

Chương 2

Đại số Boole

Nội dung chương 2

- Cấu trúc đại số Boole
- Các tiên đề, định lý cơ bản
- Hàm Boole
- Biểu diễn hàm Boole
- Tối giản hàm Boole

Cấu trúc đại số Boole

- Các hằng và biến trong đại số Boole chỉ có hai giá trị 0 và 1
- Trong đại số Boole không có phân số, số âm, lũy thừa, căn số, ...
- Đại số Boole chỉ có 3 toán tử: nhân logic (AND), cộng logic (OR) và bù logic (NOT)

x	y	$x \cdot y$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

x	y	$x + y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

x	\bar{x}
0	1
1	0

Các tiên đề

- **Tính giao hoán:**

$$\begin{aligned}x + y &= y + x \\x \cdot y &= y \cdot x\end{aligned}$$

- **Tính kết hợp:**

$$\begin{aligned}(x + y) + z &= x + (y + z) \\(x \cdot y) \cdot z &= x \cdot (y \cdot z)\end{aligned}$$

- **Tính phân phối:**

$$\begin{aligned}x \cdot (y + z) &= x \cdot y + x \cdot z \\x + (y \cdot z) &= (x + y) \cdot (x + z)\end{aligned}$$

- **Phần tử đồng nhất:**

$$\begin{aligned}x + 1 &= 1 \\x + 0 &= x \\x \cdot 1 &= x \\x \cdot 0 &= 0\end{aligned}$$

- **Phần tử bù:**

$$\begin{aligned}x + \bar{x} &= 1 \\x \cdot \bar{x} &= 0\end{aligned}$$

Các định lý cơ bản

- $\overline{\overline{x}} = x$
- $x + x = x$
- $x . x = x$
- **Định lý hấp thu:**

(1) $x + x . y = x$

Chứng minh: $x + x . y = x (1 + y) = x . 1 = x$

(2) $x . (x + y) = x$

Chứng minh: $x . (x + y) = x . x + x . y = x + x . y = x$

(3) $x + (\overline{x} . y) = x + y$

Chứng minh: $x + (\overline{x} . y) = (x + \overline{x}) . (x + y) = 1 . (x + y) = x + y$

(4) $x . (\overline{x} + y) = x . y$

Chứng minh: $x . (\overline{x} + y) = x . \overline{x} + x . y = 0 + x . y = x . y$

(5) $x . y + \overline{x} . z + y . z = x . y + \overline{x} . z$

Chứng minh: $x . y + \overline{x} . z + y . z = x . y + \overline{x} . z + y . z(x + \overline{x})$
 $= x . y + \overline{x} . z + x . y . z + \overline{x} . y . z$
 $= (x . y + x . y . z) + (\overline{x} . z + \overline{x} . y . z)$
 $= x . y + \overline{x} . z$

Các định lý cơ bản (tt)

- Định lý De Morgan:

$$\overline{x + y} = \bar{x} \cdot \bar{y} \quad (1)$$

$$\overline{x \cdot y} = \bar{x} + \bar{y} \quad (2)$$

Chứng minh (1):

x	y	$x + y$	$\overline{x + y}$	\bar{x}	\bar{y}	$\bar{x} \cdot \bar{y}$
0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0
1	0	1	0	0	1	0
1	1	1	0	0	0	0

Mở rộng cho n biến:

$$\overline{x_1 + x_2 + \cdots + x_n} = \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \cdots \bar{x}_n$$

$$\overline{x_1 x_2 \cdots x_n} = \bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \cdots + \bar{x}_n$$

Các định lý cơ bản (tt)

- Áp dụng các tiên đề, định lý của đại số Boole rút gọn các biểu thức sau:

1. $AB\bar{C} + \overline{AB\bar{C}} = 1$

2. $A + \bar{B}C + \bar{D}(A + \bar{B}C) = A + \bar{B}C$

3. $(A + \bar{B})(\bar{A}B + BCD) = (A + \bar{B})BCD = ABCD$

4. $\bar{A}(B + \bar{C})(A + \bar{B}C) = 0$

Hàm Boole

- Định nghĩa: Hàm Boole là một biểu thức được tạo bởi các biến Boole và các phép toán cộng, nhân và bù logic

Ví dụ: $f(x, y, z) = x.y + \bar{x}.\bar{y}.z$

- Với giá trị cho trước của các biến, hàm Boole sẽ có giá trị 0 hoặc 1
- Tính chất:
 - Nếu $f(x)$ là hàm Boole thì $\overline{f(x)}$ cũng hàm Boole
 - Nếu $f_1(x)$ và $f_2(x)$ là những hàm Boole thì các hàm $f_1(x) + f_2(x)$ và $f_1(x).f_2(x)$ cũng là những hàm Boole

Biểu diễn hàm Boole

- **Phương pháp biểu diễn hàm Boole:**
 - Bảng chân trị
 - Biểu thức logic
 - Dạng chính tắc 1 (chính tắc tuyển)
 - Dạng chính tắc 2 (chính tắc hội)
 - Bảng Karnaugh

Biểu diễn hàm Boole (tt)

- **Bảng bảng chân trị:**

- Bảng chân trị chia làm hai phần:

- Phần dành cho biến gồm các tổ hợp giá trị có thể có của biến
- Phần dành cho hàm gồm giá trị của hàm ra tương ứng với các tổ hợp của biến

- Ví dụ:

$$f(x, y, z) = x \cdot y + \bar{x} \cdot \bar{y} \cdot z$$

x	y	z	f
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

Biểu diễn hàm Boole (tt)

- **Bảng biểu thức logic:**

- **Tích chuẩn** (minterm): là các số hạng tích của n biến mà hàm Boole phụ thuộc với quy ước biến đó có **bù** nếu nó là **0** và **không bù** nếu nó là **1**
- **Tổng chuẩn** (Maxterm): là các số hạng tổng của n biến mà hàm Boole phụ thuộc với quy ước biến đó có **bù** nếu nó là **1** và **không bù** nếu nó là **0**

x	y	z	Tích chuẩn	Tổng chuẩn
0	0	0	$\bar{x}\bar{y}\bar{z}$	$x + y + z$
0	0	1	$\bar{x}\bar{y}z$	$x + y + \bar{z}$
0	1	0	$\bar{x}y\bar{z}$	$x + \bar{y} + z$
0	1	1	$\bar{x}yz$	$x + \bar{y} + \bar{z}$
1	0	0	$x\bar{y}\bar{z}$	$\bar{x} + y + z$
1	0	1	$x\bar{y}z$	$\bar{x} + y + \bar{z}$
1	1	0	$xy\bar{z}$	$\bar{x} + \bar{y} + z$
1	1	1	xyz	$\bar{x} + \bar{y} + \bar{z}$

Biểu diễn hàm Boole (tt)

- **Bảng biểu thức logic:**

- **Chính tắc 1** (Chính tắc tuyển):
Tổng của các **tích chuẩn** làm cho hàm Boole có giá trị bằng **1**
- **Chính tắc 2** (Chính tắc hội):
Tích của các **tổng chuẩn** làm cho hàm Boole có giá trị bằng **0**
- Ví dụ: Tìm dạng chính tắc 1 và 2 của hàm Boole với bảng chân trị bên:

x	y	z	f	
0	0	0	0	$\rightarrow x+y+z$
0	0	1	1	$\rightarrow \bar{x}\bar{y}z$
0	1	0	1	$\rightarrow \bar{x}y\bar{z}$
0	1	1	0	$\rightarrow x+\bar{y}+\bar{z}$
1	0	0	0	$\rightarrow \bar{x}+y+z$
1	0	1	1	$\rightarrow x\bar{y}z$
1	1	0	1	$\rightarrow xy\bar{z}$
1	1	1	1	$\rightarrow xyz$

CT1: $f(x, y, z) = \bar{x}\bar{y}z + \bar{x}y\bar{z} + x\bar{y}z + xy\bar{z} + xyz = \sum(1, 2, 5, 6, 7)$

CT2: $f(x, y, z) = (x + y + z)(x + \bar{y} + \bar{z})(\bar{x} + y + z) = \prod(0, 3, 4)$

Biểu diễn hàm Boole (tt)

- **Bảng biểu thức logic:**

- **Trường hợp hàm Boole có giá trị tùy định (don't care):**

Hàm Boole n biến có thể không được định nghĩa hết tất cả tổ hợp của n biến; khi đó tại các tổ hợp không sử dụng này, hàm Boole sẽ nhận giá trị tùy định (có thể 0 hoặc 1)

x	y	z	f
0	0	0	X
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	X

CT1: $f(x, y, z) = \sum(1, 2, 5, 6) + d(0, 7)$

CT2: $f(x, y, z) = \prod(3, 4) \cdot d(0, 7)$

Biểu diễn hàm Boole (tt)

- **Bảng bảng Karnaugh:**

- Bảng Karnaugh gồm các ô vuông, mỗi ô vuông biểu diễn cho một tổ hợp n biến. Như vậy bảng Karnaugh cho n biến sẽ có 2^n ô.
- Hai ô kề cận nhau khi tổ hợp biến mà chúng biểu diễn chỉ khác nhau một biến (mã Gray)
- Trong ô ghi giá trị của hàm tại tổ hợp đó

Biểu diễn hàm Boole (tt)

- **Bảng bảng Karnaugh:**

- Ví dụ: Biểu diễn bảng Karnaugh của hàm Boole với bảng chân trị sau:

x	y	z	f
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

$f(x, y, z)$		xy				
		z	00	01	11	10
	0	0	0	0	1	0
	1	1	0	1	0	

$f(x, y, z)$		x	
		yz	
yz	00	0	1
	01	0	0
	11	1	1
	10	0	0

Biểu diễn hàm Boole (tt)

- Dùng bảng Karnaugh

- Ví dụ bảng Karnaugh 2, 4, 5 biến:

$f(a, b)$

$a \backslash b$	0	1
0		
1		

$f(a, b, c, d)$

$ab \backslash cd$	00	01	11	10
00				
01				
11				
10				

$f(a, b, c, d, e)$

$abc \backslash de$	000	001	011	010	110	111	101	100
00								
01								
11								
10								

Biểu diễn hàm Boole (tt)

- Dùng bảng Karnaugh

- Ví dụ bảng Karnaugh 6 biến:

$f(a, b, c, d, e, f)$		abc							
def		000	001	011	010	110	111	101	100
000									
001									
011									
010									
110									
111									
101									
100									

Tối thiểu hàm Boole

- **Phương pháp tối thiểu hàm Boole:**
 - Phương pháp đại số
 - Phương pháp bảng Karnaugh

Tối thiểu hàm Boole (tt)

- **Phương pháp đại số:**

- Dựa vào các tiên đề, định lý của đại số Boole
- Ví dụ:

$$\begin{aligned}f(x, y) &= \bar{x}y + x\bar{y} + xy \\&= \bar{x}y + x(\bar{y} + y) \\&= \bar{x}y + x \\&= y + x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f(x, y, z) &= \bar{x}yz + x\bar{y}\bar{z} + x\bar{y}z + xy\bar{z} + xyz \\&= \bar{x}yz + x\bar{y}(\bar{z} + z) + xy(\bar{z} + z) \\&= \bar{x}yz + x\bar{y} + xy \\&= \bar{x}yz + x(\bar{y} + y) \\&= \bar{x}yz + x \\&= yz + x\end{aligned}$$

Tối thiểu hàm Boole (tt)

- **Phương pháp bảng Karnaugh:**

- Bước 1: Biểu diễn các hàm đã cho trên bảng Karnaugh
- Bước 2: Nhóm các ô với nhau theo các quy tắc:
 - Biểu diễn theo dạng chính tắc 1 thì nhóm các ô có giá trị bằng 1 và tùy định
 - Biểu diễn theo dạng chính tắc 2 thì nhóm các ô có giá trị bằng 0 và tùy định
 - Các ô này phải nằm kề nhau
 - Tổng số ô phải có dạng 2^n và lớn nhất
 - Khi nhóm 2^n ô kế cận sẽ loại được n biến, những biến bị loại là những biến khi ta đi vòng qua các ô kế cận mà giá trị của chúng thay đổi
 - Vòng nhóm là hợp lệ khi nó có ít nhất 1 ô chưa thuộc vòng nhóm nào

Tối thiểu hàm Boole (tt)

- Phương pháp bảng Karnaugh:

- Ví dụ nhóm 2 ô kế cận:

$f(A, B, C)$

$C \backslash AB$	00	01	11	10
0			1	1
1				

$A\bar{C}$

$f(A, B, C)$

$C \backslash AB$	00	01	11	10
0		0		
1		0		

$A + \bar{B}$

$f(A, B, C)$

$C \backslash AB$	00	01	11	10
0				
1	1			1

$\bar{B}C$

Tối thiểu hàm Boole (tt)

• Phương pháp bảng Karnaugh:

- Ví dụ nhóm 4 ô kế cận:

$f(A, B, C)$

		AB			
		00	01	11	10
C	0				
	1	1	1	1	1

C

$f(A, B, C)$

		AB			
		00	01	11	10
C	0		0	0	
	1		0	X	

\bar{B}

$f(A, B, C, D)$

		AB			
		00	01	11	10
CD	00				
	01	0			X
	11	X			0
	10				

$B + \bar{D}$

$f(A, B, C, D)$

		AB			
		00	01	11	10
CD	00	1			1
	01				
	11				
	10	X			1

$\bar{B}\bar{D}$

Tối thiểu hàm Boole (tt)

- Phương pháp bảng Karnaugh:

- Ví dụ nhóm 8 ô kế cận:

$f(A, B, C, D)$

$CD \backslash AB$				
	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01	1	X	X	1
11				
10				

\bar{C}

$f(A, B, C, D)$

$CD \backslash AB$				
	00	01	11	10
00		X	0	
01		X	0	
11		X	0	
10		X	0	

\bar{B}

Tối thiểu hàm Boole (tt)

- Phương pháp bảng Karnaugh:

- Ví dụ nhóm 8 ô kế cận:

$f(A, B, C, D)$

		AB			
		00	01	11	10
CD	00	X	1	1	1
	01				
	11				
	10	1	X	X	1

\bar{D}

Tối thiểu hàm Boole (tt)

- **Phương pháp bảng Karnaugh:**

- Ví dụ 1: Tối thiểu hóa hàm Boole sau:
 - Dạng chính tắc 1:

$f(A, B, C)$

AB	00	01	11	10
0	1	0	0	1
1	0	0	1	1

$\bar{B}\bar{C}$

AC

The Karnaugh map shows a 2x4 grid of cells. The columns are labeled AB (00, 01, 11, 10) and the rows are labeled C (0, 1). The cells contain the values of the function: (0,0)=1, (0,1)=0, (0,2)=0, (0,3)=1, (1,0)=0, (1,1)=0, (1,2)=1, (1,3)=1. Two groups of 1s are circled with dashed red lines: one group consists of the top-left and top-right cells (AB=00 and AB=10, C=0), and the other group consists of the bottom-right and bottom-left cells (AB=11 and AB=10, C=1). Red arrows point from these groups to the expressions B-bar C-bar and AC respectively.

$$f(A, B, C) = AC + \bar{B}\bar{C}$$

Tối thiểu hàm Boole (tt)

- **Phương pháp bảng Karnaugh:**

- Ví dụ 1: Tối thiểu hóa hàm Boole sau:
 - Dạng chính tắc 2:

$f(A, B, C)$

$AB \backslash C$	00	01	11	10
0	1	0	0	1
1	0	0	1	1

$\bar{B} + C$

$A + \bar{C}$

The Karnaugh map shows the function f(A, B, C) with variables A and B as columns and C as rows. The values are: (0,0)=1, (0,1)=0, (1,0)=0, (1,1)=1, (0,10)=1, (1,10)=1. Two groups of 0s are circled with dashed red lines: one group for (0,1) and (1,1) labeled B-bar + C, and another group for (0,0) and (0,1) labeled A + C-bar.

$$f(A, B, C) = (A + \bar{C})(\bar{B} + C)$$

Tối thiểu hàm Boole (tt)

- **Phương pháp bảng Karnaugh:**

- Ví dụ 2: Tối thiểu hóa hàm Boole sau:
 - Dạng chính tắc 1:

$f(A, B, C, D)$

$AB \backslash CD$	00	01	11	10
00	1	X	0	1
01	0	X	X	0
11	X	1	1	1
10	X	1	1	0

Red dashed boxes highlight the prime implicants: $\overline{B}\overline{C}\overline{D}$ (top row), BC (bottom two rows, columns 01 and 11), and CD (middle two rows, column 11).

$$f(A, B, C, D) = \overline{B}\overline{C}\overline{D} + BC + CD$$

Tối thiểu hàm Boole (tt)

- Phương pháp bảng Karnaugh:

- Ví dụ 2: Tối thiểu hóa hàm Boole sau:
 - Dạng chính tắc 2:

$f(A, B, C, D)$

$AB \backslash CD$	00	01	11	10
00	1	X	0	1
01	0	X	X	0
11	X	1	1	1
10	X	1	1	0

Red dashed boxes and arrows indicate groupings for prime implicants:

- Group 1 (cells 0001, 0101, 1101, 1001) is circled and labeled $\bar{B} + C$.
- Group 2 (cells 0001, 0101, 0111, 0110) is circled and labeled $C + \bar{D}$.
- Group 3 (cells 0001, 0101, 1001, 1011) is circled and labeled $B + \bar{C} + D$.

$$f(A, B, C, D) = (\bar{B} + C)(C + \bar{D})(B + \bar{C} + D)$$