando $\mu_E = 0$, que é o caso do primeiro item, quando não existe atrito:

$$\tan\theta = \frac{a}{g} = \frac{v^2}{Rg} = 0{,}188 \quad \therefore \quad \theta = 10{,}70^0$$

b) Se a curva não fosse inclinada, qual deveria ser o coeficiente de atrito mínimo, entre os pneus e a rodovia, para permitir o tráfego a essa velocidade, sem derrapagem?

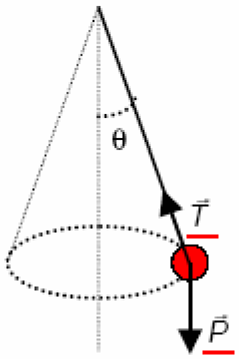
Neste caso $\theta = 0$ e portanto encontramos que:

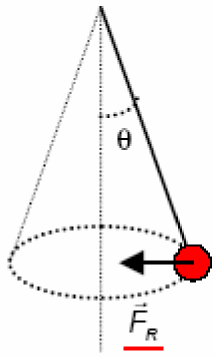
$$\mu_E = \frac{a}{g} = 0{,}188$$

Capítulo 6 - Halliday, Resnick e Walker - 4ª. edição	
54	Um pêndulo cônico é formado por uma massa de 50g presa a uma cordão de 1,2m. A massa gira formando um círculo horizontal de 25cm de raio.

a) Qual a sua aceleração?

m = 50g = 0,05kg
l = 1,2m
r = 25cm = 0,25m





Usando a segunda Lei de Newton:

$$\vec{T} + \vec{P} = m\vec{a} \quad \therefore \quad \begin{cases} T\cos\theta - P = 0 \\ T\operatorname{sen}\theta = ma \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \frac{T\operatorname{sen}\theta}{T\cos\theta} = \frac{ma}{mg}$$

ou seja:

$$a = g\tan\theta = g\frac{r}{\sqrt{l^2 - r^2}} = 2{,}08m/s^2$$

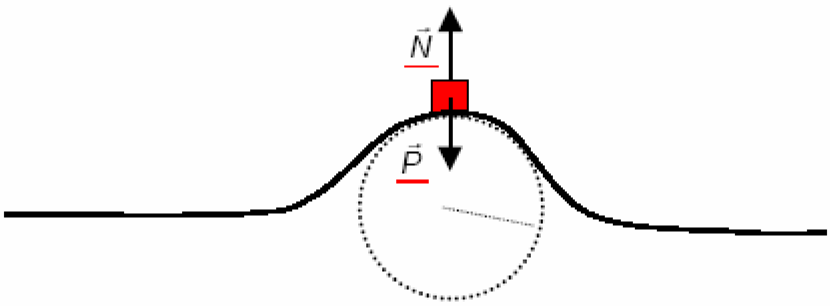
b) Qual a sua velocidade?

$$a = \frac{v^2}{r} \quad \therefore \quad v = \sqrt{ar} = 0{,}72m/s$$

c) Qual a tensão no cordão?

$$T = \frac{ma}{\text{sen}\theta} = ma\frac{l}{r} = 0{,}499N$$

Capítulo 6 - Halliday, Resnick e Walker - 4ª. edição	
57	Um dublê dirige um carro sobre o alto de uma montanha cuja seção reta é aproximadamente um círculo de 250m de raio, conforme a figura a seguir. Qual a maior velocidade que pode dirigir o carro sem sair da estrada, no alto da montanha?

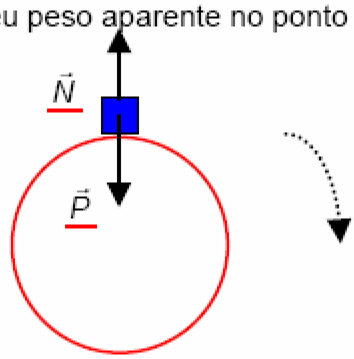


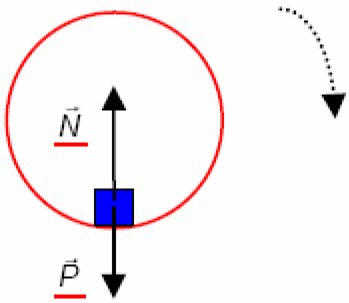
Quando uma carro perde o contato com o solo a única força que permanece atuando nele é o seu peso. Mas quando ele está prestes a perder o contato a força normal já é nula. Neste problema a trajetória é circular e nessa situação limite descrita pelo enunciado a força centrípeta é o seu peso:

$$\vec{P} = m\vec{a} \quad \therefore \quad mg = P = m\frac{v^2}{r} \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{rg} = 49{,}49m/s = 178{,}19km/h$$

Capítulo 6 - Halliday, Resnick e Walker - 4ª. edição	
62	Um estudante de $68kg$, numa roda gigante com velocidade constante, tem um peso aparente de $56kg$ no ponto mais alto.

a) Qual o seu peso aparente no ponto mais baixo?





Nos pontos mais alto e mais baixo, a segunda Lei de Newton diz que:

$$\vec{P} + \vec{N} = m\vec{a} \quad onde \quad a = \frac{v^2}{R}$$

Ponto mais alto — *Ponto mais baixo*

$$P - N_A = ma \qquad\qquad N_B - P = ma$$

Onde N_A e N_B são as normais nos pontos mais alto e mais baixo respectivamente. A normal é uma reação do assento ao corpo do estudante que está sentado nele. Se estivesse sentado em uma balança colocada nesse assento, ela mostraria exatamente o valor de N, que é por isso chamado de peso aparente. Igualando as duas últimas equações, encontramos:

$$P - N_A = N_B - P \quad \therefore \quad N_B = 2P - N_A = (\ 2m - m_A\ )\ g = 80\ .\ 9{,}8$$

$$N_B = 784Newt \quad e \quad m_B = 80kg$$

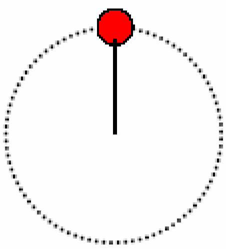
b) E no ponto mais alto, se a velocidade da roda gigante dobrar?

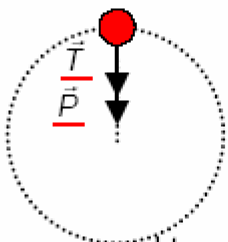
$$\begin{cases} P - N_A = m\dfrac{v^2}{R} \\ P - N_A' = m\dfrac{(2v)^2}{R} = 4m\dfrac{v^2}{R} \end{cases}$$

$$m\frac{v^2}{R} = \frac{P - N_A'}{4} = P - N_A \quad \therefore \quad N_A' = 4N_A - 3P$$

$$N_A' = 196Newt \quad e \quad m_A' = 20kg$$

Capítulo 6 - Halliday, Resnick e Walker - 4ª. edição	
63	Uma pedra presa à ponta de uma corda gira em um círculo vertical de raio R. Determine a velocidade crítica, abaixo da qual a corda pode afrouxar no ponto mais alto.





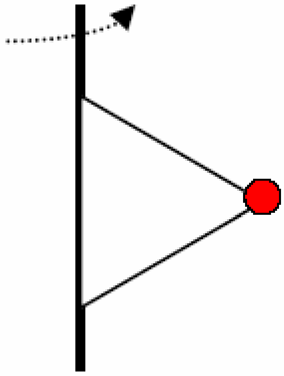
A velocidade mínima para a corda não afrouxar é àquela para a qual teremos $T = 0$, logo:

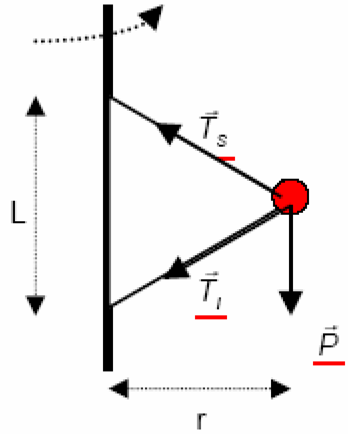
$$\vec{P} = m\vec{a} \quad \Rightarrow \quad mg = m\frac{v^2}{R} \quad \therefore \quad v = \sqrt{Rg}$$

Capítulo 6 - Halliday, Resnick e Walker - 4ª. edição	
70	A figura a seguir mostra uma bola de 1,34kg presa a um eixo girante vertical por duas cordas de massas desprezíveis. As cordas estão esticadas e formam os lados de um triângulo equilátero vertical. A tensão na corda superior é de 35N .

a) Desenhe o diagrama de corpo isolado para a bola.

$L = 1{,}70m$
$m = 1{,}34kg$
$T_S = 35N$



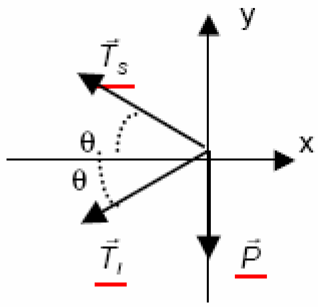


b) Qual a tensão na corda inferior?

Usando a segunda Lei de Newton:

$$\vec{T}_S + \vec{T}_i + P = m\vec{a} \quad onde \quad \begin{cases} a = \dfrac{v^2}{R} \\ r = L\cos\theta \end{cases}$$

Decompondo as forças segundo os eixos cartesianos definidos na figura ao lado:



$$\begin{cases} ma = T_S\cos\theta + T_i\cos\theta \\ 0 = T_S\,\mathrm{sen}\,\theta - T_i\,\mathrm{sen}\,\theta - P \end{cases}$$

Da última equação, encontramos:

$$T_i = T_S - \frac{P}{\mathrm{sen}\,\theta}$$

Como o triângulo formado pelos tirantes e o eixo é isósceles o ângulo entre os tirantes é 60^0 e consequentemente $\theta = 30^0$. Desse modo:

$$T_I = 8{,}736N$$

c) Qual a força resultante sobre a bola, no instante mostrado na figura?

$$ma = T_s \cos\theta + T_i \cos\theta = T_s \cos\theta + \left(T_s - \frac{P}{\operatorname{sen}\theta}\right)\cos\theta$$

$$F = ma = 2\ T_S \cos\theta - P \cot\theta = 37{,}876N$$

d) Qual a velocidade da bola?

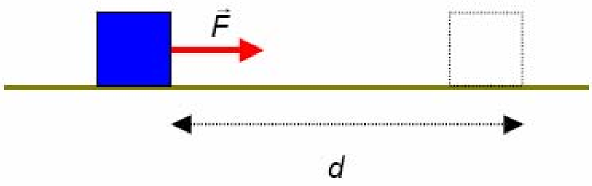
$$F = m\frac{v^2}{r} = m\frac{v^2}{l\cos\theta} \quad \therefore \quad v = \sqrt{\frac{l\cos\theta\, F}{m}} = 6{,}45m/s$$

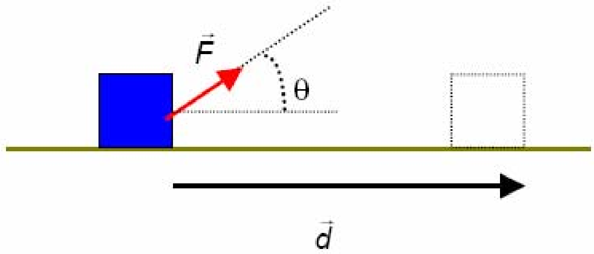
07. Trabalho e energia cinética

Podemos definir trabalho como a capacidade de produzir energia. Se uma força executou um trabalho W sobre um corpo ele aumentou a energia desse corpo de W.

Esse definição, algumas vezes parece não estar de acordo com o nosso entendimento cotidiano de trabalho. No dia-a-dia consideramos trabalho tudo aquilo que nos provoca cansaço. Na Física se usa um conceito mais específico.

Movimento em uma dimensão com força constante





$$W = F\,d \qquad\qquad W = Fd\cos\theta = \vec{F}\cdot\vec{d}$$

O trabalho realizado por uma força constante é definido como o produto do deslocamento sofrido pelo corpo, vezes a componente da força na direção desse deslocamento.

Se você carrega uma pilha de livros ao longo de uma caminho horizontal, a força que você exerce sobre os livros é perpendicular ao deslocamento, de modo que nenhum trabalho é realizado sobre os livros por essa força. Esse resultado é contraditório com as nossas definições cotidianas sobre força, trabalho e cansaço!

Trabalho executado por uma força variável

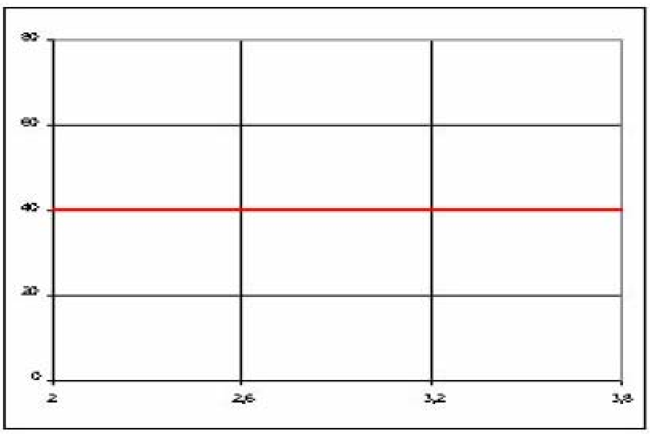
Para uma análise inicial, vamos considerar o gráfico do trabalho versus deslocamento para uma força constante que atua na direção do deslocamento.

Como foi definido anteriormente

$$W = F\,d$$

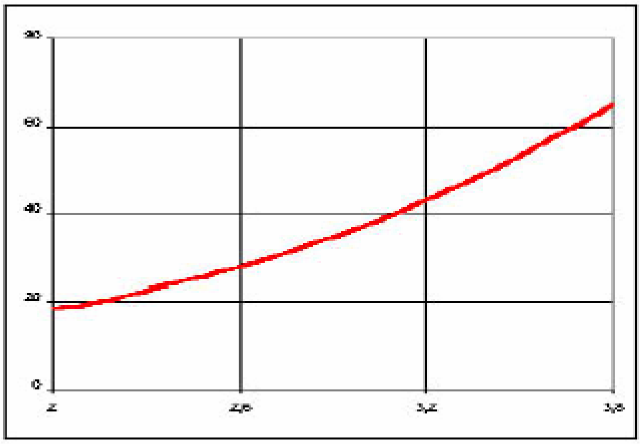
que é a área debaixo da curva, ou seja o retângulo compreendido entre as posições inicial e final vezes o valor da força aplicada. Ou seja:

$$W = 40\ .\ (3{,}8 - 2) = 72Joules$$



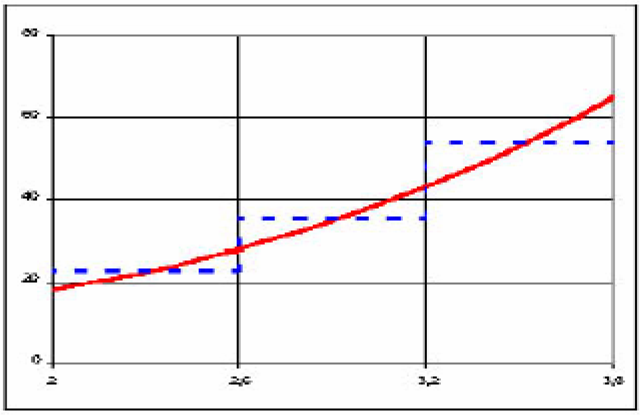
Análise unidimensional

Quando está atuando sobre um corpo uma força variável que atua na direção do deslocamento, o gráfico da intensidade da força versus o deslocamento tem uma forma como a da figura ao lado.



O trabalho executado por essa força é igual a área abaixo dessa curva. Mas como calcular essa área se a curva tem uma forma genérica, em princípio?

Uma primeira aproximação para o cálculo dessa área seria dividir a área a ser calculada em pequenos retângulos, como esses pontilhados da figura ao lado.



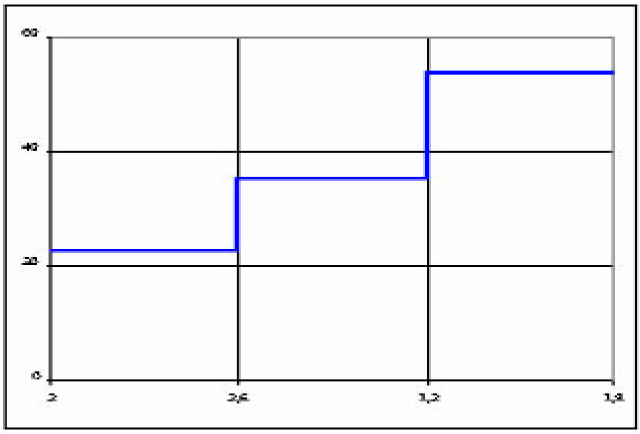
A área abaixo da curva contínua seria aproximada pelo retângulo definido pela reta pontilhada.

Se chamarmos o trabalho entre as posições *2* e *2,6* de δW_i , teremos como aproximação para esse trabalho o produto da força $F(x_i) = 22,7$ vezes o deslocamento $\delta x_i = 2,6 - 2,0 = 0,6$. Ou seja:

$$\delta W_i = F(x_i)\delta x_i$$

O trabalho total, ao longo de todo o percurso considerado será a soma dos trabalhos de cada pequeno percurso:

$$W = \sum_i \delta W_i = \sum_i F(x_i)\delta x_i$$



A aproximação da curva pelos retângulos vai ficar tanto mais próxima do real quanto mais subdivisões considerarmos. E no limite em que δx_i for muito pequeno a aproximação será uma igualdade. Ou seja:

$$W = \lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_i F(x_i)\delta x_i$$

A equação anterior é a própria definição de integral, e desse modo o trabalho executado por uma força variável entre uma posição inicial ***i*** e uma posição final ***f*** será:

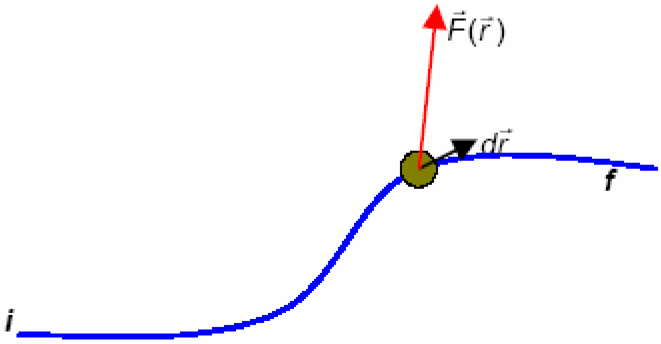
$$W = \int_i^f F(x)dx$$

Análise tridimensional

Vamos considerar uma força $\vec{F}(\vec{r})$ que atua em um corpo de massa m, ao longo de uma trajetória que vai do ponto inicial $\boldsymbol{i}$ até o ponto final $\boldsymbol{f}$, ao longo de uma curva $\boldsymbol{C}$

$$W = \int_C \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$$

onde a integração é considerada ao longo da trajetória usada pelo corpo.



De modo geral a força é considerada como:

$$\vec{F}(\vec{r}) = \hat{i}\, F_x(x,y,z) + \hat{j}\, F_y(x,y,z) + \hat{k}\, F_z(x,y,z)$$

e

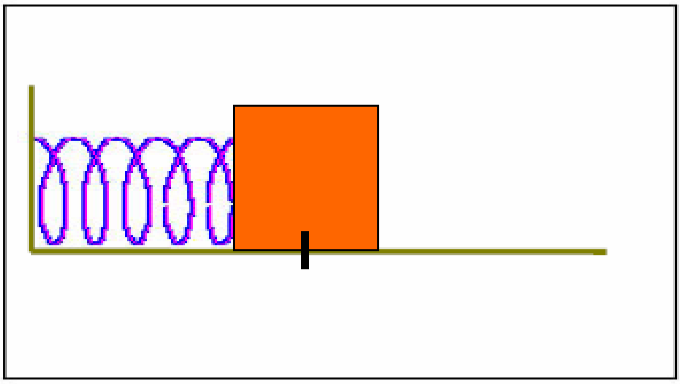
$$d\vec{r} = \hat{i}\, dx + \hat{j}\, dy + \hat{k}\, dz$$

$$W_{if} = \int_i^f \left[F_x(x,y,z)dx + F_y(x,y,z)dy + F_z(x,y,z)dz \right]$$

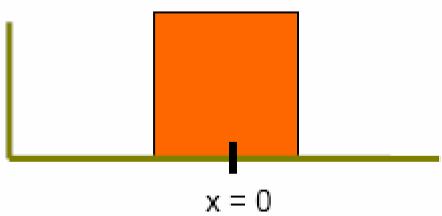
onde a integração é feita ao longo da curva $\boldsymbol{C}$ que define a trajetória do corpo.

Trabalho realizado por uma mola

Vamos analisar o movimento de um sistema composto por um bloco de massa m que está sobre uma superfície horizontal sem atrito, e tem preso a si uma mola. A outra extremidade da mola está fixa. Quando a mola está num estado relaxado ela não está distendida ou comprimida. Nessa situação ela não exerce força alguma no bloco.



Mola relaxada

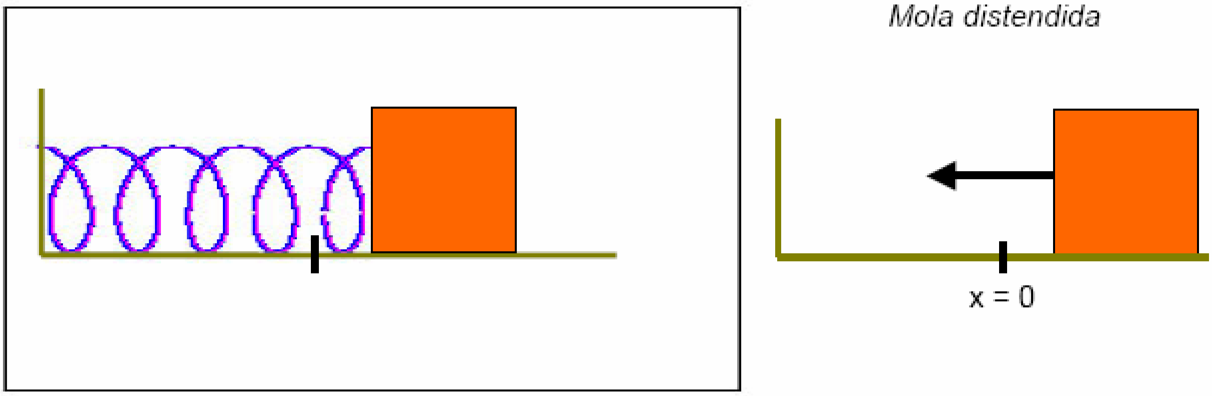


Quando o bloco se desloca da posição relaxada ou de equilíbrio a mola exerce sobre ele uma força restauradora que para que ele retorne à posição de equilíbrio original. Quando o deslocamento é na parte positiva do eixo x a força restauradora aponta para o sentido negativo desse eixo, e quando o deslocamento se dá na parte negativa do eixo x a força restauradora aponta para o sentido positivo desse eixo.

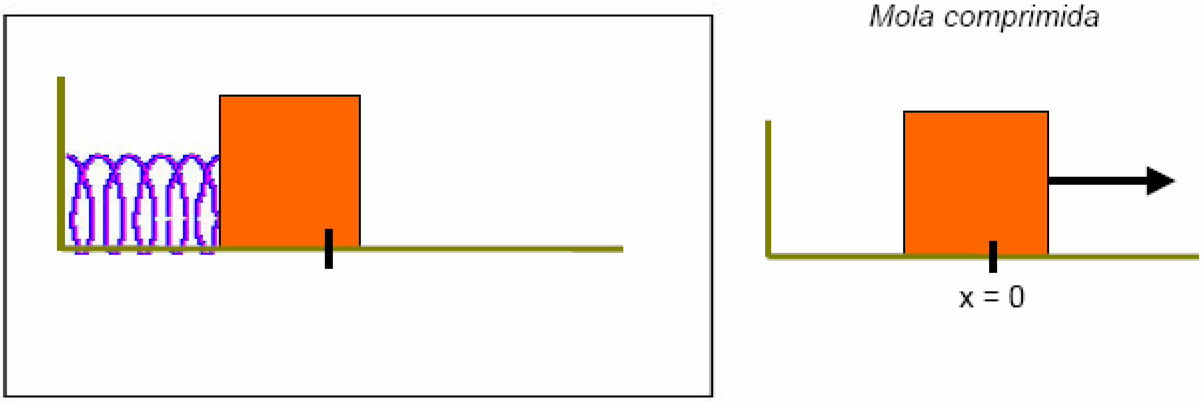
Quando o deslocamento do bloco é muito pequeno em comparação à dimensão da mola podemos considerar o que é chamado de pequenas oscilações, e neste caso podemos dizer que a força restauradora é proporcional ao deslocamento do bloco em relação à sua posição de equilíbrio. essa aproximação é também conhecida como Lei de Hooke, e pode ser expressa do seguinte modo:

$$\vec{F} = -k\,\vec{r}$$

onde chamamos k de constante elástica da mola.



Se o bloco se deslocou na parte positiva do eixo x , temos que $\vec{r} = \hat{i}|x|$ e portanto a força aponta para o sentido negativo do eixo: $\vec{F} = -k|x|\hat{i}$



Se o bloco se deslocou na parte negativa do eixo x , temos que $\vec{r} = -\hat{i}|x|$ e portanto a força aponta para o sentido positivo do eixo: $\vec{F} = k|x|\hat{i}$.

O trabalho realizado pela mola para levar o corpo de uma posição inicial até uma posição final será:

$$W_r = \int_i^f \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_i^f \left(-k\vec{r}\right) \cdot d\vec{r}$$

Como o deslocamento se dá no eixo x , temos que:

$$\begin{cases} \vec{r} = \hat{i}x \\ d\vec{r} = \hat{i}dx \end{cases} \quad \therefore \quad \vec{r} \cdot d\vec{r} = x\,dx$$

logo, o trabalho realizado pela mola será

$$W_{if} = -k\int_i^f x\,dx = -k\frac{x^2}{2}\bigg|_{x_i}^{x_f} = -\frac{k}{2}\left(x_f^2 - x_i^2\right)$$

Uma partícula em queda livre

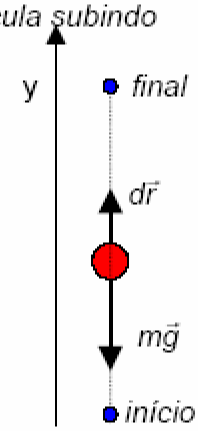
Quando uma partícula se movimenta sob a ação da gravidade, esta é a única força que nela atua.

Quando a ***partícula estiver subindo***, o deslocamento elementar $d\vec{r}$ e a força peso têm sentidos contrários, logo o trabalho executado pela força peso entre as posições inicial e final será:

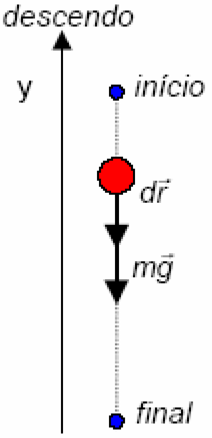
$$W_{if} = \int_i^f \left(-mg\,\hat{j}\right)\cdot\left(\hat{j}\,dy\right) = -mg\int_i^f dy$$

$$W_{if} = -\,mg\,(\,y_f - y_i\,)$$

Partícula subindo



Partícula descendo



Quando a ***partícula estiver descendo***, o deslocamento elementar $d\vec{r}$ e a força peso têm mesmo sentido, logo o trabalho executado pela força peso entre as posições inicial e final será:

$$W_{if} = \int_i^f \left(mg\,\hat{j}\right)\cdot\left(\hat{j}\,dy\right) = mg\int_i^f dy$$

$$W_{if} = mg\,(\,y_f - y_i\,)$$

Quando a partícula está subindo a força peso executa uma trabalho negativo, e como conseqüência diminui a energia cinética da partícula. Por outro lado, quando a partícula está descendo a força peso executa uma trabalho positivo, e como conseqüência aumenta a energia cinética da partícula.

Energia cinética

Define-se a energia cinética de uma partícula de massa m que viaja com velocidade v , como:

$$K = \frac{1}{2} m v^2$$

Mostraremos adiante que o trabalho realizado pela resultante de forças que atua em uma corpo é igual à variação da sua energia cinética, ou seja:

$$W_{if} = \Delta K = K_f - K_i$$

Teorema do trabalho - energia cinética

Considere uma partícula de massa m que se move sob a ação de uma resultante de forças F . O trabalho W realizado por esta força dobre a partícula será:

$$W = \int_i^f F(x)\,dx = \int_i^f (ma)\,dx$$

mas, por outro lado

$$(ma)dx = \left(m\frac{dv}{dt}\right)dx = \left(m\frac{dv}{dt}\right)\left(\frac{dx}{dt}dt\right) = \left(m\frac{dx}{dt}\right)\left(\frac{dv}{dt}dt\right) = (mv)(dv)$$

ou seja:

$$W = \int_i^f m v dv = \frac{1}{2}mv^2\Big|_i^f = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2$$

Considerando que

$$K = \frac{1}{2} m v^2$$

temos

$$W = K_f - K_i = \Delta K$$

Potência

A potência mede a capacidade de um sistema produzir (ou absorver) energia. Ela é a razão entre a energia produzida (ou absorvida) e o intervalo de tempo necessário para essa produção (ou absorção).

Dependendo do nosso interesse ou dos nossos instrumentos podemos desejar medir a potência média ou potência instantânea.

Potência média

Nos dá a medida da energia produzida (ou absorvida) W num certo intervalo de tempo t .

$$\overline{P} = \frac{W}{t}$$

Potência instantânea

Nos dá a medida da energia produzida (ou absorvida) num intervalo de tempo muito pequeno, daí instantânea. É útil quando queremos acompanhar a produção (ou absorção) de energia de maneira precisa.

$$P = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{dW}{dt}$$

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad \Rightarrow \quad P = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} \quad \therefore \quad P = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

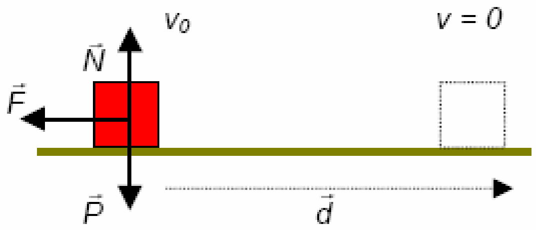
Solução de alguns problemas

Capítulo 7 - Halliday, Resnick e Walker - 4ª. edição	
04	Um objeto de $102kg$ está inicialmente movendo-se em linha reta com uma velocidade de $53m/s$. Se ele sofre uma desaceleração de $2m/s^2$ até ficar imóvel:

a) Qual a intensidade da força utilizada?

$$\vec{F} + \vec{P} + \vec{N} = m\vec{a}$$

Decompondo as forças segundo eixos cartesianos, encontramos:



$$\begin{cases} F = ma \\ N - P = 0 \end{cases}$$

Logo:

$$F = ma = 204N$$

b) Qual a distância que o objeto percorreu antes de parar?

$$v^2 = v_0^2 - 2ad \quad \therefore \quad d = \frac{v_0^2}{2a} = 702{,}25m$$

c) Qual o trabalho realizado pela força de desaceleração?

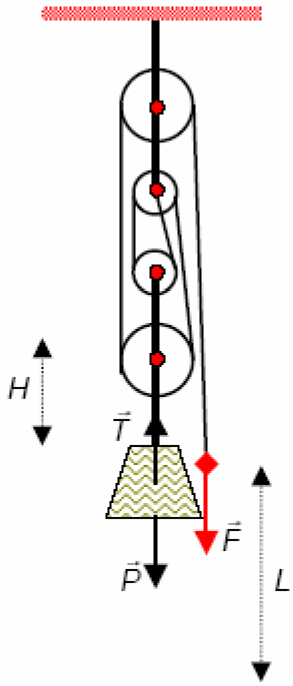
Podemos calcular o trabalho de duas maneiras equivalentes:

$$\left.\begin{array}{r} W = \vec{F} \cdot \vec{d} = -Fd \\ W = \Delta K = -\frac{1}{2} m v_0^2 \end{array}\right\} \quad \therefore \quad W = -\ 143.259 Joules$$

Capítulo 7 - Halliday, Resnick e Walker - 4ª. edição

09 A figura ao lado mostra um conjunto de polias usado para facilitar o levantamento de um peso **P** . Suponha que o atrito seja desprezível e que as duas polias de baixo, às quais está presa a carga, pesem juntas *20N* . Uma carga de *840N* deve ser levantada *12m* .

a) Qual a força mínima $\vec{F}$ necessária para levantar a carga?



Ao puxar a corda exercendo a força $\vec{N}$, executaremos um certo trabalho W . Ao elevar o peso P , o conjunto de roldanas executará, também, um certo trabalho. Esses dois trabalhos serão iguais, pois a energia em questão é aquela que fornecemos ao atuar com a força $\vec{F}$. A força mínima que o conjunto de roldanas deve fazer atuar sobre o corpo para elevá-lo com velocidade constante de uma altura H é igual ao peso do corpo, logo:

$$W = P\,H$$

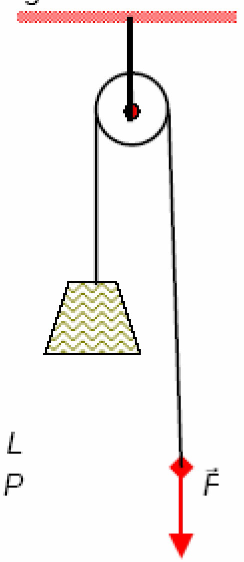
Para elevar o corpo de uma altura H ,
deveremos puxar a corda (com $\vec{F}$) de um comprimento L , logo:

$$W = F\,L$$

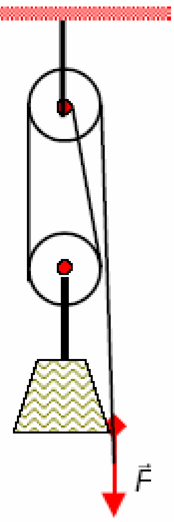
e como esses trabalhos são iguais:

$$W = PH = FL \quad \therefore \quad F = \frac{H}{L}P$$

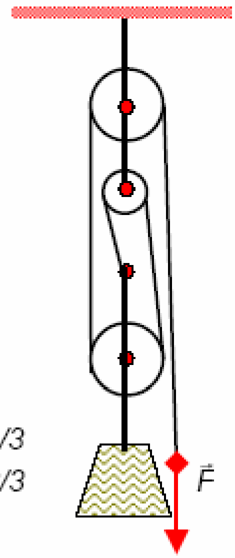
Para descobrir qual a relação entre H e L deste problema, vamos fazer uma analogia com outros tipos de arranjos de roldanas.



$H = L$
$F = P$



$H = L/2$
$F = P/2$



$H = L/3$
$F = P/3$

No arranjo mais simples, o da esquerda da figura anterior, temos *1 corda* e um tirante. No arranjo seguinte temos *2 cordas* e um tirante e no terceiro arranjo temos *3 cordas* e um tirante.
No nosso problema temos *4 cordas* e um tirante, logo:

$$H = L/4$$
$$F = P/4 = (840 + 20)/4 = 215N$$

b) Qual o trabalho executado para levantar a carga até a altura de $H = 12m$?

$$W = P\,H = (840 + 20)\,12 = 10.320 Joule$$

c) Qual o deslocamento da extremidade livre da corda?

$$L = 4H = 48m$$

d) Qual o trabalho executado pela força $\vec{F}$ para realizar esta tarefa?

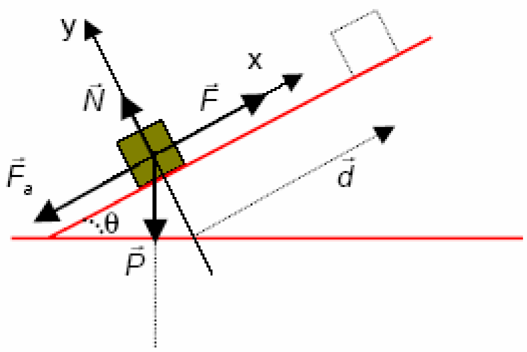
$$W = F\,L = 10.320 Joules$$

Capítulo 7 - Halliday, Resnick e Walker - 4ª. edição	
11	Uma arca de $50kg$ é empurrada por uma distância de $6m$, com velocidade constante, numa rampa com inclinação de 30^0 por uma força horizontal constante. O coeficiente de atrito cinético entre a arca e a rampa é $0,20$.

a) Calcule o trabalho realizado pela força aplicada.

Como a arca se move com velocidade constante, a aceleração é nulo e portanto:

$$\vec{F}_a + \vec{F} + \vec{P} + \vec{N} = 0$$



Decompondo as forças, encontramos:

$$\begin{cases} N - P\cos\theta = 0 \\ F - P\,\mathrm{sen}\theta - F_a = 0 \end{cases}$$

Mas $F_a = \mu_C\,N$, logo

$$F = F_a - P\,sen\theta = \mu_C\,N + P\,sen\theta$$

$$F = P\,(\,sen\theta + \mu_C\,cos\theta\,)$$

$$W_F = \vec{F}\cdot\vec{d} = F\,d = 1.979,22 Joule$$

b) Calcule o trabalho realizado pelo peso da arca.

$$W_P = \vec{P} \cdot \vec{d} = -\ P\ d\ sen\theta = -\ 1.470 Joules$$

c) Calcule o trabalho realizado pela força de atrito.

$$W_a = \vec{F}_a \cdot \vec{d} = -\ F_a\ d = \mu_C\ N\ d = \mu_C\ P\ d\ cos\theta = -509{,}22$$

É fácil perceber que é nulo o trabalho executado pela resultante de forças. Podemos mostrar isso de diversas maneiras:

$$W_R = \left(\vec{F} + \vec{P} + \vec{F}_a + \vec{N}\right) \cdot \vec{d} = W_F + W_P + W_a + W_N = 0$$

O trabalho executado pela normal é nulo pois ela é perpendicular ao vetor deslocamento.

$$W_R = \Delta K = 0$$

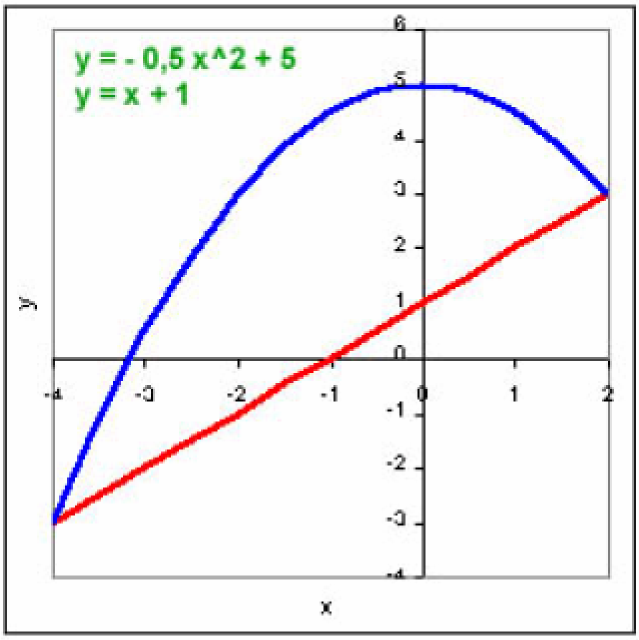
Capítulo 7 - Halliday, Resnick e Walker - 4ª. edição	
17	Qual o trabalho realizado por uma força $\vec{F} = 2x\,\hat{i} + 3\,\hat{j}$ (em Newtons) , onde x está em metros, que é exercida sobre uma partícula enquanto ela se move da posição inicial $\vec{r}_i = 2\,\hat{i} + 3\,\hat{j}$ (em metros) até a posição final $\vec{r}_f = -4\,\hat{i} - 3\,\hat{j}$ (em metros) ?

$r_i = (\ 2,\ 3\ )$
$r_f = (\ -4\ ,\ -3\ )$

Como não foi mencionada a trajetória, podemos escolher diversos percursos para a partícula entre os pontos inicial e final.
Vamos calcular o trabalho usando duas trajetórias: a reta que une os dois pontos e uma parábola que passa por eles.
Como já foi dito anteriormente:

$$W_{if} = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$W_{if} = \int_i^f \left[F_x(x,y)dx + F_y(x,y)dy\right]$$



a) Vamos considerar inicialmente a trajetória retilínea $y(x) = x + 1$

A imposição da trajetória no cálculo da integral acontece quando usamos na força e nas diferenciais a dependência $y(x)$ definida pela trajetória.

$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = F_x(x, y(x))dx + F_y(x, y(x))\left(\frac{dy}{dx}\right)dx$$

Teremos desse modo, todo o integrando como função de x .

Neste problema:

$$\vec{F} = 2x\,\hat{i} + 3\,\hat{j} \quad \text{e} \quad \frac{dy}{dx} = 1$$

logo

$$\vec{F}\cdot d\vec{r} = 2x\,dx + 3\,dx = (2x+3)dx$$

$$W_{if} = \int_{+2}^{-4}(2x+3)dx = x^2\Big|_{+2}^{-4} + 3x\Big|_{+2}^{-4} = (16-4) + 3(-4-2) = 12 - 18 = -6J$$

b) Vamos considerar inicialmente a trajetória parabólica $y = -x^2/2 + 5$.

Neste problema:

$$\vec{F} = 2x\,\hat{i} + 3\,\hat{j} \quad \text{e} \quad \frac{dy}{dx} = -x$$

$$\vec{F}\cdot d\vec{r} = 2x\,dx + 3(-x)dx = -x\,dx$$

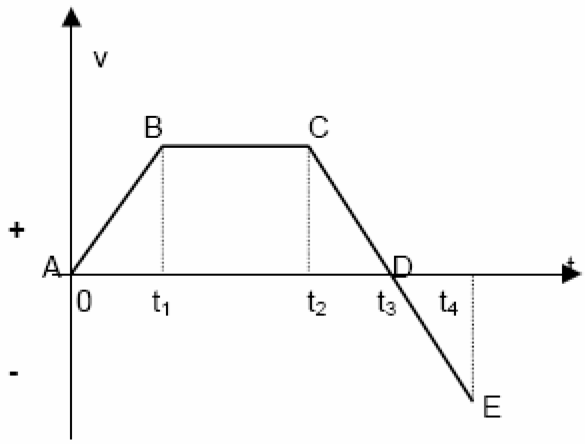
$$W_{if} = \int_{+2}^{-4} -x\,dx = -\frac{x^2}{2}\Bigg|_{+2}^{-4} = -\frac{1}{2}(16-4) = -6J$$

Não foi por acaso que o resultado do trabalho executado entre dois pontos, por essa força, não dependeu da trajetória. Existe uma categoria de forças - chamadas forças conservativas - para as quais o trabalho entre dois pontos só depende desses pontos. De modo geral, uma força $\vec{F}(\vec{r},t)$ é conservativa quando o seu rotacional é nulo, ou seja:

$$\nabla \times \vec{F}(\vec{r},t) = 0$$

Capítulo 7 - Halliday, Resnick e Walker - 4ª. edição

26 Uma força única age sobre um corpo que está se movendo em linha reta. A figura a seguir mostra o gráfico da velocidade em função do tempo para esse corpo. Determine o sinal (positivo ou negativo) do trabalho realizado pela força sobre o corpo nos intervalos AB , BC, CD e DE



AB Neste intervalo a curva é uma reta, que passa pela origem, e portanto a velocidade é uma função crescente do tempo até atingir um certo valor $\mathbf{v_0}$, e tem a forma:

$$v = a_1\,t$$

O movimento é unidimensional e a velocidade é crescente, logo a força atua na direção do deslocamento e desse modo:

$$W_{AB} = \vec{F}\cdot\vec{d} = Fd > 0$$

BC Neste intervalo a velocidade é constante $\mathbf{v_0}$, logo a aceleração é nula e portanto a força resultante também é nula. Consequentemente o trabalho da força resultante será nulo:

$$W_{BC} = 0$$

CD Neste intervalo a velocidade é decrescente, iniciando o intervalo com valor $\mathbf{v_0}$ e terminando com velocidade nula. A forma funcional é do tipo:

$$v = v_0 - a_2 (t - t_2)$$

onde $a_2 > 0$. O movimento é unidimensional e a velocidade é decrescente, logo a força atua na direção contrária ao deslocamento e desse modo:

$$W_{CD} = \vec{F} \cdot \vec{d} = -Fd < 0$$

DE Neste intervalo o corpo começa a recuar, com a mesma aceleração a_2 do intervalo anterior.

$$v = - a_2 (t - t_3)$$

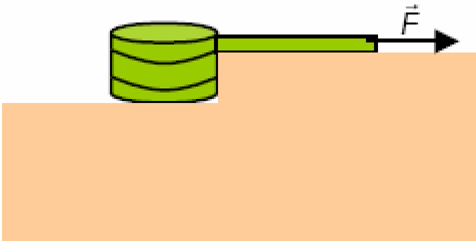
O módulo da velocidade aumenta e ela assume valores negativos cada vez maiores.
Ao contrário do item anterior, o corpo está sendo acelerado e temos força e deslocamento no mesmo sentido.

$$W_{DE} = \vec{F} \cdot \vec{d} = Fd > 0$$

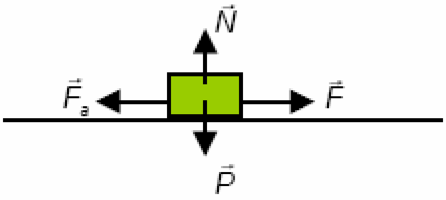
:apítulo 7 - Halliday, Resnick e Walker - 4ª. edição

:7 Uma mangueira de incêndio é desenrolada puxando-se horizontalmente uma de suas extremidades ao longo de uma superfície sem atrito com velocidade constante de $2,3m/s$. A massa de $1m$ de mangueira é $0,25kg$ .Qual a energia cinética fornecida para desenrolar $12m$ de mangueira?

A força $\vec{F}$ é uma força variável porque à medida que a mangueira é desenrolada uma maior parte dela passa a se movimentar em contato com o solo e atritando-se com ele. Como o atrito vai aumentado a força externa deve aumentar para que a mangueira desenrolada tenha velocidade constante.



$$\vec{F} + \vec{F}_a + \vec{N} + \vec{P} = 0$$



$$\begin{cases} N - P = 0 \\ F - F_a = 0 \end{cases} \quad \therefore \quad F = F_a = \mu_c N = \mu_c P$$

onde P é a parte da mangueira que está em movimento. A densidade linear de massa λ da mangueira é passível de ser calculada:

$$\lambda = \frac{M}{L} = 0,25kg/m$$

Quando a mangueira tiver um comprimento x desenrolado e em movimento, o peso dessa parte será $P(x)$ onde:

$$P(x) = \lambda\, g\, x$$

Então:

$$F(x) = \mu_C\, \lambda\, g\, x$$

O trabalho será:

$$W = \int_0^L F(x)dx = \mu_c \lambda\, g \int_0^L x\, dx = \mu_c \lambda\, g \frac{L^2}{2}$$

Apesar do enunciado ter induzido uma solução nessa direção, não se pode resolver desse modo pois não se conhece o coeficiente de atrito μ_C entre a mangueira e o piso.

No entanto a solução é muito mais simples! E noutra direção, já que não se pediu o trabalho para vencer o atrito enquanto se desenrola, mas para se vencer a inércia.

O trabalho da força resultante é igual à variação da energia cinética. Existe uma força, e não é essa força $\vec{F}$ mencionada, responsável por tirar do repouso, aos poucos - infinitesimalmente, cada parte da mangueira. Ela atua por um instante! O trabalho que ela produz é aquele necessário para colocar *TODA* a mangueira em movimento de velocidade constante.

$$W = \Delta K = \frac{1}{2} Mv^2 = \frac{1}{2}(\lambda\, L)v^2 = 7,935 Joules$$

Capítulo 7 - Halliday, Resnick e Walker - 4ª. edição

32 Um homem que está apostando corrida com o filho, tem a metade da energia cinética do garoto, que tem a metade da massa do pai. Esse homem aumenta a sua velocidade em 1m/s e passa a ter a mesma energia cinética da criança.
Quais eram as velocidades originais do pai e do filho?

Vamos equacionar as várias informações fornecidas:

i. $K_H = \frac{1}{2} K_G \quad \therefore \quad \left(\frac{1}{2} M_H V_H^2\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} M_G V_G^2\right)$

ii. $\frac{M_H}{2} = M_G \quad \therefore \quad M_H = 2M_G$

iii. $\frac{1}{2} M_H (V_H + 1)^2 = \frac{1}{2} M_G V_G^2$

Usando i. e ii. encontramos:

$$\frac{1}{2}(2M_G)V_H^2 = \frac{1}{4}M_G V_G^2 \quad \Rightarrow \quad V_H^2 = \frac{V_G^2}{4} \quad \therefore \quad V_G = 2V_H$$

Usando ii. e iii. encontramos:

$$\frac{1}{2}(2M_G)(V_H + 1)^2 = \frac{1}{2}M_G V_G^2 \quad \Rightarrow \quad (V_H + 1)^2 = \frac{V_G^2}{2}$$

Usando os dois últimos resultados, encontramos:

$$(V_H + 1)^2 = \frac{(2V_H)^2}{2} = 2V_H^2 \quad \therefore \quad V_H = \frac{1}{\sqrt{2} - 1}$$

e finalmente:

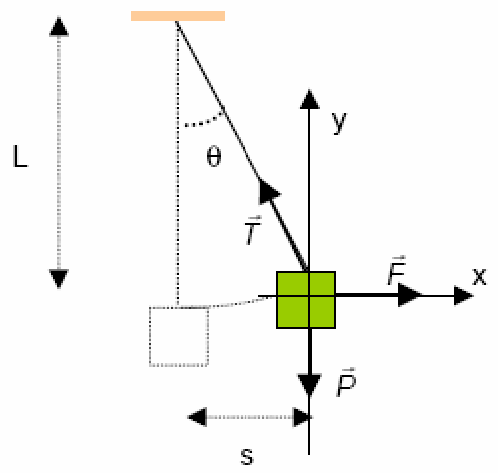
$$V_H = 2{,}41 m/s \quad \text{e} \quad V_G = 4{,}82 m/s$$

Capítulo 7 - Halliday, Resnick e Walker - 4ª. edição	
37	Um caixote com uma massa de *230kg* está pendurado na extremidade de uma corda de *12m* de comprimento. Ele é empurrado com uma força horizontal variável $\vec{F}$, até deslocá-lo de *4m* horizontalmente.

a) Qual o módulo de $\vec{F}$ quando o caixote se encontra na posição final?

Vamos considerar que o caixote é deslocado com velocidade constante. Nada foi mencionado à respeito, então escolheremos a situação mais simples, pois nesse caso a aceleração será nula. Sendo assim, a segunda Lei de Newton terá a forma:

$$\vec{T} + \vec{F} + \vec{P} = 0$$



Decompondo essas forças, encontramos:

$$\begin{cases} F - T\,\text{sen}\theta = 0 \\ T\cos\theta - P = 0 \end{cases}$$

$$\frac{T\,\text{sen}\theta}{T\cos\theta} = \frac{F}{P} = \tan\theta \quad \therefore \quad F = P\tan\theta$$

Mas

$$\tan\theta = \frac{s}{r} = \frac{s}{\sqrt{L^2 - s^2}} \quad \Rightarrow \quad F = \left(\frac{s}{\sqrt{L^2 - s^2}}\right)P = 796{,}90N$$

b) Qual o trabalho total executado sobre o caixote?

Como a resultante de forças é nula, o trabalho executado por essa força é nulo.

c) Qual o trabalho executado pela corda sobre o caixote?

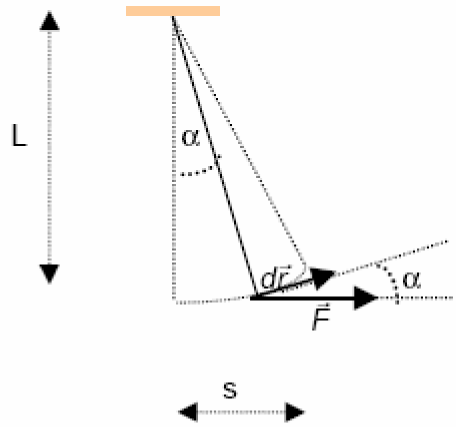
O trabalho elementar executado pela força $\vec{F}$ é dado por:

$$dW_F = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F\,dr\cos\alpha$$

Mas já foi mostrado que

$$F = P\tan\alpha$$

e podemos observar que



$$dr = L\,d\alpha$$

logo

$$dW_F = (P\tan\alpha)(L\,d\alpha)\cos\alpha$$

$$dW_F = L\,P\,\text{sen}\alpha\,d\alpha$$

$$W_F = \int_i^f dW_F = \int_0^\theta L\,P\,\text{sen}\alpha\,d\alpha$$

$$W_F = -L\,P\cos\alpha\Big|_0^\theta = L\,P(1-\cos\theta)$$

Se considerarmos H como a altura que o caixote foi elevado:

$$H = L - L\cos\theta = L(1-\cos\theta)$$

e então

$$W_F = P\,H = m\,g\,H$$

Mas como

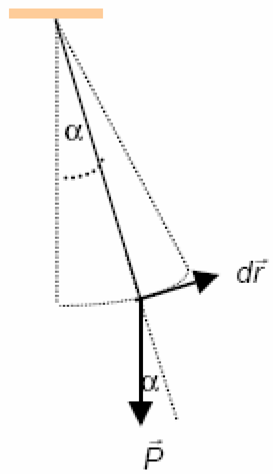
$$H = L(1-\cos\theta) = L\left(1-\frac{\sqrt{L^2-s^2}}{L}\right) = L-\sqrt{L^2-s^2} = 0{,}686m$$

temos

$$W_F = m\,g\,H = 1.546{,}90Joules$$

d) Qual o trabalho executado pelo peso do caixote?

O trabalho elementar executado pela força $\vec{P}$ é dado por:



$$dW_P = \vec{P} \cdot d\vec{r} = F\,dr\cos(\alpha+90^0)$$

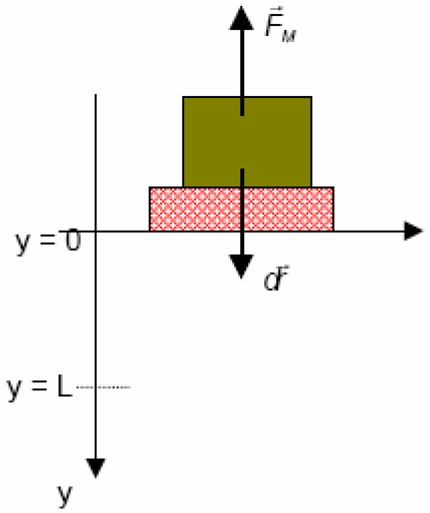
$$dW_P = -P\,\text{sen}\alpha\,dr = -PL\,\text{sen}\alpha\,d\alpha$$

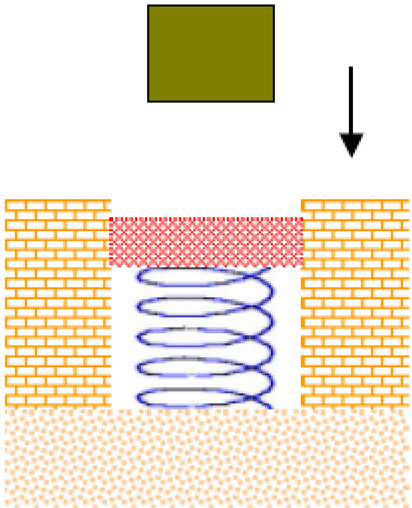
$$W_P = \int_i^f dW_P = -LP\int_0^\theta \text{sen}\alpha\,d\alpha = -W_F$$

$$W_P = -\,m\,g\,H = -\,1.546{,}90Joules$$

38 Um bloco de $250g$ é deixado cair sobre uma mola vertical com uma constante de mola $k = 2,5N/cm$. A compressão máxima da mola produzida pelo bloco é de 12cm.

a) Enquanto a mola está sendo comprimida, qual o trabalho executado pela mola?





$m = 250g = 0,25kg$
$k = 2,5N/cm = 250N/m$
$L = 12cm = 0,12m$

O trabalho é definido como:

$$W = \int_i^f \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

O elemento de integração $d\vec{r}$ tem comprimento infinitesimal e aponta na direção de integração, portanto neste caso teremos $d\vec{r} = \hat{j}\,dy$. Como foi definido anteriormente, a força que a mola exerce no objeto é dada pela Lei de Hooke:

$$\vec{F}_M = -k\,y\,\hat{j}$$

e o trabalho executado por essa força será:

$$W_M = \int_i^f dW = \int_0^L \left(-k\,y\,\hat{j}\right)\cdot\left(\hat{j}\,dy\right) = -k\int_0^L y\,dy = -\frac{1}{2}kL^2 = -\ 1,8J$$

b) Enquanto a mola está sendo comprimida, qual o trabalho executado pelo peso do bloco?

$$\vec{P} = m\vec{g} = \hat{j}\,m\,g$$

$$W_P = \int_i^f dW = \int_0^L \left(\hat{j}\,m\,g\right)\cdot\left(\hat{j}\,dy\right) = mg\int_0^L dy = mgL = +\ 0,294J$$

c) Qual era a velocidade do bloco quando se chocou com a mola?

O trabalho executado pela força resultante é igual a variação da energia cinética. A força resultante é:

$$\vec{F}_R = \vec{F}_M + \vec{P}$$

e o trabalho executado por essa força será:

$$W_R = \int_i^f \vec{F}_R \cdot d\vec{r} = \int_i^f \left(\vec{F}_M + \vec{P}\right) \cdot d\vec{r} = \int_i^f \vec{F}_M \cdot d\vec{r} + \int_i^f \vec{P} \cdot d\vec{r} = W_M + W_P = \Delta K$$

$$\Delta K = K_f - K_i = -K_i = -\frac{1}{2}mv^2 = W_R \quad \therefore \quad v = \sqrt{\frac{-2W_R}{m}} = 3{,}47 m/s$$

d) Se a velocidade no momento do impacto for multiplicada por dois, qual será a compressão máxima da mola? Suponha que o atrito é desprezível.

Vamos considerar que nessa nova situação a mola se comprimirá de H . Refazendo o raciocínio anterior, temos:

$$W_R' = -\frac{1}{2}kH^2 + mgH = \Delta K' = -\frac{1}{2}m(2v)^2 = -2mv^2$$

$$-\frac{1}{2}kH^2 + mgH + 2mv^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad H^2 - \left(\frac{2mg}{k}\right)H - \left(\frac{4mv^2}{k}\right) = 0$$

A única solução positiva dessa equação é:

$$H = 0{,}23 m$$

Trabalho e energia potencial

Quando a força for conservativa, podemos definir a energia potencial associada à essa força. Define-se a diferença de energia potencial ΔU entre os pontos $\vec{r}_i$ e $\vec{r}_f$ do seguinte modo:

$$\Delta U = U(\vec{r}_f) - U(\vec{r}_i) = -W_{if} = -\int_i^f \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

ou seja:

$$U(\vec{r}) = U(\vec{r}_0) - \int_{r_0}^{r} \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad \Rightarrow \quad \vec{F}(\vec{r}) = -\nabla U(\vec{r})$$

A energia potencial é sempre definida em relação a um determinado referencial de energia. No caso anterior, definiu-se a energia potencial $U(\vec{r})$ no ponto definido pelo vetor $\vec{r}$, em relação à energia potencial $U(\vec{r}_0)$ no ponto definido pelo vetor $\vec{r}_0$. Estamos definindo, desse modo, um referencial $U(\vec{r}_0)$ de energia potencial e todos os outros valores serão medidos em relação a este referencial.

Forças conservativas - Energia mecânica

Já foi estabelecido que o trabalho executado pela força resultante é igual a variação da energia cinética. Ou seja:

$$W_{if} = \Delta K = K_f - K_i$$

mas tendo em vista os resultados anteriores:

$$W_{if} = \Delta K = -\Delta U \quad \therefore \quad \Delta(K + U) = \Delta E = 0 \quad onde \quad E = K + U$$

onde essa dedução é absolutamente geral, apesar de ter sido feita para apenas uma força atuando em apenas uma partícula. Ela é válida para um sistema composto de um número qualquer de partículas, quando estão atuando nessas partículas quaisquer quantidade de forças conservativas.

A nova grandeza definida, ***a energia mecânica*** $E = K + U$ é uma constante de movimento

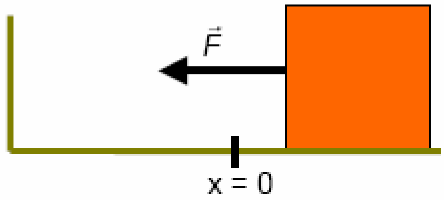
$$E = \frac{1}{2} m v^2 + U(\vec{r}) = constante$$

Algumas forças tem uma existência marcante, seja no meio acadêmico ou na vida prática. Vamos calcular a energia potencial associada a algumas destas forças.

O sistema massa - mola encontra-se presente no dia a dia como exemplo de sistema conservativo oscilante, onde a força que a mola exerce é variável. Esse é um tipo de força elástica.

Energia potencial elástica

$$U(\vec{R}) = U(0) - \int_0^{\vec{R}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\int_0^{\vec{R}} \left(-k\vec{r}\right) \cdot d\vec{r}$$



Como o deslocamento se dá no eixo x , temos que:

$$\begin{cases} \vec{r} = \hat{i}x \\ d\vec{r} = \hat{i}dx \end{cases} \quad \therefore \quad \vec{r} \cdot d\vec{r} = x\,dx$$

logo, o trabalho realizado pela mola será:

$$U(L) = U(0) + k\int_0^L x\,dx = U(0) + k\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^L = \frac{1}{2}kL^2$$

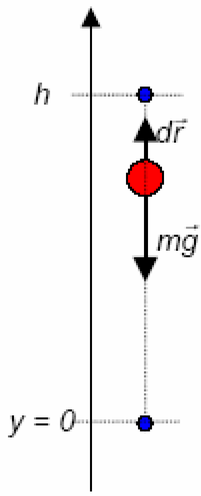
onde estamos considerando o referencial de energia potencial $U(\,x = 0\,) = 0$

Considerando o resultado anterior, dizemos que a energia potencial elástica de um sistema massa - mola tem a forma:

$$U(x) = \frac{1}{2}k\,x^2$$

Outro exemplo interessante é a energia potencial associada à força gravitacional. É um caso de energia potencial associada a uma força constante.

Energia potencial gravitacional



$$U(\vec{R}) = U(0) - \int_0^{\vec{R}} \vec{F} \cdot d\vec{r} \qquad \text{onde} \qquad \begin{cases} \vec{F} = -\hat{j}\,mg \\ d\vec{r} = \hat{j}\,dy \end{cases}$$

$$U(h) = U(0) - \int_0^h \left(-mg\,\hat{j}\right) \cdot \hat{j}\,dy = mg\int_0^h dy$$

$$U(\,h\,) = m\,g\,h$$

onde estamos considerando o referencial de energia potencial $U(\,x = 0\,) = 0$.

Considerando o resultado anterior, dizemos que a energia potencial gravitacional tem a forma:

$$U(\,y\,) = m\,g\,y$$

Cálculo da trajetória a partir do potencial

Podemos conhecer a trajetória de uma partícula a partir do conhecimento do potencial ao qual ela está submetida. Quando temos a forma do potencial, como foi mencionado, ele obedece à equação:

$$E = \frac{1}{2} m v^2 + U(x) = cons\tan te$$

ou seja:

$$\frac{1}{2} m v^2 = E - U(x) \quad \Rightarrow \quad v = \frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}\left[E - U(x)\right]} \quad \therefore \quad dt = \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}\left[E - U(x)\right]}}$$

$$\int_{t_0}^{t} dt = t - t_0 = \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}\left[E - U(x)\right]}}$$

ou seja:

$$t = t_0 + \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}\left[E - U(x)\right]}}$$

À partir da forma da energia potencial *U(x)* poderemos calcular a trajetória da partícula ao fazer o cálculo da integral indicada.

Usando a curva da energia potencial

Em diversas situações não é possível fazer o cálculo da integral de movimento. Mas mesmo nesse caso, a equação da conservação da energia

$$E = \frac{1}{2} m v^2 + U(x) = cons\tan te$$

ou a equação que se origina nela

$$t = t_0 + \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}\left[E - U(x)\right]}}$$

nos dará informações úteis sobra a solução ou sobre o comportamento da partícula.

Como a energia mecânica E é igual à soma das energias potencial *U(x)* mais cinética K, o maior valor da energia potencial será quando toda a energia mecânica for potencial, ou seja:

$$E \geq U(x)$$

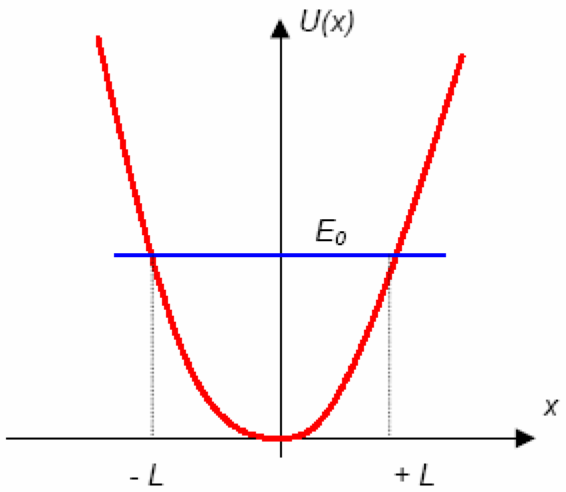
O gráfico da energia potencial elástica é um exemplo simples da utilidade da análise do movimento de uma partícula a partir da forma funcional da energia potencial.

Vamos considerar que a energia mecânica deste sistema tem valor E_0 .

i. Quando $x = \pm L$ toda a energia mecânica está sob a forma de energia potencial. Esses pontos $x = \pm L$ são chamados pontos de inversão pois ao chegar neles a velocidade da partícula se anula e inverte o sentido.

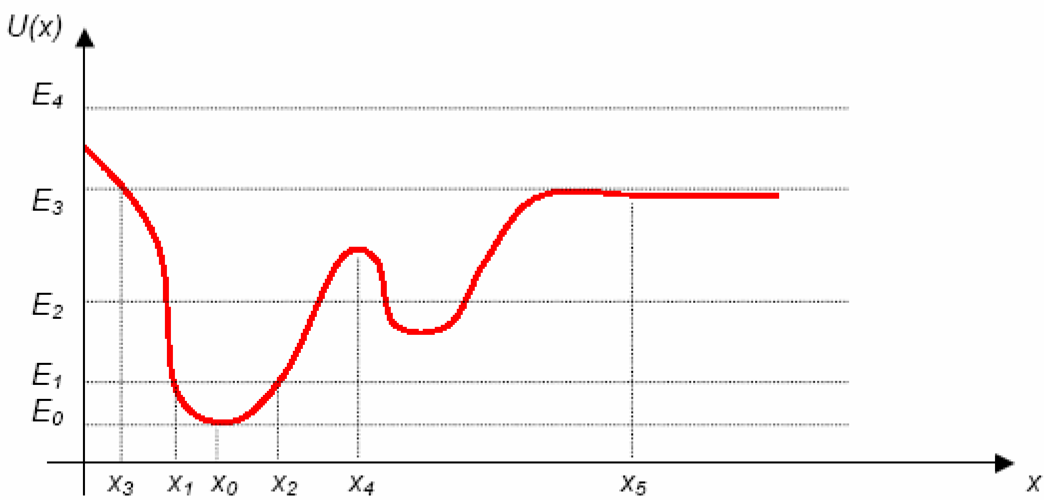
ii. Quando $x = 0$ toda a energia mecânica é cinética.

iii. O movimento da partícula está confinado à região $-L \geq x \geq +L$.



A seguir mostramos um gráfico da energia potencial de uma partícula, que tem um comportamento rico em detalhes.

De modo geral o gráfico da energia potencial de uma partícula apresenta várias situações físicas. Mostra o problema para vários valores de energia mecânica. Para cada valor de energia mecânica a partícula se comporta de um modo diferente.



a. $E = E_0$

Para esse valor de energia mecânica, toda a energia é potencial e portanto a energia cinética será sempre zero. A partícula vai estar permanentemente localizada na posição $x = x_0$ *e com velocidade nula.*

Como um exemplo dessa situação podemos lembrar uma mola que está em sua posição de equilíbrio com velocidade nula. Ele vai permanecer indefinidamente nessa situação.

b. $E = E_1$

Como $E \geq U(x)$ para esse valor de energia mecânica $x_1 \geq x \geq x_2$. A partícula está confinada a se movimentar entre os pontos x_1 e x_2 , passando pelo ponto x_0 , de mínimo da energia potencial e consequentemente de máximo da energia cinética. Nos pontos x_1 e x_2 temos $E_1 = U(x_1) = U(x_2)$, e portanto toda a energia é potencial. Isso implica que a energia cinética é nula nesses pontos. Esses pontos são chamados pontos de retorno (ou pontos de inversão) pois a partícula estava se movendo em um sentido, sua velocidade se anulou e ela retornou usando o sentido contrário.

Como um exemplo dessa situação podemos considerar uma mola que está em sua posição de equilíbrio com uma certa velocidade não nula. Ela vai ficar se movendo entre duas posições e sempre passando pelo ponto de máxima energia cinética. Como exemplo apenas de ponto de retorno podemos considerar uma pedra lançada verticalmente para cima. Ao atingir o ponto de máxima altura ela irá parar e começará o retorno. nesse ponto a energia cinética é nula.

c. $E = E_2$
Existem quatro pontos de retorno

d. $E = E_3$
Existe apenas um ponto de inversão. Se a partícula estiver se movendo em direção ao ponto $x = 0$, ao chegar em $x = x_3$ ela pára, retornando no sentido contrário.

e. $E = E_4$
Não existem pontos de retorno.

Da relação entre força e potencial podemos fazer várias inferências. Como já foi mencionado anteriormente

$$U(\vec{r}) = U(\vec{r}_0) - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad \Rightarrow \quad \vec{F}(\vec{r}) = -\nabla U(\vec{r})$$

Em uma dimensão, a equação anterior tem a forma:

$$U(x) = U(x_0) - \int_{x_0}^{x} F(x) dx \quad \Rightarrow \quad F(x) = -\frac{d\,U(x)}{dx}$$

e desse modo podemos dizer que:

i. ***Mínimo de U(x) ⇒ F(x) = 0 ⇒ equilíbrio estável***
ii. ***Máximo de U(x) ⇒ F(x) = 0 ⇒ equilíbrio instável***
iii. ***U(x) = constante ⇒ F(x) = 0 ⇒ equilíbrio indiferente***

Podemos analisar as ***situações de equilíbrio*** no gráfico anterior do seguinte modo:

a. No ponto $x = x_0$ temos um ***equilíbrio estável*** e citaremos como exemplo dessa situação um pêndulo em equilíbrio na sua posição vertical inferior. Se alterarmos a sua posição, surge uma força restauradora e o sistema tende a voltar à posição de equilíbrio inicial

b. No ponto $x = x_4$ temos um **equilíbrio instável** e citaremos como exemplo dessa situação um pêndulo em equilíbrio na sua posição vertical superior. Se alterarmos a sua posição, surge uma força que afasta ainda mais o sistema de sua situação de equilíbrio inicial.

c. No ponto $x \geq x_5$ temos um **equilíbrio indiferente** . . Se alterarmos a sua posição não acontece nenhuma das duas situações anteriores. Uma exemplo desse caso seria um cone apoiado em uma face lateral.

Forças não conservativas

Vamos considerar que estão atuando N forças sobre uma dada partícula, de modo que a força resultante será dada por:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_N = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i$$

Como já foi mencionado, o trabalho executado pela força resultante é igual à variação da energia cinética da partícula:

$$\Delta K = W_F = W_1 + W_2 + \ldots + W_N = \sum_{i=1}^{N} W_i$$

onde W_i é o trabalho executado pela i-ésima força que está atuando na partícula.

Se forem ***conservativas*** todas as forças mencionadas, teremos:

$$\Delta K = \Sigma W_C = -\Sigma \Delta U \quad \therefore \quad \Delta K + \Sigma \Delta U = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta(K + \Sigma U) = \Delta E = 0$$

Para cada força conservativa teremos a sua energia potencial associada a ela, daí a soma das energias potenciais. A soma das energias potenciais com a energia cinética nos dá a energia mecânica E . Quando existem apenas forças conservativas, a energia mecânica não varia $\Delta E = 0$, sendo então uma constante de movimento.

Se, por outro lado, tivermos atuando também forças ***não - conservativas*** (*em particular a força de atrito*), teremos:

$$\Delta K = \Sigma W_C + \Sigma W_A = -\Sigma \Delta U + \Sigma W_A \quad \therefore$$

$$\Delta K + \Sigma \Delta U = \Sigma W_A \quad \Rightarrow$$

$$\Delta(K + \Sigma U) = \Delta E = \Sigma W_A$$

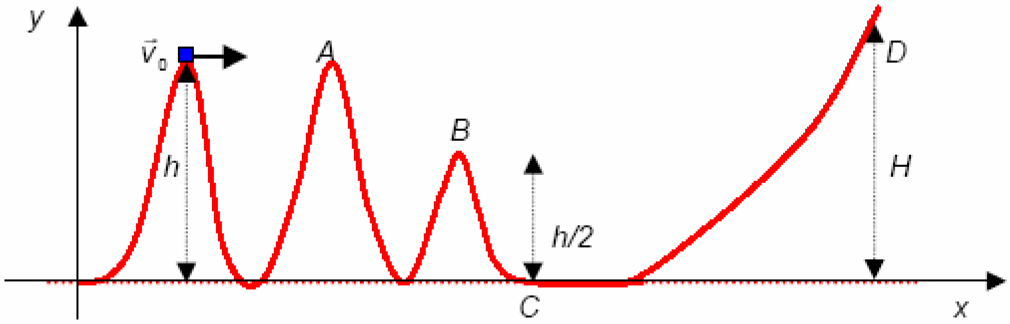
$$\Delta E = E_f - E_i = \Sigma W_A$$

como é negativo o trabalho executado pela força de atrito, acontecerá uma perda da energia mecânica; a energia mecânica fina será menor que a energia mecânica inicial

$$\Delta E < 0$$

Solução de alguns problemas

Capítulo 8 - Halliday, Resnick e Walker - 4ª. edição	
7	Um carrinho de montanha russa sem atrito chega ao alto da primeira rampa da figura a seguir com velocidade $\vec{v}_0$.



a) Qual a sua velocidade no ponto ***A*** ?

Considerando o ponto mais baixo da trajetória do carrinho como a origem do referencial da energia potencial, temos que

$$U(y=0) = 0 \quad \text{e} \quad U(y=h) = mgh$$

Desse modo, a energia mecânica inicial é dada por:

$$E_0 = \frac{mv_0^2}{2} + mgh$$

Como só estão atuando forças conservativas $E_A = E_0$ e como a altura do ponto A é a mesma altura da posição inicial as velocidades serão as mesmas:

$$v_A = v_0$$

b) Qual a sua velocidade no ponto ***B*** ?

$$E_0 = E_B \quad \therefore \quad \frac{mv_0^2}{2} + mgh = \frac{mv_B^2}{2} + mg\left(\frac{h}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad v_B = \sqrt{v_0^2 + gh}$$

c) Qual a sua velocidade no ponto ***C*** ?

$$E_0 = E_C \quad \therefore \quad \frac{mv_0^2}{2} + mgh = \frac{mv_C^2}{2} \quad \Rightarrow \quad v_C = \sqrt{v_0^2 + 2gh}$$

d) A que altura chegará à última rampa, que é alta demais para ser ultrapassada?

$$E_0 = E_D \quad \therefore \quad \frac{mv_0^2}{2} + mgh = mgH \quad \Rightarrow \quad H = h + \frac{v_0^2}{2g}$$

Capítulo 8 - Halliday, Resnick e Walker - 4ª. edição	
10	Um projétil de massa *2,40kg* é disparado para cima, do alto de uma colina de *125m* de altura, com uma velocidade de *150m/s* e numa direção que faz 41^0 com a horizontal.

a) Qual a energia cinética do projétil no momento em que é disparado?

$m = 2,40kg$
$h = 125m$
$v_0 = 150m/s$
$\theta_0 = 41^0$

$$K_0 = \frac{m v_0^2}{2} = 27.000J$$

b) Qual a energia potencial do projétil no mesmo momento? Suponha que a energia potencial gravitacional é nula na base da colina (*y=0*) .

$$U_0 = m\,g\,h = 2.940J$$

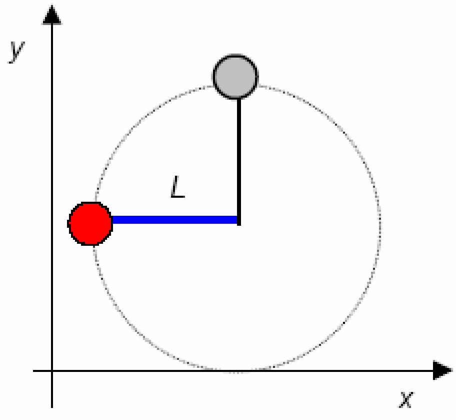
c) Determine a velocidade do projétil no momento em que atinge o solo. Supondo que a resistência do ar possa ser ignorada, as respostas acima dependem da massa do projétil?

$$E_F = E_0 \quad \therefore \quad \frac{m v_F^2}{2} = \frac{m v_0^2}{2} + mgh \quad \Rightarrow \quad v_F = \sqrt{v_0^2 + 2gh}$$

As respostas dos itens *a* e *b* dependem da massa do projétil, como pode ser constatado nas equações. A velocidade ao atingir o solo não depende da massa do projétil, como pode ser notado na equação anterior.

Capítulo 8 - Halliday, Resnick e Walker - 4ª. edição	
13	Uma bola de massa *m* está presa à extremidade de uma barra de comprimento *L* e massa desprezível. A outra extremidade da barra é articulada, de modo que a bola pode descrever um círculo no plano vertical. A barra é mantida na posição horizontal, como mostra a figura a seguir, até receber um impulso para baixo suficiente para chegar ao ponto mais alto do círculo com velocidade nula.

a) Qual a variação da energia potencial da bola?



Considerando o ponto mais baixo da trajetória da bola como a origem do referencial da energia potencial, temos que *U(y=0) = 0*. Desse modo, a energia potencial gravitacional é dada por

$$U(y) = m\,g\,y$$

A diferença de altura entre as posições inicial e final é *L* , logo:

$$\Delta U = m\,g\,\Delta y = m\,g\,L$$

b) Qual a velocidade inicial da bola?

Vamos considerar como origem da energia potencial o ponto mais baixo da trajetória da bola.

$$E_i = E_f$$

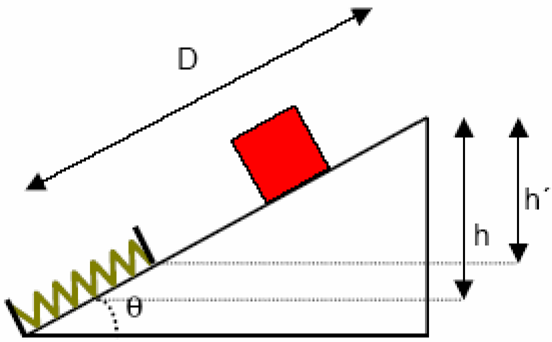
$$mgy_i + \frac{1}{2}mv_i^2 = mgy_f + \frac{1}{2}mv_f^2 \quad \Rightarrow \quad mgL + \frac{1}{2}mv_i^2 = mg(2L)$$

$$v_i = \sqrt{2gL}$$

Capítulo 8 - Halliday, Resnick e Walker - 4ª. edição	
17	Uma mola pode ser comprimida $2cm$ por uma força de $270N$. Um bloco de $12kg$ de massa é liberado a partir do repouso do alto de um plano inclinado sem atrito cuja inclinação é de 30^0. O bloco comprime a mola de $5,5cm$ antes de parar

a) Qual a distância percorrida pelo bloco até parar?

$L_0 = 2cm = 0,020m$
$F_0 = 270N$
$\theta = 30^0$
$m = 12kg$
$L = 5,5cm = 0,055m$



Inicialmente vamos calcular a constante elástica da mola:

$$F_0 = k\, L_0 \quad \therefore \quad k = 13.500N/m$$

Seja D a distância que o bloco irá percorrer antes de parar. Parte dessa distância ($D - L$) o bloco percorre livre e a outra parte (L) ele percorre comprimindo a mola. Inicialmente ele estava em repouso e tinha energia potencial gravitacional, e após o movimento de descida ele volta ao repouso e agora a sua energia e potencial elástica. Aconteceu uma transformação de energia: de potencial gravitacional para potencial elástica. temos portanto que:

$$mgh = \frac{1}{2}kL^2$$

Mas

$$h = D\ sen\theta$$

então

$$mgD\,\text{sen}\theta = \frac{1}{2}kL^2 \quad \therefore \quad D = \frac{kL^2}{2mg\,\text{sen}\theta} = 0,347m = 34,7cm$$

b) Qual a velocidade do bloco no instante em que se choca com a mola?

Quando o bloco percorreu livre a distância D - L , ele diminuiu a sua altura de h´, como mostrado na figura. Logo:

$$h' = (D - L)\,sen\theta = 0{,}146m$$

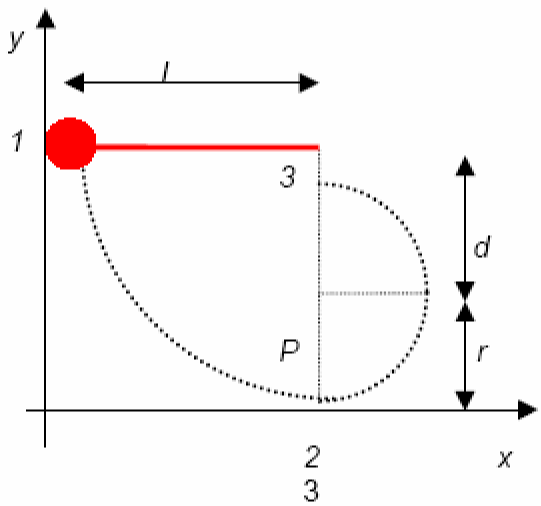
Se v for a velocidade com que o bloco se choca com a mola:

$$mgh' = \frac{1}{2}mv^2 \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{2gh'} = 1{,}69m/s$$

Capítulo 8 - Halliday, Resnick e Walker - 4ª. edição

23 A corda da figura a seguir tem $L = 120cm$ de comprimento e a distância d até o pino fixo P é $75cm$. Quando a bola é liberada em repouso na posição indicada na figura, descreve a trajetória indicada pela linha tracejada.

a) Qual a velocidade da bola quando está passando pelo ponto mais baixo da trajetória?



Considerando o ponto mais baixo da trajetória da bola como a origem do referencial da energia potencial, temos que $U(y=0) = 0$ e $U(y=L) = mgL$.

Como a energia mecânica se conserva:

$$E_1 = E_2$$

$$mgL = \frac{1}{2}mv_2^2 \quad \therefore \quad v_2 = \sqrt{2gL} = 4{,}84m/s$$

b) Qual a velocidade da bola quando chega ao ponto mais alto da trajetória, depois que a corda toca no pino?

De maneira equivalente, temos a conservação da energia mecânica:

$$E_1 = E_3$$

$$mgL = \frac{1}{2}mv_3^2 + mg[2(L-d)]$$

de onde encontramos que:

$$v_3 = \sqrt{2g\,(2d - L)} = 2{,}42m/s$$

32 Mostre que se a bola faz uma volta completa em torno do pino, então $d > 3L/5$.

A bola irá fazer uma volta completa e passar pelo ponto 3 sem afrouxar a corda quando a velocidade v_3 tiver um valor mínimo tal que a força centrípeta seja igual ao seu peso. Essa imposição implica que a tensão na corda será nula.

$$P = (F_C)_3 \quad \Rightarrow \quad mg = m\frac{v_3^2}{r} \quad \therefore \quad v_3^2 = gr = g(L-d)$$

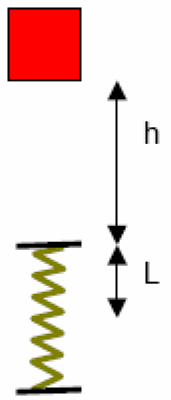
Usando o resultado do item anterior, temos:

$$v_3^2 = 2g(2d - L) = g(L - d) \quad \Rightarrow \quad d = \frac{3L}{5}$$

Capítulo 8 - Halliday, Resnick e Walker - 4ª. edição

25 Deixa-se cair um bloco de *2kg* de uma altura de *40cm* sobre uma mola cuja constante é $k = 1960N/m$. Determine a compressão máxima da mola

$m = 2kg$
$h = 40cm = 0{,}40m$
$k = 1960N/m$



A mola será largada com velocidade nula, cairá até encontrar a mola, pressionará a mola até alcançar novamente o repouso. Desse modo, ela terá energia potencial gravitacional na posição inicial e energia potencial elástica no final:

$$E_i = E_f$$

$$mg(h+L) = \frac{1}{2}kL^2 \quad \Rightarrow \quad L^2 = \frac{2mg}{k}(h+L) \quad \therefore \quad L^2 - \frac{2mg}{k}L - \frac{2mg}{k}h = 0$$

$$L = \frac{\frac{2mg}{k} \pm \sqrt{\left(\frac{2mg}{k}\right)^2 + 4\frac{2mg}{k}h}}{2} = \frac{0{,}02 \pm 0{,}18}{2} = \begin{cases} +0{,}10 \\ -0{,}08 \end{cases}$$

Como L deve ser positivo, a solução aceitável fisicamente é:

$$L = 0{,}10m = 10cm$$

Capítulo 8 - Halliday, Resnick e Walker - 4ª. edição

28 O módulo da força de atração gravitacional entre duas partículas de massas m_1 e m_2 é dado por:

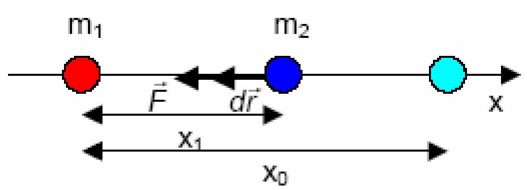
$$F(x) = G\frac{m_1 m_2}{x^2}$$

onde G é uma constante e x é a distância entre as duas partículas.

a) Qual é a forma funcional da energia potencial gravitacional U(x) ? Suponha que $U(x) \to 0$ quando $x \to \infty$.

De maneira geral nós temos que:

$$U(\vec{r}_1) = U(\vec{r}_0) - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_1} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$$



Como

$$\begin{cases} \vec{F}(\vec{r}) = -\hat{i}F(x) \\ d\vec{r} = (-\hat{i})(-dx) = \hat{i}dx \end{cases}$$

temos:

$$U(x_1) = U(x_0) - \int_{x_0}^{x_1} \left(-\hat{i}F(x)\right)\cdot\left(\hat{i}dx\right) = U(x_0) + \int_{x_0}^{x_1} F(x)dx = U(x_0) + Gm_1m_2\int_{x_0}^{x_1}\frac{dx}{x^2}$$

$$U(x_1) = U(x_0) - Gm_1m_2\left(\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_0}\right)$$

Usando as condições indicadas no enunciado, encontramos que:

$$U(x_1) = -G\frac{m_1m_2}{x_1}$$

b) Qual o trabalho necessário para aumentar a distância entre as partículas de $x_a=x_1$ para $x_b=x_1+d$?

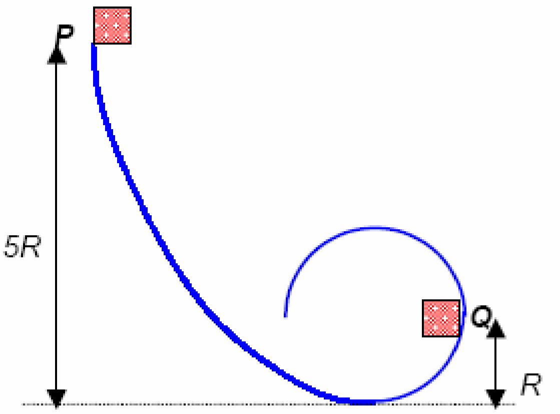
$$\Delta U = U(x_b) - U(x_a) = -W_{ab}$$

$$-W_{ab} = -G\frac{m_1m_2}{x_b} + G\frac{m_1m_2}{x_a} = Gm_1m_2\frac{x_b - x_a}{x_b x_a} \quad \therefore \quad W_{ab} = -Gm_1m_2\frac{d}{x_1(x_1+d)}$$

Capítulo 8 - Halliday, Resnick e Walker - 4ª. edição

30 Um pequeno bloco de massa m desliza sem atrito na pista da figura a seguir.

a) O bloco é liberado em repouso no ponto $\boldsymbol{P}$. Qual a força resultante que age sobre ele no ponto $\boldsymbol{Q}$?

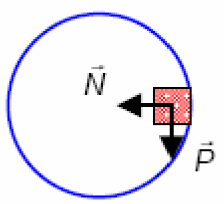


No ponto $\boldsymbol{Q}$ existem duas forças atuando no bloco: o seu peso e a força que a pista exerce nele (normal). A normal é a força radial que está atuando, ou seja é a força centrípeta. Para calcular a força centrípeta vamos usar a conservação da energia mecânica, ou seja: a energia mecânica no ponto $\boldsymbol{P}$ é igual a energia mecânica no ponto $\boldsymbol{Q}$.

$$E_P = E_Q$$

$$mgh_P = mgh_Q + \frac{1}{2}mv_Q^2$$

$$v_Q^2 = 2g\left(h_P - h_Q\right) = 2g(5R - R) = 8gR$$



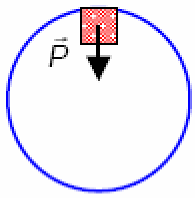
$$N = F_c = m\frac{v_Q^2}{R} = m\frac{8gR}{R} \quad \therefore \quad N = 8mg$$

A força resultante será $\vec{R} = \vec{P} + \vec{N}$. Como esses vetores são perpendiculares, a resultante é a hipotenusa de um triângulo retângulo, e portanto:

$$R = \sqrt{P^2 + N^2} = \sqrt{(mg)^2 + (8mg)^2} \quad \Rightarrow \quad R = \sqrt{65}\, mg$$

b) De que altura em relação ao ponto mais baixo da pista o bloco deve ser liberado para que esteja na iminência de perder o contato com a pista no ponto mais alto do semi-círculo?

Quando o bloco perde o contato com a pista , a normal se anula (e vice-versa). Nessa situação, a única força que estará atuando no corpo será o seu peso e portanto a força centrípeta será igual ao peso:



$$m\frac{v_F^2}{R} = mg \quad \therefore \quad \frac{1}{2}mv_F^2 = \frac{1}{2}mgR$$

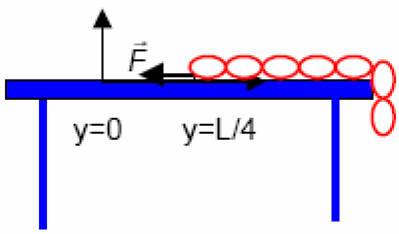
Na posição inicial, quando o bloco é solto ele tem apenas energia potencial gravitacional, logo:

$$E_I = E_F \quad \Rightarrow \quad mgh = \frac{1}{2}mv_F^2 + mg(2R) = \frac{1}{2}mgR + 2mgR = \frac{5}{2}mgR \quad \therefore \quad h = \frac{5R}{2}$$

Capítulo 8 - Halliday, Resnick e Walker - 4ª. edição

35 Uma corrente é mantida sobre uma mesa sem atrito com um quarto do seu comprimento pendurado para fora da mesa, como mostra a figura. Se a corrente tem comprimento L e uma massa m , qual o trabalho necessário para puxá-la totalmente para cima da mesa?

A força necessária para puxar com velocidade constante a corrente para cima da mesa é uma força variável. Ela depende da quantidade de corrente que está pendurada. Num pedaço de corrente de tamanho y temos uma massa m(y) e no tamanho total M temos a massa total M, logo:



$$\left.\begin{array}{r} m(y) \rightarrow y \\ M \rightarrow L \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \frac{m(y)}{y} = \frac{M}{L} \quad \therefore \quad m(y) = \frac{M}{L}y$$

A força necessária, terá a forma:

$$F(y) = \left(\frac{Mg}{L}\right)y$$

$$W_{if} = \int_i^f \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{F} = -\hat{j}\,F(y) \\ d\vec{r} = -\hat{j}dr = \hat{j}dy \end{array}\right\} \quad \therefore \quad \vec{F} \cdot d\vec{r} = -F(y)dy \quad \Rightarrow \quad W = \int_{L/4}^{0} \left[-F(y)dy\right]$$

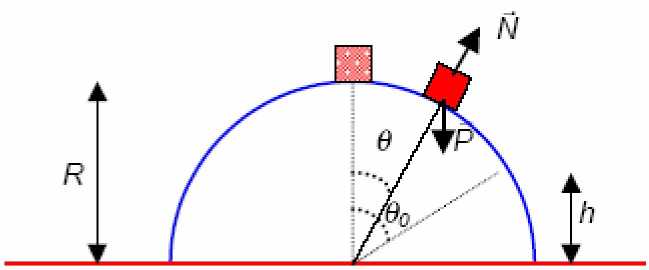
$$W = -\frac{Mg}{L}\int_{L/4}^{0} ydy = \frac{Mg}{L}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{L}{4}\right)^2\right] \quad \therefore \quad W = \frac{MgL}{32}$$

Capítulo 8 - Halliday, Resnick e Walker - 4ª. edição	
37	Um menino está sentado no alto de um monte hemisférico de gelo. Ele recebe um pequeníssimo empurrão e começa a escorregar para baixo. Mostre que, se o atrito com o gelo puder ser desprezado, ele perde o contato com o gelo num ponto cuja altura é *2R/3* .

O menino vai descer do monte acelerado. Podemos separar as acelerações em aceleração radial e aceleração tangencial (aceleração centrípeta) :

$$\vec{P} + \vec{N} = m\,\vec{a}$$

$$\begin{cases} P\cos\theta - N = m\,a_R \\ P\,\text{sen}\theta = m\,a_T \end{cases}$$



$$N = P\ cos\theta - m\ a_R \quad \therefore \quad N = m\ (\ g\ cos\theta - a_R\ )$$

O corpo do menino perde o contato com o hemisfério quando a normal se anular, logo para $\theta = \theta_0$:

$$N = 0 \quad \Rightarrow \quad a_R = g\ cos\theta_0 = \frac{v_0^2}{R}$$

Como este sistema é conservativo, a energia mecânica do menino no topo do hemisfério será igual àquela no ângulo $\theta = \theta_0$:

$$mgR = mgh + \frac{1}{2}mv_0^2 \quad ; \quad h = R\cos\theta_0$$

$$v_0^2 = 2gR(1-\cos\theta_0) \quad \therefore \quad a_R = \frac{v_0^2}{R} = 2g(1-\cos\theta_0)$$

Mas quando a normal for nula

$$a_R = g\ cos\theta_0 = 2\ g\ (\ 1 - cos\theta_0\ ) \ \Rightarrow \ \cos\theta_0 = \frac{2}{3}$$

$$h = R\cos\theta_0 \quad \Rightarrow \quad h = \frac{2R}{3}$$

09. Sistema de partículas

O centro de massa

Mesmo quando um corpo gira ou vibra, existe um ponto nesse corpo, chamado centro de massa, que se desloca da mesma maneira que se deslocaria uma única partícula, com a massa deste corpo e sujeita ao mesmo sistema de forças que ele.

Ainda que o sistema não seja um corpo rígido mas um conjunto de partículas, pode ser definido para ele um centro de massa, como veremos adiante.

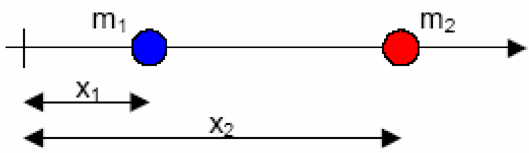
Sistema de partículas - Uma dimensão

Vamos definir inicialmente a posição x_{CM} do centro de massa para um sistema composto de duas partículas de massas m_1 e m_2 e que ocupam as posições x_1 e x_2 .

$$x_{CM} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$$

ou

$$x_{CM} = \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2} \right) x_1 + \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2} \right) x_2$$



Podemos olhar a última equação como uma média ponderada da posição de cada partícula de massa m_i onde o "peso" de cada termo é a fração da massa total contida na posição x_i .

Para um sistema de N corpos dispostos ao longo de uma linha reta, podemos fazer uma extensão da definição anterior:

$$x_{CM} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \ldots + m_N x_N}{m_1 + m_2 + \ldots + m_N} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i x_1}{\sum_{i=1}^{N} m_i}$$

Iremos definir a massa total do sistema como M , onde:

$$M = \sum_{i=1}^{N} m_i$$

e desse modo teremos:

$$M x_{CM} = \sum_{i=1}^{N} m_i$$

Sistema de partículas - Duas dimensões

Para a definição do centro de massa de um sistema de N partículas distribuídas em um plano podemos, por analogia com as definições anteriores, considerar que:

$$x_{CM} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \ldots + m_N x_N}{m_1 + m_2 + \ldots + m_N} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i x_1}{\sum_{i=1}^{N} m_i} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i x_i$$

$$y_{CM} = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + \ldots + m_N y_N}{m_1 + m_2 + \ldots + m_N} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i y_1}{\sum_{i=1}^{N} m_i} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i y_i$$

Sistema de partículas - Três dimensões

Para um sistema de N partículas distribuídas em três dimensões temos as seguintes definições:

$$x_{CM} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i x_i$$

$$y_{CM} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i y_i$$

$$z_{CM} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i z_i$$

Se considerarmos que:

$$\begin{cases} \vec{r}_i = \hat{i}x_i + \hat{j}y_i + \hat{k}z_i \\ e \\ \vec{r}_{CM} = \hat{i}x_{CM} + \hat{j}y_{CM} + \hat{k}z_{CM} \end{cases}$$

teremos:

$$\vec{r}_{CM} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i$$

Corpos rígidos

Podemos imaginar um corpo rígido como sendo subdividido em pequenos elementos de volume ΔV_i de massa Δm_i respectivamente, que estão localizados em pontos definidos por coordenadas (x_i , y_i , z_i). Neste cenário, teremos as seguintes equações:

$$x_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i \Delta m_i}{\sum_{i=1}^{N} \Delta m_i}$$

$$y_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^{N} y_i \Delta m_i}{\sum_{i=1}^{N} \Delta m_i}$$

$$z_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^{N} z_i \Delta m_i}{\sum_{i=1}^{N} \Delta m_i}$$

Se os elementos de volume $\Delta V_i \rightarrow 0$, as massas contidas nesses elementos de volume também de serão reduzidas, ao ponto de $\Delta m_i \rightarrow 0$. Quando isso acontece, aquelas somas se transformam em integrais:

$$x_{CM} = \underset{\Delta m_i \rightarrow 0}{Lim} \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i \Delta m_i}{\sum_{i=1}^{N} \Delta m_i} = \frac{\int x\, dm}{\int dm} = \frac{1}{M} \int x\, dm$$

$$y_{CM} = \underset{\Delta m_i \rightarrow 0}{Lim} \frac{\sum_{i=1}^{N} y_i \Delta m_i}{\sum_{i=1}^{N} \Delta m_i} = \frac{\int y\, dm}{\int dm} = \frac{1}{M} \int y\, dm$$

$$z_{CM} = \underset{\Delta m_i \rightarrow 0}{Lim} \frac{\sum_{i=1}^{N} z_i \Delta m_i}{\sum_{i=1}^{N} \Delta m_i} = \frac{\int z\, dm}{\int dm} = \frac{1}{M} \int z\, dm$$

e concluindo:

$$\vec{r}_{CM} = \frac{1}{M} \int \vec{r}\, dm$$

Movimento do centro de massa

A partir da definição de centro de massa temos a seguinte equação:

$$M\vec{r}_{CM} = m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + \ldots + m_N\vec{r}_N$$

A variação dessas posições com o tempo é calculada como:

$$M\frac{d\vec{r}_{CM}}{dt} = m_1\frac{d\vec{r}_1}{dt} + m_2\frac{d\vec{r}_2}{dt} + \ldots + m_N\frac{d\vec{r}_N}{dt}$$

de modo que a velocidade do centro de massa tem a forma:

$$M\vec{v}_{CM} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + \ldots + m_N\vec{v}_N = \sum_{i=1}^{N} m_i\vec{v}_i$$

A variação dessas velocidades com o tempo é calculada como:

$$M\frac{d\vec{v}_{CM}}{dt} = m_1\frac{d\vec{v}_1}{dt} + m_2\frac{d\vec{v}_2}{dt} + \ldots + m_N\frac{d\vec{v}_N}{dt}$$

de modo que a aceleração do centro de massa tem a forma:

$$M\vec{a}_{CM} = m_1\vec{a}_1 + m_2\vec{a}_2 + \ldots + m_N\vec{a}_N = \sum_{i=1}^{N} m_i\vec{a}_i$$

Cada termo da equação anterior refere-se a uma partícula específica, e é igual à força resultante que atua nessa partícula.

$$M\vec{a}_{CM} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_N = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i$$

Mas a força resultante que atua em uma partícula que faz parte desse sistema é composta de duas partes: as forças externas a esse sistema que atuam em cada partícula e as forças internas de interação mútua entre as partículas.

$$M\vec{a}_{CM} = \left(\vec{F}_{1EXT} + \vec{F}_{1INT}\right) + \left(\vec{F}_{2EXT} + \vec{F}_{2INT}\right) + \ldots\left(\vec{F}_{NEXT} + \vec{F}_{NINT}\right) = \sum_{i=1}^{N}\left(\vec{F}_{iEXT} + \vec{F}_{iINT}\right) = \vec{F}_{EXT} + \vec{F}_{INT}$$

Mas quando considerarmos a soma das forças internas estaremos incluindo pares de forças que se anulam, segundo a Terceira Lei de Newton por serem ação e reação. Por exemplo: iremos incluir as forças que a partícula 2 exerce na partícula 3 como também as forças que a partícula 3 exerce na partícula 2. E essas forças de interação se anulam. Isso acontece com todos os pares de partículas que considerarmos. Assim a soma total das forças internas que atuam em um sistema de partículas é nula, e desse modo:

$$M\vec{a}_{CM} = \vec{F}_{EXT}$$

Essa equação diz que o centro de massa de um sistema de partículas se move como se toda a massa M desse sistema estivesse concentrada nesse ponto e essa massa estivesse sob a ação da força externa resultante.

Momento linear de uma partícula

Define-se o momentum (ou momento) linear de uma partícula como sendo o pro duto de sua massa por sua velocidade:

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

Conta-se que Newton na realidade formulou a sua Segunda Lei em termos do mo mento, da seguinte maneira:

A taxa de variação do momento de uma partícula é proporcional à resultante das forças que agem sobre essa partícula, e tem a mesma direção e o mesmo sentido que essa for ça.

$$\vec{F}_R = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v})$$

Para os sistemas de massa constante:

$$\vec{F}_R = \frac{d\vec{p}}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a}$$

Momento linear de um sistema de partículas

Para um sistema composto de N partículas, definimos o momento total como:

$$\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \ldots + \vec{p}_N = \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i$$

ou ainda:

$$P = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + \ldots + m_N\vec{v}_N = \sum_{i=1}^{N} m_i\vec{v}_i = M\vec{v}_{CM}$$

Já foi mostrado que:

$$M\vec{a}_{CM} = M\frac{d\vec{v}_{CM}}{dt} = \vec{F}_{EXT}$$

e quando $M = constante$, temos

$$\vec{F}_{EXT} = \frac{d}{dt}(M\vec{v}_{CM}) = \frac{d\vec{P}}{dt}$$

Conservação do momento linear

Quando estivermos considerando um sistema isolado, onde a resultante das forças externas for nula, teremos:

$$\vec{F}_{EXT} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d\vec{P}}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \ldots + \vec{p}_N = cons\tan te$$

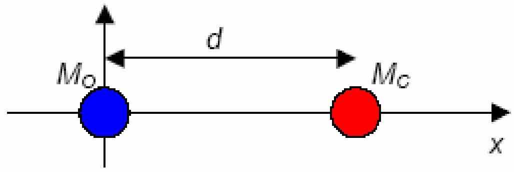
indicando que o momento total do sistema é uma constante. Por exemplo, numa colisão entre duas bolas de bilhar, o momento total desse sistema isolado se conserva: o momento total antes da colisão é igual ao momento total depois da colisão.

Solução de alguns problemas

Capítulo 9 - Halliday, Resnick e Walker - 4ª. edição	
2	A distância entre os centros dos átomos de carbono C e oxigênio O em uma molécula de monóxido de carbono CO é de $1,131x10^{-10}m$. Determine a posição do centro de massa da molécula de CO em relação ao átomo de carbono. Use as massas dos átomos de C e O .

Por definição temos que:

$$x_{CM} = \frac{M_o d_o + M_c d_c}{M_o + M_c}$$



onde $d_O = d - d_C$
Vamos escolher a origem do eixo x como passando pelo átomo de oxigênio. Com essa escolha teremos $d_0 = 0$ e $d_C = d = 1,131x10^{-10}m$, e portanto:

$$x_{CM} = \frac{M_c d}{M_o + M_c} \quad \therefore \quad d_c = \left(\frac{M_c}{M_o + M_c}\right)d$$

considerando que:
$M_O = 15,994g/mol$
$M_C = 12,011g/mol$

$$d_{CM} = 0,571\ d = 0,645x10^{-10}m$$

Capítulo 9 - Halliday, Resnick e Walker - 4ª. edição	
3	Quais são as coordenadas do centro de massa das três partículas que aparecem no desenho a seguir? O que acontece com o centro de massa quando a massa da partícula de cima aumenta gradualmente? As unidade das distâncias é o metro.

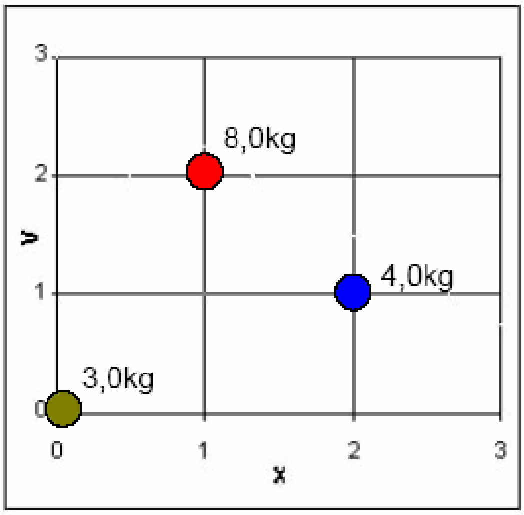
a)

$$x_{CM} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

$$x_{CM} = \frac{3x0 + 8x1 + 4x2}{3 + 8 + 4} = \frac{16}{15} = 1{,}07m$$

$$y_{CM} = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

$$y_{CM} = \frac{3x0 + 8x2 + 4x1}{3 + 8 + 4} = \frac{20}{15} = 1{,}34m$$



b) O que acontece com o centro de massa quando a massa da partícula de cima aumenta gradualmente?

Usando as definições das coordenadas do centro de massa, podemos dizer que:

$$\vec{r}_{CM} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + m_3\vec{r}_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

Se a massa da partícula 2 aumenta gradualmente, passando do valor m_2 para o valor $m_2 + \Delta m_2$, a equação acima tomará a forma:

$$\vec{R}_{CM} = \frac{m_1\vec{r}_1 + (m_2 + \Delta m_2)\vec{r}_2 + m_3\vec{r}_3}{m_1 + m_2 + m_3} = \vec{r}_{CM} + \frac{\Delta m_2}{m_1 + m_2 + m_3}\vec{r}_2$$

ou seja:

$$\Delta\vec{r}_{CM} = \vec{R}_{CM} - \vec{r}_{CM} = \frac{\Delta m_2}{m_1 + m_2 + m_3}\vec{r}_2$$

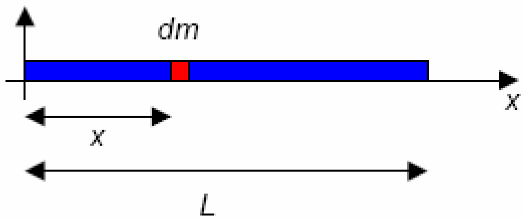
Conclusão: Se uma das partículas aumentar gradualmente a sua massa, o centro de massa gradualmente se moverá de acordo com a equação anterior para $\Delta\vec{r}_{CM}$

Capítulo 9 - Halliday e Resnick - **Edição antiga**

3A Calcule o centro de massa de uma haste com uma distribuição uniforme de massa, de comprimento L e massa M.

Vamos considerar um elemento de massa dm de largura dx localizado na posição x. Como a distribuição de massa é uniforme, podemos dizer que:

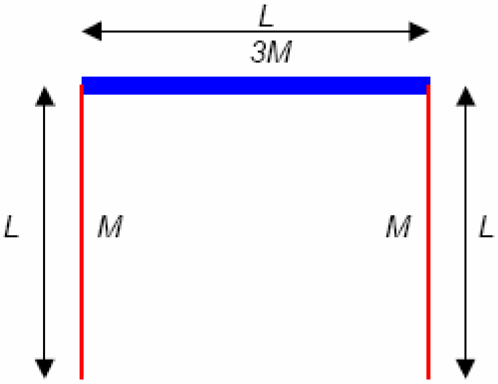
$$\begin{cases} dm \rightarrow dx \\ M \rightarrow L \end{cases} \Rightarrow dm = \left(\frac{M}{L}\right)dx$$

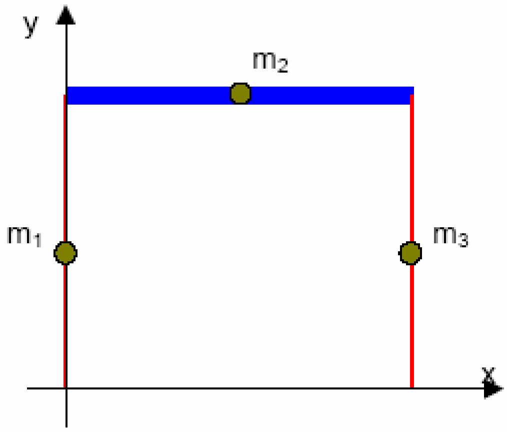


$$x_{CM} = \frac{1}{M}\int x\,dm \Rightarrow x_{CM} = \frac{1}{M}\int_0^L x\left(\frac{M}{L}dx\right) = \frac{1}{L}\int_0^L x\,dx = \frac{1}{L}\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^L$$

$$x_{CM} = \frac{L}{2}$$

Capítulo 9 - Halliday, Resnick e Walker - 4ª. edição	
4	Três barras finas de comprimento L são dispostas em forma de U invertido conforme a figura a seguir. As duas barras laterais têm massa M e a barra central massa 3M. Qual a localização do centro de massa do conjunto?





Para o cálculo do centro de massa desse conjunto as barras se comportam como se as suas massas estivessem concentradas em seus respectivos centros de massa. Escolhendo um sistema de coordenadas, as massas estão nas posições:

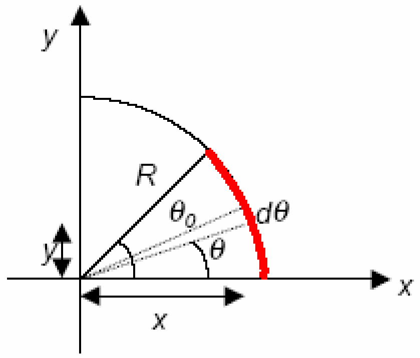
$$\begin{cases} m_1 = M \quad e \quad (0; L/2) \\ m_2 = 3M \quad e \quad (L/2; L) \\ m_3 = M \quad e \quad (L; L/2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{CM} = \dfrac{Mx0 + 3MxL/2 + MxL}{M + 3M + M} = \dfrac{L}{2} \\ y_{CM} = \dfrac{MxL/2 + 3MxL + MxL/2}{M + 3M + M} = \dfrac{4L}{5} \end{cases}$$

Capítulo 9 - Halliday, Resnick - ***Edição antiga***	
7	Calcule o centro de massa de um fio em forma de arco de raio R, ângulo θ_0 e massa M.

Como definido anteriormente, temos:

$$x_{CM} = \frac{1}{M}\int x\, dm$$

$$y_{CM} = \frac{1}{M}\int y\, dm$$



Considerando que a distribuição de massa no fio é uniforme, podemos encontrar uma relação entre a quantidade infinitesimal de massa dm e o ângulo $d\theta$ que delimita essa massa, usando a proporção a seguir:

$$\begin{cases} dm \quad \rightarrow \quad d\theta \\ M \quad \rightarrow \quad \theta_0 \end{cases} \Rightarrow \quad dm = \frac{M}{\theta_0} d\theta$$

A posição (x , y) de um elemento de massa genérico dm é pode ser expressa como:

$$x = R\,cos\theta$$

$$y = R\,sen\theta$$

Desse modo termos:

$$x_{CM} = \frac{1}{M}\int x\,dm = \frac{1}{M}\int_0^{\theta_0}(R\cos\theta)\left(\frac{M}{\theta_0}d\theta\right) = \frac{R}{\theta_0}\int_0^{\theta_0}\cos\theta\,d\theta = \frac{R}{\theta_0}\operatorname{sen}\theta\Big|_0^{\theta_0} = \frac{R}{\theta_0}\operatorname{sen}\theta_0$$

e de modo equivalente:

$$y_{CM} = \frac{1}{M}\int y\,dm = \frac{1}{M}\int_0^{\theta_0}(R\operatorname{sen}\theta)\left(\frac{M}{\theta_0}d\theta\right) = \frac{R}{\theta_0}\int_0^{\theta_0}\operatorname{sen}\theta\,d\theta = -\frac{R}{\theta_0}\cos\theta\Big|_0^{\theta_0} = \frac{R}{\theta_0}(1-\cos\theta_0)$$

A partir desses resultados podemos o centro de massa de outras figuras semelhantes:

i. *Um quarto de círculo* $\theta_0 = \pi/2$.

$$\begin{cases} x_{CM} = \dfrac{R}{\pi/2}\operatorname{sen}(\pi/2) = \dfrac{2R}{\pi} \\ y_{CM} = \dfrac{R}{\pi/2}(1-\cos(\pi/2)) = \dfrac{2R}{\pi} \end{cases}$$

ii. *Um semicírculo* $\theta_0 = \pi$.

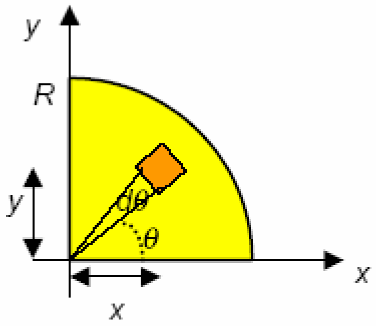
$$\begin{cases} x_{CM} = \dfrac{R}{\pi}\operatorname{sen}(\pi) = 0 \\ y_{CM} = \dfrac{R}{\pi}(1-\cos(\pi)) = \dfrac{2R}{\pi} \end{cases}$$

iii. *Um círculo* $\theta_0 = 2\pi$.

$$\begin{cases} x_{CM} = \dfrac{R}{2\pi}\operatorname{sen}(2\pi) = 0 \\ y_{CM} = \dfrac{R}{2\pi}(1-\cos(2\pi)) = 0 \end{cases}$$

8 Calcule o centro de massa de um quarto de disco de raio R e massa M.

O centro de massa é definido como:



$$x_{CM} = \frac{1}{M}\int x\, dm$$

$$y_{CM} = \frac{1}{M}\int y\, dm$$

onde o elemento genérico de massa dm está contido em um elemento de área dA no interior do disco e essas grandezas estão relacionadas:

$$\begin{cases} dA \to dm \\ A \to M \end{cases} \quad \therefore \quad dm = \frac{M}{A}dA = \sigma\, dA$$

onde σ é a densidade superficial de massa do disco. Temos ainda que:

$$\begin{cases} A = \dfrac{\pi R^2}{4} \\ dA = (r\, d\theta)(dr) = r\, dr\, d\theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,\text{sen}\theta \end{cases}$$

Temos então que:

$$x_{CM} = \frac{1}{M}\int x\, dm = \frac{1}{M}\int\int x\,\sigma\, dA = \frac{\sigma}{M}\int_0^R\int_0^{\pi/2}(r\cos\theta)(r\, dr\, d\theta) = \frac{\sigma}{M}\int_0^R r^2 dr\int_0^{\pi/2}\cos\theta\, d\theta$$

$$x_{CM} = \frac{\sigma}{M}\left\{\frac{r^3}{3}\bigg|_0^R\right\}\left\{\text{sen}\theta\big|_0^{\pi/2}\right\} = \frac{\sigma}{M}\frac{R^3}{3} = \frac{4\cancel{M}/\pi R^2}{\cancel{M}}\frac{R^3}{3}$$

$$x_{CM} = \frac{4R}{3\pi}$$

De maneira equivalente

$$y_{CM} = \frac{1}{M}\int y\, dm = \frac{1}{M}\int\int y\,\sigma\, dA = \frac{\sigma}{M}\int_0^R\int_0^{\pi/2}(r\,\text{sen}\theta)(r\, dr\, d\theta) = \frac{\sigma}{M}\int_0^R r^2 dr\int_0^{\pi/2}\text{sen}\theta\, d\theta$$

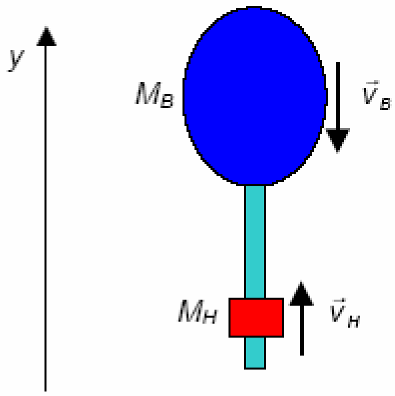
$$y_{CM} = \frac{\sigma}{M}\left\{\left.\frac{r^3}{3}\right|_0^R\right\}\left\{-\cos\theta\Big|_0^{\pi/2}\right\} = \frac{\sigma}{M}\frac{R^3}{3} = \frac{4M/\pi R^2}{M}\frac{R^3}{3}$$

$$y_{CM} = \frac{4R}{3\pi}$$

Capítulo 9 - Halliday, Resnick e Walker - 4ª. edição	
15	Um homem de massa M_H está pendurado em uma escada de corda presa a um balão de massa M_B, conforme a figura a seguir. O balão está parado em relação ao solo.

a) Se o homem começar a subir a escada com velocidade v (em relação a escada), em que direção e com que velocidade (em relação à Terra) o balão vai se mover?

$$\begin{cases} \vec{v} = \hat{j}\,v \\ \vec{v}_H = \vec{v}_B + \vec{v} \end{cases}$$



onde V_H é a velocidade do homem em relação ao solo e V_B é a velocidade do balão em relação ao solo.
Como o conjunto *homem + balão* estava inicialmente em repouso, e a resultante das forças externas é nula, temos que:

$$(M_H + M_B)\vec{v}_{CM} = M_H\vec{v}_H + M_B\vec{v}_B = 0$$

ou seja:

$$M_B\vec{v}_B + M_H(\vec{v}_B + \vec{v}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{v}_B = -\left(\frac{M_H}{M_H + M_B}\right)\vec{v} = -\hat{j}\left(\frac{M_H}{M_H + M_B}\right)v$$

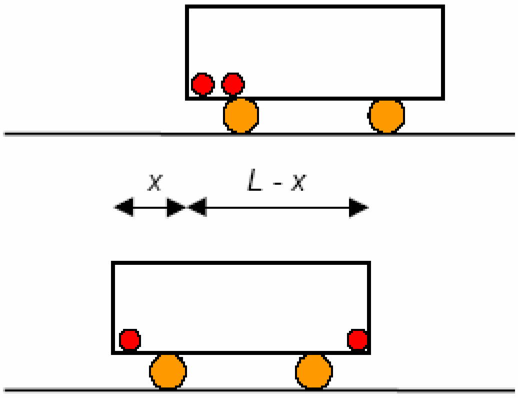
b) Qual será o movimento depois que o homem parar de subir?

O balão novamente ficará novamente estacionário pois se $v_{CM} = 0$ e $v_H = 0$ teremos que $v_B = 0$.

Capítulo 9 - Halliday, Resnick e Walker - 4ª. edição	
17	Um canhão e um suprimento de balas de canhão se encontram no interior de um vagão fechado de comprimento L, como na figura a seguir. O canhão dispara para a direita; o recuo faz o vagão se mover para a esquerda. As balas disparadas continuam no vagão depois de se chocarem com a parede oposta.

a) Qual a maior distância que o vagão pode ter percorrido depois que todas as balas forem disparadas?

Vamos considerar que existem N balas de canhão de massa m cada, e que são disparadas para a direita com velocidade v_B.
O vagão e o canhão têm conjuntamente uma massa M_T.
Após o disparo de uma bala para a direita o conjunto *vagão* + *canhão* + *(N - 1) balas* se deslocam para a esquerda com velocidade v_T.
Inicialmente todo esse aparato estava em repouso, logo a velocidade do centro de massa será nula:



$$[M_T + Nm]\vec{v}_{CM} = [M_T + (N-1)m]\vec{v}_T + m\vec{v}_B = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{v}_T = -\left[\frac{m}{M_T + (N-1)m}\right]\vec{v}_B$$

Pelo desenho podemos notar que após o tiro a bala se deslocou uma distância $L - x$ e como conseqüência do recuo o vagão se deslocou uma distância x. Ou seja:

$$\begin{cases} x = v_T t \\ L - x = v_B t \end{cases} \quad \Rightarrow \quad t = \frac{x}{v_T} = \frac{L-x}{v_B} \quad \therefore \quad v_T = \left(\frac{x}{L-x}\right)v_B$$

Usando as duas últimas equações encontramos o valor de x, o deslocamento do vagão para um único tiro de canhão:

$$x = \left(\frac{m}{M_T + Nm}\right)L$$

Depois de N disparos, o vagão terá se deslocado uma distância $d = N\,x$:

$$d = \left(\frac{Nm}{M_T + Nm}\right)L$$

O maior deslocamento possível acontecerá quando a massa total da balas N m for muito maior do que a massa do vagão. Nessa situação teremos que:

$$\text{se} \quad N\,m >> M_T \quad \Rightarrow \quad d = L$$

b) Qual a velocidade do vagão depois que todas as balas forem disparadas?

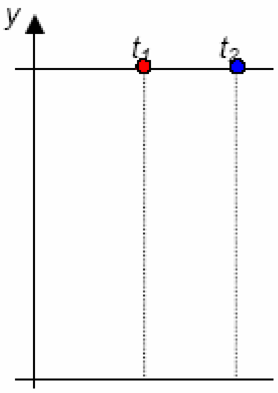
O conjunto *vagão* + *canhão* + *balas* voltará ao repouso pois inicialmente esse sistema tinha o centro de massa com velocidade nula.

Capítulo 9 - Halliday, Resnick e Walker - 4ª. edição	
18	Deixa-se cair uma pedra em $t = 0$. Uma segunda pedra com massa duas vezes maior que a da primeira, é largada do mesmo ponto em $t = 100ms$.

a) Onde estará o centro de massa das duas pedras em $t = 300ms$? Suponha que nenhuma das pedras chegou ao chão.

$m_1 = m$ $\quad\quad$ $\Delta t = 100ms = 0,1s$

$m_2 = 2m$ $\quad\quad$ $T = 300ms = 0,3s$



As equações de movimento das partículas são:

$$\begin{cases} y_1 = -\dfrac{g\,t_1^2}{2} = -\dfrac{g\,(t+\Delta t)^2}{2} \\ \\ y_2 = -\dfrac{g\,t_2^2}{2} = -\dfrac{g\,t^2}{2} \end{cases}$$

O centro de massa desse sistema terá a forma:

$$y_{CM}(t) = \frac{m\left[-\dfrac{g\,(t+\Delta t)^2}{2}\right] + 2m\left[-\dfrac{g\,t^2}{2}\right]}{m+2m} = -\frac{g\,(t+\Delta t)^2}{6} - \frac{gt^2}{6}$$

Para $t = 0,3s$

$$y_{CM}\,(0,3s) = -\,0,40\ m$$

b) Qual a velocidade do centro de massa desse sistema nesse momento?

$$v_{CM}(t) = \frac{d\,y_{CM}}{d\,t} = -\frac{1}{3}g\,(2t+\Delta t)$$

$$v_{CM}\,(0,3s) = -\,2,28m/s$$

Capítulo 9 - Halliday, Resnick e Walker - 4ª. edição	
21	Dois sacos de açúcar idênticos são ligados por uma corda de massa desprezível, que passa por uma roldana sem atrito, de massa desprezível, com $50mm$ de diâmetro. Os dois sacos estão no mesmo nível e cada um possui originalmente uma massa de $500g$.

a) Determine a posição horizontal do centro de massa do sistema.

Inicialmente os dois sacos estão no mesmo nível, logo

$d = 50mm = 0,05m$

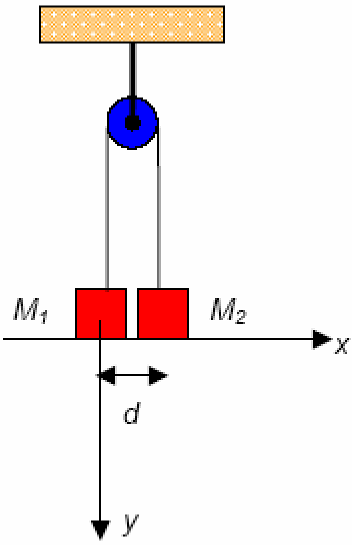
$M_1 = M_2 = 500g = 0,5kg$

$$y_{CM} = \frac{M_1 y_1 + M_2 y_2}{M_1 + M_2} = 0$$

e

$$x_{CM} = \frac{M_1 x_1 + M_2 x_2}{M_1 + M_2} = \frac{M_1 .0 + M_2 d}{M_1 + M_2} = \left(\frac{M_2}{M_1 + M_2}\right) d$$

$$x_{CM} = 0{,}025m = 25mm$$



b) Suponha que $20g$ de açúcar são transferidos de um saco para outro, mas os sacos são mantidos nas posições originais. Determine a nova posição horizontal do centro de massa.

$m_1 = 0{,}48kg$
$m_2 = 0{,}52kg$

$$x_{CM} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} = \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2}\right) d = 0{,}026m$$

c) Os dois sacos são liberados. Em que direção se move o centro de massa?

Já foi mostrado anteriormente que os sacos têm, em módulo, a mesma aceleração:

$$a = \left(\frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1}\right) g$$

e elas têm sentido contrários:

$$\begin{cases} \vec{a}_1 = -\hat{j}\, a \\ \vec{a}_2 = +\hat{j}\, a \end{cases}$$

Como:

$$\vec{a}_{CM} = \frac{m_1 \vec{a}_1 + m_2 \vec{a}_2}{m_1 + m_2}$$

encontramos que:

$$\vec{a}_{CM} = \hat{j} \left(\frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1}\right)^2 g$$

Como a aceleração é constante, a velocidade do centro de massa tem a forma:

$$\vec{v}_{CM} = \vec{v}_{0CM} + \vec{a}_{CM}\, t = \vec{a}_{CM}\, t$$

pois a velocidade inicial é nula. Desse modo teremos que:

$$\vec{v}_{CM} = \hat{j} \left(\frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1}\right)^2 g\, t$$

e portanto o centro de massa se desloca para baixo.

d) Qual a sua aceleração?

Já foi mostrado que

$$\vec{a}_{CM} = \hat{j}\left(\frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1}\right)^2 g$$

e) Como varia a posição do centro de massa à medida que os sacos se movimentam?

$$\vec{r}_1 = \vec{r}_{01} + \vec{v}_{01}t + \frac{\vec{a}_1 t^2}{2} \quad \Rightarrow \quad \vec{r}_1 = \frac{\vec{a}_1 t^2}{2} \quad \therefore \quad \vec{r}_1 = -\hat{j}\left(\frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1}\right)^2 \frac{gt^2}{2}$$

$$\vec{r}_2 = \vec{r}_{02} + \vec{v}_{02}t + \frac{\vec{a}_2 t^2}{2} \quad \Rightarrow \quad \vec{r}_2 = \hat{i}d + \frac{\vec{a}_2 t^2}{2} \quad \therefore \quad \vec{r}_2 = \hat{i}d + \hat{j}\left(\frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1}\right)^2 \frac{gt^2}{2}$$

Relembrando que:

$$\vec{r}_{CM} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2}$$

encontramos

$$\vec{r}_{CM} = \hat{i}\left(\frac{m_2}{m_2 + m_1}\right)d + \hat{j}\left(\frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1}\right)^2 \frac{gt^2}{2}$$

Capítulo 9 - Halliday, Resnick e Walker - 4ª. edição	
22	Um cachorro de $5kg$ está em um bote de $20kg$ que se encontra a $6m$ da margem. Ele anda $2,4m$ no barco em direção à margem, e depois pára. O atrito entre o bote e a água é desprezível. A que distância da margem está o cachorro depois da caminhada? Sugestão: O cachorro se move para a esquerda; o bote se desloca para a direita; e o centro de massa do sistema *cachorro + bote* ? Será que ele se move?

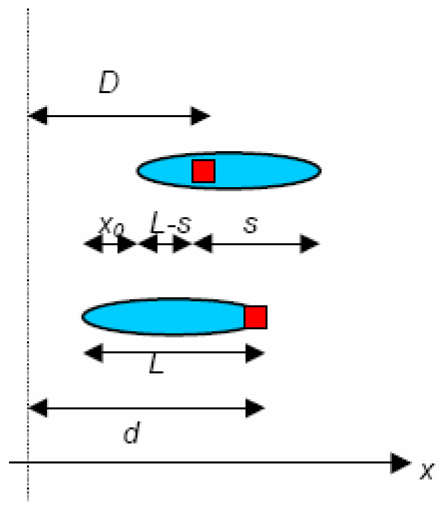
$M_C = 5kg$ $\qquad$ $d = 6m$

$M_B = 20kg$ $\qquad$ $s = 2,4m$

Antes de começar a resolução vamos fazer algumas suposições:

i. O cachorro está na extremidade do bote mais afastada da margem

ii. O bote tem forma simétrica, tal que o centro de massa está localizado no seu centro geométrico.



$$(M_C + M_B)\vec{a}_{CM} = \vec{F}_{EXT} = 0 \quad \Rightarrow \quad (M_C + M_B)\vec{v}_{CM} = constante$$

Como o conjunto *cachorro + bote* estava inicialmente em repouso, a velocidade do centro de massa era nula e irá permanecer com esse valor pois a resultante das forças externas é zero.

$$(M_C + M_B)\vec{v}_{CM} = M_C\vec{v}_C + M_B\vec{v}_B = 0$$

Antes do cachorro se mover a posição do centro de massa tem a seguinte forma:

$$x_{CM} = \frac{dM_C + (d - L/2)M_B}{M_C + M_B}$$

Depois que ele se moveu, a posição de centro de massa, tem a seguinte forma:

$$x'_{CM} = \frac{[(d-L) + x_0 + (L-s)]M_C + [(d-L) + x_0 + L/2]M_B}{M_C + M_B}$$

Como a velocidade do centro de massa é nula, ele não se moveu e portanto as duas equações anteriores são iguais. Fazendo essa igualdade encontramos que:

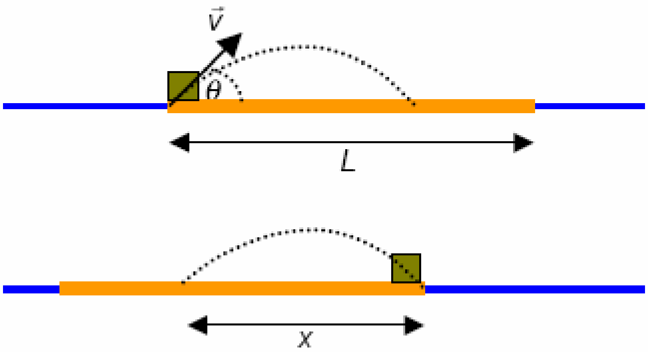
$$(x_0 - s)M_C + x_0 M_B = 0 \quad \Rightarrow \quad x_0(M_C + M_B) = sM_C \quad \therefore \quad x_0 = \left(\frac{M_C}{M_C + M_B}\right)s = 0{,}48m$$

$$D = (d - L) + x_0 + (L - s) = d + x_0 - s = 4{,}08m$$

Capítulo 9 - Halliday e Resnick - **Edição antiga**	
30	Um sapo de massa m está parado na extremidade de uma tábua de massa M e comprimento L. A tábua flutua em repouso sobre a superfície de um lago. O sapo pula em direção à outra extremidade da tábua com uma velocidade v que forma um ângulo θ com a horizontal. Determine o módulo da velocidade inicial do sapo para que ele atinja a outra extremidade da tábua.

Vamos supor que quando o sapo pula, a parte da tábua onde ele estava afunda um pouco, mas volta a boiar, de modo que quando ele tocar na outra extremidade, a tábua já estará na posição horizontal.

Como o conjunto estava em repouso, a velocidade do centro de massa é nula.



O sapo salta para direita e a tábua se move para esquerda com velocidade V.

$$(m + M)v_{CM} = 0 = mv\cos\theta - MV \quad \Rightarrow \quad V = \frac{mv\cos\theta}{M}$$

O sapo irá permanecer no ar um tempo t, e portanto o tempo de subida será metade desse tempo de vôo, logo:

$$v_M = v\,\text{sen}\,\theta - g\left(\frac{t}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad t = \frac{2v\,\text{sen}\,\theta}{g}$$

Desse modo, o deslocamento horizontal x do sapo, será:

$$x = (\ v\cos\theta\ )\ t$$

e o deslocamento horizontal da tábua L - x , será:

$$L - x = Vt = \left(\frac{mv\cos\theta}{M}\right)t$$

ou seja:

$$L = (v\cos\theta)t + \frac{m}{M}(v\cos\theta)t = \left(1+\frac{m}{M}\right)(v\cos\theta)t = \left(1+\frac{m}{M}\right)(v\cos\theta)\frac{2v\,\text{sen}\,\theta}{g}$$

$$L = \frac{v^2}{g}\left(1+\frac{m}{M}\right)\text{sen}\,2\theta$$

ou seja:

$$v = \sqrt{\frac{gL}{\left(1+\frac{m}{M}\right)\text{sen}\,2\theta}}$$

Capítulo 9 - Halliday, Resnick e Walker - 4ª. edição	
34	Dois blocos de massas $1kg$ e $3kg$ respectivamente, ligados por uma mola, estão em repouso em uma superfície sem atrito. Em um certo instante são projetados um na direção do outro de tal forma que o bloco de $1kg$ viaja inicialmente com uma velocidade de $1,7m/s$ em direção ao centro de massa, que permanece em repouso. Qual a velocidade inicial do outro bloco?

$M_1 = 1kg$
$M_2 = 3kg$
$v_1 = 1,7m/s$

De maneira geral temos que:

$$M\vec{a}_{CM} = \vec{F}_{EXT}$$

A partir da equação anterior temos que quando a resultante das forças externas for nula a velocidade do centro de massa será constante. Mas como os blocos estavam inicialmente em repouso, a velocidade do centro de massa será nula:

$$M\vec{v}_{CM} = M_1\vec{v}_1 + M_2\vec{v}_2 = 0$$

ou seja:

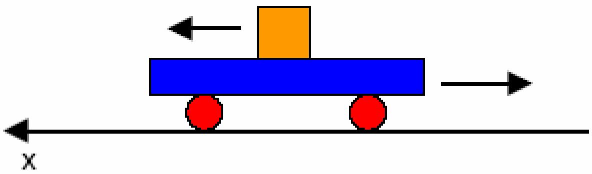
$$\vec{v}_2 = -\frac{M_1}{M_2}\vec{v}_1$$

Mas $\vec{v}_1 = \hat{i}\,1{,}7m/s$, logo

$$\vec{v}_2 = -\hat{i}\frac{3}{1}1{,}7 \quad \therefore \quad \vec{v}_2 = -\hat{i}\,5{,}1m/s$$

Capítulo 9 - Halliday, Resnick e Walker - 4ª. edição	
37	Uma vagão plataforma de peso P pode rolar sem atrito em um trecho reto e plano da linha férrea. Inicialmente, um homem de peso p está de pé no carro, que se move para a esquerda com velocidade v_0 . Qual a variação da velocidade do vagão quando o homem corre para a esquerda com uma velocidade v_{REL} em relação ao vagão?

$M = P/g$
$m = p/g$



O momento inicial do conjunto é:

$$\vec{P}_I = (m+M)\vec{v}_0$$

Vamos considerar o homem passe a ter uma velocidade $\hat{i}v$ e que o vagão passe a ter uma velocidade $\hat{i}V$. O momento final do sistema será:

$$\vec{P}_F = M\vec{V} + m\vec{v}$$

Mas a velocidade do homem em relação ao vagão, ou seja a velocidade relativa é definida de tal modo que:

$$\vec{v} = \vec{V} + \vec{v}_{REL}$$

ou seja:

$$\vec{P}_F = M\vec{V} + m\left(\vec{V} + \vec{v}_{REL}\right)$$

Considerando que quando a resultante das forças externas for nula o momento total deste sistema se conserva, temos que:

$$(m+M)\vec{v}_0 = M\vec{V} + m\left(\vec{V} + \vec{v}_{REL}\right) = (m+M)\vec{V} + m\vec{v}_{REL}$$

$$\vec{v}_0 = \vec{V} + \frac{m}{m+M}\vec{v}_{REL}$$

$$\Delta\vec{V} = \vec{V} - \vec{v}_0 = -\frac{m}{m+M}\vec{v}_{REL} = -\frac{p}{p+P}\vec{v}_{REL}$$

10. Colisões

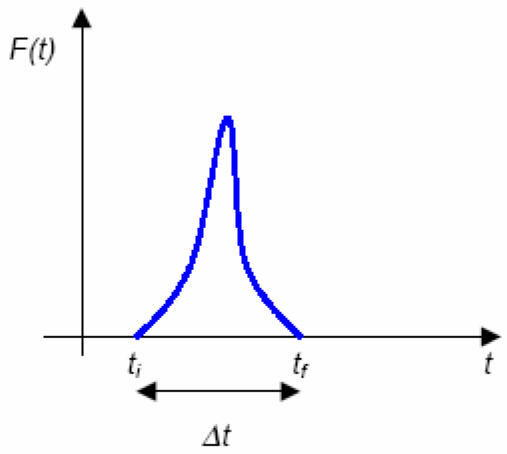
Em um choque, forças relativamente grandes, atuam em cada uma das partículas que colidem, durante um intervalo de tempo relativamente curto. Um exemplo corriqueiro seria um esbarrão entre duas pessoas distraídas. Não existe alguma interação significativa entre elas durante a aproximação e até que se choquem. Durante o choque existe uma forte interação que eventualmente pode causar danos físicos. Depois da colisão volta-se a situação inicial onde não existia interação significativa.

O que é uma colisão

Podemos analisar com mais detalhes esses eventos se considerarmos a colisão entre duas bolas de bilhar, onde uma bola rola em direção a uma segunda que está em repouso.

De maneira equivalente ao esbarrão, mencionado anteriormente, não existe interação significativa entre as duas bolas de bilhar enquanto elas se aproximam e quando elas se afastam depois da colisão. A força de interação que descreve a colisão tem grande intensidade e curta duração, como descrito no gráfico ao lado.

Forças como essa, que atuam durante um intervalo pequeno comparado com o tempo de observação do sistema, são chamadas de forças impulsivas.



Força impulsiva, impulso e momento linear

Vamos considerar uma partícula isolada, que se move com momento [illegible]. A partir de um certo tempo t_i até um instante posterior t_f, passa a atuar sobre ela uma força $\vec{F}_{12}$. O momento da partícula vai sofre alteração [illegible] devido a existência da força atuante e essa variação é também chamada de impulso [illegible]. A segunda Lei de Newton, tem a forma:

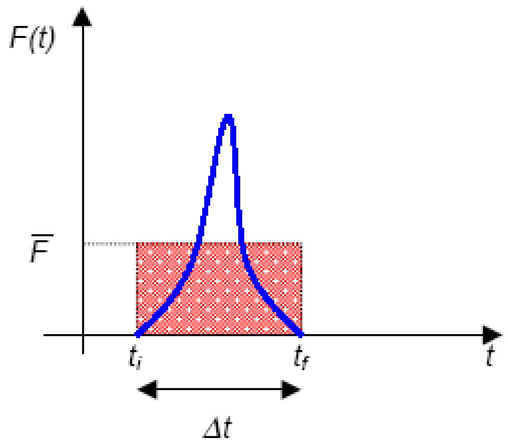
$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}(t) \quad \Rightarrow \quad d\vec{p} = \vec{F}(t)dt$$

ou seja:

$$\int_{\vec{p}_i}^{\vec{p}_f} d\vec{p} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}(t)dt \quad \therefore \quad \left\{ \begin{array}{c} \Delta\vec{p} = \vec{p}_f - \vec{p}_i = \int_{\vec{p}_i}^{\vec{p}_f} d\vec{p} \\ \\ \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}(t)dt = \vec{J} \end{array} \right\} \quad \Rightarrow \quad \Delta\vec{p} = \vec{J}$$

Força impulsiva média

Algumas vezes é mais interessante considerar o valor médio da força impulsiva que o seu valor a cada instante. Considerando a situação unidimensional podemos definir a força impulsiva média $\bar{F}$ que atua em uma partícula durante a colisão como



$$J = \int_{t_i}^{t_f} F(t)dt = \bar{F}\Delta t$$

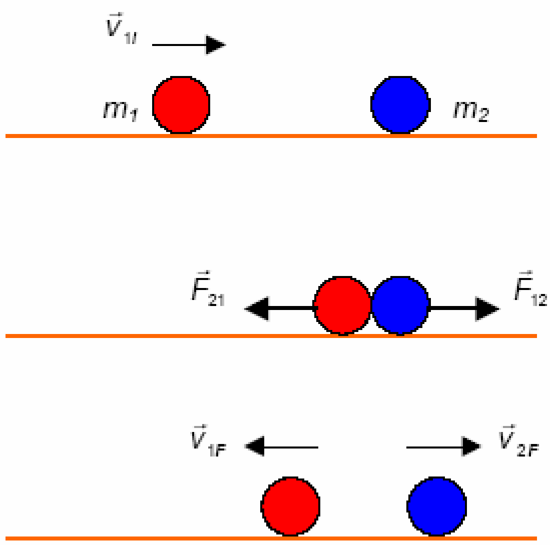
ou seja:

$$\bar{F} = \frac{1}{\Delta t}\int_{t_i}^{t_f} F(t)dt$$

Estamos considerando que a área abaixo da curva *F(t)* é a mesma área abaixo da curva $\bar{F}$, daí as integrais terem os mesmos valores

Conservação do momento linear durante uma colisão

Vamos considerar duas bolas de bilhar com mesma forma e pesos diferentes.



Uma das bolas se movimenta em direção à segunda que está em repouso. Depois da colisão as duas bolas se movimentam em sentidos contrários.

Durante a colisão, entram em ação as forças impulsivas descritas anteriormente. A bola *1* exerce uma força $\vec{F}_{12}$ na bola *2* e de maneira equivalente a bola *2* exerce uma força $\vec{F}_{21}$ na bola *1*.

Usando a terceira Lei de Newton, é fácil perceber que $\vec{F}_{12}$ e $\vec{F}_{21}$ são forças de ação e reação, logo:

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

Logo

$$\begin{cases} \Delta\vec{p}_1 = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}_{21}(t)dt = \bar{\vec{F}}_{21}\,\Delta t \\ \Delta\vec{p}_2 = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}_{12}(t)dt = \bar{\vec{F}}_{12}\,\Delta t \end{cases}$$

Mas

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} \quad \Rightarrow \quad \overline{\vec{F}}_{12} = -\overline{\vec{F}}_{21} \quad \therefore \quad \Delta\vec{p}_2 = -\Delta\vec{p}_1$$

ou seja:

$$\Delta\vec{P} = \Delta\vec{p}_1 + \Delta\vec{p}_2 = 0$$

Encontramos que o momento linear total $\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$ de um sistema isolado composto de duas bolas, se conserva durante uma colisão. Esse resultado é facilmente extensível para colisões múltiplas.

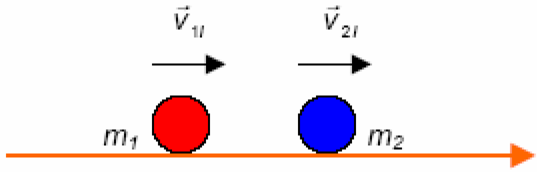
Colisão elástica em uma dimensão

As colisões podem ser divididas em dois tipos, aquelas que conservam a energia cinéticas - ditas elásticas, e aquelas que não conservam a energia cinética - ditas inelásticas.

Vamos considerar a colisão de duas bolas de massas m_1 e m_2 descrita a seguir:

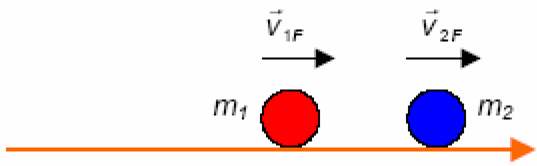
Antes da colisão

Temos que $v_{1I} > v_{2I}$, pois em caso contrário não existiria a colisão.



Depois da colisão

Temos que $v_{1F} < v_{2F}$, pois em caso contrário existiriam outras colisões depois da primeira.



Usando a conservação do momento linear total, temos que:

$$\Delta\vec{P} = \Delta\vec{p}_1 + \Delta\vec{p}_2 = 0$$

ou seja:

$$(\vec{p}_{1F} - \vec{p}_{1I}) + (\vec{p}_{2F} - \vec{p}_{2I}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{p}_{1I} + \vec{p}_{2I} = \vec{p}_{1F} + \vec{p}_{2F}$$

Considerando apenas a situação unidimensional, temos:

$$m_1 v_{1I} + m_2 v_{2I} = m_1 v_{1F} + m_2 v_{2F}$$

ou seja:

$$m_1(v_{1I} - v_{1F}) = m_2(v_{2F} - v_{2I}) \qquad (1)$$

Quando a colisão for elástica, existe a conservação da energia cinética total, logo:

$$\frac{1}{2}m_1 v_{1I}^2 + \frac{1}{2}m_2 v_{2I}^2 = \frac{1}{2}m_1 v_{1F}^2 + \frac{1}{2}m_2 v_{2F}^2$$

ou seja:

$$m_1\left(v_{1I}^2 - v_{1F}^2\right) = m_2\left(v_{2F}^2 - v_{2I}^2\right)$$

ou ainda:

$$m_1\left(v_{1I} + v_{1F}\right)\left(v_{1I} - v_{1F}\right) = m_2\left(v_{2I} + v_{2F}\right)\left(v_{2I} - v_{2F}\right) \qquad (2)$$

Dividindo a equação (2) pela equação (1) , encontramos:

$$v_{1I} + v_{1F} = v_{2I} + v_{2F} \qquad (3)$$

ou seja:

$$v_{1I} - v_{1I} = v_{2F} - v_{1F} \quad \Rightarrow \quad \left(V_{Relativa}\right)_I = \left(V_{Relativa}\right)_F$$

onde a validade da última equação se restringe ao caso de colisões elásticas.

Da equação (3) temos que:

$$v_{2F} = v_{1I} + v_{1F} - v_{2I} \qquad (4)$$

e usando esse resultado na equação (1) , temos:

$$m_1\left(v_{1I} - v_{1F}\right) = m_2\left(v_{1I} + v_{1F} - v_{2I}\right) - m_2 v_{2I}$$

ou seja:

$$v_{1F} = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right)v_{1I} + \left(\frac{2m_2}{m_1 + m_2}\right)v_{2I} \qquad (5)$$

Usando esse valor na equação (4) , encontramos:

$$v_{2F} = \left(\frac{2m_1}{m_1 + m_2}\right)v_{1I} + \left(\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\right)v_{2I} \qquad (6)$$

A partir das equações (5) e (6) poderemos analisar diversas situações:

a. *As bolas têm mesma massa*: $m_1 = m_2 = m$. O resultado desse tipo de colisão é que as bolas trocarão de velocidade:

$$\begin{cases} v_{1F} = v_{2I} \\ v_{2F} = V_{1I} \end{cases}$$

b. *Uma partícula está em repouso:*

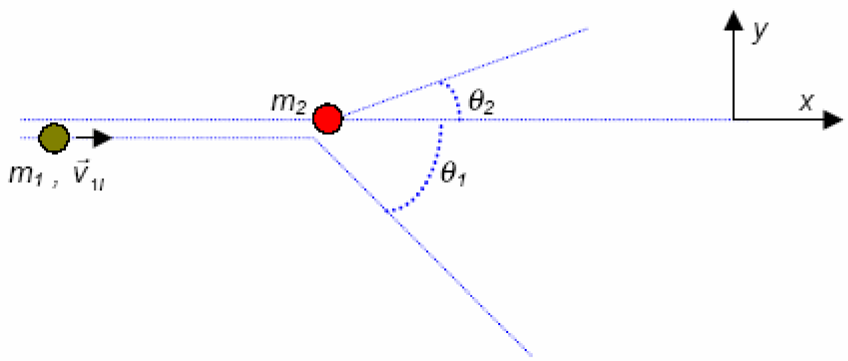
$$\begin{cases} v_{1F} = \left(\dfrac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right)v_{1I} \\ v_{2F} = \left(\dfrac{2m_1}{m_1 + m_2}\right)v_{1I} \end{cases}$$

Nessa situação ainda temos várias possibilidades:

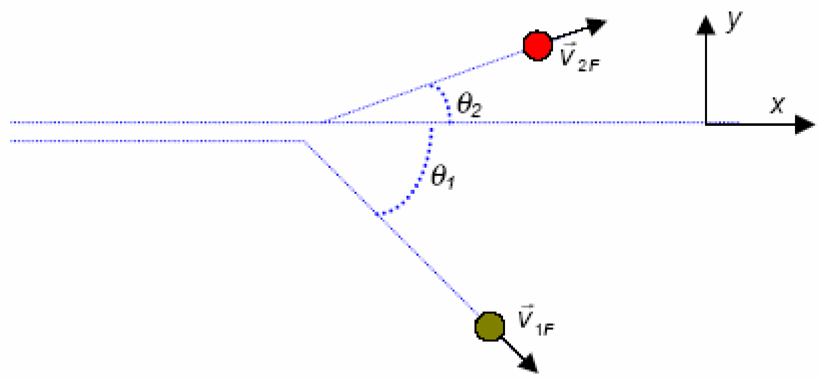
b1.	$m_1 < m_2$	$\Rightarrow$	$v_{1F} < 0$	$\Rightarrow$	*m_1 inverte o sentido da sua velocidade.*
b2.	$m_1 > m_2$	$\Rightarrow$	$v_{1F} > v_{1I}$	$\Rightarrow$	*m_1 diminui a sua velocidade em relação a situação antes da colisão.*
b3.	$m_1 = m_2$	$\Rightarrow$	$v_{1F} = 0$ $v_{2F} = v_{1I}$	$\Rightarrow$	*Uma bola pára e a outra arranca.*

Colisão elástica em duas dimensões

Vamos considerar uma partícula de massa m_1 e velocidade $\vec{v}_{1I}$ se deslocando em direção de uma outra partícula de massa m_2 que se encontra em repouso.



Após a colisão as partículas se movem com velocidades $\vec{v}_{1F}$ e $\vec{v}_{2F}$ que fazem ângulos θ_1 e θ_2 com a direção original da partícula de massa m_1 .



Usando a conservação da energia cinética total, encontramos que:

$$\begin{cases} K_I = K_F \\ \frac{1}{2}m_1 v_{1I}^2 = \frac{1}{2}m_1 v_{1F}^2 + \frac{1}{2}m_2 v_{2F}^2 \end{cases}$$

e usando a conservação do momento linear total, encontramos que:

$$\begin{cases} \vec{P}_I = \vec{P}_F \\ em\ x: \quad m_1 v_{1I} = m_1 v_{1F} \cos\theta_1 + m_2 v_{2F} \cos\theta_2 \\ em\ y: \quad 0 = -m_1 v_{1F} \operatorname{sen}\theta_1 + m_2 v_{2F} \operatorname{sen}\theta_2 \end{cases}$$

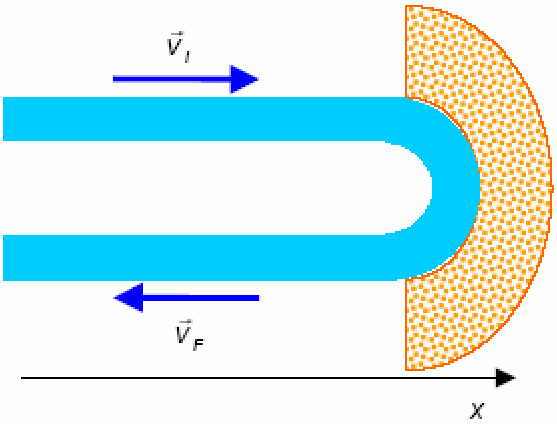
Para esse problema conhecemos, em princípio, os parâmetros m_1 , m_2 , v_{1I} e θ_1 . Temos três equações para calcular os valores das incógnitas v_{1F} , v_{2F} e θ_2 .

Solução de alguns problemas

Capítulo 10 - Halliday, Resnick e Walker - 4ª. edição	
19	Uma corrente de água colide contra uma pá de turbina estacionária em forma de "prato" , conforme a figura a seguir. O módulo da velocidade é v , tanto antes quanto depois de atingir a superfície curva da pá, e a massa de água atingindo esta por unidade de tempo tem valor μ constante. Encontre a força exercida pela água sobre a pá.

μ = fluxo de água atingindo a pá.

$$\mu = \frac{m}{\Delta t}$$



A segunda Lei de Newton diz que a força resultante que atua na água tem a forma:

$$\vec{F} = \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t} = m\frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{m}{\Delta t}\Delta \vec{v} = \mu\,\Delta \vec{v}$$

Mas

$$\Delta \vec{v} = \vec{v}_F - \vec{v}_I = \left(-\hat{i}\,v\right) - \left(+\hat{i}\,v\right) = -2\hat{i}\,v$$

$$\vec{F} = \mu\left(-2\hat{i}\,v\right) = -2\hat{i}\mu\,v$$

A força que a água exerce na pá tem mesmo módulo e sentido contrário. ou seja:

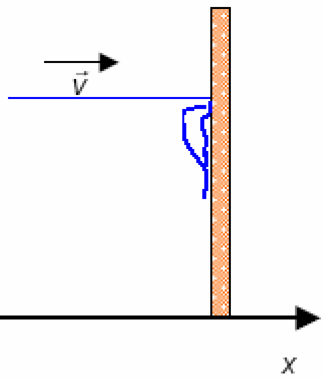
$$\vec{F}_{Pa} = 2\,\hat{i}\mu\,v$$

Capítulo 10 - Halliday, Resnick e Walker - 4ª. edição	
20	Uma corrente de água de uma mangueira espalha-se sobre uma parede. Se a velocidade da água for de *5m/s* e a mangueira espalhar *300cm³/s* , qual será a força média exercida sobre a parede pela corrente de água? Suponha que a água não se espalhe de volta apreciavelmente. Cada centímetro cúbico de água tem massa de *1g* .

v = 5m/s

$v = 300cm^3/s = 4x10^{-4}m^3/s$

$\rho = 1g/cm^3 = 10^3Kg/m^3$



A densidade ρ de um corpo é definida como:

$$\rho = \frac{m}{V} \quad \Rightarrow \quad m = \rho V$$

onde m é a sua massa e V o volume ocupado por esse corpo.

O fluxo volumétrico ν é definido como:

$$\nu = \frac{V}{\Delta t}$$

O fluxo de massa μ é definido como:

$$\mu = \frac{m}{\Delta t} = \rho \frac{V}{\Delta t} = \rho \nu$$

É suposto que a água se aproxima da parede com velocidade de módulo v , colide com ela de modo a escorrer suavemente. Desse modo podemos considerar como nula a sua velocidade final.

$$\Delta\vec{v} = \vec{v}_F - \vec{v}_I = 0 - \hat{i}v = -\hat{i}v$$

A força exercida pela parede sobre a água tem a forma:

$$\vec{F} = m\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{m}{\Delta t}\Delta\vec{v} = -\hat{i}\ \rho\nu\, v$$

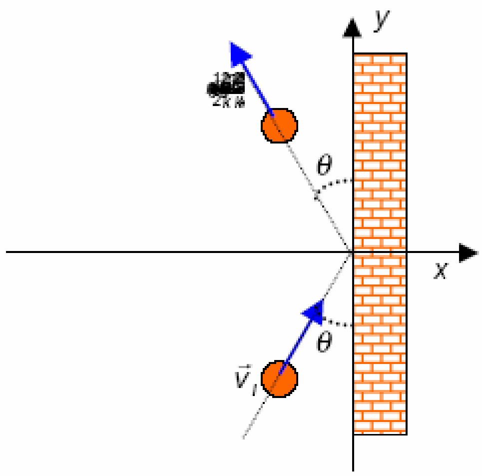
A força que a água exerce na parede tem mesmo módulo e sentido contrário. ou seja:

$$\vec{F} = \hat{i}\ \rho\nu\, v = \hat{\imath}\ (10^3 Kg/m^3)(3x10^{-4}m^3/s)(5m/s) = \hat{\imath}\ 1{,}5N$$

Capítulo 10 - Halliday, Resnick e Walker - 4ª. edição	
23	Uma bola de $300g$ com uma velocidade $v = 6m/s$ atinge uma parede a uma ângulo $\theta = 30^0$ e, então, ricocheteia com mesmo ângulo e velocidade de mesmo módulo. Ela fica em contato com a parede por $10ms$.

a) Qual foi o impulso sobre a bola?

$m = 300g = 0{,}3kg$
$v = 6m/s$
$\theta = 30^0$
$\Delta t = 10ms = 0{,}01s$



O momento linear da bola é:

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

onde:

$$y_{CM} = \lim_{\Delta m_i \to 0} \frac{\sum_{i=1}^{N} y_i \Delta m_i}{\sum_{i=1}^{N} \Delta m_i} = \frac{\int y\, dm}{\int dm} = \frac{1}{M}\int y\, dm$$

$$\vec{p}_F = \hat{i}p_{Fx} + \hat{j}p_{Fy} \qquad \begin{cases} p_{Fx} = -p\,\mathrm{sen}\,\theta \\ p_{Fy} = p\cos\theta \end{cases}$$

$$v_3^2 = 2g(2d - L) = g(L - d) \quad \Rightarrow \quad d = \frac{3L}{5}$$

$$\vec{J} = \Delta\vec{p} = -2\,\hat{i}\; p\,\mathrm{sen}\,\theta = -\hat{i}\; 2\,(0{,}3x6)0{,}5 = -\hat{i}\,1{,}8\,N.s$$

b) Qual a força média exercida pela bola sobre a parede?

A força que a parede faz na bola é:

$$P = (F_c)_3 \;\Rightarrow\; mg = m\frac{v_3^2}{r} \;\therefore\; v_3^2 = gr = g(L-d)$$

E como conseqüência, a força que a bola faz na parede é:

$$\vec{F}_P = -\vec{F} = +\hat{i}\;180N$$

Capítulo 10 - Halliday, Resnick e Walker - 4ª. edição

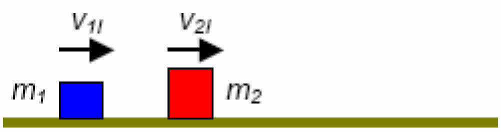
29 Os dois blocos da figura a seguir deslizam sem atrito.

a) Qual a velocidade do bloco de $m_1 = 6kg$ após a colisão?

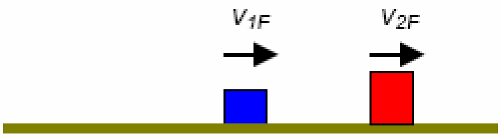
$m_1 = 1{,}6kg$ $\quad$ $v_{1I} = 5{,}5m/s$

$m_2 = 2{,}4kg$ $\quad$ $v_{2I} = 2{,}5m/s$

$v_{2F} = 4{,}9m/s$



Como a força externa resultante é nula, o momento total do sistema se conserva:



$$P_I = P_F$$

$$m_1\, v_{1I} + m_2\, v_{2I} = m_1\, v_{1F} + m_2\, v_{2F}$$

ou seja:

$$v_3 = \sqrt{2g\,(2d - L)}$$

b) A colisão é elástica?

$$K_I = \frac{1}{2}m_1 v_{1I}^2 + \frac{1}{2}m_2 v_{2I}^2 = 31{,}7\,J$$

$$mgL = \frac{1}{2}mv_3^2 + mg\,[2(L-d)]$$

Como $K_I = K_F$, a colisão é elástica.

c) Suponha que a velocidade inicial do bloco $m_2 = 2{,}4kg$ seja oposta a exibida. Após a colisão, a velocidade v_{2F} pode estar no sentido ilustrado?

Neste caso teremos as seguintes possibilidades:

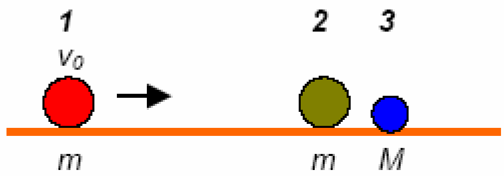
$$\hat{i}m_1v_{1I} - \hat{i}m_2v_{2I} = 2{,}8\,\hat{i} \qquad \begin{cases} \hat{i}m_1v_{1F} + \hat{i}m_2v_{2F} = 14{,}8\,\hat{i} \\ \text{ou} \\ -\hat{i}m_1v_{1F} + \hat{i}m_2v_{2F} = 8{,}72\,\hat{i} \end{cases}$$

O movimento inicial considerado resulta num certo valor para o momento linear total inicial. Quando consideramos as diversas possibilidades para o movimento dos blocos, o momento linear total final tem valores correspondentes. O que se observa é que não existe a possibilidade da conservação do momento linear total caso usemos a hipótese indicada no enunciado desse item. ***Concluímos então que a velocidade v_{2F} não pode estar no sentido ilustrado, caso a velocidade inicial do bloco $m_2 = 2{,}4kg$ seja oposta a exibida.***

Capítulo 10 - Halliday e Resnick - ***Edição antiga***

31 As duas massas da figura a seguir estão ligeiramente separadas e inicialmente em repouso. A massa da esquerda incide sobre as outras duas com velocidade v_0. Supondo que as colisões são frontais e elásticas.
Mostre que se $m \geq M$ acontecerão duas colisões. Encontre as velocidades finais das massas.

$$mgL = \frac{1}{2}mv_2^2 \quad \therefore \quad v_2 = \sqrt{2gL}$$



$$v_{2F} = \left(\frac{2m_1}{m_1 + m_2}\right)v_{1I} + \left(\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\right)v_{2I}$$

Primeiro choque: *massa 1 e massa 2*

$$z_{CM} = \lim_{\Delta m_i \to 0} \frac{\sum_{i=1}^{N} z_i \Delta m_i}{\sum_{i=1}^{N} \Delta m_i} = \frac{\int z\,dm}{\int dm} = \frac{1}{M}\int z\,dm$$

Segundo choque: *massa 2 e massa 3*

$$\begin{Bmatrix} V_{3I} = 0 \\ V_{2I} = v_{2F} = v_0 \\ m_2 = m \\ m_3 = M \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} V_{2F} = \left(\dfrac{m - M}{m + M}\right)v_0 \\ V_{3F} = \left(\dfrac{2m}{m + M}\right)v_0 \end{cases}$$

$$\frac{V_{2F}}{v_{3F}} = \frac{m-M}{2m} = \frac{1}{2}\left(1-\frac{M}{m}\right)$$

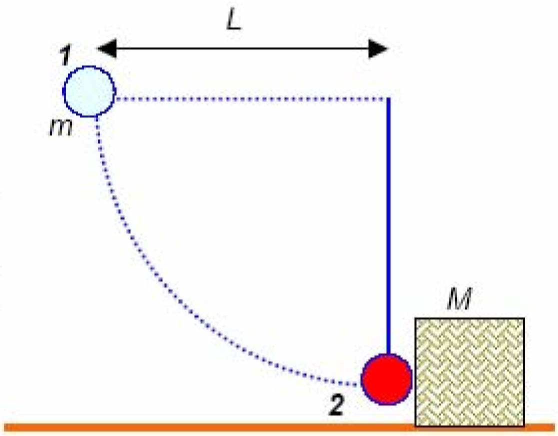
i. Quando $m \geq M$, as velocidades V_{2F} e V_{3F} têm a mesma direção e sentido, mas $V_{3F} \geq V_{2F}$, logo existirão apenas essas duas colisões mencionadas.

ii. Quando $m < M$, as velocidades V_{2F} e V_{3F} têm a mesma direção e sentidos contrários, ou seja a massa m_2 retrocederá e irá se chocar novamente com a massa 1 .

Capítulo 10 - Halliday, Resnick e Walker - 4ª. edição	
35	Uma bola de aço de $0,5kg$ de massa é presa a uma corda, de $70cm$ de comprimento e fixa na outra ponta, e é liberada quando a corda está na posição horizontal. No ponto mais baixo de sua trajetória, a bola atinge um bloco de aço de $2,5kg$ inicialmente em repouso sobre uma superfície sem atrito. A colisão é elástica.

a) Encontre a velocidade da bola imediatamente após a colisão.

$m = 0,5kg$
$M = 2,5kg$
$L = 70cm = 0,7m$



A energia mecânica desse sistema quando a bola está na posição *1* é igual à energia mecânica quando a bola está na posição *2* porque entre essas duas situações só atuam forças conservativas. Logo:

$$mgL = \frac{1}{2}mv_I^2 \quad \Rightarrow \quad v_I = \sqrt{2gL} =$$
$$= 3,47m/s$$

Vamos considerar a posição 2 inicial (antes da colisão) e a posição 2 final (depois da colisão). Como a resultante das forças externas que atuam no sistema é nula, o momento linear total desse sistema se conserva:

$$\vec{P}_I = \vec{P}_F \quad \Rightarrow \quad mv_I = mv_F + MV \qquad (1)$$

Como a colisão é elástica, existirá a conservação da energia cinética:

$$K_I = K_F \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}mv_I^2 = \frac{1}{2}mv_F^2 + \frac{1}{2}MV^2 \qquad (2)$$

As equações (1) e (2) compões um sistema de duas equações com duas incógnitas: v_F e V, e iremos resolvê-lo da maneira padrão.

Da equação (1) encontramos que:

$$V = \frac{m}{M}(v_I - v_F)$$

e usando esse resultado na equação (2), temos:

$$mv_I^2 = mv_F^2 + \frac{m^2}{M}(v_I - v_F)^2 \quad \Rightarrow \quad v_I^2 - v_F^2 = (v_I - v_F)(v_I + v_F) = \frac{m}{M}(v_I - v_F)^2$$

Considerando que $v_I \neq v_F$

$$v_I + v_F = \frac{m}{M}(v_I - v_F) \quad \Rightarrow \quad v_F = \left(\frac{m - M}{m + M}\right) v_I = -2{,}49 m/s$$

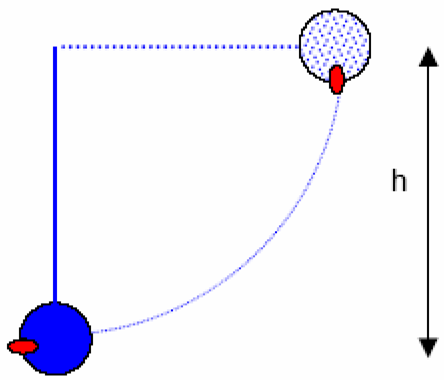
O sinal negativo indica que as duas velocidades v_I e v_F têm sentidos contrários.

b) Encontre a velocidade do bloco imediatamente após a colisão.

$$V = \frac{m}{M}(v_I - v_F) = \left(\frac{2m}{m + M}\right) v_I = 1{,}24 m/s$$

Capítulo 10 - Halliday, Resnick e Walker - 4ª. edição	
45	Um projétil de $10g$ de massa atinge um pêndulo balístico de $2kg$ de massa. O centro de massa do pêndulo eleva-se de uma altura de $12cm$. Considerando-se que o projétil permaneça embutido no pêndulo, calcule a velocidade inicial do projétil.

$m_1 = 10g = 0{,}01kg$ $\quad h = 12cm = 0{,}12m$
$m_2 = 2kg$



Antes da colisão o projétil tem uma velocidade v_P, e logo após a colisão a velocidade do conjunto é v.
Considerando a conservação do momento linear do conjunto durante a colisão, temos que:

$$P_I = P_F$$

$$m_1 v_P = (m_1 + m_2) v$$

ou seja:

$$v = \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2}\right) v_P$$

O conjunto projétil - pêndulo vai subir uma altura h após a colisão. Considerando a conservação da energia mecânica durante o movimento depois da colisão até o conjunto parar, temos que:

$$\frac{1}{2}(m_1+m_2)v^2=(m_1+m_2)gh \quad \Rightarrow \quad v=\sqrt{2gh}$$

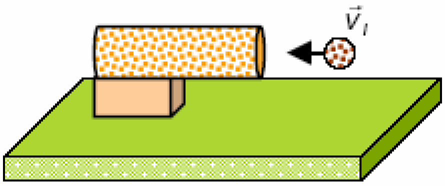
Considerando as duas últimas equações, encontramos que:

$$v_P=\left(\frac{m_1+m_2}{m_1}\right)v=\left(\frac{m_1+m_2}{m_1}\right)\sqrt{2gh}=308{,}25m/s$$

Capítulo 10 - Halliday, Resnick e Walker - 4ª. edição	
54	Projeta-se uma bola de massa m com velocidade v_I para dentro do cano de um canhão de mola de massa M, inicialmente em repouso sobre uma superfície sem atrito, como na figura a seguir. A bola une-se ao cano no ponto de compressão máxima da mola. Não se perde energia por atrito.

a) Qual a velocidade do canhão após a bola entrar em repouso no cano?

Como o momento linear total do sistema se conserva, temos que:



$$mv_I=(m+M)v_F \quad \therefore \quad v_F=\left(\frac{m}{m+M}\right)v_I$$

onde v_F é a velocidade final do conjunto quando a bola se gruda ao cano.

b) Que fração de energia cinética inicial da bola é armazenada na mola?

Como não existem perdas por atrito, é sugerido que parte da energia cinética inicial da bola se transformará em energia potencial U elástica da mola. Logo:

$$\frac{1}{2}mv_I^2=\frac{1}{2}(m+M)v_F^2+U \quad \Rightarrow \quad U=\frac{1}{2}mv_I^2-\frac{1}{2}(m+M)v_F^2$$

ou seja:

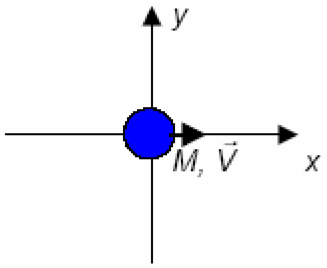
$$U=\frac{1}{2}mv_I^2-\frac{1}{2}(m+M)\left[\left(\frac{m}{m+M}\right)v_I\right]^2=\frac{1}{2}mv_I^2-\frac{1}{2}\frac{m^2}{m+M}v_I^2$$

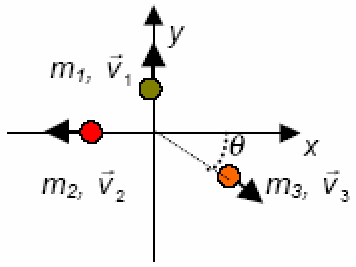
e finalmente

$$U=\frac{1}{2}mv_I^2\left[1-\frac{m}{m+M}\right]$$

Capítulo 10 - Halliday, Resnick e Walker - 4ª. edição	
66	Um corpo de *20kg* está se deslocando no sentido positivo do *eixo x* com uma velocidade de *200m/s* quando devido a uma explosão interna, quebra-se em três partes. Uma parte, cuja massa é de *10kg*, distancia-se do ponto da explosão com uma velocidade de *100m/s* ao longo do sentido positivo do *eixo y*. Um segundo fragmento, com massa de *4kg*, desloca-se ao longo do sentido negativo do *eixo x* com uma velocidade de *500m/s*.

a) Qual é a velocidade do terceiro fragmento, de *6kg* de massa?





$$\begin{cases} M = 20kg \\ V = 200m/s \end{cases}$$

$$\begin{cases} m_1 = 10kg \\ m_2 = 4kg \\ m_3 = 6kg \end{cases} \qquad \begin{cases} v_1 = 100m/s \\ v_2 = 500m/s \end{cases}$$

Considerando a conservação do momento linear total, temos que:

$$M\vec{V} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + m_3\vec{v}_3$$

A equação vetorial acima se decompõe em duas outras escalares, uma referente ao *eixo x* e outra ao *eixo y*:

Eixo x: $\quad MV = -\,m_2\,v_2 + m_3\,v_3\cos\theta$

Eixo y: $\quad 0 = m_1\,v_1 - m_3\,v_3\,\mathrm{sen}\theta$

$$\begin{cases} m_3 v_3\,\mathrm{sen}\theta = m_1 v_1 \\ \\ m_3 v_3 \cos\theta = MV + m_2 v_2 \end{cases} \Rightarrow \quad \tan\theta = \frac{m_1 v_1}{MV + m_2 v_2} = \frac{1}{6} = 0{,}1667$$

$$\theta = 9{,}46^0$$

$$v_3 = \frac{m_1 v_1}{m_3\,\mathrm{sen}\theta} = 1014{,}04m/s$$

b) Quanta energia foi liberada na explosão? Ignore os efeitos devidos à gravidade.

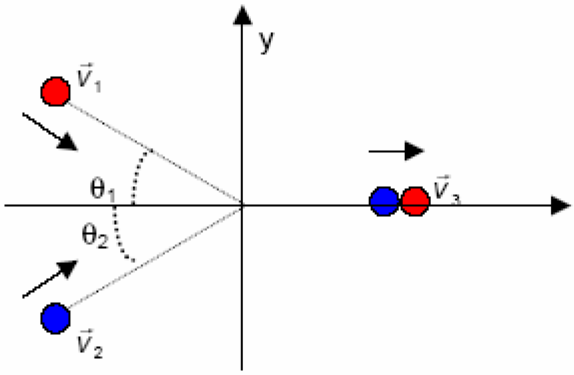
$$K_I = \frac{1}{2}MV^2 = \frac{1}{2}20.200^2 = 400.000Joules$$

$$K_F = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 + \frac{1}{2}m_3v_3^2 = 3.612.724,48J$$

$$\Delta K = K_F - K_I = 3.212.724,48J$$

Capítulo 10 - Halliday, Resnick e Walker - 4ª. edição	
69	Após uma colisão perfeitamente inelástica, descobre-se que dois objetos de mesma massa e com velocidades iniciais de mesmo módulo deslocam-se juntos com velocidade de módulo igual à metade do módulo de suas velocidades iniciais. Encontre o ângulo entre as velocidades iniciais dos objetos.

$m_1 = m_2 = m$
$v_1 = v_2 = v$
$v_3 = v/2$



Considerando a conservação do momento linear total, temos que:

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = (m_1 + m_2)\vec{v}_3$$

ou seja:

Em x: $m_1\, v_1 \cos\theta_1 + m_2\, v_2 \cos\theta_2 = (m_1 + m_2)\, v_3$

Em y: $-m_1\, v_1\, \text{sen}\theta_1 + m_2\, v_2\, \text{sen}\theta_2 = 0$

Ou seja

Em x: $m\, v \cos\theta_1 + m\, v \cos\theta_2 = (m + m)\, v/2$

Em y: $-m\, v\, \text{sen}\theta_1 + m\, v\, \text{sen}\theta_2 = 0$

Ou seja:

Em x: $\cos\theta_1 + \cos\theta_2 = 1$

Em y: $-\text{sen}\theta_1 + \text{sen}\theta_2 = 0$

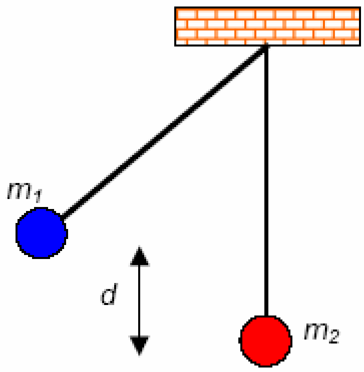
$$\text{sen}\theta_1 = \text{sen}\theta_2 \quad \Rightarrow \quad \theta_1 = \theta_2 = \theta \quad \Rightarrow \quad 2\cos\theta = 1 \quad \therefore \quad \theta = 60^0$$

Capítulo 10 - Halliday, Resnick e Walker - 4ª. edição	
70	Dois pêndulos, ambos de comprimento L , estão inicialmente posicionados como na figura a seguir. O pêndulo da esquerda é liberado e atinge o outro. Suponha que a colisão seja perfeitamente inelástica, despreze as massas das cordas e quaisquer efeitos de atrito. A que altura se eleva o centro de massa do sistema de pêndulos após a colisão?

Em uma colisão completamente inelástica, os corpos adquirem a mesma velocidade final.

Considerando a conservação da energia mecânica, o pêndulo da esquerda vai alcançar a posição mais baixa com uma velocidade v_0:

$$m_1 g d = \frac{1}{2} m_1 v_0^2 \quad \Rightarrow \quad v_0 = \sqrt{2gd}$$



Após a colisão os pêndulos têm mesma velocidade, e considerando a conservação do momento linear total, teremos:

$$m_1 v_0 = (m_1 + m_2)v \quad \Rightarrow \quad v = \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2}\right) v_0 \quad \therefore \quad v = \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2}\right)\sqrt{2gd}$$

Após a colisão, os dois pêndulos irão subir simultaneamente até uma altura h. Usando, novamente, a conservação da energia mecânica, teremos:

$$\frac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2 = (m_1 + m_2)gh \quad \Rightarrow \quad h = \frac{v^2}{2g} = \frac{1}{2g}\left[\left(\frac{m_1}{m_1 + m_2}\right)^2 2gd\right]$$

ou seja:

$$h = \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2}\right)^2 d$$

11. Rotação

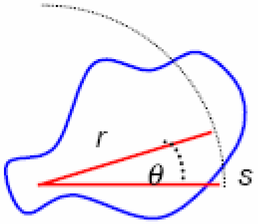
A cinemática dos corpos rígidos trata dos movimentos de translação e rotação. No *movimento de translação pura* todas as partes de um corpo sofrem o mesmo deslocamento linear. Por outro lado, no movimento de *rotação pura* as partes de um corpo descrevem trajetórias circulares cujos centros situam-se sobre uma mesma reta - chamada de eixo de rotação. No *movimento de rotação pura* todas as partes de um corpo sofrem o mesmo deslocamento angular. *O movimento que se aproxima mais de uma situação real é aquele que incorpora tanto a translação quanto a rotação.*

As variáveis da rotação

À semelhança do movimento de translação, para a análise da rotação utilizamos de parâmetros equivalentes a aqueles definidos anteriormente.

Posição angular

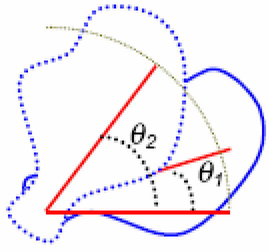
Quando um objeto de um formato arbitrário, tem uma trajetória circular em torno de um certo eixo, podemos definir algumas grandezas que descreverão esse movimento. Podemos marcar um dado ponto do objeto e analisar o seu movimento. A distância deste ponto ao eixo de rotação é chamado de raio r da trajetória. A sua trajetória descreve um arco de comprimento s. A posição angular associada ao arco e o raio é o ângulo θ.



$$s = r\theta \quad \therefore \quad \theta = \frac{s}{r}$$

Deslocamento angular

Quando um corpo está em rotação, ele está variando a sua posição angular de modo que num dado momento ela é definida pelo ângulo θ_1 e num instante posterior é definida pelo ângulo θ_2, de modo que o deslocamento angular entre os instantes considerados é:



$$\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$$

Velocidade angular

A velocidade angular é a taxa com que a posição angular está variando; é a razão entre o deslocamento angular e o tempo necessário para fazer esse deslocamento.

Definimos a *velocidade angular média* como:

$$\overline{w} = \frac{\theta_2 - \theta_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

Definimos a *velocidade angular instantânea* como:

$$w = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt}$$

Aceleração angular

Quando a velocidade angular de um corpo não é constante mas varia no tempo com uma certa taxa, esse corpo terá uma aceleração angular.

Definimos a *aceleração angular média* como:

$$\overline{\alpha} = \frac{w_2 - w_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta w}{\Delta t}$$

Definimos a *aceleração angular instantânea* como:

$$\alpha = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta t} = \frac{dw}{dt}$$

Rotação com aceleração angular constante

À semelhança do movimento de translação com aceleração constante, as equações para rotação são obtidas integrando-se a equação de movimento:

$$\alpha = \frac{dw}{dt} = constante$$

$$\int dw = w_0 + \alpha \int dt \quad \Rightarrow \quad w = w_0 + \alpha t \qquad (1)$$

e também:

$$w = \frac{d\theta}{dt} \quad \Rightarrow \quad \int d\theta = \theta_0 + \int w\, dt = \theta_0 + \int (w_0 + \alpha t) dt$$

ou seja:

$$\theta = \theta_0 + w_0 \int dt + \alpha \int dt \quad \Rightarrow \quad \theta = \theta_0 + w_0 t + \frac{\alpha t^2}{2} \qquad (2)$$

A velocidade angular média foi definida de modo que:

$$\overline{w} = \frac{\theta - \theta_0}{t} \quad \Rightarrow \quad \theta = \theta_0 + \overline{w}\, t$$

mas quando estamos analisando o movimento com aceleração constante, também podemos definir a velocidade angular média como:

$$\overline{w} = \frac{w + w_0}{2}$$

e usando essa equação na anterior, temos que:

$$\theta = \theta_0 + \left(\frac{w + w_0}{2}\right)t = \theta_0 + \left(\frac{w + w_0}{2}\right)\left(\frac{w - w_0}{\alpha}\right)$$

ou seja:

$$w^2 = w_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0) \qquad (3)$$

As variáveis lineares e angulares

A posição

Ao analisarmos o movimento de rotação de um objeto o parâmetro que descreve o deslocamento espacial é

$$s = r\,\theta$$

A velocidade escalar

Quando observamos os corpos rígidos, a rotação se faz com raio constante, ou seja: cada ponto observado mantém uma distância constante ao eixo de rotação. Desse modo:

$$v = \frac{ds}{dt} = r\frac{d\theta}{dt} \quad \Rightarrow \quad v = r\,w$$

onde v é a velocidade linear de um certo ponto do corpo e w é a velocidade angular desse ponto considerado. Na realidade, w é a velocidade angular do corpo por inteiro.

A aceleração

De maneira equivalente, a aceleração de uma dado ponto de um corpo é definida como:

$$a = \frac{dv}{dt} = r\frac{dw}{dt} \quad \Rightarrow \quad a = r\alpha$$

Essa aceleração é também conhecida como aceleração tangencial, pois dá conta da variação do módulo da velocidade. Como a velocidade é tangencial à curva, para que o seu módulo varie é necessário uma aceleração nesta direção.

Com a definição dessa aceleração, temos agora dois tipos de aceleração no movimento circular: a aceleração tangencial e a aceleração radial (ou centrípeta), ou seja:

$$\vec{a} = \vec{a}_T + \vec{a}_R \quad onde \quad \begin{cases} a_T = \alpha\, r \\ a_R = \dfrac{v^2}{r} = w^2 r \end{cases}$$

Energia cinética de rotação

Vamos considerar um conjunto de N partículas, cada uma com massa m_i e velocidade $\vec{v}_i$ girando em torno de um mesmo eixo do qual distam r_i . A energia cinética deste sistema é:

$$K = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i (w\, r_i)^2 = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{N} m_i r_i^2\right) w^2 = \frac{1}{2} I\, w^2$$

onde r_i é a distância de cada partícula ao eixo, w a velocidade angular das partículas em torno do eixo considerado e definimos o momento de inércia I do conjunto de partículas como:

$$I = \sum_{i=1}^{N} m_i r_i^2$$

Vamos usar a definição de momento inércia principalmente para calcular a energia cinética de rotação de corpos rígidos. Quando uma roda está girando em torno do seu eixo, as diversas partes da roda se movem com velocidade diferentes, mas todas as suas partes têm a mesma velocidade angular. Daí a importância da definição do momento de inércia para computar a energia cinética associada ao movimento de rotação de um sistema de partículas ou um corpo rígido.

Momento de inércia

Se dividirmos um corpo rígido em pequenas partes, cada parte com uma massa Δm_i , podemos em tese calcular o momento de inércia deste corpo usando a equação anteriormente apresentada para um sistema de partículas:

$$I = \sum_{i=1}^{N} r_i^2\, \Delta m_i$$

Se aumentarmos essa subdivisão de modo que aqueles elementos de massa Δm_i se transformem em grandezas diferencias dm , poderemos identificar como:

$$I = \lim_{\Delta m \to 0} \sum_{i=1}^{N} r_i^2\, \Delta m_i = \int r^2\, dm$$

onde essa é uma integral simbólica que significa a integração sobre todo o volume do corpo rígido considerado, seja ele de uma, duas ou três dimensões.

Teorema dos eixos paralelos

Se conhecermos o momento de inércia de um corpo em relação a um eixo qualquer que passe por seu centro de massa, podemos inferir o momento de inércia desse corpo em relação a qualquer eixo paralelo ao primeiro eixo considerado. Se a distância entre os dois eixos for H, a massa do corpo for M e I_{CM} for o seu momento de inércia em relação a um eixo que passa pelo centro de massa, teremos o momento de inércia I mencionado:

$$I = I_{CM} + M H^2$$

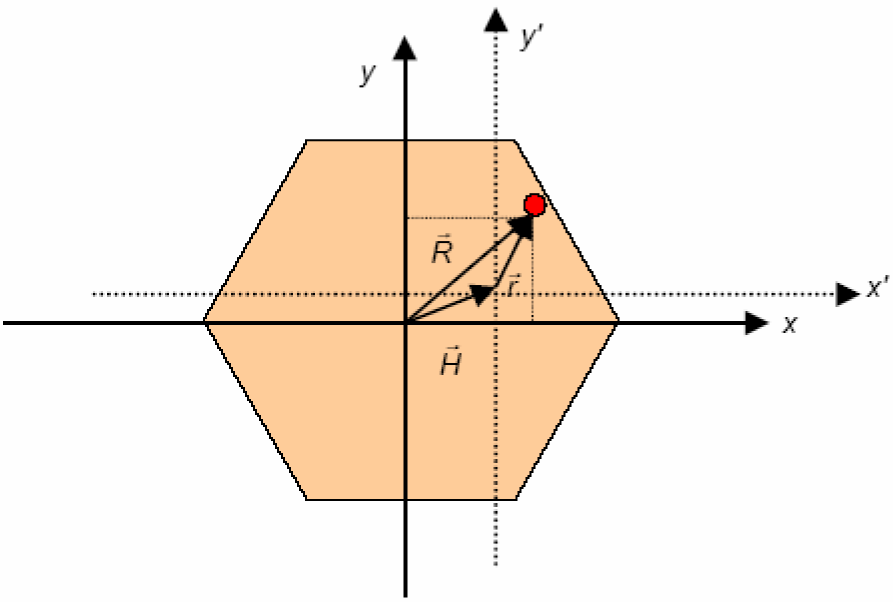
Para demonstrar essa equação vamos considerar um corpo de um formato qualquer, como no desenho a seguir. O momento de inércia em relação ao eixo perpendicular ao papel, que cruza com a origem do referencial (xy) e que passa pelo centro de massa é I_{CM}

$$I_{CM} = \int R^2 dm$$

onde dm é um elemento de massa (representado pelo pequeno círculo) localizado pelo vetor posição $\vec{R}$.

$$\vec{R} = \vec{r} + \vec{H}$$

$$\vec{R} = \hat{i}x + \hat{j}y$$
$$\vec{H} = \hat{i}a + \hat{j}b$$
$$\vec{r} = \hat{i}(x-a) + \hat{j}(y-b)$$



Para calcular o outro momento de inércia vamos considerar um segundo referencial (x'y') e um segundo eixo que passe pela origem desse referencial e seja perpendicular ao papel. O momento de inércia em relação a esse segundo eixo é:

$$I = \int r^2 dm = \int \left[(x-a)^2 + (y-b)^2\right] dm = \int \left[(x^2 + y^2) + (a^2 + b^2) - 2(ax + by)\right] dm$$

Mas

$$\int (x^2 + y^2) dm = \int R^2 dm = I_{CM}$$

$$\int (a^2 + b^2) dm = \int H^2 dm = MH^2$$

$$\int 2ax\, dm = 2a \int x\, dm = 2a\, X_{CM} M = 0$$

$$\int 2by\, dm = 2b \int y\, dm = 2b\, Y_{CM} M = 0$$

onde nas duas últimas equações utilizamos a premissa inicial que o centro de massa seria escolhido como origem do referencial, e desse modo $X_{CM} = Y_{CM} = 0$.

Coletando os resultados das últimas equações, encontramos que:

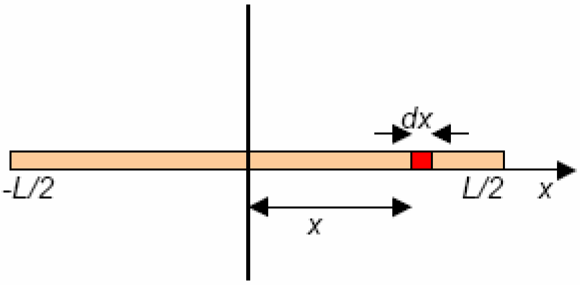
$$I = I_{CM} + M\, H^2$$

Alguns exemplos de cálculo de momento de inércia

a. *Momento de inércia de um bastão fino de massa M e comprimento L em relação a um eixo perpendicular ao bastão e que passa por seu centro de massa.*

$$I = \int r^2 dm$$

Vamos considerar a fatia dx , distante x da origem, que contém uma massa dm . Podemos usar a proporção:



$$\frac{dm}{M} = \frac{dx}{L} \quad \Rightarrow \quad dm = \left(\frac{M}{L}\right) dx$$

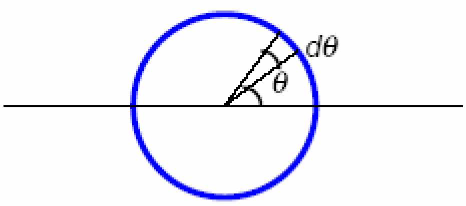
$$I = \int_{-L/2}^{+L/2} x^2 dm = \frac{M}{L} \int_{-L/2}^{+L/2} x^2 dx = \frac{M}{L} \left. \frac{x^3}{3} \right|_{-L/2}^{+L/2} = \frac{ML^2}{12}$$

b. *Momento de inércia de um anel de raio R e massa M , em relação a um eixo que passa pelo centro, perpendicular ao plano do anel.*

$$I = \int r^2 dm$$

Vamos considerar o pedaço de anel limitado pelo ângulo $d\theta$, que contém uma

Vamos considerar o pedaço de anel limitado pelo ângulo $d\theta$, que faz um ângulo θ com a horizontal e que contém uma massa dm . Podemos usar a proporção:



Anel de raio R

$$\frac{dm}{M} = \frac{d\theta}{2\pi} \quad \Rightarrow \quad dm = \left(\frac{M}{2\pi}\right) d\theta$$

$$I = \int r^2 dm \quad \Rightarrow \quad I = \int_0^{2\pi} R^2 \left(\frac{M}{2\pi} d\theta \right) = \frac{MR^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \quad \therefore \quad I = MR^2$$

c. *Momento de inércia de um anel de raio R e massa M, em relação a um eixo que passa por um diâmetro qualquer.*

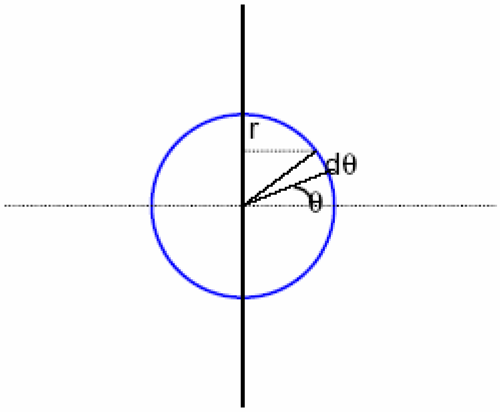
$$I = \int r^2 dm$$

A distância r de um elemento de massa dm ao eixo é:

$$r = R \cos\theta$$

O elemento de massa dm e o ângulo $d\theta$ que limita essa massa se relacionam como:

$$\frac{dm}{M} = \frac{d\theta}{2\pi} \quad \Rightarrow \quad dm = \left(\frac{M}{2\pi} \right) d\theta$$



Anel de raio R

$$I = \int r^2 dm \quad \Rightarrow \quad I = \int_0^{2\pi} (R\cos\theta)^2 \left(\frac{M}{2\pi} d\theta \right) = \frac{MR^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2\theta \, d\theta$$

Mas

$$\cos^2\theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2} \quad \Rightarrow \quad I = \frac{MR^2}{2\pi} \left\{ \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\theta + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos 2\theta \, d\theta \right\}$$

ou seja

$$I = \frac{MR^2}{2\pi} \left\{ \frac{1}{2} \theta \Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{2} \frac{\text{sen}\, 2\theta}{2} \Big|_0^{2\pi} \right\} = \frac{MR^2}{2\pi} \{\pi\} \quad \therefore \quad I = \frac{MR^2}{2}$$

d. *Momento de inércia de um cilindro anular em torno do eixo central.*

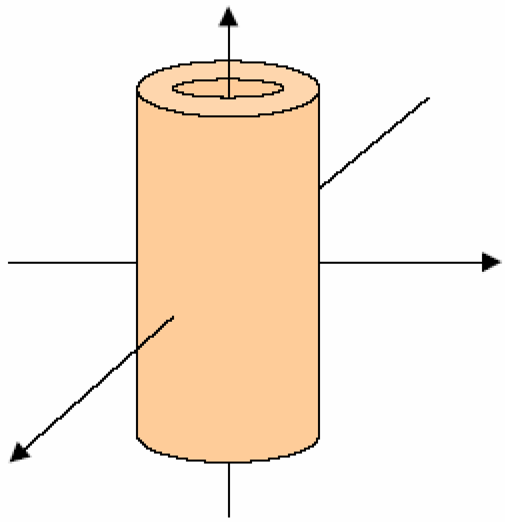
O cilindro tem raio interno R_1, raio externo R_2, comprimento L e massa M.

$$I = \int r^2 dm$$

Vamos considerar uma casca cilíndrica de raio r, espessura dr e comprimento L.. O volume dV dessa casca é

$$dV = (2\pi\, r\, L)\, dr$$

A massa dm contida nessa casca é:



$$dm = \rho \, dV$$

logo

$$dm = 2\pi \, L \, \rho \, r \, dr$$

$$I=\int r^2 dm=\int_{R_1}^{R_2} r^2\left[2\pi L\rho\, rdr\right]=2\pi\rho L\int_{R_1}^{R_2} r^3 dr=2\pi\rho L\frac{R_2^4-R_1^4}{4}$$

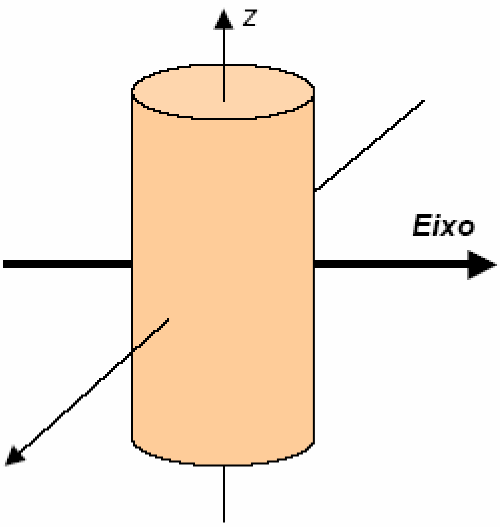
Mas

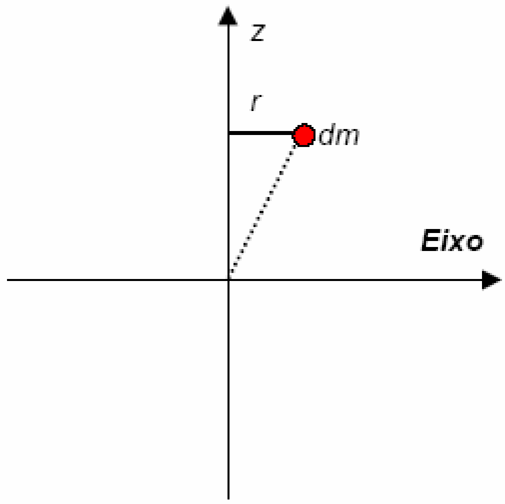
$$V=\pi L\left(R_2^2-R_1^2\right)\quad\Rightarrow\quad \rho=\frac{M}{V}=\frac{M}{\pi L\left(R_2^2-R_1^2\right)}$$

então

$$I=\pi L\frac{R_2^4-R_1^4}{2}\frac{M}{\pi L\left(R_2^2-R_1^2\right)}\quad\Rightarrow\quad I=\frac{M}{2}\left(R_2^2+R_1^2\right)$$

e. *Momento de inércia de um cilindro sólido de massa* ***M***, *raio* ***a*** *e comprimento* ***L*** *em relação ao diâmetro central*

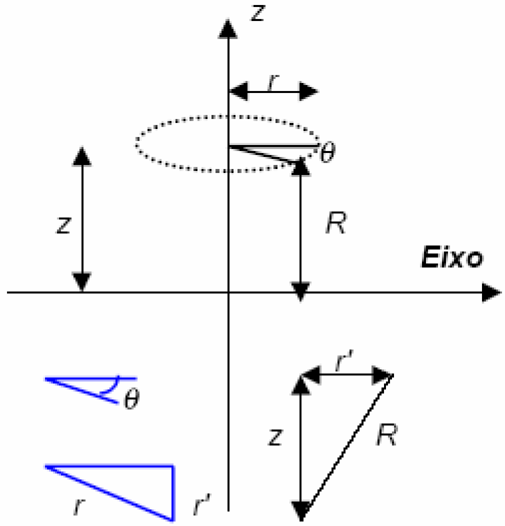




$$I=\int R^2 dm$$

$$dm=\rho\, dV=\frac{M}{V}dV=\frac{M}{\pi a^2 L}dV$$

O elemento de massa dm está limitado pelo ângulo $d\theta$ e dista R do eixo, que no desenho está na horizontal.



$$R^2=r'^2+z^2$$

$$r'=r\,\mathrm{sen}\,\theta$$

$$dV=(rd\theta)(dr)(dz)$$

$$I=\int_{-L/2}^{+L/2}\int_0^a\int_0^{2\pi}\left(r'^2+z^2\right)\left[\rho\left(r\,d\theta\,dr\,dz\right)\right]$$

$$I=\rho\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^a r\,dr\int_{-L/2}^{+L/2}\left(r^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta+z^2\right)dz=\rho\int_0^{2\pi}\mathrm{sen}^2\,\theta\,d\theta\int_0^a r^3\,dr\int_{-L/2}^{+L/2}dz+\rho\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a r\,dr\int_{-L/2}^{+L/2}z^2\,dz$$

Mas

$$\text{sen}^2\theta = \frac{1-\cos 2\theta}{2}$$

logo

$$\int_0^{2\pi} \text{sen}^2\theta\, d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\theta + \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\cos 2\theta\, d\theta = \frac{1}{2}2\pi - \frac{1}{2}2\,\text{sen}\,2\theta\Big|_0^{2\pi} = \pi$$

ou seja:

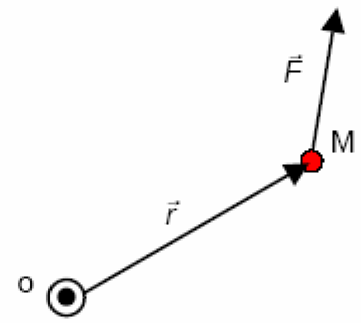
$$I = \rho(\pi)\left(\frac{a^4}{4}\right)(L) + \rho(2\pi)\left(\frac{a^2}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\frac{L^3}{4}\right) = \frac{\rho\pi L a^4}{4} + \frac{\rho\pi a^2 L^3}{12}$$

$$I = \rho\pi a^2 L\left(\frac{a^2}{4} + \frac{L^2}{12}\right) \quad \Rightarrow \quad I = \frac{Ma^2}{4} + \frac{ML^2}{12}$$

Torque

Define-se o troque $\vec{\tau}$ produzido pela força $\vec{F}$ quando ela atua sobre uma partícula como sendo o produto vetorial dessa força pelo vetor posição da partícula:

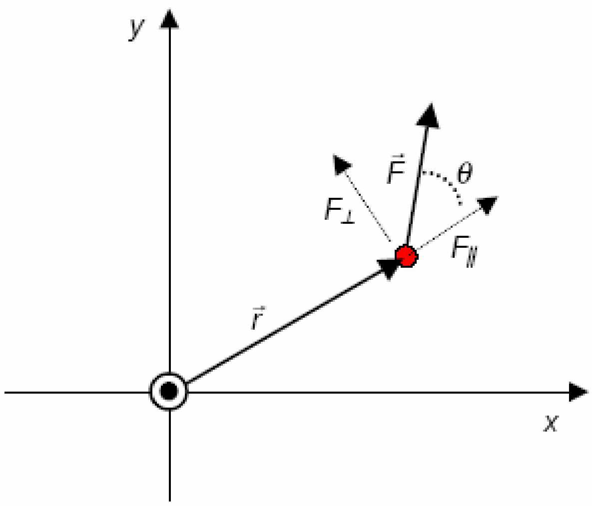
$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$



Se no exemplo da figura ao lado definirmos o plano da folha de papel com sendo x - y o torque estará ao longo do eixo z e será um vetor saindo da folha

⊙ *Convenção para simbolizar um vetor saindo perpendicular à folha.*

⊗ *Convenção para simbolizar um vetor entrando perpendicular à folha.*



Nesse exemplo ao lado, em particular, o resultado do produto vetorial é

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = \hat{k}\left(r\, F\, \text{sen}\theta\right)$$

onde

$$\tau = r\, F\, sen\theta = r\, F_\perp$$

Podemos perceber que apenas a componente $F_\perp$ da força $\vec{F}$ é quem contribui para o torque.

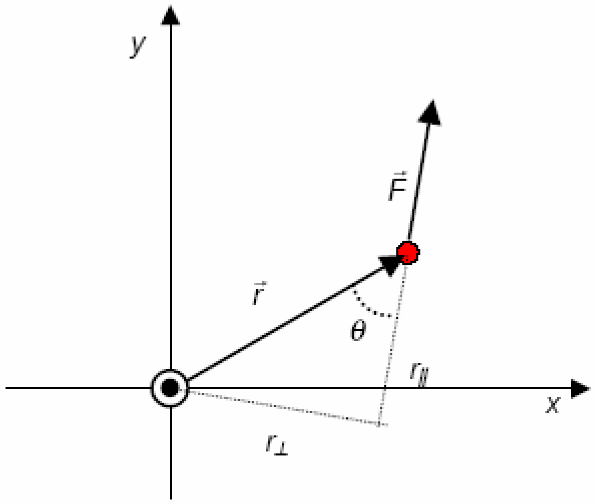
Podemos visualizar o resultado do produto vetorial de uma maneira equivalente à anterior, ou seja:

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = \hat{k}\left(r\,F\,\text{sen}\,\theta\right)$$

onde

$$\tau = r\,F\,sen\theta = r_{\perp}\,F$$

$r_{\perp}$ = *braço de alavanca*
$r_{/\!/}$ = *linha de ação*



A segunda Lei de Newton para a rotação

A segunda Lei de Newton toma uma forma peculiar quando aplicada aos movimentos que envolvem rotação. Se fizermos a decomposição da força aplicada a uma partícula segundo as suas componentes perpendicular e paralela ao vetor posição dessa partícula, teremos:

$$\vec{F} = m\,\vec{a}$$

$$F_{/\!/} = m\,a_{/\!/}$$

e

$$F_{\perp} = m\,a_{\perp}$$

Mas, quando consideramos o torque associado a essa força, temos:

$$\tau = r\,F_{\perp} = m\,r\,a_{\perp} = m\,r\,(\,r\,\alpha\,) = (\,m\,r^2\,)\,\alpha$$

e o torque toma a forma:

$$\tau = I\,\alpha$$

onde I é o momento de inércia da partícula considerada.

Se tivermos N partículas girando em torno de um eixo cada uma delas sob a ação de uma força, teremos um torque associado à essa força, onde:

$$\vec{\tau} = \sum_{i=1}^{N} \tau_i = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times \vec{F}_i$$

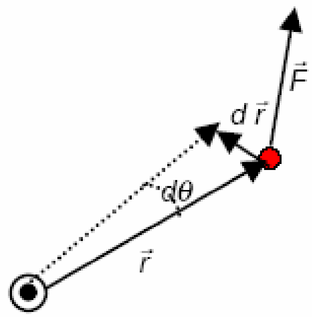
Mas

$$\tau = \Sigma\,r_i\,F_{i\perp} = \Sigma\,r_i\,m_i\,a_{i\perp} = \Sigma\,r_i\,m_i\,(\,r_i\,\alpha\,) = \Sigma\,(\,m_i\,r_i^2)\,\alpha$$

$$\tau = I\,\alpha$$

Trabalho, potência, e o teorema do trabalho - energia cinética

Para calcular o trabalho elementar dW executado por uma força $\vec{F}$ *temos que:*



$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F_{\perp}\, dr = F_{\perp}\, r\, d\theta$$

$$dW = \tau\, d\theta$$

$$W_{\pi} = \int_{\theta_i}^{\theta_f} \tau\, d\theta$$

Mas

$$\tau = I\alpha = I\frac{dw}{dt}$$

e

$$\tau\, d\theta = \left(I\frac{dw}{dt}\right)d\theta = (Idw)\frac{d\theta}{dt} = I\,w\,dw$$

ou seja:

$$W_{\pi} = \int_{\theta_i}^{\theta_f} \tau\, d\theta = I\int_{w_i}^{w_f} I\,w\,dw = I\frac{w^2}{2}\Bigg|_{w_i}^{w_f} \quad \Rightarrow \quad W_{\pi} = \frac{1}{2}I\,w_f^2 - \frac{1}{2}I\,w_i^2 = K_f - K_i$$

Para calcular a potência P associada à atuação da força $\vec{F}$, devemos considerar que:

$$dW = \tau\, d\theta$$

e também que:

$$P = \frac{dW}{dt} = \tau\frac{d\theta}{dt} \quad \Rightarrow \quad P = \tau w$$

Solução de alguns problemas

Capítulo 11 - Halliday, Resnick e Walker - 4ª. edição	
02	Durante um intervalo de tempo t, a turbina de um gerador gira um ângulo $\theta = a\,t + b\,t^3 - c\,t^4$, onde a, b e c são constantes.

a) Determine a expressão para sua velocidade angular.

$$w = \frac{d\theta}{dt} = a + 3bt^2 - 4ct^3$$

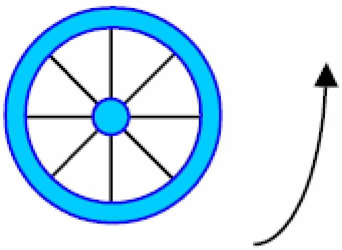
b) Determine a expressão para sua aceleração angular.

$$\alpha = \frac{dw}{dt} = 6bt - 12ct^2$$

Capítulo 11 - Halliday, Resnick e Walker - 4ª. edição	
10	Uma roda tem oito raios de $30cm$. Está montada sobre um eixo fixo e gira a $2,5rev/s$. Você pretende atirar uma flecha de $20cm$ de comprimento através da roda, paralelamente ao eixo, sem que a flecha colida com qualquer raio. Suponha que tanto a flecha quanto os raios são muito finos.

a) Qual a velocidade mínima que a flecha deve ter?

$r = 30cm = 0,30m$
$w = 2,5rev/s = 2,5\ .\ 2\pi rad/s$
$L = 20cm = 0,20m$



A flecha vai atravessar a roda usando as "fatias" de vazio entre dois raios. A distância angular entre dois raios é de $2\pi/8$ radianos.

Quando a roda gira, os raios se movem e depois de um certo tempo t_0 um raio passa a ocupar a posição do raio adjacente. Nesse tempo, cada raio "varre" totalmente o espaço entre a sua posição inicial e a posição do raio adjacente e nesse movimento se desloca de $\theta_0 = 2\pi/8$ radianos . É precisamente esse tempo que dispõe a flecha para atravessar a roda.

$$\theta_0 = wt_0 \quad \therefore \quad t_0 = \frac{\theta_0}{w}$$

A flecha tem comprimento L , e dispõe de um tempo t_0 para atravessar a roda, logo:

$$L = vt_0 \quad \Rightarrow \quad v = \frac{L}{t_0} = \frac{Lw}{\theta_0} = 4,0m/s$$

b) A localização do ponto em que você mira, entre o eixo e a borda, tem importância? Em caso afirmativo, qual a melhor localização?

Não tem importância a distância do eixo onde se mira, pois sempre teremos disponível o mesmo ângulo. Se perto da borda dispomos de um espaço linear maior, mas a velocidade linear da roda também é maior. Se mirarmos perto do eixo teremos um espaço linear menor, mas a velocidade linear da roda também é menor. Em suma, a velocidade angular é a mesma para todos os pontos.

Capítulo 11 - Halliday, Resnick e Walker - 4ª. edição	
12	Um prato de toca-discos, rodando a *33 1/3 rev/min*, diminui e pára *30s* após o motor ser desligado.

a) Determine a sua aceleração angular (uniforme) em *rev/min²* .

$w_0 = 33{,}33 rev/min$
$t = 30s = 0{,}5min$
$w = 0$

$$w = w_0 + \alpha t \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{w - w_0}{t} = -\frac{w_0}{t} = -66{,}66 rev/min^2$$

b) Quantas revoluções o motor realiza neste intervalo?

$$\theta = w_0 t + \frac{\alpha t^2}{2} = 8{,}33 rev$$

Capítulo 11 - Halliday, Resnick e Walker - 4ª. edição	
23	Um disco gira em torno de um eixo fixo, partindo do repouso, com aceleração angular constante, até alcançar a rotação de *10rev/s* . Depois de completar *60 revoluções* , a sua velocidade angular é de *15rev/s* .

$w_0 = 0$ $\qquad\qquad$ $\theta_2 = 60 rev$
$w_1 = 10 rev/s$ $\qquad$ $w_2 = 15 rev/s$

a) Calcule a aceleração angular.

$$w_2^2 = w_1^2 + 2\alpha\theta \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{w_2^2 - w_1^2}{2\theta} = 1{,}02 rev/s^2$$

b) Calcule o tempo necessário para completar as *60 revoluções* .

$$w_2 = w_1 + \alpha t_2 \quad \Rightarrow \quad t_2 = \frac{w_2 - w_1}{\alpha} = 4{,}80s$$

c) Calcule o tempo necessário para alcançar a rotação de *10rev/s* .

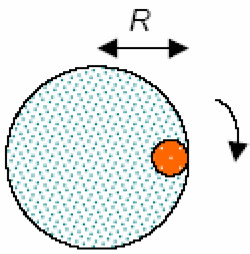
$$w_1 = w_0 + \alpha t_1 \quad \Rightarrow \quad t_1 = \frac{w_1 - w_0}{\alpha} = 9{,}61s$$

d) Calcule o número de revoluções desde o repouso até a velocidade de *10rev/s* .

$$w_1^2 = w_0^2 + 2\alpha\theta_1 \quad \Rightarrow \quad \theta_1 = \frac{w_1^2 - w_0^2}{2\alpha} = 48{,}07rev$$

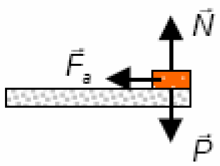
Capítulo 11 - Halliday, Resnick e Walker - 4ª. edição	
34	Uma certa moeda de massa M é colocada a uma distância R do centro de um prato de um toca discos. O coeficiente de atrito estático é μ_E . A velocidade angular do toca discos vai aumentando lentamente até w_0 , quando, neste instante, a moeda escorrega para fora do prato. Determine w_0 em função das grandezas M , R , g e μ_E .

$$\vec{F}_a + \vec{P} + \vec{N} = m\vec{a}$$



$$\begin{cases} P - N = 0 \\ F_a = ma \end{cases}$$

$$F_a = \mu_E N = \mu_E m g \quad \Rightarrow \quad a = \mu_E g$$



Mas

$$ma = m\frac{v^2}{R} = m\frac{(w_0 R)^2}{R} = m w_0^2 R$$

ou seja:

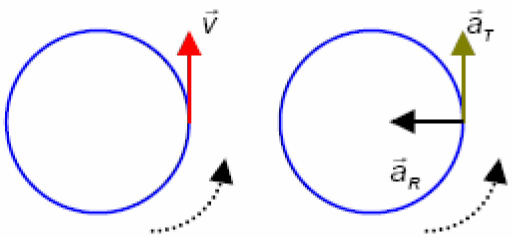
$$a = w_0^2 R = \mu_E g$$

$$w_0 = \sqrt{\frac{\mu_E g}{R}}$$

Capítulo 11 - Halliday, Resnick e Walker - 4ª. edição	
40	Um carro parte do repouso e percorre uma trajetória circular de $30m$ de raio. Sua velocidade aumenta na razão constante de $0{,}5m/s^2$.

a) Qual o módulo da sua aceleração linear *resultante* , depois de *15s* ?

$$\vec{a} = \vec{a}_T + \vec{a}_R \quad onde \quad \begin{cases} a_T = \alpha r \\ a_R = \dfrac{v^2}{r} = w^2 r \end{cases}$$



$$a_T = \alpha\, r \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{a_T}{r} = \frac{1}{60} = 0{,}0166 rad/s^2$$

$a_T = 0{,}5 m/s^2$
$w_0 = 0$
$t = 15s$
$r = 30m$

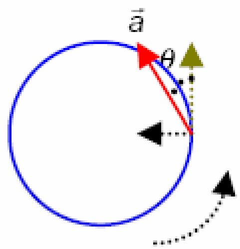
$$a_R = w^2 r = (w_0 + \alpha t)^2 r = 1{,}875 m/s^2$$

$$a = \sqrt{a_R^2 + a_T^2} = 1{,}94 m/s^2$$

b) Que ângulo o vetor aceleração resultante faz com o vetor velocidade do carro nesse instante?

$$\tan\theta = \frac{a_R}{a_T} = 3{,}75$$

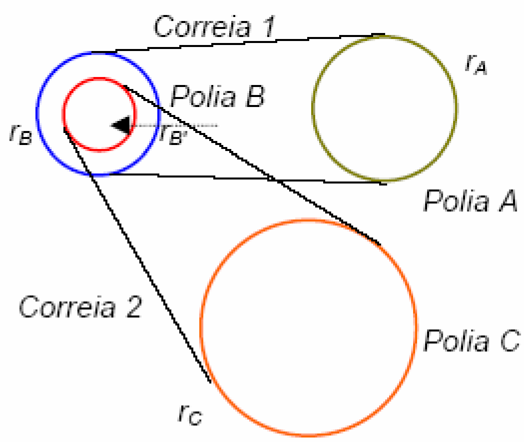
$$\theta = 75{,}06^0$$



Capítulo 11 - Halliday, Resnick e Walker - 4ª. edição	
42	Quatro polias estão conectadas por duas correias conforme mostrado na figura a seguir. A polia A ($r_A = 15cm$) é a polia motriz e gira a $10rad/s$. A polia B ($r_B = 10cm$) está conectada à A pela correia 1 . A polia B' ($r_{B'} = 5cm$) é concêntrica à B e está rigidamente ligada à ela. A polia C ($r_C = 25cm$) está conectada à polia B' pela correia 2.

a) Calcule a velocidade linear de um ponto na correia 1.

$w_A = 10rad/s$
$r_A = 15cm = 0{,}15m$
$r_B = 10cm = 0{,}10m$
$r_{B'} = 5cm = 0{,}05m$
$r_C = 25cm = 0{,}25m$



$$v_A = w_A\, r_A = 10 \,.\, 0{,}15 = 1{,}5 \ m/s$$

b) Calcule a velocidade angular da polia B.

$$v_A = v_B = w_B\, r_B$$

$$w_B = \frac{v_A}{r_B} = w_A \frac{r_A}{r_B} = 15rad/s$$

c) Calcule a velocidade angular da polia B'.

$$w_{B'} = w_B = 15rad/s$$

d) Calcule a velocidade linear de um ponto na correia 2.

$$v_{B'} = w_{B'}\, r_{B'} = w_B\, r_{B'} = 15\ .\ 0{,}05 = 0{,}75 m/s$$

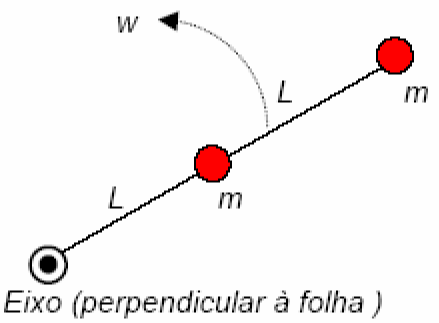
e) Calcule a velocidade angular da polia C.

$$v_{B'} = v_C = w_C r_C \quad \Rightarrow \quad w_C = \frac{v_{B'}}{r_C} = \frac{w_B r_{B'}}{r_C} = 3 rad/s$$

Capítulo 11 - Halliday, Resnick e Walker - 4ª. edição	
51	Duas partículas de massa m cada uma, estão ligadas entre si e a um eixo de rotação em O , por dois bastões delgados de comprimento L e massa M cada um, conforme mostrado na figura a seguir. O conjunto gira em torno do eixo de rotação com velocidade angular w .

a) Determine algebricamente a expressão para o momento de inércia do conjunto em relação a O .

Já foi calculado anteriormente que o momento de inércia de um bastão fino de massa M e comprimento L em relação a um eixo perpendicular ao bastão e que passa por seu centro de massa, vale $ML^2/12$.



Por outro lado, o teorema dos eixos paralelos diz que: se a distância entre os dois eixos for H , a massa do corpo for M e I_{CM} for o seu momento de inércia em relação a um eixo que passa pelo centro de massa, teremos o momento de inércia I mencionado:

$$I = I_{CM} + M H^2$$

Vamos calcular o momento de inércia de cada componente desse conjunto:

I_1 = Momento de inércia da partícula mais afastada.

$$I_1 = M\ (\ 2L\ )^2 = 4\ m\ L^2$$

I_2 = Momento de inércia do bastão mais afastado. A distância do centro de massa desse bastão até o eixo vale $3L/2$, logo:

$$I_2 = \frac{ML^2}{12} + M\left(\frac{3L}{2}\right)^2 = \frac{28}{12} ML^2$$

I_3 = Momento de inércia da partícula mais próxima.

$$I_3 = M\ (\ L\ )^2 = m\ L^2$$

I_4 = Momento de inércia do bastão mais próximo. A distância do centro de massa desse bastão até o eixo vale $L/2$, logo:

$$I_4 = \frac{ML^2}{12} + M\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{4}{12}ML^2$$

Finalmente:

$$I = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = 4mL^2 + \frac{28}{12}ML^2 + mL^2 + \frac{4}{12}ML^2$$

$$I = 5mL^2 + \frac{8}{3}ML^2$$

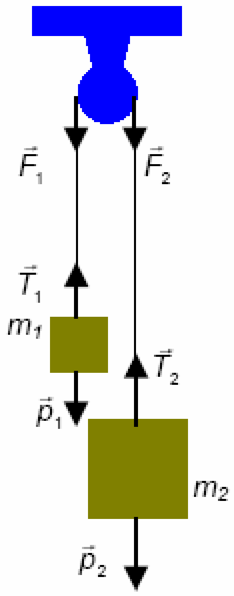
b) Determine algebricamente a expressão para a energia cinética de rotação do conjunto em relação a O .

$$K = \frac{1}{2}I\,w^2 = \left(\frac{5}{2}m + \frac{4}{3}M\right)w^2L^2$$

Capítulo 11 - Halliday, Resnick e Walker - 4ª. edição	
73	Numa máquina de Atwood, um bloco tem massa $500g$ e o outro $460g$. A polia, que está montada sobre um suporte horizontal sem atrito, tem um raio de $5cm$. Quando ela é solta, o bloco mais pesado cai $75cm$ em $5s$. A corda não desliza na polia.

a) Qual a aceleração de cada bloco?

$m_1 = 500g = 0{,}5kg$ $\quad v_0 = 0$
$m_2 = 460g = 0{,}46kg$ $\quad h = 75cm = 0{,}75m$
$R = 5cm = 0{,}05m$ $\quad t = 5s$



$$h = v_0 t + \frac{at^2}{2} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{2h}{t^2} = 0{,}06\text{m/s}^2$$

b) Qual a tensão na corda que suporta o bloco mais pesado?

$$\vec{p}_1 + \vec{T}_1 = m_1\vec{a}_1 \quad \Rightarrow \quad p_1 - T_1 = m_1 a$$

$$T_1 = p_1 - m_1\,a = m_1\,(g - a) = 4{,}87N$$

c) Qual a tensão na corda que suporta o bloco mais leve?

$$\vec{p}_2 + \vec{T}_2 = m_2\vec{a}_2 \quad \Rightarrow \quad T_2 - p_2 = m_2 a$$

$$T_2 = p_1 + m_1\,a = m_2\,(g + a) = 4{,}93N$$

d) Qual a aceleração angular da polia?

$$a = \alpha\, r \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{a}{r} = 1{,}2 rad/s^2$$

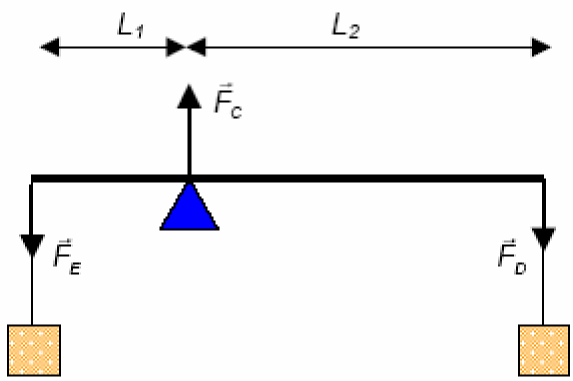
e) Qual o seu momento de inércia?

$$\tau = I\, \alpha \quad \Rightarrow \quad F_1\, r - F_2\, r = I\, \alpha$$

$$I = \frac{(T_1 - T_2) r}{\alpha} = 0{,}0141 kg.m^2$$

Capítulo 11 - Halliday, Resnick e Walker - 4ª. edição	
74	A figura a seguir mostra dois blocos de massa m suspensos nas extremidades de uma haste rígida, de peso desprezível, de comprimento $L = L_1 + L_2$, com $L_1 = 20cm$ e $L_2 = 80cm$. A haste é mantida na posição horizontal e então solta. Calcule a aceleração dos dois blocos quando eles começam a se mover.

$L_1 = 20cm = 0{,}2m$
$L_2 = 80cm = 0{,}8m$



$$\tau = I\, \alpha$$

$$m\, g\, L_2 - m\, g\, L_1 = I\, \alpha$$

Mas

$$I = mL_1^2 + mL_2^2$$

Logo

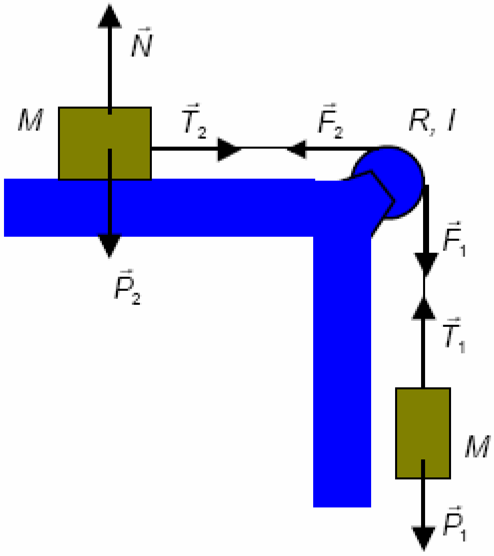
$$mg\,(L_2 - L_1) = m\,(L_1^2 + L_2^2)\alpha \quad \Rightarrow \quad \alpha = \left(\frac{L_2 - L_1}{L_2^2 + L_1^2}\right) g = 8{,}64 rad/s^2$$

$$\begin{cases} a_1 = -\alpha\, L_1 = -1{,}72 m/s^2 \\ a_2 = +\alpha\, L_2 = +6{,}91 m/s^2 \end{cases}$$

Capítulo 11 - Halliday, Resnick e Walker - 4ª. edição	
75	Dois blocos idênticos, de massa M cada uma, estão ligados por uma corda de massa desprezível, que passa por uma polia de raio R e de momento de inércia I. A corda não desliza sobre a polia; desconhece-se existir ou não atrito entre o bloco e a mesa; não há atrito no eixo da polia. Quando esse sistema é liberado, a polia gira de um ângulo θ num tempo t, e a aceleração dos blocos é constante

a) Qual a aceleração angular da polia?

$$\theta = w_0 t + \frac{\alpha t^2}{2} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{2\theta}{t^2}$$



b) Qual a aceleração dos dois blocos?

$$a = \alpha R = \frac{2\theta R}{t^2}$$

c) Quais as tensões na parte superior e inferior da corda? Todas essas respostas devem ser expressas em função de M, I, R, θ, g e t.

$$\vec{P}_1 + \vec{T}_1 = m\vec{a}_1 \quad \Rightarrow \quad P_1 - F_1 = ma$$

$$F_1 = P_1 - ma \quad \Rightarrow \quad F_1 = m(g - a)$$

$$F_1 = m\left(g - \frac{2\theta R}{t^2}\right)$$

$$\tau = I\alpha \quad \Rightarrow \quad F_1 R - F_2 R = I\alpha \quad \therefore \quad F_2 = F_1 - I\frac{\alpha}{R}$$

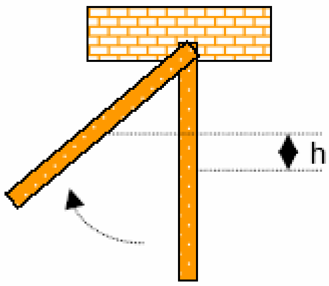
$$F_2 = mg - \frac{2\theta}{t^2}\left(mR + \frac{I}{R}\right)$$

Capítulo 11 - Halliday, Resnick e Walker - 4ª. edição	
81	Um bastão fino de comprimento L e massa m está suspenso livremente por uma de suas extremidades. Ele é puxado lateralmente para oscilar como um pêndulo, passando pela posição mais baixa com uma velocidade angular w.

a) Calcule a sua energia cinética ao passar por esse ponto.

O momento de inércia de uma haste em relação a um eixo perpendicular que passe por sua extremidade é:

$$I = \frac{mL^2}{3}$$



A energia cinética tem a forma:

$$K = \frac{1}{2} I w^2 = \frac{mw^2 L^2}{6}$$

b) A partir desse ponto, qual a altura alcançada pelo seu centro de massa? Despreze o atrito e a resistência do ar.

Usando a conservação da energia mecânica, encontramos que:

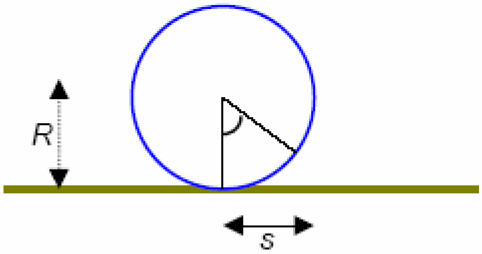
$$K_I = U_F \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} I w^2 = mgh \quad \therefore \quad h = \frac{I w^2}{2mg} = \frac{w^2 L^2}{6g}$$

12. Rolamento, torque e momento angular

Rolamento

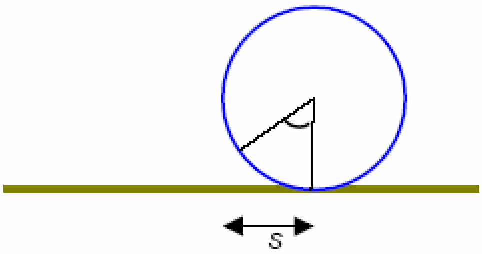
Considere um aro de raio R, rolando sem deslizar em uma superfície plana horizontal. Quando essa roda girar de um ângulo θ, o ponto de contato do aro com a superfície horizontal se deslocou uma distância s, tal que;

$$s = R\,\theta$$



O centro de massa do aro também deslocou-se da mesma distância. Portanto, a velocidade de deslocamento do centro de massa do aro tem a forma:

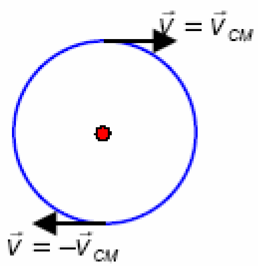
$$v_{CM} = \frac{ds}{dt} = R\frac{d\theta}{dt} \quad \Rightarrow \quad v_{CM} = R\,w$$



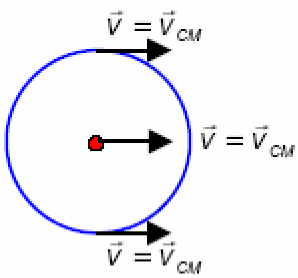
De maneira equivalente podemos encontrar a forma da aceleração do centro de massa do aro:

$$a_{CM} = \frac{dv_{CM}}{dt} = R\frac{dw}{dt} \quad \Rightarrow \quad a_{CM} = R\,\alpha$$

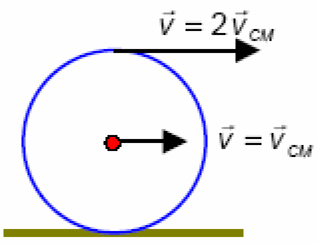
O rolamento descrito como uma combinação de rotação e translação



Movimento ***puramente rotacional***, *todos os pontos da roda movem-se com a mesma velocidade angular.*



Movimento ***puramente translacional***, *todos os pontos da roda movem-se para a direita com a mesma velocidade.*



O movimento de ***rolamento*** *da roda é uma combinação dos dois movimentos anteriormente descritos.*

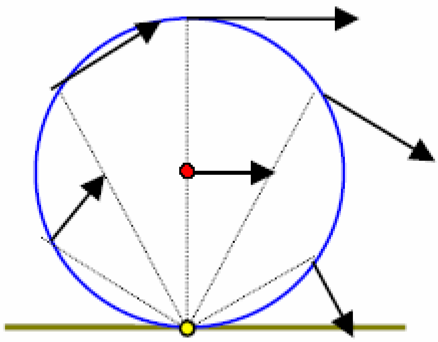
O rolamento visto como uma rotação pura

O rolamento pode ser entendido como uma rotação pura se observarmos que a cada instante o corpo está girando em torno de um eixo instantâneo, que passa pelo ponto de contato entre esse corpo e a superfície que o suporta. Esse eixo é perpendicular à direção do movimento.
A velocidade do centro da roda é

$$v_{CM} = w\, R$$

e a velocidade do topo da roda é

$$v_{Topo} = w\,(2R) = 2\, v_{CM}$$



Eixo instantâneo de rotação

A energia cinética

Um corpo que rola sem deslizar pode ser visto a cada instante como girando em torno de um eixo instantâneo que passa pelo ponto de contato desse corpo com a superfície que o suporta, e esse eixo é perpendicular à direção do movimento. do corpo. Desse modo, a sua energia cinética tem a forma:

$$K = \frac{1}{2} I\, w^2$$

onde I é o momento de inércia do corpo em relação ao eixo mencionado. Observa-se esse movimento como consistindo apenas de rotação.

Mas se levarmos em conta o teorema dos eixos paralelos:

$$I = I_{CM} + M\, R^2$$

a energia terá a forma:

$$K = \frac{1}{2} I_{CM} w^2 + \frac{1}{2} M\, v_{CM}^2$$

Desse modo, observa-se esse movimento como consistindo de uma composição *rotação + translação* .

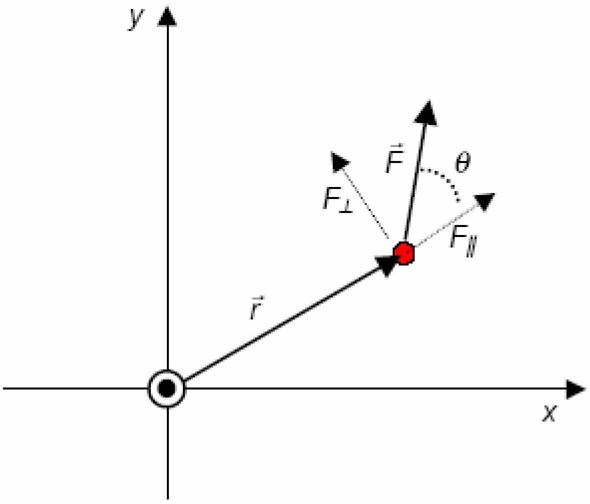
Torque

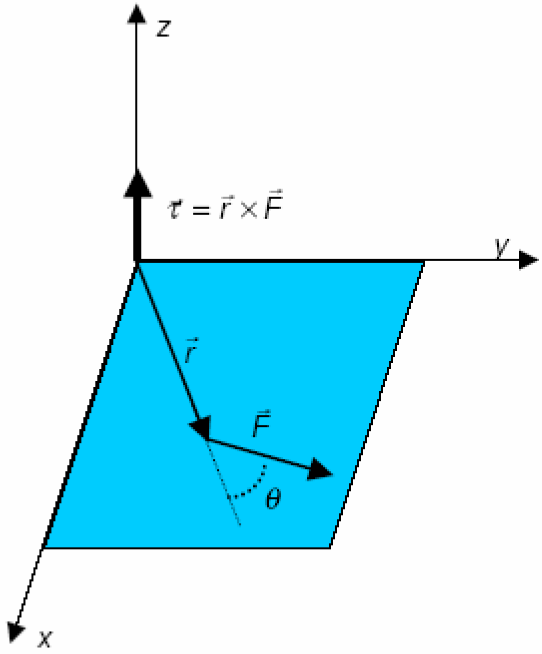
A figura abaixo mostra uma partícula localizada pelo vetor posição $\vec{r}$, sob a ação de uma força $\vec{F}$. O torque exercido por essa força sobre a partícula é definido como:

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$

⊙ *Convenção para simbolizar um vetor saindo perpendicular à folha.*

⊗ *Convenção para simbolizar um vetor entrando perpendicular à folha.*





Momento angular

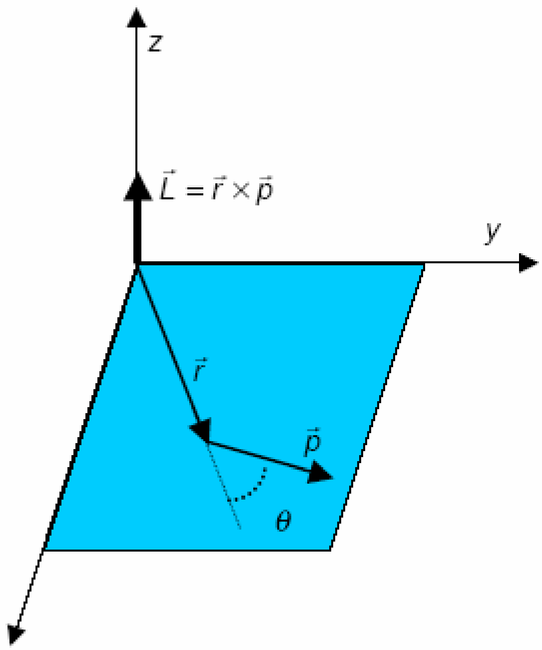
O momento angular de uma partícula de massa m localizada pelo vetor posição $\vec{r}$, que tem momento linear $\vec{p}$ é definido como:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

Existe uma conexão entre o momento angular de uma partícula e o torque associado à força resultante que atua sobre ela. Vamos considerar a variação do momento angular no tempo:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\vec{r} \times \vec{p}\right)$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}$$



Mas

$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} = \vec{v} \times \vec{p} = m\vec{v} \times \vec{v} = 0 \\ \dfrac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} = \text{Força resultante} \end{cases}$$

logo:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau}$$

Rotação	**Equivalência**	*Translação*
$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$	$\rightarrow$	$\vec{p}$
$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$	$\rightarrow$	$\vec{F}$
$\vec{\tau} = \dfrac{d\vec{L}}{dt}$	$\rightarrow$	$\vec{F} = \dfrac{d\vec{p}}{dt}$

Momento angular de um sistema de partículas

Quando estamos considerando um sistema de N partículas, o momento angular total é dado por:

$$\vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 + \ldots + \vec{L}_N = \sum_{i=1}^{N} \vec{L}_i$$

De modo equivalente à análise do caso de apenas uma partícula, vamos calcular a variação do momento angular total com o tempo:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{N} \vec{L}_i\right) = \sum_{i=1}^{N} \frac{d\vec{L}_i}{dt}$$

$$\frac{d\vec{L}_i}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r}_i \times \vec{p}_i) = \frac{d\vec{r}_i}{dt} \times \vec{p}_i + \vec{r}_i \times \frac{d\vec{p}_i}{dt} = m\vec{v}_i \times \vec{v}_i + \vec{r}_i \times \vec{F}_i$$

Mas

$$\frac{d\vec{p}_i}{dt} = \vec{F}_i = \vec{F}_i^{INT} + \vec{F}_i^{EXT}$$

ou seja

$$\frac{d\vec{L}_i}{dt} = \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{INT} + \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{EXT} = \vec{\tau}_i^{INT} + \vec{\tau}_i^{EXT}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \vec{\tau}_i^{INT} + \sum_{i=1}^{N} \vec{\tau}_i^{EXT}$$

logo

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau}^{INT} + \vec{\tau}^{EXT}$$

Vamos mostrar que o torque interno é nulo. As forças internas surgem aos pares como interação entre os pares de partículas, ou seja:

$$\vec{F}_i^{INT} = \sum_{j=1}^{N} \vec{f}_{ij}$$

Mas

$$\vec{\tau}^{INT} = \sum_{i=1}^{N} \vec{\tau}_i^{INT} = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times \left(\sum_{j=1}^{N} \vec{f}_{ij} \right) = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \vec{r}_i \times \vec{f}_{ij}$$

ou seja:

$$\vec{\tau}^{INT} = \sum_{i<j} \left(\vec{r}_i \times \vec{f}_{ij} + \vec{r}_j \times \vec{f}_{ji} \right)$$

Mas usando-se a terceira Lei de Newton, temos que $\vec{f}_{ij} = -\vec{f}_{ji}$, logo

$$\vec{\tau}^{INT} = \sum_{i<j} \left[(\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times \vec{f}_{ij} \right]$$

onde $(\vec{r}_i - \vec{r}_j)$ é um vetor contido na reta que une as partículas i e j , e essa reta também contém a força $\vec{f}_{ij}$. Portanto o produto vetorial é nulo pois os dois vetores são paralelos, e finalmente podemos concluir que

$$\vec{\tau}^{INT} = 0$$

Desse modo, concluímos que

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau}^{EXT}$$

e essa equação tem a sua equivalente no movimento de translação:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}^{EXT}$$

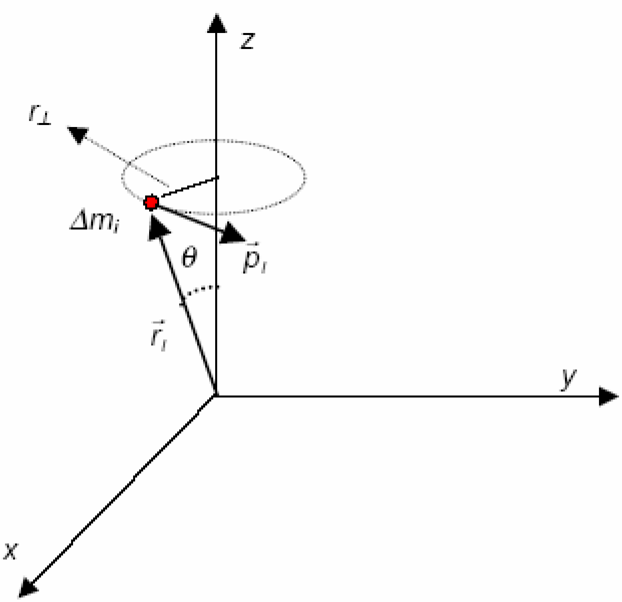
Momento angular de um corpo rígido

Para calcular o momento angular de um corpo rígido que está girando em torno de um eixo (neste caso eixo z) com velocidade angular ***w*** , vamos dividi-lo em pequenos volumes ΔV_i cada um com uma massa Δm_i , que tem momento linear $\vec{p}_i$ e estão localizados pelo vetor posição $\vec{r}_i$. O momento angular desta pequena massa é:

$$\vec{L}_i = \vec{r}_i \times \vec{p}_i$$

Observe-se que o ângulo entre os vetores $\vec{r}_i$ e $\vec{p}_i$ é 90^0 . Desse modo:

$$L_i = r_i\, p_i = r_i\, v_i\, \Delta m_i$$



Para calcular a componente z do momento angular, temos que:

$$L_{iz} = L_i\, sen\theta = (r_i\, sen\theta)\, v_i\, \Delta m_i = r_{i\perp}\, v_i\, \Delta m_i = r_{i\perp}\, (w\, r_{i\perp})\Delta m_i$$

ou seja:

$$L_{iz} = w\, \Delta m_i\, r^2_{i\perp}$$

$$L_z = \sum_i L_{iz} = w \sum_i \Delta m_i\, r^2_{i\perp}$$

Mas

$$I = \lim_{\Delta m_i \to 0} \sum_i \Delta m_i r^2_{i\perp} = \int r^2_{\perp} dm$$

onde $r_{i\perp}$ é a componente do vetor posição da massa Δm_i perpendicular ao eixo de rotação, ou seja é a distância da massa Δm_i ao eixo de rotação, e portanto temos a nossa definição original de momento de inércia. Desse modo:

$$L = I\, w$$

onde omitimos o índice z do momento angular pois iremos tratar apenas de situações onde o momento angular de um corpo rígido será paralelo ao eixo de rotação (analisaremos apenas situações onde o momento de inércia é uma grandeza escalar).

Estaremos interessados em situações onde

$$\vec{L} = I\vec{w}$$

e ainda:

$$\tau = \frac{d\vec{L}}{dt} \quad \Rightarrow \quad \tau = I\alpha$$

Conservação do momento angular

Quando consideramos um sistema de partículas, a variação do momento angular total é igual ao torque externo.

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau}^{\,EXT}$$

Se esse sistema estiver isolado, ou seja se o torque externo for nulo, o momento angular total será uma constante.

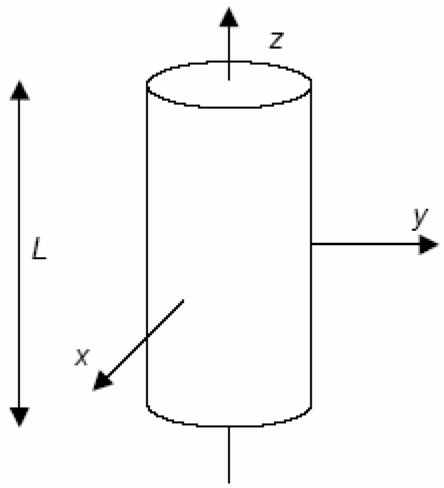
$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{L} = constante$$

Esse resultado é o equivalente da conservação do momento linear total, e tem um significado e importância similar.

Solução de alguns problemas

Capítulo 12 - Halliday, Resnick e Walker - 4ª. edição	
01	Um tubo de paredes finas rola pelo chão. Qual é a razão entre as suas energias cinéticas translacional e rotacional, em torno de um eixo paralelo ao seu comprimento e que passa pelo seu centro de massa?

Inicialmente vamos calcular o momento de inércia do tubo mencionado, supondo que ele tenha raio R e comprimento L.



$$dm = \sigma\, dS = \sigma\left[(Rd\theta)L\right] = \sigma\, LRd\theta$$

$$I = \int r^2 dm = \int_0^{2\pi} R^2(\sigma\, LRd\theta) = \sigma\, R^3 L \int_0^{2\pi} d\theta$$

$$\sigma = \frac{M}{A} = \frac{M}{2\pi RL}$$

$$I = \left(\frac{M}{2\pi RL}\right) R^3 L\,(2\pi) \quad \therefore \quad I = MR^2$$

$$\frac{K_T}{K_R} = \frac{\frac{1}{2}Mv_{CM}^2}{\frac{1}{2}I\,w^2} = \frac{M(wR)^2}{(MR^2)w^2} = 1$$

Capítulo 12 - Halliday, Resnick e Walker - 4ª. edição	
02	Um aro com um raio de 3m e uma massa de 140kg rola sobre um piso horizontal de modo que o seu centro de massa possui uma velocidade de 0,150m/s . Qual é o trabalho que deve ser feito sobre o aro para fazê-lo parar?

$$I_{CM} = M\,R^2$$

$$K = \frac{1}{2}I_{CM}w^2 + \frac{1}{2}Mv_{CM}^2$$

$R = 3m$
$M = 140kg$
$v_{CM} = 0,15m/s$

Considerando que $v_{CM} = w\,R$, temos que:

$$K = \frac{1}{2}(MR^2)w^2 + \frac{1}{2}M(w\,R)^2 = Mv_{CM}^2 = 3,15J$$

$$W = \Delta K = K_F - K_I = -K_I = -3,15J$$

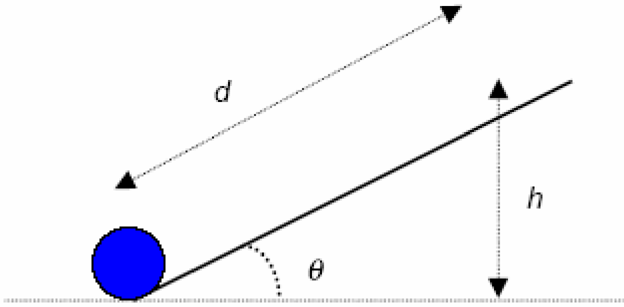
Capítulo 12 - Halliday, Resnick e Walker - 4ª. edição	
07	Uma esfera sólida de peso igual a $P = 35,58N$ sobe rolando um plano inclinado, cujo ângulo de inclinação é igual a $\theta = 30^0$. Na base do plano, o centro de massa da esfera tem uma velocidade linear de $v_0 = 4,88m/s$.

a) Qual é a energia cinética da esfera na base do plano inclinado?

$$K = \frac{1}{2} I_{CM} w^2 + \frac{1}{2} M v_{CM}^2$$

Como $v_{CM} = w\,R$

$$K = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{I_{CM}}{MR^2}\right) M v_{CM}^2$$



Para a esfera temos que $I_{CM} = \frac{2}{5} MR^2$, logo a energia cinética terá a forma:

$$K = \frac{7}{10} M v_{CM}^2 = \frac{7}{10}\frac{P}{g} v_{CM}^2 = 60,52J$$

b) Qual é a distância que a esfera percorre ao subir o plano?

$$E_I = E_F \quad \Rightarrow \quad \frac{7}{10} M v_{CM}^2 = Mgh \quad \therefore \quad h = \frac{7 v_{CM}^2}{10g} = 1,70m$$

$$h = d\,\text{sen}\,\theta \quad \Rightarrow \quad d = \frac{h}{\text{sen}\,\theta} = \frac{7 v_{CM}}{10 g\,\text{sen}\,\theta} = 3,4m$$

c) A resposta do *item* *b* depende do peso da esfera?

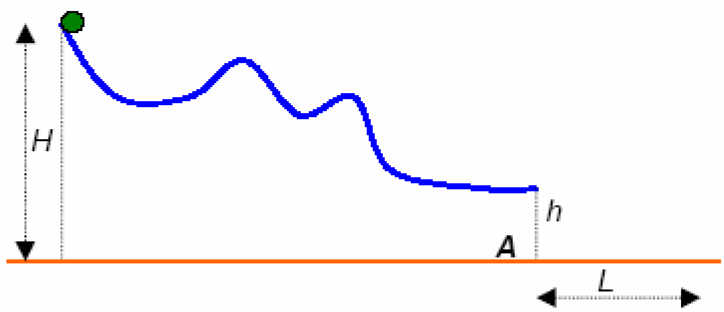
Como vimos na dedução anterior, a resposta não depende do peso.

Capítulo 12 - Halliday, Resnick e Walker - 4ª. edição	
11	Uma esfera homogênea, inicialmente em repouso, rola sem deslizar, partindo da extremidade superior do trilho mostrado a seguir, saindo pela extremidade da direita. Se $H = 60m$, $h = 20m$ e o extremo direito do trilho é horizontal, determine a distância L horizontal do ponto A até o ponto que a esfera toca o chão.

$$I_{CM} = \frac{2}{5} MR^2$$

$$K = \frac{1}{2} I_{CM} w^2 + \frac{1}{2} M v_{CM}^2$$

$$K = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{I_{CM}}{MR^2}\right) M v_{CM}^2$$



$$K = \frac{7}{10} M v_{CM}^2$$

$$E_I = E_F \quad \Rightarrow \quad Mg(H-h) = \frac{7}{10} M v_{CM}^2 \quad \therefore \quad v_{CM} = \sqrt{\frac{10g(H-h)}{7}}$$

$$\begin{cases} h = \dfrac{gt^2}{2} \quad \Rightarrow \quad t = \sqrt{\dfrac{2h}{g}} \\ L = v_{CM} t \quad \Rightarrow \quad L = v_{CM}\sqrt{\dfrac{2h}{g}} \end{cases}$$

ou seja:

$$L = \sqrt{\frac{20h(H-h)}{7}} = 47{,}80m$$

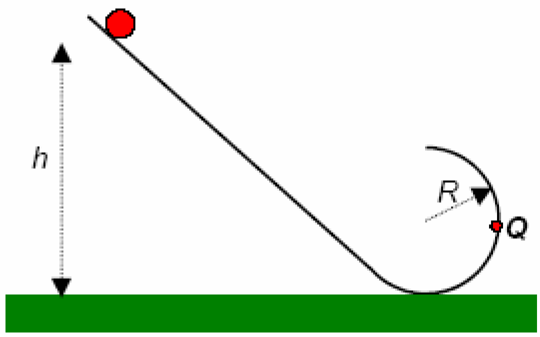
Capítulo 12 - Halliday, Resnick e Walker - 4ª. edição

13 Uma bolinha de gude sólida de massa m e raio r rola sem deslizar sobre um trilho mostrado a seguir, tendo partido do repouso em algum ponto do trecho retilíneo do trilho.

a) Qual é a altura mínima h, medida à partir da base do trilho, de onde devemos soltar a bolinha para que ela não perca o contato com o trilho no ponto mais alto da curva? O raio da curva é R e considere que $R >> r$.

A condição para que a bolinha não perca contato é que a normal seja nula na parte mais alta, ou seja que o peso seja a única força radial, e desse modo teremos:

$$P = mg = m\frac{v_{CM}^2}{R} \quad \Rightarrow \quad v_{CM}^2 = Rg$$



Mas como o sistema é conservativo, a energia mecânica será conservada:

$$E_I = E_F \quad \Rightarrow \quad U_I = U_F + K_F$$

ou seja

$$mgH = mg(2R) + \frac{7}{10} m v_{CM}^2 = mg(2R) + \frac{7}{10} m(Rg) = \frac{27}{10} mgR \quad \therefore \quad H = 2{,}7R$$

b) Se a bolinha for solta de uma altura igual a $6R$ acima da base do trilho, qual será a componente horizontal da força que atua sobre ela no ponto $\boldsymbol{Q}$?

Usando a conservação da energia mecânica entre os dois pontos, temos que:

$$E_0 = E_Q \quad \Rightarrow \quad mg(6R) = mgR + \frac{7}{10} m v_Q^2 \quad \therefore \quad v_Q^2 = \frac{50}{7} Rg$$

A força horizontal no ponto Q é a própria força radial nesse ponto, logo:

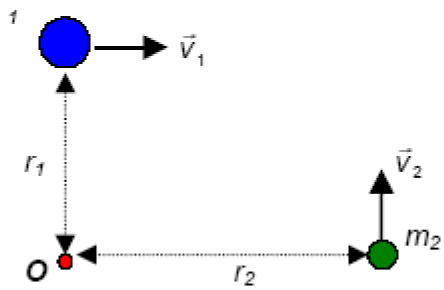
$$F_R = m\frac{v_Q^2}{R} = \frac{m}{R}\left(\frac{50}{7}Rg\right) \quad \therefore \quad F_R = \frac{50}{7}mg$$

Capítulo 12 - Halliday, Resnick e Walker - 4ª. edição	
27	Dois objetos estão se movendo como mostra a figura a seguir. Qual é o seu momento angular em torno do ponto ***O*** ?

$m_1 = 6{,}5kg$ $\qquad$ $m_2 = 3{,}1kg$

$v_1 = 2{,}2m/s$ $\qquad$ $v_2 = 3{,}6m/s$

$r_1 = 1{,}5m$ $\qquad$ $r_2 = 2{,}8m$



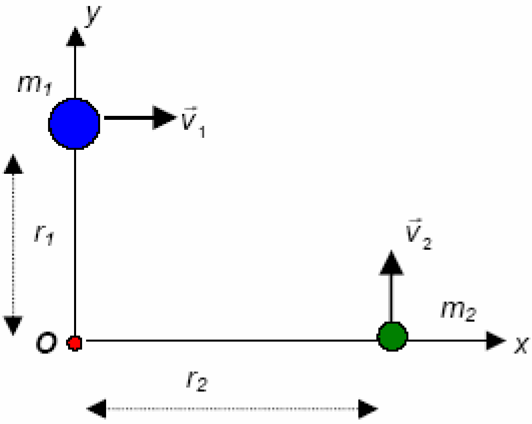
$$\begin{cases} \vec{p}_1 = m_1\vec{v}_1 = \hat{i}m_1v_1 \\ \vec{r}_1 = \hat{j}\,r_1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \vec{p}_2 = m_2\vec{v}_2 = \hat{j}\,m_2v_2 \\ \vec{r}_2 = \hat{i}\,r_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{L}_1 = \vec{r}_1 \times \vec{p}_1 = \left(\hat{j}\times\hat{i}\right)m_1\,r_1\,v_1 = -\hat{k}\,m_1\,r_1\,v_1 \\ \vec{L}_2 = \vec{r}_2 \times \vec{p}_2 = \left(\hat{i}\times\hat{j}\right)m_2\,r_2\,v_2 = +\hat{k}\,m_2\,r_2\,v_2 \end{cases}$$

$$\vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2$$

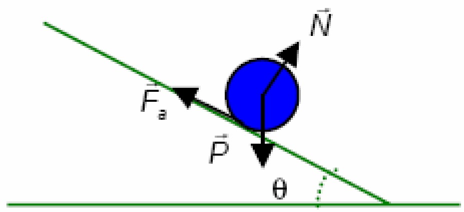
$$\vec{L} = \hat{k}\,\left(m_2v_2r_2 - m_1v_1r_1\right)$$

$$\vec{L} = \hat{k}\,9{,}798\,kg.m^2/s$$



Capítulo 12 - Halliday e Resnick - ***Edição antiga***	
32	Mostre que um cilindro deslizará sobre um plano inclinado, cujo ângulo de inclinação é θ , quando o coeficiente de atrito estático entre o plano e o cilindro for menor que *(tanθ)/3* .

$$\begin{cases} N - mg\cos\theta = 0 \\ mg\,\text{sen}\theta - F_a = ma \end{cases}$$



Quando estamos interessado em calcular

o torque em relação a um eixo que coincide com a reta de contato entre o cilindro e o plano, devamos notar que apenas a força de atrito produz um torque em relação a esse eixo. À medida que aumenta a inclinação vai aumentando a força de atrito estático necessária para evitar o deslizamento. Ni limite, antes do deslizamento, temos que $F_a = (F_a)_M = \mu_E N$ .A maior aceleração que o cilindro poderá ter sem deslizar é definida pela condição:

$$I_{CM}\,\alpha \;<\; F_a\,R$$

A condição de deslizamento é:

$$F_a\,R \;<\; I_{CM}\,\alpha$$

Usando a segundo lei de Newton poderemos calcular a aceleração angular α :

$$m\,g\,sen\theta - \mu_E\,m\,g\,cos\theta = ma = m\,\alpha\,R$$

$$\alpha = \frac{g}{R}(\operatorname{sen}\theta - \mu_E\cos\theta)$$

Logo:

$$(\mu_E mg\cos\theta)R < I_{CM}\left[\frac{g}{R}(\operatorname{sen}\theta - \mu_E\cos\theta)\right]$$

$$\mu_E\,cos\theta\,(\,mR^2 + I_{CM}\,) \;<\; I_{CM}\,sen\theta$$

$$\mu_E < \left(\frac{I_{CM}}{mR^2 + I_{CM}}\right)\tan\theta$$

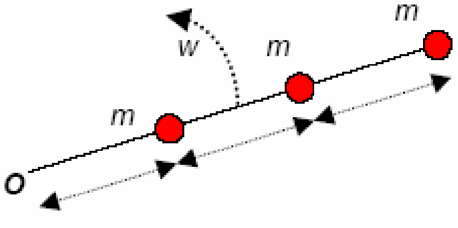
Considerando que o momento de inércia do cilindro é $mR^2/2$, teremos:

$$\mu_E < \frac{1}{3}\tan\theta$$

Capítulo 12 - Halliday, Resnick e Walker - 4ª. edição	
44	Três partículas, cada uma de massa m , são presas umas às outras e a um eixo de rotação por três cordões sem massa, cada um de comprimento L , como mostra a figura a seguir. O conjunto gira em torno do eixo de rotação em **O** com velocidade angular w , de tal forma que as partículas permanecem em linha reta.

Quais são, em termos de m , L e w e relativamente ao ponto **O**

a) O momento de Inércia do conjunto?



$$I = m\,L^2 + m\,(2L)^2 + m\,(3L)^2 = 14\,m\,L^2$$

b) O momento angular da partícula do meio?

Se definirmos o *eixo z* como sendo perpendicular à folha de papel e saindo dela, o momento angular das três partículas estarão no sentido positivo do *eixo z* .

$$L_2 = I_2\, w = 4\, m\, L^2\, w$$

c) O momento angular total das três partículas?

$$L = I\, w = 14\, m\, L^2\, w$$

Capítulo 12 - Halliday e Resnick - ***Edição antiga***	
45	Um cilindro de comprimento L e raio r tem peso P. Dois cordões são enrolados em volta do cilindro, cada qual próximo da extremidade, e suas pontas presas a ganchos fixos no teto. O cilindro é mantido horizontalmente com os dois cordões exatamente na vertical e, em seguida, é abandonado.

a) Determine a aceleração linear do cilindro durante a queda.

$$F_1 = F_2 = F$$

Como a força peso não produz torque em relação ao eixo de rotação, temos que:

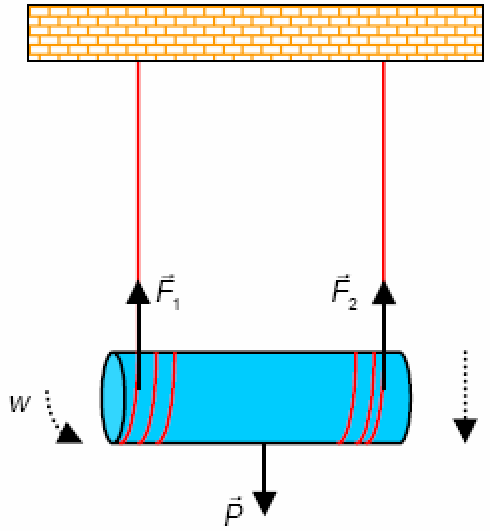
$$\tau = 2Fr = I\alpha \quad \Rightarrow \quad F = \frac{I\alpha}{2r}$$

Mas

$$a = \alpha\, r$$

logo

$$F = \frac{Ia}{2r^2}$$



Considerando as forças que atuam no cilindro, da segunda lei de Newton temos que:

$$\vec{P} + \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = M\vec{a}$$

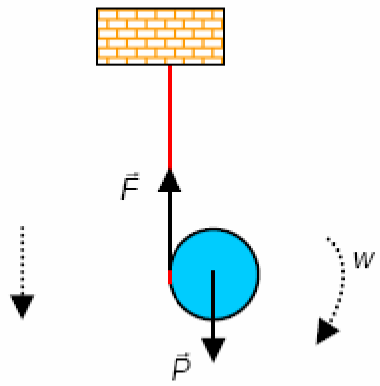
ou seja:

$$P - 2\,F = Ma$$

$$Mg - 2\left(\frac{Ia}{2r^2}\right) = Ma$$

$$g = a\left(1 + \frac{I}{Mr^2}\right)$$

$$a = \frac{g}{1 + \dfrac{I}{Mr^2}}$$



Considerando que o momento de inércia do cilindro tem a forma $I = \dfrac{Mr^2}{2}$, encontramos que

$$a = \frac{2g}{3}$$

b) Determine a tensão em cada cordão enquanto eles estão se desenrolando.

Mostramos anteriormente que:

$$F = \frac{Ia}{2r^2}$$

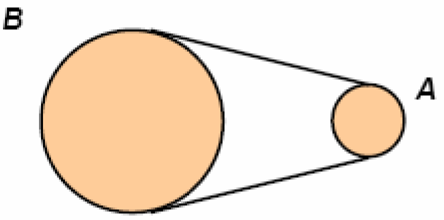
logo

$$F = \frac{Mr^2}{2}\frac{1}{2r^2}\frac{2g}{3} \quad \Rightarrow \quad F = \frac{Mg}{6}$$

Capítulo 12 - Halliday, Resnick e Walker - 4ª. edição	
46	As rodas A e B da figura a seguir estão conectadas por uma correia que não desliza. O raio da roda B é três vezes maior que o raio da correia A .

a) Qual seria a razão entre os momentos de inércia I_A / I_B se ambas tivessem o mesmo momento angular?

$$r_B = 3\, r_A$$



Como as duas rodas estão conectadas, as velocidades das suas bordas serão iguais, ou seja:

$$v_A = v_B$$

ou seja:

$$w_A r_A = w_B r_B \quad \Rightarrow \quad \frac{w_A}{w_B} = \frac{r_B}{r_A} = 3 \quad \therefore \quad w_A = 3 w_B$$

$$L_A = I_A\, w_A$$

$$L_B = I_B\, w_B$$

Como $L_A = L_B$

$$I_A w_A = I_B w_B \quad \Rightarrow \quad \frac{I_A}{I_B} = \frac{w_B}{w_A} \quad \therefore \quad \frac{I_A}{I_B} = \frac{1}{3}$$

b) Qual seria a razão entre os momentos de inércia I_A / I_B se ambas tivessem a mesma energia cinética de rotação?

Como $K_A = K_B$

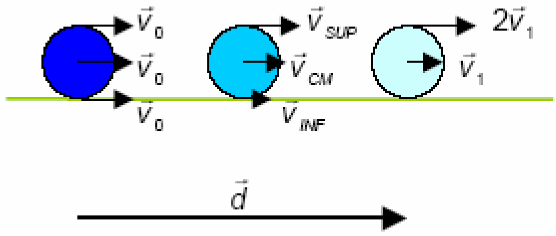
$$\frac{1}{2} I_A w_A^2 = \frac{1}{2} I_B w_B^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{I_A}{I_B} = \left(\frac{w_B}{w_A}\right)^2 \quad \therefore \quad \frac{I_A}{I_B} = \frac{1}{9}$$

49 Um jogador de boliche principiante joga uma bola de massa M e raio $R = 11cm$ na pista, com velocidade inicial $v_0 = 8,5m/s$. A bola é arremessada de tal maneira que desliza uma certa distância antes de começar a rolar. Ela não está girando quando atinge a pista sendo o seu movimento puramente translacional. O coeficiente de atrito cinético entre ela e a pista é $0,21$.

a) Por quanto tempo a bola desliza?

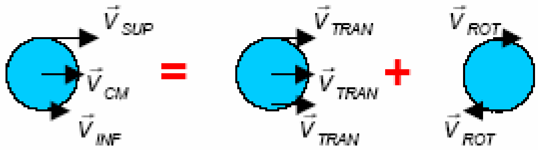
M $\qquad v_0 = 8,5m/s$

$R = 11cm = 0,11m$ $\qquad \mu_C = 0,21$



Podemos visualizar o movimento da bola como uma composição de movimentos: *rotação* + *translação* , e desse modo decompor as velocidades:

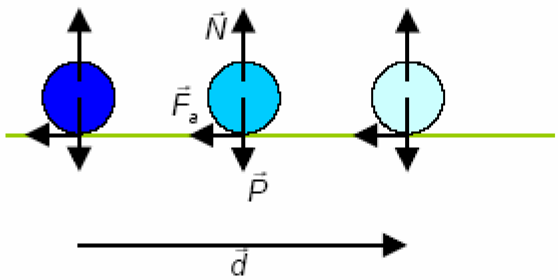
$$\vec{v} = \vec{v}_{TRAN} + \vec{v}_{ROT}$$



Cada parte da roda vai ter uma composição de velocidades peculiar, as partes superior e inferior são os extremos de diversidade:

$$v_S = v_{TRAN} + v_{ROT}$$

$$v_I = v_{TRAN} - v_{ROT}$$



Quando a bola atinge a pista a velocidade de rotação é nula, e ela só tem velocidade de translação v_0 . À medida que a bola começa deslizar, ela também inicia a rotação, adquirindo velocidade angular até alcançar o valor w_1 quando não mais desliza, tendo um movimento de rolamento sem deslizamento.

Os dois tipos de movimento (*rotação* + *translação*) obedecem às equações:

$$\begin{Bmatrix} (v_{TRAN})_0 = v_0 \\ \\ (v_{TRAN})_1 = v_1 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} v_1 = v_0 - a_{TRAN}t \\ \\ v_1^2 = v_0^2 - 2a_{TRAN}d \end{cases}$$

$$\begin{Bmatrix} (v_{ROT})_0 = 0 \\ \\ (v_{ROT})_1 = w_1 R = v_1 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} w_1 = w_0 + \alpha t \quad \Rightarrow \quad v_1 = w_1 R = R\alpha t \quad \therefore \quad v_1 = a_{ROT}t \\ \\ w_1^2 = w_0^2 - 2\alpha\theta \quad \Rightarrow \quad v_1^2 = 2(R\alpha)(R\theta) \quad \therefore \quad v_1^2 = 2a_{ROT}L \end{cases}$$

Ao contrário do rolamento com deslizamento, neste caso as velocidades de translação e rotação não estão conectadas diretamente. Isso só vai acontecer quando cessar o deslizamento, e nesse ponto $v_1 = w_1 R$.

Para o movimento de translação, temos a segunda lei de Newton:

$$\vec{F}_a + \vec{P} + \vec{N} = M\vec{a} \quad \Rightarrow \quad \begin{Bmatrix} N - P = 0 \\ \\ F_a = Ma_{TRAN} \end{Bmatrix}$$

Mas

$$F_a = \mu_C\, N = \mu_C\, M\, g \quad \therefore \quad a_{TRAN} = \mu_C\, g$$

Para o movimento de rotação temos:

$$\tau = F_a R = I_{CM}\alpha \quad \Rightarrow \quad F_a = \mu_C Mg = \frac{I_{CM}}{R}\alpha = \left(\frac{I_{CM}}{R^2}\right)(\alpha R) = \left(\frac{I_{CM}}{R^2}\right)a_{ROT}$$

$$a_{ROT} = \mu_C g\left(\frac{R^2}{I_{CM}}\right)$$

Considerando o que já foi mostrado, temos que:

$$\begin{Bmatrix} v_1 = R\alpha t = a_{ROT}t \\ \\ v_1 = v_0 - a_{TRAN}t \end{Bmatrix} \quad \Rightarrow \quad t = \frac{v_1}{a_{ROT}} = \frac{v_0 - v_1}{a_{TRAN}} \quad \therefore \quad v_1 = \left(\frac{a_{ROT}}{a_{TRAN} + a_{ROT}}\right)v_0$$

ou seja:

$$t = \frac{v_0}{a_{TRAN} + a_{ROT}} = \frac{v_0}{\mu_C g\left(1 + \frac{MR^2}{I_{CM}}\right)}$$

Considerando que para a esfera $I_{CM} = \frac{2}{5}MR^2$ encontramos que:

$$t = \frac{2v_0}{7\mu_C g} = 1{,}18s$$

b) A que velocidade está se movendo quando começa a rolar?

$$v_1 = R\alpha\, t = a_{ROT}t = \left[\mu_C g\left(\frac{MR^2}{I_{CM}}\right)\right]t = \frac{5}{2}\mu_C g = 6{,}07m/s$$

c) Qual a distância que ela desliza na pista?

$$v_1^2 = v_0^2 - 2a_{TRAN}d \quad \Rightarrow \quad d = \frac{v_0^2 - v_1^2}{2a_{TRAN}} = \frac{v_0^2 - v_1^2}{2\mu_C g} = 8,60m$$

d) Quantas revoluções fez antes de começar a rolar?

$$w_1^2 = w_0^2 + 2\alpha\theta \quad \Rightarrow \quad (w_1 R)^2 = 2(\alpha R)(R\theta) \quad \therefore \quad v_1^2 = 2a_{ROT}L$$

$$L = \frac{v_1^2}{2a_{ROT}} = \frac{1}{2}a_{ROT}t^2 = N(2\pi R) \quad \Rightarrow \quad N = \frac{1}{2\pi R}\frac{a_{ROT}t^2}{2} = \frac{1}{4\pi R}\mu_C g\left(\frac{MR^2}{I_{CM}}\right)t^2$$

$$N = \frac{5\mu_C g t^2}{8\pi R} = 5,18rev$$

13. Equilíbrio

Condições para o equilíbrio

Diz-se que um corpo está em equilíbrio quando o seu momento linear e o seu momento angular são constantes, ou seja:

$$\begin{cases} \vec{P} = cons\tan te \\ \vec{L} = cons\tan te \end{cases}$$

Quando as constantes mencionadas acima são nulas, diz-se que o corpo está em ***equilíbrio estático***. Nessa situação ele não está em movimento de translação e também não está em movimento de rotação.

As condições expostas nas equações anteriores implicam que:

$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}^{EXT} = 0 \\ \dfrac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau}^{EXT} = 0 \end{cases}$$

ou seja, para que um corpo esteja em equilíbrio estático devemos ter as seguintes condições satisfeitas:

$$\begin{cases} \vec{F}^{EXT} = 0 \\ \vec{\tau}^{EXT} = 0 \end{cases}$$

Solução de alguns problemas

Capítulo 13 - Halliday, Resnick e Walker - 4ª. edição	
10	Uma esfera uniforme de peso P e raio r é mantida no lugar por uma corda presa a uma parede, sem atrito, situada a uma distância L acima do centro da esfera, conforme a figura a seguir.

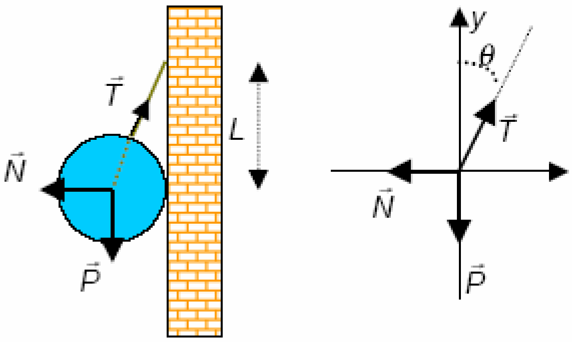
a) Encontre a tensão na corda.

Como a esfera está em repouso, temos que:

$$\vec{T} + \vec{P} + \vec{N} = 0$$

ou seja:

$$\begin{cases} T\cos\theta - P = 0 \\ T\,\text{sen}\theta - N = 0 \end{cases}$$



Logo

$$T\cos\theta = P \quad \Rightarrow \quad T = \frac{P}{\cos\theta} \quad \therefore \quad T = \left(\frac{\sqrt{L^2 + r^2}}{L}\right)P$$

onde

$$\cos\theta = \frac{L}{\sqrt{L^2 + r^2}}$$

b) Encontre a força exercida pela parede sobre a esfera.

$$\frac{N}{P} = \frac{T\,\text{sen}\theta}{T\cos\theta} \quad \Rightarrow \quad N = P\tan\theta \quad \therefore \quad N = \left(\frac{r}{L}\right)P$$

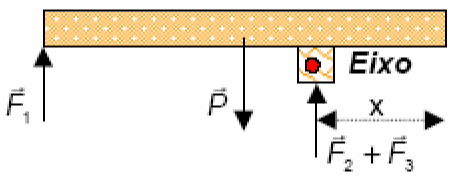
onde

$$\tan\theta = \frac{r}{L}$$

Capítulo 13 - Halliday, Resnick e Walker - 4ª. edição	
15	Uma viga é transportada por três homens, estando um homem em uma das extremidades e os outros dois sustentando a viga por meio de uma trave transversal, colocada de modo que a carga esteja igualmente dividida entre os três homens. Em que posição está colocada a trave transversal? (Despreze a massa dessa trave.)

Por exigência do enunciado, temos que:

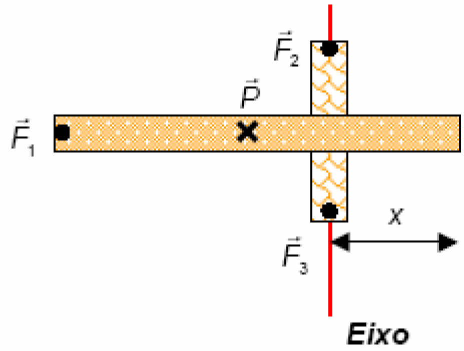
$$F_1 = F_2 = F_3 = F$$



Como o corpo está em repouso a resultante de forças é nula, logo:

$$F_1 + F_2 + F_3 - P = 0$$

O torque resultante também é nulo. Vamos considerar o torque em relação a uma eixo que passa ao longo da trave transversal. Desse modo:



$$F_1(L-x) - P\left(\frac{L}{2} - x\right) = 0$$

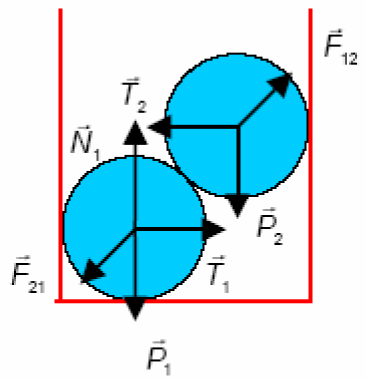
Da primeira equação encontramos que $P = 3F$, e usando esse resultado na segunda equação:

$$F(L-x) - 3F\left(\frac{L}{2} - x\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \left(L - \frac{3L}{2}\right) + (3x - x) = 0 \quad \therefore \quad x = \frac{L}{4}$$

Capítulo 13 - Halliday, Resnick e Walker - 4ª. edição	
19	Duas esferas idênticas, uniformes e sem atrito, cada uma de peso P, estão em repouso conforme mostra a figura à seguir.

a) Encontre, em termos de P, as forças que atuam sobre as esferas devido às superfícies do recipiente.

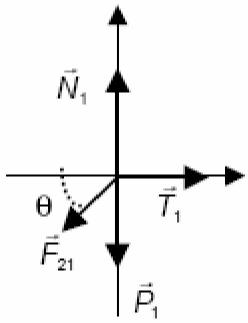
$\theta = 45^0$
$F_{12} = F_{21} = F$
$P_1 = P_2 = P$

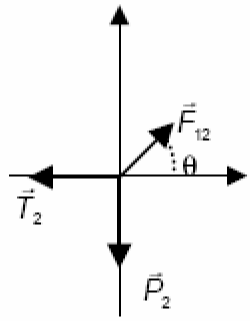


Os dois corpos estão em repouso, logo a resultante das forças que atuam em cada um deles é nula.

$$\begin{cases} N_1 - P - F\,\text{sen}\theta = 0 \\ \qquad e \\ T_1 - F\cos\theta = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} F\,\text{sen}\theta - P = 0 \\ \\ F\cos\theta - T_2 = 0 \end{cases}$$





Das equações acima encontramos que:

$$T_1 = T_2 = F\cos\theta$$

e

$$N_1 - P - P = 0 \quad \Rightarrow \quad N_1 = 2P$$

$$F = \frac{P}{\operatorname{sen}\theta} = P\sqrt{2}$$

$$T = F\cos\theta = P\cot an\theta \quad \Rightarrow \quad T = P$$

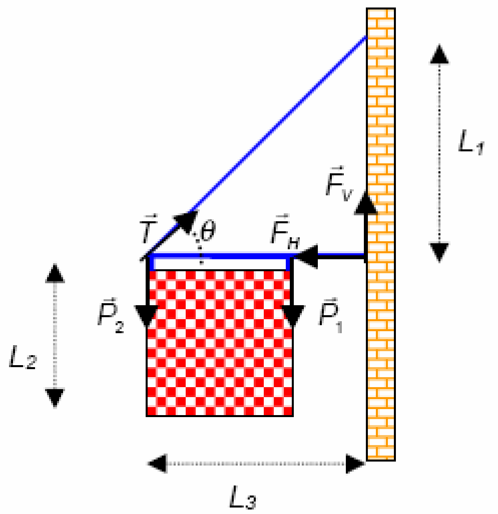
b) Encontre, em termos de P, as forças que atuam sobre as esferas devido uma à outra, se a linha que une os centros das esferas faz um ângulo de 45^0 com a horizontal.

$$F = \frac{P}{\operatorname{sen}\theta} = P\sqrt{2}$$

Capítulo 13 - Halliday, Resnick e Walker - 4ª. edição	
25	Uma placa quadrada uniforme, pesando $50,0kg$ e tendo $2,0m$ de lado, está pendurada em uma haste de $3,0m$ de comprimento e massa desprezível. Um cabo está preso à extremidade da haste e a um ponto na parede situado $4,0m$ acima do ponto onde a haste é fixada na parede, conforme mostra a figura a seguir.

a) Qual é a tensão no cabo?

$M = 50kg$ $\qquad$ $L_2 = 2,0m$
$L_1 = 4,0m$ $\qquad$ $L_3 = 3,0m$



Vamos considerar apenas as forças que atuam na haste horizontal.

Como a placa é uniforme as forças P_1 e P_2 são tais que:

$$P_1 = P_2 = P / 2 = M g / 2$$

Vamos considerar o torque das forças que atuam na haste, em relação a um eixo perpendicular ao papel e que passe no ponto onde a haste está presa na parede.

$$T \operatorname{sen}\theta \, L_3 - P_2 L_3 - P_1 (L_3 - L_2) = 0$$

$$T \operatorname{sen}\theta \, L_3 = \frac{P}{2}\left[L_3 + (L_3 - L_2)\right] \quad \Rightarrow \quad T = \left(\frac{2L_3 - L_2}{2L_3 \operatorname{sen}\theta}\right)P$$

Mas

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{L_1}{\sqrt{L_1^2 + L_3^2}} \quad \Rightarrow \quad T = \left[\frac{(2L_3 - L_2)\sqrt{L_1^2 + L_3^2}}{2L_1 L_3}\right]P = 408,34N$$

b) Qual é a componente vertical da força exercida pela parede sobre a haste?

Vamos considerar o torque das forças que atuam na haste, em relação a um eixo perpendicular ao papel e que passe no ponto onde o cabo suspende a haste.

$$P_1 L_2 - F_V L_3 = 0$$

$$F_V = \frac{P_1 L_2}{L_3} = \frac{PL_2}{2L_3} = 163{,}34N$$

c) Qual é a componente horizontal da força exercida pela parede sobre a haste?

Como a placa está em repouso, a resultante das forças que atuam nela é zero, Segundo um eixo horizontal, as forças que atuam são tais que:

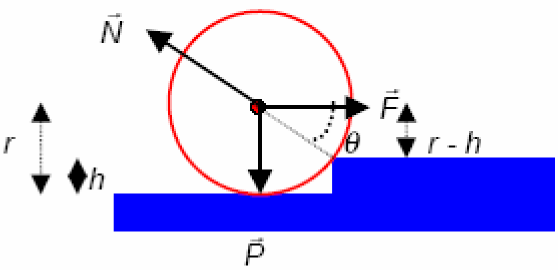
$$T\cos\theta - F_H = 0 \quad \Rightarrow \quad F_H = T\cos\theta = T\left(\frac{L_3}{\sqrt{L_1^2 + L_3^2}}\right)$$

Usando o resultado para T deduzido anteriormente, temos que:

$$F_H = \left(\frac{2L_3 - L_2}{2L_1}\right)P = 245N$$

Capítulo 13 - Halliday, Resnick e Walker - 4ª. edição	
27	Na figura a seguir, qual a magnitude da força $\vec{F}$, aplicada horizontalmente no eixo da roda, necessária para fazer a roda ultrapassar um obstáculo de altura h ? Considere r como sendo o raio da roda e P o seu peso.

Na iminência da ultrapassagem do obstáculo, a roda perdeu o contato com o solo, e as forças que atuam nela estão mostradas na figura ao lado. Como ainda não existe movimento, a resultante é nula. Logo:



$$F - N\cos\theta = 0$$

$$P - N\,sen\theta = 0$$

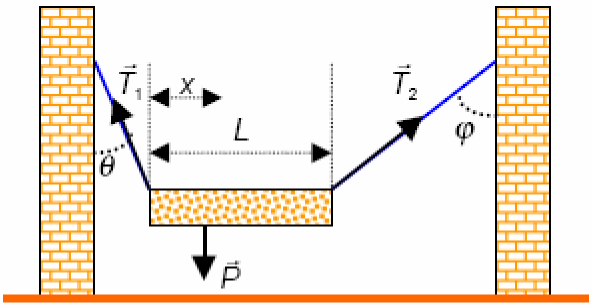
$$\frac{P}{F} = \frac{N\,\text{sen}\theta}{N\cos\theta} = \tan\theta \quad \Rightarrow \quad F = \frac{P}{\tan\theta}$$

Mas

$$\tan\theta = \frac{r-h}{\sqrt{r^2 - (r-h)^2}} = \frac{r-h}{\sqrt{2rh - h^2}} \quad \Rightarrow \quad F = \left[\frac{\sqrt{2rh - h^2}}{r-h}\right]P$$

Capítulo 13 - Halliday, Resnick e Walker - 4ª. edição	
34	Uma barra não uniforme de peso P está suspensa em repouso, na horizontal, por duas cordas sem massa, como mostra a figura a seguir. Uma corda faz um ângulo $\theta = 36,9^0$ com a vertical e a outra faz um ângulo $\varphi = 53,1^0$, também com a vertical. Se o comprimento L da barra é $6,1m$, calcule a distância x entre a extremidade esquerda da barra e o seu centro de gravidade.

$\theta = 36,9^0$
$\varphi = 53,1^0$
$L = 6,1m$



Vamos calcular o torque das forças que atuam na barra em relação a um eixo perpendicular ao papel, e que passe por um ponto da extremidade esquerda da barra.

$$\tau = P\,x - T_2 \cos\varphi\, L = 0$$

ou seja:

$$x = \left(\frac{T_2 \cos\varphi}{P}\right) L$$

Por outro lado, como a barra está em repouso a resultante das forças que nela atuam é nula:

$$\vec{T}_1 + \vec{T}_2 + \vec{P} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} T_1 \cos\theta + T_2 \cos\varphi - P = 0 \\ \\ T_1 \operatorname{sen}\theta - T_2 \operatorname{sen}\varphi = 0 \end{cases}$$

Da última equação temos que:

$$T_1 = T_2 \left(\frac{\operatorname{sen}\varphi}{\operatorname{sen}\theta}\right)$$

e usando esse resultado na penúltima equação, encontramos:

$$\left[T_2 \left(\frac{\operatorname{sen}\varphi}{\operatorname{sen}\theta}\right)\right] \cos\theta + T_2 \cos\varphi = P$$

ou seja:

$$T_2 \{\operatorname{sen}\varphi \cos\theta + \cos\varphi \operatorname{sen}\theta\} = P \operatorname{sen}\theta$$

$$T_2 \operatorname{sen}(\varphi + \theta) = P \operatorname{sen}\theta \quad \Rightarrow \quad T_2 = \left[\frac{\operatorname{sen}\theta}{\operatorname{sen}(\varphi + \theta)}\right] P$$

Mas

$$x = \left(\frac{T_2 \cos\varphi}{P}\right) L \quad \Rightarrow \quad x = \left(\frac{L \cos\varphi}{P}\right)\left[\frac{\operatorname{sen}\theta}{\operatorname{sen}(\varphi + \theta)}\right] P$$

logo

$$x = \left[\frac{\cos\varphi \operatorname{sen}\theta}{\operatorname{sen}(\varphi + \theta)}\right] L = 2,23m$$

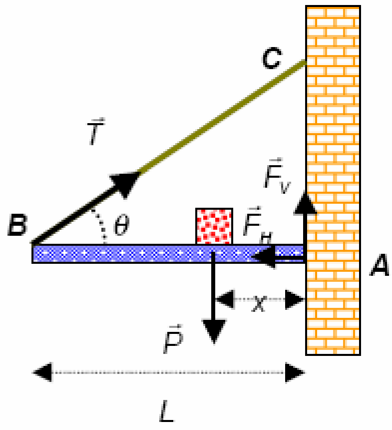
Capítulo 13 - Halliday, Resnick e Walker - 4ª. edição	
35	Na figura a seguir, uma barra horizontal fina AB, de massa desprezível e comprimento L, é presa a uma dobradiça em uma parede vertical no ponto A e sustentada em B, por um fio fino BC, que faz um ângulo θ com a horizontal. Um peso P pode ser movido para qualquer posição ao longo da barra, sendo a sua posição definida pela distância x desde a parede até o seu centro de massa.

a) Encontre a tensão no fio.

Iremos considerar apenas as forças que atuam na barra.

Vamos calcular o torque em relação a um eixo perpendicular à folha de papel e que passe pelo ponto onde a barra está presa á parede pela dobradiça (ponto **A**)

Como a barra está em repouso o torque em relação a qualquer eixo é nulo, logo:



$$T\,sen\theta\,L - P\,x = 0$$

$$T = \left(\frac{x}{L\,\text{sen}\theta}\right)P$$

b) Encontre a componente horizontal da força exercida sobre a barra pelo pino da dobradiça em A.

Como a barra está em repouso a resultante das forças que nela atuam é nula. A componente horizontal da resultante é:

$$T\cos\theta - F_H = 0 \quad \Rightarrow \quad F_H = T\cos\theta \quad \therefore \quad F_H = \left(\frac{x}{L\tan\theta}\right)P$$

c) Encontre a componente vertical da força exercida sobre a barra pelo pino da dobradiça em A.

Vamos considerar, agora, o torque das forças em relação a um eixo perpendicular à folha de papel e que passe pelo ponto onde o fio está preso na barra (ponto **B**).

$$P(L-x) - F_V L = 0 \quad \Rightarrow \quad F_V = \left(\frac{L-x}{x}\right)P \quad \therefore \quad F_V = \left(1 - \frac{x}{L}\right)P$$

Capítulo 13 - Halliday, Resnick e Walker - 4ª. edição	
39	Uma tábua uniforme de comprimento $L = 6,1m$ e peso $P = 444,8N$ está em repouso no chão, encostada numa quina sem atrito, situada no alto de uma parede de altura $h = 3,0m$ conforme a figura a seguir. A tábua permanece em equilíbrio para qualquer valor do ângulo $\theta \geq 70^0$, mas escorrega para $\theta < 70^0$. Encontre o coeficiente de atrito entre a tábua e o chão.

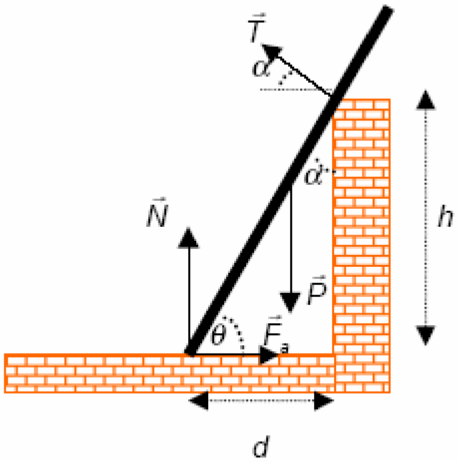
θ é o ângulo limite para o deslizamento, e isso significa que para esse ângulo a força de atrito estático é máxima, logo

$$F_a = \mu_E N$$

Pode-se perceber que os ângulos α e θ são complementares, logo:

$$\alpha = \pi/2 - \theta$$

A força da quina na tábua é perpendicular à tábua pois não existe atrito entre as duas.



Como o corpo está em equilíbrio, a resultante de forças é nula e o torque resultante também é nulo.
O torque em relação a um eixo que passe pelo ponto de apoio da escada no chão e que seja perpendicular à folha de papel tem a forma:

$$-(T\cos\alpha)\,h - (P\,\mathrm{sen}\alpha)\,L/2 = 0$$

$$T = \frac{PL}{2h}\frac{\mathrm{sen}\alpha}{\cos\alpha}$$

A resultante de forças tem a forma:

$$\vec{T} + \vec{P} + \vec{N} + \vec{F}_{aE} = 0 \quad \therefore \quad \begin{cases} T\,\mathrm{sen}\alpha - P + N = 0 \\ \\ -T\cos\alpha + F_{aE} = 0 \end{cases}$$

ou seja:

$$\frac{F_{aE}}{N} = \frac{T\cos\alpha}{P - T\,\mathrm{sen}\alpha} = \frac{\mu_E N}{N} \quad \therefore \quad \mu_E = \frac{T\cos\alpha}{P - T\,\mathrm{sen}\alpha}$$

e usando o resultado anterior para T , encontramos:

$$\mu_E = \frac{\left(\frac{PL}{2h}\frac{\mathrm{sen}\alpha}{\cos\alpha}\right)\cos\alpha}{P - \left(\frac{PL}{2h}\frac{\mathrm{sen}\alpha}{\cos\alpha}\right)\mathrm{sen}\alpha} \quad \therefore \quad \mu_E = \frac{\frac{L}{2h}\mathrm{sen}\alpha}{1 - \frac{L}{2h}\frac{\mathrm{sen}^2\alpha}{\cos\alpha}} = 0{,}3981$$

romero@fisica.ufpb.br