Tidsdiskrete systemer – beskrivelse i tidsdomenet
(Proakis 2.2–2.5)

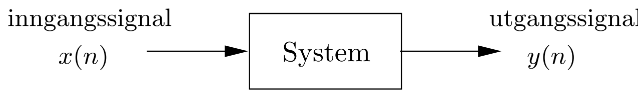
Bojana Gajić

29. august 2006

Innhold

1 Generelle systemer

System: Transformerer signaler på en ønsket måte ved å utføre et sett av veldefinerte operasjoner.

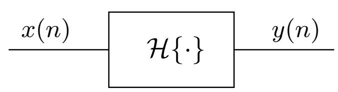


Tidsdiskrete systemer: inngangs- og utgangssignalene er tidsdiskrete

Bruksområder: støyfjerning, informasjonsuttrekning, modellering av fysiske systemer ...

Matematisk beskrivelse:

$$y(n) = \mathcal{H}\{x(n)\}$$



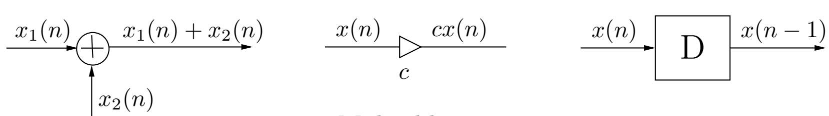
Eksempler:

- Forsterker: $y(n) = k\,x(n)$
- Likeretter: $y(n) = |x(n)|$

1.1 Grafisk representasjon

Viser hvordan systemet kan implementeres i software eller hardware.

Byggeblokker: Et generelt LTI system (definert i seksjon 2) kan realiseres ved hjelp av tre forskjellige byggeblokker



Adderer — Multiplikator med konstant — Forsinkelseselement

Det er vanlig å betegne forsinkelseselement med "z^{-1}" istedenfor "D". Bakgrunnen for denne notasjonen vil bli forklart i forbindelse med gjennomgang av z-transformen.

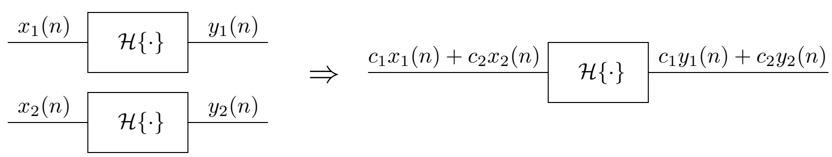
1.2 Linearitet

Definisjon: Et system er lineært hvis $\mathcal{H}\{\cdot\}$ er en lineær operator, dvs. en operator som oppfyller superposisjonsprinsippet

$$\mathcal{H}\{c_1 x(_1(n) + c_2 x_2(n)\} = c_1 \mathcal{H}\{x_1(n)\} + c_2 \mathcal{H}\{x_2(n)\} \qquad (1)$$

for to vilkårlige signaler $x_1(n)$ og $x_2(n)$.

Tolkning: Respons på lineær kombinasjon av to vilkårlige signaler er lik lineær kombinasjon av responsene til de to signalene.



Eksempler:

- Lineære systemer: $k\,x(n)$, $\frac{1}{3}[x(n-1) + x(n) + x(n+1)]$
- Ikke-lineære systemer: $|x(n)|$, $x^2(n)$, $\cos(x(n))$

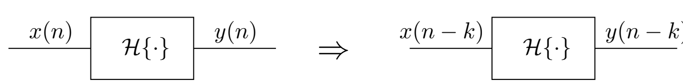
1.3 Tidsinvarians

Definisjon: Et system er tidsinvariant hvis $\mathcal{H}\{\cdot\}$ oppfyller følgende krav

$$\mathcal{H}\{x(n)\} = y(n) \;\;\Rightarrow\;\; \mathcal{H}\{x(n-k)\} = y(n-k) \qquad (2)$$

for et vilkårlig inngangssignal $x(n)$.

Tolkning: En forsinkelse i inngangssignalet fører bare til tilsvarende forsinkelse i utgangssignalet. Dvs. systemets respons på et signal avhenger ikke av tidspunktet når signalet påtrykkes.



Eksempler:

- Tidsinvariante systemer: $k\,x(n)$, $x(n-3)$,
- Tidsavhengige systemer: $n\,x(n)$, $x(n)\cos(\omega n)$

1.4 Kausalitet

Definisjon: Et system er kausalt hvis nåverdien til utgangssignalet ikke avhenger av fremtidige verdier av inngangssignalet

$$y(n) = f\{x(n), x(n-1), x(n-2), ...\} \tag{3}$$

Kommentar: Systemer som opererer i sanntid må være kausale for at de skal kunne realiseres i praksis. For slike systemer er fremtidige verdier av inngangssignalet ennå ikke kjent. Ikke-kausale systemer kan derimot brukes til å behandle signaler som er tatt opp på forhånd.

Eksempler:

- Kausale systemer: $|x(n)|$, $x(n-3)$
- Ikke-kausale systemer: $\frac{1}{3}[x(n-1)+x(n)+x(n+1)]$, $x^2(n+1)$

1.5 Stabilitet (BIBO)

Definisjon: Et system er BIBO-stabilt hvis det gir begrenset respons på ethvert begrenset signal, dvs.

$$|x(n)| \leq M_x < \infty, \ \ \forall n \quad \Rightarrow \quad |y(n)| \leq M_y < \infty, \ \ \forall n \tag{4}$$

Kommentar: BIBO – forkortelse for *bounded input bounded output.*

Eksempler:

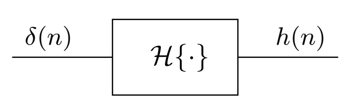
- Stabile systemer: $y(n) = |x(n)|$, $y(n) = \frac{1}{2}y(n-1) + x(n)$
- Ustabile systemer: $y(n) = 2\,y(n-1) + x(n)$

2 Lineære og tidsinvariante (LTI) systemer

2.1 Systembeskrivelse ved enhetspulsrespons

Definisjon: Enhetspulsrespons er systemrespons på en enhetspuls.

$$h(n) = \mathcal{H}\{\delta(n)\}$$



Påstand: LTI systemer er fullstendig beskrevet ved enhetspulsrespons. Hvis vi kjenner $h(n)$, kan vi finne respons på et vilkårlig signal.

Bevis: Et vilkårlig tidsdiskret signal kan uttrykkes som

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k)$$

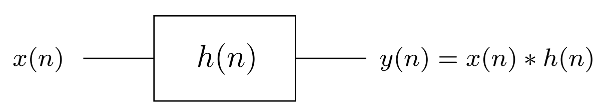
$$\begin{aligned} y(n) = \mathcal{H}\{x(n)\} &= \mathcal{H}\{\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k)\} \\ &\stackrel{L}{=} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\mathcal{H}\{\delta(n-k)\} \\ &\stackrel{TI}{=} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k) \end{aligned}$$

2.2 Lineær foldning (konvolusjon)

Definisjon:

$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k) \tag{5}$$

Systemrespons: Responsen til et LTI system med enhetspulsrespons $h(n)$ på et vilkårlig signal $x(n)$ finnes som $y(n) = x(n) * h(n)$.

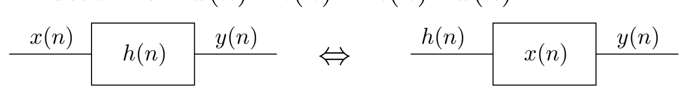


Grafisk tolkning: Gjenta følgende for alle n

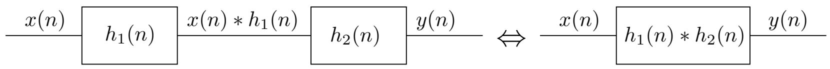
1. speilvend signalet $h(k) \;\Rightarrow\; h(-k)$
2. forskyv n punktprøver til høyre $\;\Rightarrow\; h(-(k-n)) = h(n-k)$
3. multipliser med $x(k) \;\Rightarrow\; x(k)h(n-k)$
4. legg sammen verdiene $\;\Rightarrow\; \sum_k x(k)h(n-k)$

Egenskaper:

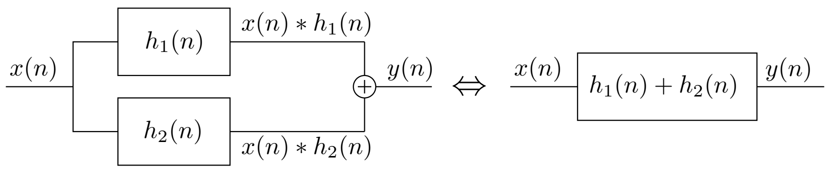
1. Kommutativ lov: $x(n) * h(n) = h(n) * x(n)$



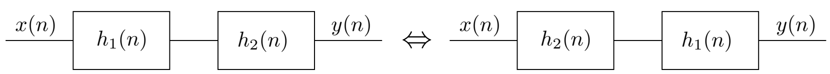
2. Assosiativ lov: $x(n) * (h_1(n) * h_2(n)) = (x(n) * h_1(n)) * h_2(n)$



3. Distributiv lov: $x(n) * (h_1(n) + h_2(n)) = x(n) * h_1(n) + x(n) * h_2(n)$



4. Systemrespons er uavhengig av rekkefølgen på delsystemene. Dette følger fra de to første egenskapene.



Signaler av endelig lengde: Anta at $x(n)$ og $h(n)$ har lengde N_x og N_h.

$$y(n) = \sum_{k=0}^{N_x-1} x(k)h(n-k) \overset{l=n-k}{=} \sum_{l=n-N_x+1}^{n} h(l)x(n-l)$$

$y(n) = 0$ for $n < 0$ og $n - N_x + 1 \geq N_h \;\Rightarrow\; n \geq N_x + N_h - 1$
$\Longrightarrow\;\; y(n)$ har lengde $N_x + N_h - 1$.

2.3 Kausalitetskriterium

Påstand: Et LTI system er kausalt hvis og bare hvis

$$h(n) = 0, \quad \forall n < 0 \tag{6}$$

Bevis: $y(n) = x(n) * h(n) = h(n) * x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k)$
For at systemet skal være kausalt, må ikke $y(n)$ avhenge av $x(n-k)$ for $k < 0$. Derfor må $h(k) = 0$ for $k < 0$.

Konklusjon: Utgangssignalet fra et kausalt LTI system er gitt ved

$$y(n) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k)x(n-k) \tag{7}$$

2.4 Stabilitetskriterium

Påstand: Et LTI system er stabilt hvis

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)| < \infty \tag{8}$$

Bevis: Anta at $|x(n)| \leq M_x < \infty$, $\forall n$. Da er

$$\begin{aligned} |y(n)| &= |\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k)| \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |x(k)||h(n-k)| \\ &\leq M_x \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(n-k)| = M_x \sum_{l=-\infty}^{\infty} |h(l)| \end{aligned}$$

Hvis $\sum_{l=-\infty}^{\infty} |h(l)| < \infty$, er også $|y(n)| < \infty$, og systemet er stabilt.

2.5 FIR- og IIR-systemer

- FIR (*"Finite Impulse Response"*) systemer har enhetspulsrespons av endelig lengde.
- IIR (*"Infinite Impulse Response"*) systemer har enhetspulsrespons av uendelig lengde.

2.6 Systembeskrivelse ved differensligninger

En viktig klasse av LTI systemer kan beskrives ved følgende differenseligning

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k) = \sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k), \tag{9}$$

der a_k og b_k er reelle konstanter. N og M bestemmer systemorden. Vanligvis antar vi at $a_0 \equiv 1$. En alternativ form er da gitt ved

$$y(n) = \sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k) - \sum_{k=1}^{N} a_k y(n-k) \tag{10}$$

Systemer som kan beskrives ved

$$y(n) = \sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k) \tag{11}$$

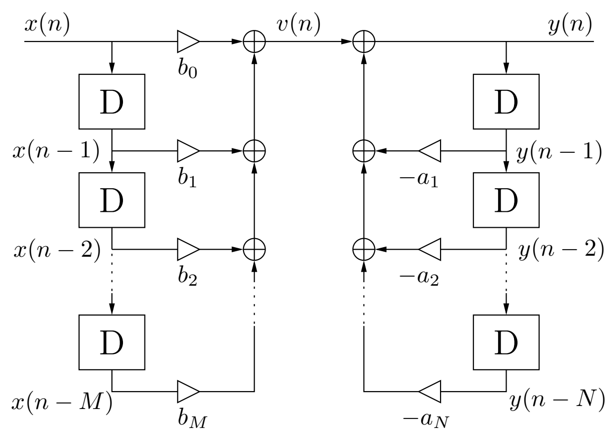
er FIR-systemer. Dette ser vi ved å sammenligne ligning 11 og 7. Da får vi

$$h(n) = \begin{cases} b_n & 0 \leq n \leq M \\ 0 & \text{ellers,} \end{cases}$$

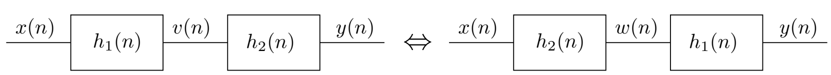
dvs. at $h(n)$ har endelig lengde.

2.7 Grafisk representasjon (forts.)

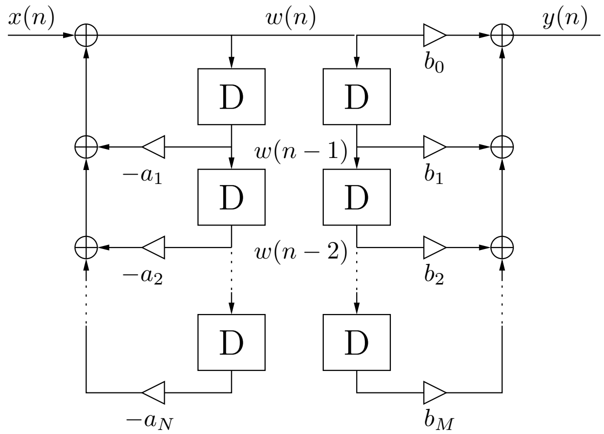
Direkte form 1-struktur for et LTI system gitt ved ligning 10:



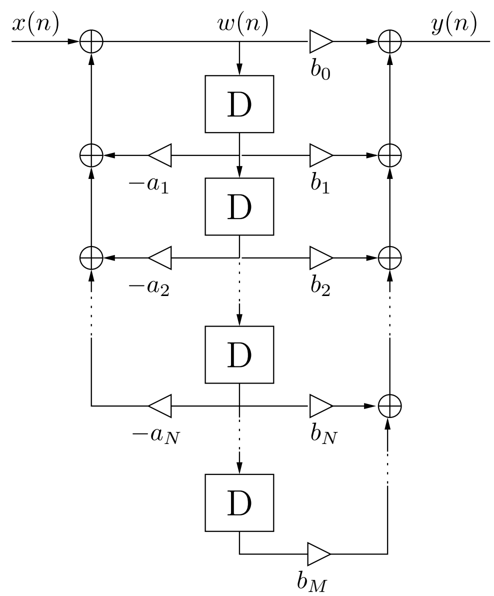
Overgang til direkte form 2-struktur: DF1-strukturen kan deles opp i to delsystemer satt i serie. De kan bytte rekkefølge uten at responsen til hele systemet forandres.



Derfor er den følgende strukturen ekvivalent med DF1-struktur.


$x(n)$
$w(n)$
$y(n)$
D
D
b_0
$w(n-1)$
$-a_1$
b_1
D
D
$w(n-2)$
$-a_2$
b_2
D
D
$-a_N$
b_M

Direkte form 2-struktur fås ved å slå sammen forsinkelseselementene i den siste figuren (færre forsinkelseselementer ⇒ mindre minneforbruk)



Det finnes mange ekvivalente realiseringer for hvert system, men de skiller seg i praksis pga. endelig ordlengde (kvantisering). Kvantisering av filterkoeffisienter kan føre til at et system blir ustabilt. Mer om dette senere i faget.

2.8 Sammenheng mellom differenseligning og enhetspulsrespons

Ved å sette $x(n) = \delta(n)$ og $y(n) = h(n)$ i ligning 10 får vi

$$\begin{aligned} h(n) &= \sum_{k=0}^{M} b_k \delta(n-k) - \sum_{k=1}^{N} a_k h(n-k) \\ &= b_n - \sum_{k=1}^{N} a_k h(n-k) \end{aligned}$$

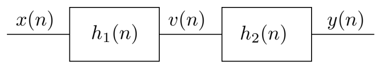
2.8.1 Iterativ løsning

$h(n)$ kan beregnes iterativt for $n = 1, 2, 3, \ldots$ hvis initialbetingelser er oppgitt, eller det er gitt at systemet er kausalt. På bakgrunn av de første verdiene kan det i noen tilfeller være mulig å finne generelt uttrykk for $h(n)$

2.8.2 Generell løsning (ikke pensum)

Minner på løsning av differensialligninger.

Utgangspunkt: DF1-struktur



Finner $h_1(n)$:

$$v(n) = \sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k) \quad \Rightarrow \quad h_1(n) = \begin{cases} b_n & 0 \leq n \leq M \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

Finner $h_2(n)$:

$$y(n) = -\sum_{k=1}^{N} a_k y(n-k) + v(n) \quad \Rightarrow \quad h_2(n) = -\sum_{k=1}^{N} a_k h_2(n-k) + \delta(n)$$

For $n > 0 \quad \Rightarrow \quad h_2(n) = -\sum_{k=1}^{N} a_k h_2(n-k)$
Søker løsning på form $h_2(n) = \alpha^n$.

$$\alpha^n = -\sum_{k=1}^{N} a_k \alpha^{n-k} \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=0}^{N} a_k \alpha^{n-k} = 0 \ \mid \alpha^{N-n} \quad \Rightarrow$$

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \alpha^{N-k} = 0 \qquad \text{(karakteristisk ligning)} \tag{12}$$

Finner røttene α_i i karakteristisk ligning. Hvis alle er forskjellige, da er generell løsning gitt ved

$$h_2(n) = \sum_{i=1}^{N} c_i \alpha_i^n \tag{13}$$

Konstantene c_i finnes fra initialbetingelser

$$h_2(n) = \begin{cases} 0 & n < 0 \\ \delta(0) = 1 & n = 0 \end{cases} \qquad \text{(kausalt system)} \tag{14}$$

Finner $h(n)$:

$$h(n) = h_1(n) * h_2(n) \tag{15}$$