La **Distribuzione Binomiale** è una delle distribuzioni di probabilità discrete più importanti in statistica. Viene utilizzata per modellare il numero di successi in una sequenza di prove indipendenti, ciascuna con esito binario (successo o fallimento), e con la stessa probabilità di successo.

Teoria della Distribuzione Binomiale

La distribuzione binomiale è definita da due parametri:

- **n**: il numero totale di prove (ad esempio, il numero di lanci di una moneta).
- **p**: la probabilità di successo in ciascuna prova (ad esempio, la probabilità di ottenere "testa" con una moneta equa, cioè 0,5).

La variabile casuale X che rappresenta il numero di successi in queste prove segue una distribuzione binomiale, indicata come $X \sim \text{Binomiale}(n, p)$. La funzione di probabilità di massa per la distribuzione binomiale è data da:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$$

dove:

- k è il numero di successi (valore che si vuole calcolare),
- $\binom{n}{k}$ è il coefficiente binomiale che rappresenta il numero di modi in cui si possono ottenere k successi su n prove, e si calcola come $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Proprietà della Distribuzione Binomiale

- **Media (valore atteso)**: $\mu = n \cdot p$
- **Varianza**: $\sigma^2 = n \cdot p \cdot (1 - p)$

Esempio Concreto

Supponiamo di voler modellare il numero di volte che otteniamo "testa" lanciando una moneta 10 volte, sapendo che la probabilità di ottenere "testa" in un singolo lancio è 0,5.

Parametri:

- $n = 10$ (numero di prove),
- $p = 0,5$ (probabilità di successo).

Se vogliamo calcolare la probabilità di ottenere esattamente 6 "teste" in 10 lanci, applichiamo la formula della distribuzione binomiale:

$$P(X = 6) = \binom{10}{6} \cdot (0,5)^6 \cdot (1 - 0,5)^{10-6}$$

Calcoliamo $\binom{10}{6}$:

$$\binom{10}{6} = \frac{10!}{6!(10-6)!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 210$$

Sostituendo nella formula:

$$P(X = 6) = 210 \cdot (0,5)^6 \cdot (0,5)^4 = 210 \cdot (0,5)^{10}$$

$$P(X = 6) \approx 0,205$$

Quindi, la probabilità di ottenere esattamente 6 "teste" in 10 lanci è circa 20,5%.

Utilizzi Pratici della Distribuzione Binomiale

La distribuzione binomiale è ampiamente usata in diverse applicazioni, come:

- **Controllo di qualità**: determinare la probabilità che un certo numero di prodotti su un campione siano difettosi.
- **Sondaggi**: stimare la probabilità di risposte positive o negative su un numero di intervistati.
- **Esperimenti clinici**: calcolare la probabilità che un certo numero di pazienti risponda positivamente a un trattamento.

La distribuzione binomiale fornisce quindi un potente strumento per valutare probabilità in situazioni con prove indipendenti e due possibili risultati.

1. Controllo di qualità

Supponiamo che un'azienda produca componenti elettronici e sappia, sulla base di dati storici, che la probabilità che un componente sia difettoso è del 2% ($p = 0,02$). Si seleziona un campione di 50 componenti per un controllo qualità ($n = 50$).

Domanda: Qual è la probabilità che esattamente 3 componenti in questo campione siano difettosi?

Calcolo:

$$P(X = 3) = \binom{50}{3} \cdot (0,02)^3 \cdot (0,98)^{47}$$

Dove $\binom{50}{3} = \frac{50!}{3!(50-3)!}$. Calcolando questa probabilità, si può determinare la probabilità specifica di trovare esattamente 3 componenti difettosi su 50.

2. Sondaggi

Supponiamo di condurre un sondaggio su un campione di 100 persone per scoprire se supportano una nuova proposta legislativa. I dati precedenti indicano che il 60% delle persone ($p = 0,6$) supporta la proposta.

Domanda: Qual è la probabilità che esattamente 70 persone su 100 rispondano positivamente?

Calcolo:

$$P(X = 70) = \binom{100}{70} \cdot (0,6)^{70} \cdot (0,4)^{30}$$

Dove $\binom{100}{70}$ è il numero di modi in cui si possono ottenere 70 risposte positive su 100. Questo calcolo fornisce la probabilità di ottenere esattamente 70 risposte positive.

3. Esperimenti clinici

Immaginiamo uno studio clinico in cui un farmaco ha una probabilità del 30% ($p = 0,3$) di avere un effetto positivo su un paziente. Si somministra il farmaco a 20 pazienti ($n = 20$).

Domanda: Qual è la probabilità che esattamente 5 pazienti rispondano positivamente al trattamento?

Calcolo:

$$P(X = 5) = \binom{20}{5} \cdot (0,3)^5 \cdot (0,7)^{15}$$

Dove $\binom{20}{5}$ rappresenta il numero di modi in cui si possono selezionare 5 pazienti che rispondono positivamente su 20. Questa formula permette di stimare la probabilità esatta di avere 5 risposte positive.

Interpretazione e Utilità

- **Controllo di qualità**: l'azienda può utilizzare questa analisi per stimare la probabilità di avere un numero specifico di componenti difettosi e, se necessario, migliorare il processo produttivo.
- **Sondaggi**: le agenzie di ricerca possono usare la distribuzione binomiale per valutare l'affidabilità dei risultati dei sondaggi e determinare la significatività dei dati raccolti.
- **Esperimenti clinici**: i ricercatori possono stimare l'efficacia di un trattamento e fare inferenze sul potenziale successo del farmaco prima di applicazioni più ampie.

Questi esempi illustrano come la distribuzione binomiale sia uno strumento pratico per valutare probabilità in contesti diversi, supportando la presa di decisioni basate sui dati.

La **Distribuzione di Poisson** è una distribuzione di probabilità discreta che descrive il numero di eventi che si verificano in un intervallo di tempo o spazio fissato, quando gli eventi avvengono in modo indipendente e con una certa frequenza media costante. È utile per modellare fenomeni rari o eventi che si verificano a intervalli casuali.

A cosa serve la Distribuzione di Poisson

La distribuzione di Poisson è utilizzata per modellare situazioni in cui è importante contare il numero di eventi che avvengono in un dato intervallo. Alcuni esempi tipici includono:

- Il numero di chiamate ricevute da un call center in un'ora.
- Il numero di incidenti automobilistici in una determinata area in un giorno.
- Il numero di difetti in un tratto di materiale.

Come funziona

La distribuzione di Poisson è definita da un solo parametro:

- λ (lambda): rappresenta il numero medio di eventi che si prevede accadano in un intervallo specificato.

La probabilità di osservare esattamente k eventi in un dato intervallo è data dalla formula:

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

dove:

- e è la base del logaritmo naturale (approssimativamente 2,71828),
- k è il numero di eventi osservati,
- λ è il numero medio di eventi.

Proprietà della Distribuzione di Poisson

- **Media**: $\mu = \lambda$
- **Varianza**: $\sigma^2 = \lambda$

Esempio pratico

Supponiamo che in una stazione dei treni arrivino in media 5 treni ogni ora ($\lambda = 5$).

Domanda: Qual è la probabilità che in un'ora arrivino esattamente 3 treni?

Soluzione: Utilizziamo la formula di Poisson per calcolare la probabilità:

$$P(X = 3) = \frac{5^3 e^{-5}}{3!}$$

1. **Calcolo di** 5^3:

$$5^3 = 125$$

2. **Calcolo di** e^{-5} (approssimato a 0,00674):

$$e^{-5} \approx 0,00674$$

3. **Calcolo di** $3!$:

$$3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$$

4. **Inserimento dei valori nella formula**:

$$P(X = 3) = \frac{125 \times 0,00674}{6}$$

$$P(X = 3) \approx \frac{0,8425}{6} \approx 0,1404$$

Risultato: La probabilità che esattamente 3 treni arrivino in un'ora è circa 0,1404, ovvero circa il 14%.

Utilizzi della Distribuzione di Poisson

La distribuzione di Poisson è utilizzata in diversi ambiti:

- **Assicurazioni**: per modellare il numero di sinistri automobilistici in un periodo.
- **Servizi di emergenza**: per prevedere il numero di chiamate in un determinato lasso di tempo.
- **Analisi industriale**: per contare i difetti su una linea di produzione.

Questa distribuzione è ideale per descrivere eventi che avvengono con una frequenza relativamente bassa in un dato intervallo, ma che possono comunque verificarsi numerose volte.

Ecco un esempio concreto di come la distribuzione di Poisson possa essere utilizzata nell'**analisi industriale** per contare i difetti su una linea di produzione.

Esempio Pratico

Supponiamo che un'azienda di produzione di tessuti monitori la qualità dei suoi prodotti e sappia, in base a dati storici, che il numero medio di difetti per 100 metri di tessuto è pari a 2 ($\lambda = 2$).

Domanda: Qual è la probabilità di trovare esattamente 4 difetti in 100 metri di tessuto?

Soluzione: Utilizziamo la formula della distribuzione di Poisson per calcolare la probabilità di osservare esattamente 4 difetti.

$$P(X = 4) = \frac{2^4 e^{-2}}{4!}$$

1. **Calcolo di 2^4**:

$$2^4 = 16$$

2. **Calcolo di e^{-2}** (approssimato a 0,1353):

$$e^{-2} \approx 0,1353$$

3. **Calcolo di $4!$**:

$$4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

4. **Inserimento dei valori nella formula**:

$$P(X = 4) = \frac{16 \times 0,1353}{24}$$

$$P(X = 4) \approx \frac{2,1648}{24} \approx 0,0902$$

Risultato: La probabilità di trovare esattamente 4 difetti in 100 metri di tessuto è circa 0,0902, ovvero circa il 9%.

Interpretazione

Questa analisi consente all'azienda di valutare il rischio associato alla qualità del prodotto e di stimare la frequenza con cui si possono verificare determinati livelli di difetti. Conoscere la probabilità di diversi numeri di difetti aiuta l'azienda a stabilire standard di controllo qualità e a prendere decisioni su interventi correttivi o migliorie nei processi produttivi.

Esempio Pratico

Supponiamo che un impianto industriale utilizzi sensori per monitorare la temperatura di un motore. In base ai dati storici, si sa che il numero medio di letture di temperatura anomale (valori fuori dal range normale) registrate da un singolo sensore è pari a **3 anomalie al giorno** ($\lambda = 3$).

Domanda: Qual è la probabilità che un sensore registri esattamente **5 anomalie** in un giorno?

Soluzione

Utilizziamo la formula della distribuzione di Poisson:

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

Dove:

- $\lambda = 3$ (media giornaliera di anomalie),
- $k = 5$ (numero di anomalie da calcolare),
- $e^{-3} \approx 0,0498$.

1. **Calcolo di 3^5**:

$$3^5 = 243$$

2. **Calcolo di e^{-3}**:

$$e^{-3} \approx 0,0498$$

3. **Calcolo di $5!$**:

$$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

4. **Inserimento dei valori nella formula**:

$$P(X = 5) = \frac{3^5 \cdot e^{-3}}{5!}$$

$$P(X = 5) = \frac{243 \cdot 0,0498}{120}$$

$$P(X = 5) \approx \frac{12,105}{120} \approx 0,1009$$

Risultato: La probabilità che un sensore registri esattamente 5 anomalie in un giorno è circa **10%**.

Esempio Pratico: Arrivi di Aerei in un Aeroporto

Supponiamo che in un aeroporto arrivino in media **10 aerei ogni ora** ($\lambda = 10$). Gli arrivi avvengono in modo casuale e indipendente l'uno dall'altro, rispettando le condizioni per l'applicazione della distribuzione di Poisson.

Domanda: Qual è la probabilità che in un'ora arrivino esattamente **15 aerei**?

Soluzione

Utilizziamo la formula della distribuzione di Poisson:

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

Dove:

- $\lambda = 10$ (numero medio di arrivi per ora),
- $k = 15$ (numero di arrivi da calcolare),
- $e^{-10} \approx 0,000045$.

1. **Calcolo di 10^{15}**:

$$10^{15} = 1.000.000.000.000.000$$

2. **Calcolo di e^{-10}**:

$$e^{-10} \approx 0,000045$$

3. **Calcolo di $15!$**:

$$15! = 15 \times 14 \times 13 \times \cdots \times 1 = 1.307.674.368.000$$

4. **Inserimento nella formula**:

$$P(X = 15) = \frac{10^{15} \cdot e^{-10}}{15!}$$

$$P(X = 15) = \frac{1.000.000.000.000.000 \cdot 0,000045}{1.307.674.368.000}$$

$$P(X = 15) \approx \frac{45.000.000.000}{1.307.674.368.000} \approx 0,0344$$

Risultato: La probabilità che in un'ora arrivino esattamente **15 aerei** è circa **3,44%**.

Estensione: Partenze di Aerei

Per modellare le **partenze**, possiamo utilizzare lo stesso approccio. Ad esempio, supponiamo che in media partano **8 aerei ogni ora** ($\lambda = 8$).

Domanda: Qual è la probabilità che partano **meno di 5 aerei** in un'ora?

Calcolo della probabilità cumulativa:

La probabilità che partano meno di 5 aerei è data da $P(X < 5)$, che equivale alla somma delle probabilità da $X = 0$ a $X = 4$:

$$P(X < 5) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4)$$

Utilizziamo la formula per ciascun valore di k e sommiamo i risultati.

Per $\lambda = 8$:

- $P(X = 0) = \frac{8^0 e^{-8}}{0!} = e^{-8} \approx 0,000335$
- $P(X = 1) = \frac{8^1 e^{-8}}{1!} = 8 \cdot e^{-8} \approx 0,00268$
- $P(X = 2) = \frac{8^2 e^{-8}}{2!} = \frac{64 \cdot e^{-8}}{2} \approx 0,0107$
- $P(X = 3) = \frac{8^3 e^{-8}}{3!} = \frac{512 \cdot e^{-8}}{6} \approx 0,0286$
- $P(X = 4) = \frac{8^4 e^{-8}}{4!} = \frac{4096 \cdot e^{-8}}{24} \approx 0,0572$

Somma delle probabilità:

$$P(X < 5) \approx 0,000335 + 0,00268 + 0,0107 + 0,0286 + 0,0572 \approx 0,0995$$

Risultato: La probabilità che partano meno di 5 aerei in un'ora è circa **9,95%**.

Esempio Pratico: Gestione delle Richieste di Intervento del Personale ATA

Supponiamo che in una scuola si ricevano in media **4 richieste di intervento al giorno** per il personale ATA ($\lambda = 4$). Queste richieste includono, ad esempio, assistenza tecnica, manutenzione o gestione amministrativa, e si verificano in modo casuale durante il giorno.

Domanda: Qual è la probabilità che in un giorno ci siano **6 richieste** di intervento per il personale ATA?

Soluzione

Utilizziamo la formula della distribuzione di Poisson:

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

Dove:

- $\lambda = 4$ (media giornaliera di richieste),
- $k = 6$ (numero di richieste da calcolare),
- $e^{-4} \approx 0,0183$.

1. **Calcolo di** 4^6:

$$4^6 = 4096$$

2. **Calcolo di** e^{-4}:

$$e^{-4} \approx 0,0183$$

3. **Calcolo di** $6!$:

$$6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$$

4. **Inserimento nella formula**:

$$P(X = 6) = \frac{4^6 \cdot e^{-4}}{6!}$$

$$P(X = 6) = \frac{4096 \cdot 0,0183}{720}$$

$$P(X = 6) \approx \frac{74,92}{720} \approx 0,104$$

Risultato: La probabilità che in un giorno ci siano esattamente **6 richieste** di intervento per il personale ATA è circa **10,4%**.

Estensione: Probabilità di Ricevere Più di 8 Richieste in un Giorno

Per calcolare la probabilità che il personale ATA riceva **più di 8 richieste** in un giorno ($P(X > 8)$), utilizziamo il complemento della probabilità cumulativa fino a 8 richieste ($P(X \leq 8)$):

$$P(X > 8) = 1 - P(X \leq 8)$$

La probabilità cumulativa ($P(X \leq 8)$) si calcola sommando le probabilità per $X = 0, 1, \ldots, 8$ usando la formula di Poisson. Questo calcolo può essere eseguito facilmente con software o tabelle della distribuzione di Poisson.