Lucrarea 3

Canale discrete

3.1 Obiectivul lucrării

În această lucrare, se studiază canalele discrete, staţionare, fără memorie, caracterizate cu ajutorul parametrilor statistici. De asemenea, se va evalua performanţa diferitelor tipuri de canale.

3.2 Introducere teoretică

O schemă simplificată generală a unui sistem de comunicaţie a fost prezentată în Fig. **??**, fiind redată şi aici.

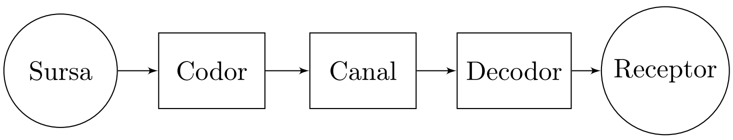

Figura 3.1: Schemă simplificată a unui sistem de comunicaţie.

3.2.1 Entropia de la intrarea şi ieşirea din canal

Se notează cu $\mathcal{X} = \{x_1, \ldots, x_n\}$ spaţiul simbolurilor de la intrarea în canal, iar cu $\mathcal{Y} = \{y_1, \ldots, y_m\}$ spaţiul simbolurilor de la ieşirea din canal. Simbolurile de la intrare sunt emise cu probabilităţile:

$$P_X = [p(x_1), \ldots, p(x_n)] \,.$$

Similar, spaţiului simbolurilor de ieşire îi este acociat vectorul de probabiliăţi:

$$P_Y = [p(y_1), \ldots, p(y_m)] \,.$$

Entropia asociată unei surse fără memorie reprezintă informaţia proprie medie pe simbol, fiind egală cu:

$$H(X) = -\sum_{i=1}^{n} p(x_i) \log p(x_i) \quad \text{[biti/simbol]}, \tag{3.1}$$

unde $p_i = Pr\{(X = x_i\}$, $x_i \in \mathcal{X}$, iar funcţia log este luată în baza 2, cu conveţia $0 \log 0 = 0$. În mod similar, entropia câmpului de evenimente de la ieşire este definit ca:

$$H(Y) = -\sum_{j=1}^{m} p(y_j) \log p(y_j) \quad \text{[biti/simbol]}. \tag{3.2}$$

3.2.2 Entropia spaţiului reunit

Am definit anterior entropia asociată unei singure variabile aleatoare. Acum, extindem această definiţie pentru o pereche de variabile aleatoare, ce poate fi considerată, ea însăşi o variabilă aleatoare. Spaţiul reunit intrare–ieşire este notat cu $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ şi este dat de matricea:

$$(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) = \begin{pmatrix} x_1 y_1 & x_1 y_2 & \dots & x_1 y_m \\ x_2 y_1 & x_2 y_2 & \dots & x_2 y_m \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_n y_1 & x_n y_2 & \dots & x_n y_m \end{pmatrix}.$$

Matricea de probabilităţi corespunzătoare spaţiul reunit intrare–ieşire $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ este:

$$P_{X,Y} = \begin{pmatrix} p(x_1, y_1) & p(x_1, y_2) & \dots & p(x_1, y_m) \\ p(x_2, y_1) & p(x_2, y_2) & \dots & p(x_2, y_m) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p(x_n, y_1) & p(x_n, y_2) & \dots & p(x_n, y_m) \end{pmatrix}.$$

Entropia spaţiului reunit, $H(X, Y)$, este definită astfel:

$$H(X, Y) = -\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} p(x_i, y_j) \log p(x_i, y_j) \quad \text{[biti/simbol]}. \tag{3.3}$$

3.2.3 Entropia condiţionată

Eroarea medie

Canalul de communicaţie este un sistem în care simbolurile de la ieşire depind probabilistic de simbolurile de la intrare. Cu alte cuvinte, canalul poate fi caracterizat cu ajutorul probabilităţilor de tranziţie $p(y|x)$ care determină distribuţia condiţionată a spaţiului simbolurilor de la ieşire relativ la spaţiul simbolurilor de la intrare.

Putem defini, aşadar, eroare medie $H(Y|X)$, ca fiind entropia unei variabile aleatoare Y atunci când se cunoaşte variabila aleatoare X. Altfel spus, $H(Y|X)$ reprezintă incertitudinea asupra câmpului de la ieşire atunci când se cunoaşte câmpul de la intrare şi se calculează folosind formula:

$$\begin{aligned} H(Y|X) &= \sum_{i=1}^{n} p(x_i) H(Y|X = x_i) \\ &= -\sum_{i=1}^{n} p(x_i) \sum_{j=1}^{m} p(y_j|x_i) \log p(y_j|x_i) \\ &= -\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} p(x_i, y_j) \log p(y_j|x_i) \quad \text{[biti/simbol]}. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Echivocaţia

În mod similar, entropia spaţiului de intrare atunci când se cunoaşte spaţiul de ieşire, adică echivocaţia, este definită ca:

$$\begin{aligned} H(X|Y) &= \sum_{j=1}^{m} p(y_j) H(X|Y=y_j) \\ &= -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p(x_i,y_j)\log p(x_i|y_j) \quad \text{[biti/simbol]}. \end{aligned} \tag{3.5}$$

3.2.4 Relaţii între entropii

Pornind direct de la definiţie, se poate demonstra următoarea relaţie:

$$H(X,Y) = H(X) + H(Y|X) = H(Y) + H(X|Y). \tag{3.6}$$

Astfel,

$$\begin{aligned} H(X,Y) &= -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p(x_i,y_j)\log p(x_i,y_j) \\ &= -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p(x_i,y_j)\log p(x_i) - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p(x_i,y_j)\log p(y_j|x_i) \\ &= -\sum_{i=1}^{n} p(x_i)\log p(x_i) - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p(x_i,y_j)\log p(y_j|x_i) \\ &= H(X) + H(Y|X). \end{aligned}$$

În mod asemănător, se poate scrie:

$$H(X,Y|Z) = H(X|Z) + H(Y|X,Z). \tag{3.7}$$

3.2.5 Entropia relativă sau divergența Kullback-Leibler

Entropia relativă “măsoară” distanţa între două distribuţii. Mai precis,

$$D(p||q) = \sum_{x\in\mathcal{X}} p(x)\log\frac{p(x)}{q(x)}, \tag{3.8}$$

unde p şi q reprezintă două distribuţii care caracterizează aceeaşi variabilă aleatoare. Și aici, se ține cont de convenția $0\log 0 = 0$

Entropia relativă este întotdeauna o mărime pozitivă, fiind egală cu 0 dacă şi numai dacă $p = q$, adică, dacă şi numai dacă p şi q sunt una şi aceeaşi distribuţie.

3.2.6 Informaţia mutuală sau transinformaţia

Considerând două variabile aleatoare, X şi Y, cu o densitate comună de probabilitate $P_{X,Y}$) şi cu densităţiile marginale P_X, respectiv P_Y, informaţia mutuală (transinformaţia) $I(X;Y)$

reprezintă entropia relativă între distribuţia comună $p(X,Y)$ şi distribuţia produs $p(X)p(Y)$, adică:

$$I(X;Y) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p(x_i,y_j)\log\frac{p(x_i,y_j)}{p(x_i)p(y_j)} \tag{3.9}$$

$$= D(p(x_i,y_j)||p(x_i)p(y_j)). \tag{3.10}$$

Folosind proprietatea entropiei relative, deducem că $I(X;Y)$ este o mărime pozitivă întotdeauna. Egalitatea cu 0 are loc dacă şi numai dacă X şi Y sunt două variabile aleatoare independente.

3.2.7 Relaţii între informaţia mutuală şi entropii

Prelucrând definiţia informaţiei mutuale, putem scrie:

$$I(X;Y) = H(X) + H(Y) - H(X,Y) \tag{3.11}$$

$$I(X;Y) = H(X) - H(X|Y) \tag{3.12}$$

$$I(X;Y) = H(Y) - H(Y|X). \tag{3.13}$$

Aceste relaţii pot fi vizualizate şi în Fig. 3.2.

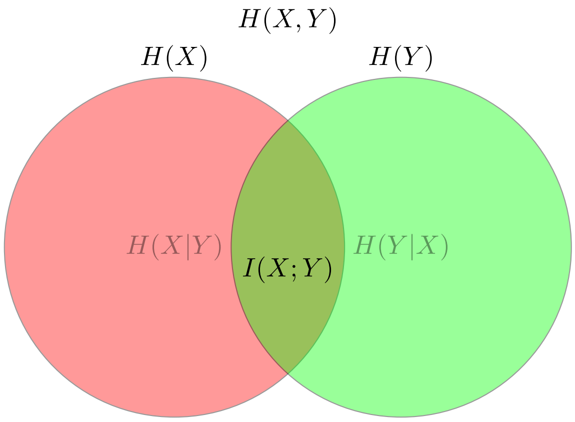

Figura 3.2: Relaţii între informaţia mutuală şi entropii

3.2.8 Canale discrete

Canalul binar simetric (CBS)

Canalul binar simetric este reprezentat în Fig. 3.3. De obicei, se consideră $\mathcal{X} = \mathcal{Y} = \{0, 1\}$, dar pentru a putea face diferența între intrare și ieșire, vom folosi $\mathcal{X} = \{x_1, x_2\}$ și $\mathcal{Y} = \{y_1, y_2\}$.

Un astfel de canal modelează transmisiunea binară cu erori, în care simbolurile sunt complementate cu probabilitate p. Cu alte cuvinte, atunci când o eroare are loc, 0 este recepţionat 1, şi vice-versa. Probabilistic, putem scrie:

$$p(y_1|x_1) = p(y_2|x_2) = 1 - p$$
$$p(y_2|x_1) = p(y_1|x_2) = p,$$

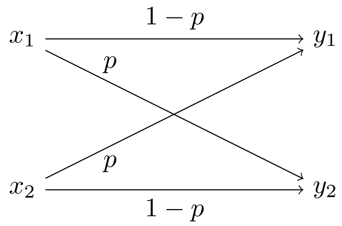

Figura 3.3: Canalul binar simetric (CBS)

sau,

$$P(Y|X) = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ p & 1-p \end{pmatrix}. \tag{3.14}$$

Un *canal* se numeşte simetric dacă permutând liniile, respectiv coloanele, matricei de tranziţie $P(Y|X)$, se obţin tot linii, respectiv coloane, ale matricei $P(Y|X)$.

Capacitatea canalului este egală cu:

$$C = \max_{\{p(x_i)\}} I(X;Y) = \max_{\{p(x_i)\}} H(Y) - H(Y|X), \tag{3.15}$$

unde:

$$\begin{aligned} H(Y|X) &= -\sum_{i=1}^{2} p(x_i) \sum_{j=1}^{2} p(y_j|x_i) \log p(y_j|x_i) \\ &= -p\log p - (1-p)\log(1-p) \\ &\triangleq h_2(p), \end{aligned}$$

iar $\max_{p(x)} H(Y) = 1$ atunci când $p(y_1) = p(y_2) = 0.5$ sau $p(x_1) = p(x_2) = 0.5$, canalul fiind simetric. Cum $H(Y|X)$ nu depinde de $\{p(x_i)\}$,

$$C_{CBS} = 1 - h_2(p) = 1 + p\log p + (1-p)\log(1-p) \quad \text{[biti/simbol]}. \tag{3.16}$$

Observaţie. Funcţia $h_2(p) \triangleq -p\log p - (1-p)\log(1-p)$ este o funcţie pozitivă cu proprietatea $\max_p h_2(p) = 1$ pentru $p = 1/2$. Explicaţi de ce.

Canalul binar cu anulări (CBA)

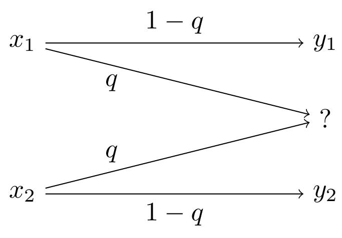

Figura 3.4: Canalul binar cu anulări (CBA)

Canalul binar cu anulări este reprezentat în Fig. 3.4. De obicei, se consideră simbolurile de intrare $\{0, 1\}$, iar cele de ieșire $\{0, 1, ?\}$. Pentru a putea face diferența între intrare și ieșire, vom folosi $\mathcal{X} = \{x_1, x_2\}$ și $\mathcal{Y} = \{y_1, y_2, ?\}$. Se notează $\Pr\{X = x_1\} = \alpha$ și $\Pr\{X = x_2\} = 1 - \alpha$.

Un astfel de canal modelează transmisiunea binară în care o fracţiune q din biţii transmişi de un emitător sunt "pierduţi" sau *anulaţi*. Receptorul recunoaşte, în acest caz, ce biţi au fost sterşi deoarece alfabetul de la intrare conţine două simboluri, iar cel de la ieşire, trei. Atunci când un simbol de intrare este şters de către canal, în locul lui se recepţionează simbolul *?*, sau, în unele cazuri, receptorul declară că nu poate distinge între simbolurile 0 şi 1.

Matricea de tranziţie a canalului este egală cu:

$$P(Y|X) = \begin{pmatrix} 1-q & 0 & q \\ 0 & 1-q & q \end{pmatrix}. \tag{3.17}$$

Capacitatea canalului este egală cu:

$$C = \max_{\{p(x_i)\}} I(X;Y) = \max_{\alpha} H(Y) - H(Y|X) \quad \text{[biti/simbol]}, \tag{3.18}$$

unde:

$$\begin{aligned} H(Y|X) &= -\sum_{i=1}^{2} p(x_i) \sum_{j=1}^{3} p(y_j|x_i) \log p(y_j|x_i) \\ &= -q \log q - (1-q)\log(1-q) \\ &\triangleq h_2(q), \end{aligned}$$

iar

$$H(Y) = -\sum_{j=1}^{3} p(y_j) \log p(y_j).$$

Probabilităţile simbolurilor de la ieşire sunt egale cu:

$$\begin{aligned} p(y_1) &= \sum_{i=1}^{2} p(y_1|x_i)p(x_i) = (1-q)\alpha \\ p(y_2) &= \sum_{i=1}^{2} p(y_2|x_i)p(x_i) = (1-q)(1-\alpha) \\ p(?) &= q, \end{aligned}$$

de unde rezultă, după efectuarea calculelor, că entropia de la ieşire este:

$$H(Y) = h_2(q) + (1-q)h_2(\alpha).$$

Aşadar, capacitatea canalului cu anulări va fi egală cu:

$$C_{CBA} = \max_{\alpha}(1-q)h_2(\alpha) = 1 - q \quad \text{[biti/simbol]}, \tag{3.19}$$

pentru $\alpha = 1/2$.

Formula capacităţii pentru CBA are şi o explicaţie intuitivă şi anume: o fracţiune q din biţii transmişi pe CBA sunt pierduţi. Aşadar, doar $1 - q$ biţi pot fi recuperaţi, ceea ce conduce la o capacitate egală cu $1 - q$ pentru canalul binar cu anulări.

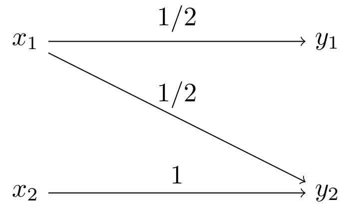

Figura 3.5: Canalul binar Z

Canalul binar Z

Canalul binar Z este reprezentat în Fig. 3.5. Acest tip de transmisie este asimetric, aşa cum se poate observa şi din matricea de zgomot:

$$P(Y|X) = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{3.20}$$

Canalul ternar simetric (CTS)

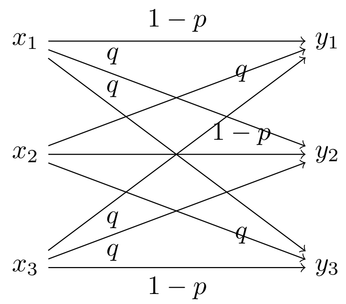

Figura 3.6: Canalul ternar simetric (CTS)

Un alt exemplu de canal este canalul ternar simetric, reprezentat în Fig. 3.6. Alfabetul spaţiului de intrare conţine trei simboluri, iar al celui de ieşire, asemenea. Într-o astfel de transmisiune, un simbol este transmis corect cu probabilitatea $1 - p$ sau poate fi confundat cu unul din celelalte două simboluri, cu probabilitate q.

Matricea de zgomot asociat canalului ternar simetric este:

$$P(Y|X) = \begin{pmatrix} 1-p & q & q \\ q & 1-p & q \\ q & q & 1-p \end{pmatrix}, \tag{3.21}$$

unde $p = 2q$.

Capacitatea canalului de transmisiune de tip CTS este:

$$C_{CTS} = \log 3 + (1-p)\log(1-p) + p\log\left(\frac{p}{2}\right) \quad \text{[biti/simbol]}, \tag{3.22}$$

obţinută pentru probabilități de transmisie egale ale simbolurilor de intrare, $p(x_1) = p(x_2) = p(x_3) = 1/3$.

3.2.9 Canale discret-continue

Canalul Gaussian

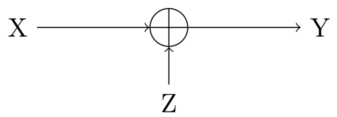

Figura 3.7: Canalul Gaussian

Cel mai important canal continuu este cel Gaussian, reprezentat în Fig. 3.7. Acesta este un canal discret-continuu, în sensul că, la fiecare moment de timp i, este transmis pe canal un simbol X_i, ce va fi afectat de zgomotul aditiv gaussian Z_i, independent de simbolul transmis X_i:

$$Y_i = X_i + Z_i, \tag{3.23}$$

unde Z_i este o variabilă aleatoare gaussiană, identic şi independent distribuită (i.i.d):

$$Z_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma), \quad p(z_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[\frac{-z_i^2}{2\sigma^2}\right].$$

Acest tip de canal reprezintă un model pentru comunicaţiile ce prezintă ca unic impediment adăugarea liniară a zgomotului alb ce are o densitate spectrală constantă şi o distribuţie Gaussiană a amplitudinii. Modelul nu este valabil pentru transmisiunile ce prezintă fading, interferenţă, sau neliniaritate.

Dacă varianţa σ^2 este 0, atunci pe canal nu se produc erori şi simbolul recepţionat este cel corect. Astfel, putem spune, că în anumite condiţii (de exemplu, nu există constrângeri din punct de vedere al puterii transmise şi/sau recepţionate), capacitatea canalului este infinită.

Dacă varianţa σ^2 este mai mare ca 0, pe canal apar erori, motiv pentru care capacitatea canalului va fi limitată. Considerând zgomotul aditiv şi independent faţă de semnalul de intrare, putem scrie următoarea relaţie între nivele de putere ale semnalelor:

$$P_Y = P_X + N,$$

unde P_X este puterea semnalului de intrarea în canal, N este puterea zgomotului de pe canal, iar P_Y este puterea semnalului recepţionat la ieşirea din canal.

Capacitatea canalului este egală cu:

$$C_G = \max_{p_x} I(X;Y), \tag{3.24}$$

unde informaţia mutuală este:

$$\begin{aligned} I(X;Y) &= h(Y) - h(Y|X) = h(Y) - h(X+Z|X) \\ &= h(Y) - h(Z|X) = h(Y) - h(Z) \end{aligned}$$

întrucât zgomotul Z este independent de semnalul de intrare X. Acest lucru implică:

$$C_G = \max_{p_y} h(Y) - h(Z). \tag{3.25}$$

Dacă notăm cu q cuanta de zgomot din canal, atunci numărul de nivele de cuantizare a zgomotului este $m_Z = \frac{\sqrt{N}}{q}$. Cum alfabetul de intrare este discret, păstrând aceeaşi cuantă q, numărul de nivele de cuantizare a semnalului de ieşire este $m_Y = \frac{\sqrt{P_Y}}{q}$. Întrucât nivelele de cuantizare ale zgomotului sunt echiprobabile,

$$h(Z) = \log m_Z = \log \frac{\sqrt{N}}{q}.$$

Maximul informaţiei mutuale se obţine pentru nivele echiprobabile ale semnalului de ieşire:

$$\max_{p_y} h(Y) = \log \frac{\sqrt{P_Y}}{q}.$$

Rezultă capacitatea canalului gaussian egală cu:

$$C_G = \log \sqrt{\frac{P_Y}{N}} = \frac{1}{2} \log \left[1 + \frac{P_X}{N}\right] \quad \text{[biti/simbol]} \tag{3.26}$$

pentru transmiterea unui singur simbol pe canal.

Dacă banda de transmisie este W, atunci frecvenţa de utilizare a canalului este $f = 1/T = 2W$ [simboluri/secunda]. Capacitatea canalului poate fi astfel rescrisă:

$$C_G = W \log \left[1 + \frac{P_X}{N}\right] \quad \text{[bit/secunda]}. \tag{3.27}$$

3.3 Desfăşurarea lucrării

Aplicaţia 1*: Canalul binar simetric (CBS)*

1. Scrieţi o funcţie în Python care să reprezinte grafic $h_2(p)$ în funcţie de p. Pentru $p \in [0, 1]$, alegeţi 100 de valori, linear.

2. Scrieţi o funcţie în Python care să reprezinte grafic C_{CBS} în funcţie de p. Pentru $p \in [0, 1]$, folosiţi aceleaşi puncte ca la subpunctul anterior.

3. Completaţi tabelul de mai jos cu ajutorul graficului de la subpunctul anterior:

p	0	0.25	0.5	0.75	1
C_{CBS}					

Soluţie Python - aplicaţia 1

1. Grafic $h_2(p)$

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def h2(p):
    if np.any(p < 0) or np.any(p > 1):
        raise Exception('Valorile din p trebuie sa fie cuprinse intre 0 ...
            si 1')
    h = np.asanyarray([0.0 if(x == 0 or x == 1) else - x * np.log2(x) - ...
        (1 - x) * np.log2(1 - x) for x in p]) # conventia 0log0 = 0
    return h

p = np.linspace(0.0, 1.0, 100)
```

```
H = h2(p)
plt.plot(p, H)
plt.xlabel('p')
plt.ylabel('H')
plt.show()
```

Rezultatul este prezentat în Fig. 3.8.

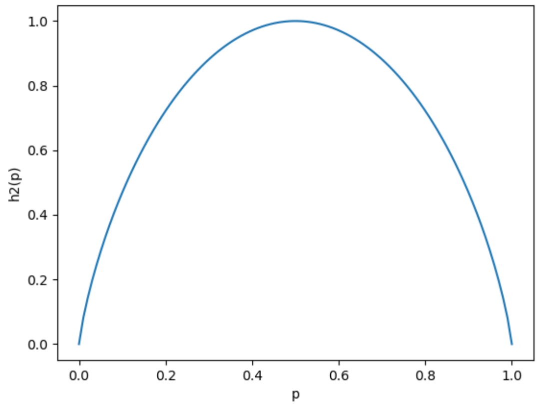

Figura 3.8: Funcția $h_2(p)$

2. Grafic $C_{CBS} = 1 - h2(p)$

   Funcţia este similară celei de la punctul anterior.

3. Tabel C_{CBS}

   Pentru înscrierea valorilor în tabel, se pot prelua valorile cerute direct de pe grafic (cu aproximație) sau folosind o funcție Python.

Aplicaţia 2: *Canalul binar cu anulări (CBA)*

1. Scrieţi o funcţie în Python care să reprezinte grafic C_{CBA} în funcţie de probabilitatea de eroare q. Pentru $q \in [0, 1]$, alegeţi 100 de valori, linear.

2. Completaţi tabelul de mai jos cu ajutorul graficului de la subpunctul anterior:

p	0	0.25	0.5	0.75	1
C_{CBA}					

Aplicaţia 3: *Canalul ternar simetric (CTS)*

1. Scrieţi o funcţie în Python care să reprezinte grafic C_{CTS} în funcţie de p. Pentru $p \in [0, 1]$, folosiţi aceleaşi puncte ca la subpunctul anterior. Indiciu: $q = p/2$.

2. Completaţi tabelul de mai jos cu ajutorul graficului de la subpunctul anterior:

p	0	0.25	0.5	0.75	1
q					
C_{CTS}					

Aplicaţia 4*: Canalul gaussian*

Considerând o putere unitară pentru semnalul de intrare, $P_X = 1$ [Watt], reprezentaţi grafic capacitatea canalului gaussian C_G conform ecuaţiei (3.27) ca o funcţie de puterea zgomotului N şi bandă de frecvenţă W. N este variat liniar între 0.1 [Watt] şi 2 [Watt] (1000 valori), iar W este variat liniar între 1 [Hz] şi 2 [Hz] (5 valori). Comentaţi rezultatele obţinute.

Capacitatea canalului gaussian pentru valorile menționate este prezentat în Fig. 3.9.

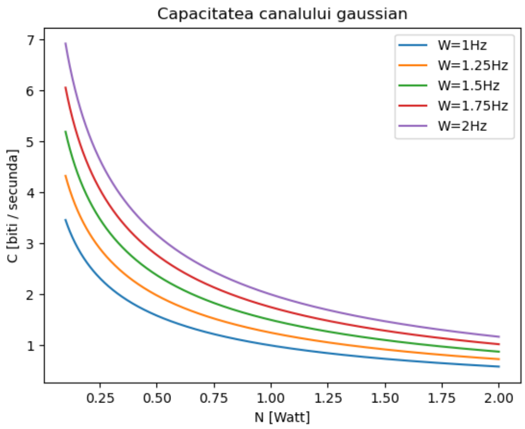

Figura 3.9: Capacitatea canalului gaussian

3.4 Întrebări şi exerciţii

1. Implementați funcția:

   p1(a: str, p: float) -> Union[float, str]:

   Funcția returnează:

   - Dacă a este 'CBS', capacitatea canalului binar simetric pentru o probabilitatea de eroare p;
   - Dacă a este 'CBA', capacitatea canalului binar cu anulări pentru o probabilitatea de anulare p;
   - Mesajul 'Date de intrare invalide!' pentru orice altă valoarea a lui a sau pentru valori invalide ale lui p.

2. Implementați funcția:

   p2(lp: List[float]) -> Union[List[float], str]:

   Pentru fiecare valoare p din lista de intrări lp, funcția va calcula capacitatea unui canal ternar simetric cu probabilitatea de transmisiune corectă $1 - p$ și va întoarce lista rezultatelor, în ordinea în care au fost date. Dacă cel puțin o valoare de intrare este invalidă, atunci funcția va întoarce mesajul 'Date de intrare invalide!'.

3. Implementați funcția:

   p3(α: float) -> List[float]:

   unde $\alpha = p(x_1)$ pentru un canal Z. Funcția returnează 3 valori: valoarea informației mutuale $I(X;Y)$ pentru probabilitatea dată, capacitatea canalului precum și $p(x_1)$ pentru care se obține capacitatea canalului. Se garantează că α este între 0 și 1 inclusiv.

4. Implementați funcția

   p4(Px: float, N: float, W: float) -> float:

   Funcția returnează capacitatea unui canal gaussian; P_X reprezintă puterea pentru semnalul de intrare, N reprezintă puterea zgomotului, iar W reprezintă banda de frecvență.