Calcul de la relation entrée/sortie associée à la fonction de réflexion

Nous cherchons à exprimer l'échantillon $p^-(n)$ de l'onde retour en fonction des échantillons précédents et de l'onde aller $p^+(n)$. Pour cela nous discrétisons l'équation différentielle associée à la fonction de réflexion $R(\omega)$ Nous avons exprimé la réponse en fréquence de la fonction de réflexion :

$$\begin{aligned} R(\omega) &= \frac{P^+(\omega)}{P^-(\omega)} && (1) \\ &= \frac{Z_r(\omega) - Z_c}{Z_r(\omega) + Z_c} && (2) \end{aligned}$$

Avec

$$\begin{aligned} z_c &= \rho c/S \\ Z_r &= Z_c\left(0.25(ka)^2 + 0.6133jka\right) \end{aligned}$$

P^+ désigne la transformée de Fourrier de l'onde aller, P^- celle de l'onde retour. Dans la suite, on note $Q^{\pm}(\omega) = P^{\pm}(\omega)Z_c$, de transformée inverse $q_{\pm}(t) = p^{\pm}(t)Z_c$, et $z_r(\omega) = Z_c Z_r(\omega)$
On en déduit, en regroupant les ondes retour dans le membre de gauche et les ondes allers dans le membre de droite :

$$\begin{aligned} Q^-\left[z_r(\omega) + 1\right] &= Q^+\left[z_r(\omega) - 1\right] \\ \leftrightarrow 0.25(a/c)^2\omega^2 Q^-(\omega) + 0.6133(a/c)j\omega Q^-(\omega) + Q^-(\omega) &= 0.25(a/c)^2\omega^2 Q^+(\omega) + 0.6133j\omega Q^+(\omega) - Q^+(\omega) \end{aligned}$$

On obtient une équation différentielle reliant $q^+(t)$ et $q^-(t)$:

$$-0.25(a/c)^2\frac{\mathrm{d}^2 p^-(t)}{\mathrm{d}t^2} + 0.6133(a/c)\frac{\mathrm{d}p^-(t)}{\mathrm{d}t} + p^-(t) = -0.25(a/c)^2\frac{\mathrm{d}^2 p^+(t)}{\mathrm{d}t^2} + 0.6133(a/c)\frac{\mathrm{d}p^+(t)}{\mathrm{d}t} - p^+(t) \tag{3}$$

On discrétise 3 en utilisant un schéma en différences finies à gauche (bon terme ??) à l'ordre 2:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}f(n)}{\mathrm{d}t} &= (3/2)f(n) - 2f(n-1) + (1/2)f(n-2) \\ \frac{\mathrm{d}^2 f(n)}{\mathrm{d}t} &= 2f(n) - 5f(n-1) + 4f(n-2)1f(n-3) \end{aligned}$$

On obtient alors une expression de $q^-(n)$:

$$q^-(n) = A^{-1}\left[E\left(q^+(n)\right) - a_1 q^-(n-1) - a_2 q^-(n-2) - a_3 q^-(n-3)\right] \tag{4}$$

Avec

$$\begin{aligned} E\left(q^+(n)\right) &= -0.25(a/c)^2\frac{\mathrm{d}^2 p^+(n)}{\mathrm{d}t^2} + 0.6133(a/c)\frac{\mathrm{d}p^+(n)}{\mathrm{d}t} - p^+(n) \\ a_1 &= -2 \times 0.6133\frac{a}{c} + 5 \times 0.25\left(\frac{a}{c}\right)^2 \\ a_2 &= 0.5 \times 0.6133\frac{a}{c} + 4 \times 0.25\left(\frac{a}{c}\right)^2 \\ a_3 &= -1 \times 0.25\left(\frac{a}{c}\right)^2 \end{aligned}$$