

14 eksamenssett med løsninger i TTK4105

Reguleringsteknikk:

16/5-01

29/7-02

15/5-03

15/8-03

24/5-05

9/8-05

8/6-06

4/6-07

25/5-09

19/5-12

30/5-13

22/5-14

30/5-15

23/5-16

(Formelsamlinga i hvert oppgavesett er nesten lik for alle sett og er bare tatt med for settene 2013, -15, -16. Formelsamling til eksamen v-18 blir nærmest identisk med den siste fra 23/5-16, og ligger helt bakerst her. Merk ellers at Rouths kriterium – brukt i noen tidligere eksamener – ikke lenger er pensum, mens Skogestads SIMC-metode er kommet inn.)



Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet (NTNU)

Faglig kontakt under eksamen: Trond Andresen, tlf. **7359 4358**, mobil **9189 7045**
T.A. går to veiledningsrunder, ca. kl. 1015 - 1045, og ca. kl. 1315 - 1345

Eksamens i fagene SIE3005 og 43021 reguleringssteknikk

onsdag 16. mai 2001

Tid: 0900 - 1500

Sensur vil foreligge seinest torsdag 7. juni

Hjelpemiddelkombinasjon B1: Kalkulator med tomt minne tillatt. Ingen trykte eller håndskrevne hjelpemidler tillatt. Studenthjerne med fullt minne tillatt.

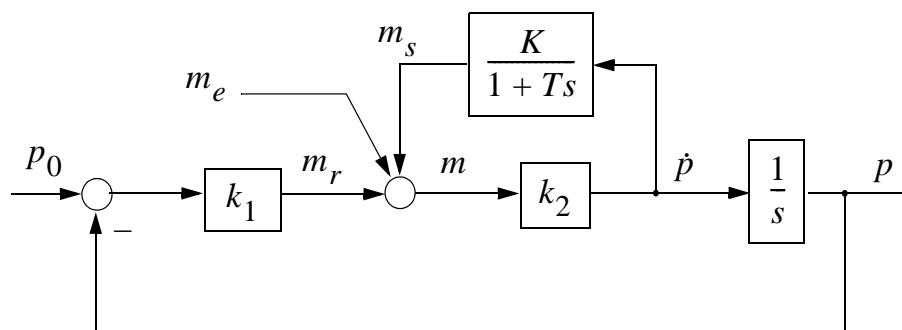
Prosentallene angir den relative vekt oppgavene tillegges ved bedømmelsen.

Flere spørsmål kan besvares meget enkelt ved å bruke **formelsamlinga** bakerst i oppgavesettet. Sjekk alltid den før du gir opp! Men du må forklare hvordan du bruker noe, når du henter det fra formelsamlinga.

Noen spørsmål skal besvares ved å **måle ut verdier på figurer i oppgavesettet** – i slike tilfeller godtas en viss "måleunøyaktighet"! Der hvor rubrikk for studentnr. etc. er angitt på sider i oppgavesettet, **kan man tegne i figurer og levere det påtegnede arket som en del av besvarelsen**.

STUDENTS MAY ANSWER THIS EXAM IN ENGLISH IF THAT IS PREFERRED.

Oppgave 1 (36 %) (NB: Du trenger ikke kunne noe økonomi for å løse denne oppgaven)



figur 1.1

Figur 1.1 viser en modell for den kortsigtede dynamikk (timer, dager) i et idealisert aksjemarked. De som handler aksjer oppviser to typer oppførsel: "Realøkonomisk" (dvs. de handler på grunnlag av en oppfatning av hva de tror aksjen "egentlig" er verdt, her gitt ved en konstant pris p_0), eller "spekulativ" (dvs. de handler på grunnlag av endringshastighet \dot{p} i prisen). Overskuddsetterspørrelsen etter aksjer er gitt ved m [antall aksjer]. m er negativ når flere aksjer tilbys enn ønskes kjøpt. Vi har

$$m = m_r + m_s + m_e , \quad (1.1)$$

hvor indeks "r" betyr "realøkonomisk", "s" betyr "spekulativ". Indeks "e" for "ekstern" indikerer en ekstra etterspørrelse som påvirker systemet. Det henvises til figur 1.1.

Parametre i modellen er koeffisientene $k_1, k_2 > 0$, forsterkning K og tidskonstant T .

Sett inntil videre $p_0 = 0$, da vi først bare skal studere virkninga av den eksterne etterspørsel m_e .

a) (7 %) Systemet kan uttrykkes som en tilstandsrommodell, $\dot{x} = Ax + bu$, $y = c^T x$.

$$\text{Velg } \underline{x} = \begin{bmatrix} p \\ m_s \end{bmatrix}. \text{ Vis at da er } A = \begin{bmatrix} -k_1 k_2 & k_2 \\ -\frac{K k_1 k_2}{T} & -\frac{1}{T}(1 - K k_2) \end{bmatrix} \quad (1.2)$$

Velg $u = m_e$ og $y = p$. Finn b og c^T .

b) (7 %) Finn transferfunksjonen $h(s) = \frac{y}{u}(s) = \frac{p}{m_e}(s)$ ved hjelp av tilstandsrommodellen.

c) (6 %) Finn den samme transferfunksjonen ved å redusere blokkdiagrammet.

d) (6 %) Vis at $h(s)$ har udempet resonansfrekvens

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k_1 k_2}{T}}, \text{ og relativ dempningsfaktor } \zeta = \frac{1 + k_1 k_2 T - k_2 K}{2 \sqrt{k_1 k_2 T}} \quad (1.3)$$

Kommentér ut fra ζ virkninga av økt K på systemet – er den rimelig ut fra de to typer oppførsel som modellen bygger på?

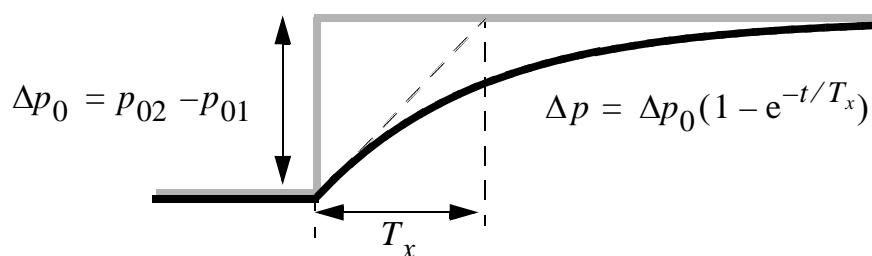
e) (5 %) For et visst variasjonsområde $K_1 < K < K_2$ er polene kompleks konjugerte og systemet stabilt. Finn K_1 og K_2 . Skissér polenes forflytning (dvs. rotkurven) når K varierer i dette området. (Tips: Kurven blir veeeeldig ;-)

f) (5 %) Sett nå $m_e = 0$. Figur 1.2 viser et prisforløp når aksjens “realøkonomiske verdi” p_0 endrer seg som et sprang fra p_{01} til p_{02} (det kan f.eks. tenkes at det kunngjøres at bedriften har utviklet et nytt attraktivt produkt).

I dette underpunktet er forsterkninga K gitt en verdi som man fort kan bestemme ved betrakting av sprangresponsen i figur 1.2 og modellen i figur 1.1:

Hva er K – hva med omfanget av spekulativ oppførsel?

Finn også den T_x som er angitt i figur 1.2 !



figur 1.2

Oppgave 2 (31 %)

En modell av kurs-dynamikken til en supertanker er

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \frac{1}{J}(\beta x_2 - \gamma x_2^3 + Ku)\end{aligned}\quad (2.1)$$

Her er

x_1, x_2 = henholdsvis kursvinkel [rad], og kursvinkelhastighet (dreiehastighet) [rad/s]

J = supertankerens treghetsmoment m.h.p. vertikal-aksen. [kg m^2]

u, K = henholdsvis rorvinkel [rad], og *rorkonstant* [Nm / rad]

Koeffisientene β og γ er begge > 0 .

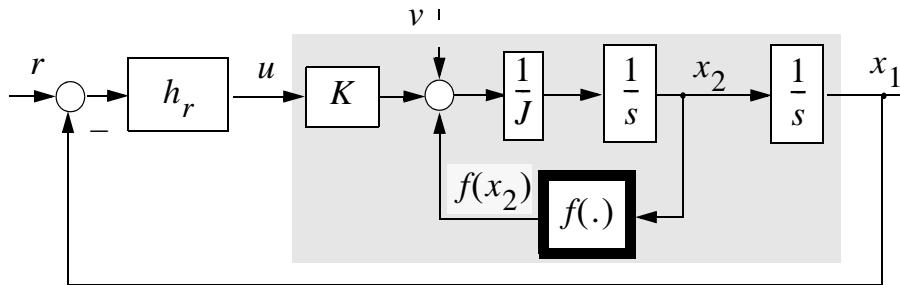
a) (6 %) Finn en linearisert modell $\Delta\dot{x} = A\Delta x + b\Delta u$ rundt et arbeidspunkt \underline{x}^P, u^P .

b) (6 %) Finn egenverdiene til den lineariserte modell. Kommentér stabiliteten for lave dreiehastigheter. Hvordan er stabiliteten ved *store* dreiehastigheter?

Et blokkdiagram for

modellen (2.1)
(skravert felt), nå med
regulering, er vist i
figur 2.1:

figur 2.1 Skip
med regulering



Her er $f(x_2) = \beta x_2 - \gamma x_2^3$. Vi betrakter små avvik fra en kursvinkel-referanse $r = 0$, og forutsetter lav dreiehastighet, $x_2 \approx 0$. Sløyftransferfunksjonen h_0 for den lineariserte skipsmodell blir

$$h_0(s) = h_r(s)h_u(s) = h_r(s) \cdot \frac{K}{\beta} \frac{1}{s(-1+Ts)}, \text{ der } T = \frac{J}{\beta} \quad (2.2)$$

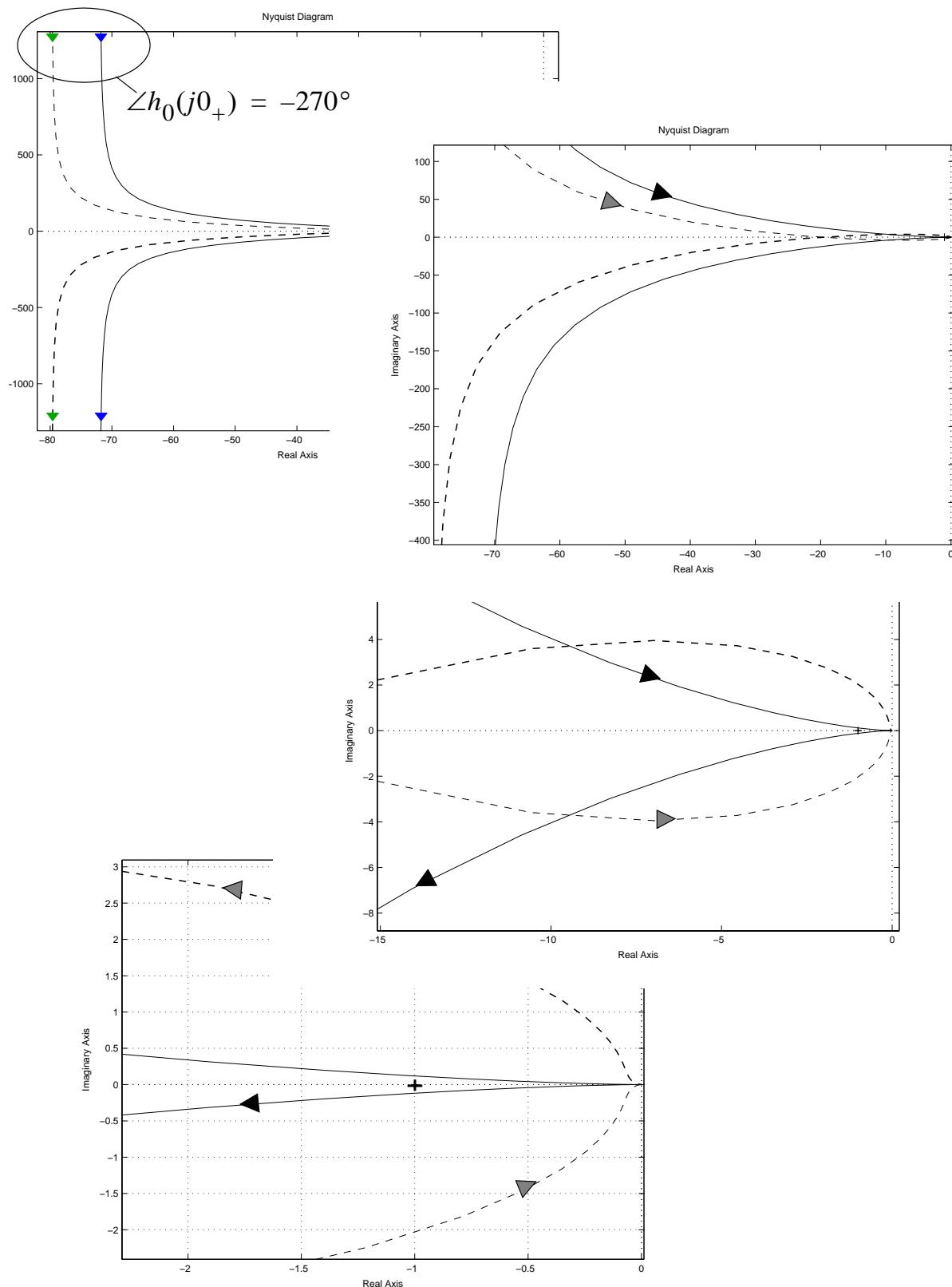
c) (5 %) Nyquist(polar)-diagrammet for h_0 for et gitt sett med systemparametre er vist i figur 2.2 på neste side, i fire forskjellige skalaer: Heltrukken linje er h_0 med P-regulator. Hva kan du si om systemets stabilitet med P-regulator? Begrunn svaret ut fra diagrammet!

d) (7 %) Det stipla Nyquist-diagrammet er h_0 med en annen regulator. Er systemet stabilt med denne regulatoren? Begrunn svaret! Er denne regulatoren en PI- eller en begrenset PD-regulator? Begrunnet svar! (Tips: Se formelsamling med regulatorer. Du kan så se av Nyquist-diagrammet hvilken det må være.)

(Tips til punktene c) og d): Den uendelig store halvsirkelen som utgjør en del av begge de to Nyquistkurvene går for dette systemet inn i venstre halvplan, ikke høyre).

e) (7 %) Det kommer nå inn en forstyrrelse v som vist med stipla linje i figur 2.1. v er et enhetssprang. Finn det stasjonære avvik med regulatoren du valgte i d), ved hjelp av sluttverditeorem!

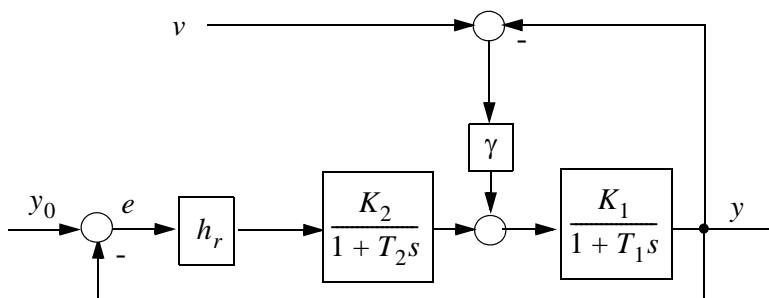
(NB: Om du valgte feil i d), vil du likevel få kreditert rett svar på dette spørsmålet.)



figur 2.2 Polardiagram for h_0 med to forskjellige regulatorer, i fire forskjellige skalaer

Oppgave 3 (9 %)

Strukturen i figur 3.1 er et reguleringssystem for oppvarming i en bygning.



Fag nr.: SIE3005 og 43021
Dato: 16. mai 2001
Student nr.:
Sidenr.:

figur 3.1

Bygningens dynamikk har tidskonstant T_1 , mens ovnene har tidskonstant T_2 . Innetemperatur er y , utetemperatur er v , som måles og skal brukes i en foroverkopling. Varmeovergangstallet mellom bygning og omgivelser er γ .

- a) (5 %) Tegn inn en foroverkopling fra forstyrrelsen i blokkdiagrammet. Du kan tegne på dette arket og levere det, hvis du foretrekker det.
Finn den ideelle foroverkoppling $h_{fi}(s)$.
- b) (4 %) Finn med utgangspunkt i $h_{fi}(s)$ den statiske foroverkoppling K_f . Hva oppnår du med den?

Oppgave 4 (24 %)

Gitt en prosess med PI-regulator, slik at

$$h_0 = h_r h_u = K_p \frac{1 + T_i s}{T_i s} \cdot K \frac{1 - T_2 s}{(1 + T_1 s)(1 + T_3 s)}, \text{ der } K = 2, T_1 = 5, T_2 = 1, T_3 = 0.1 \quad (4.1)$$

Vi velger $T_i = 10$ og tegner Bode-diagram med $K_p = 1$. Se figur 4.1.

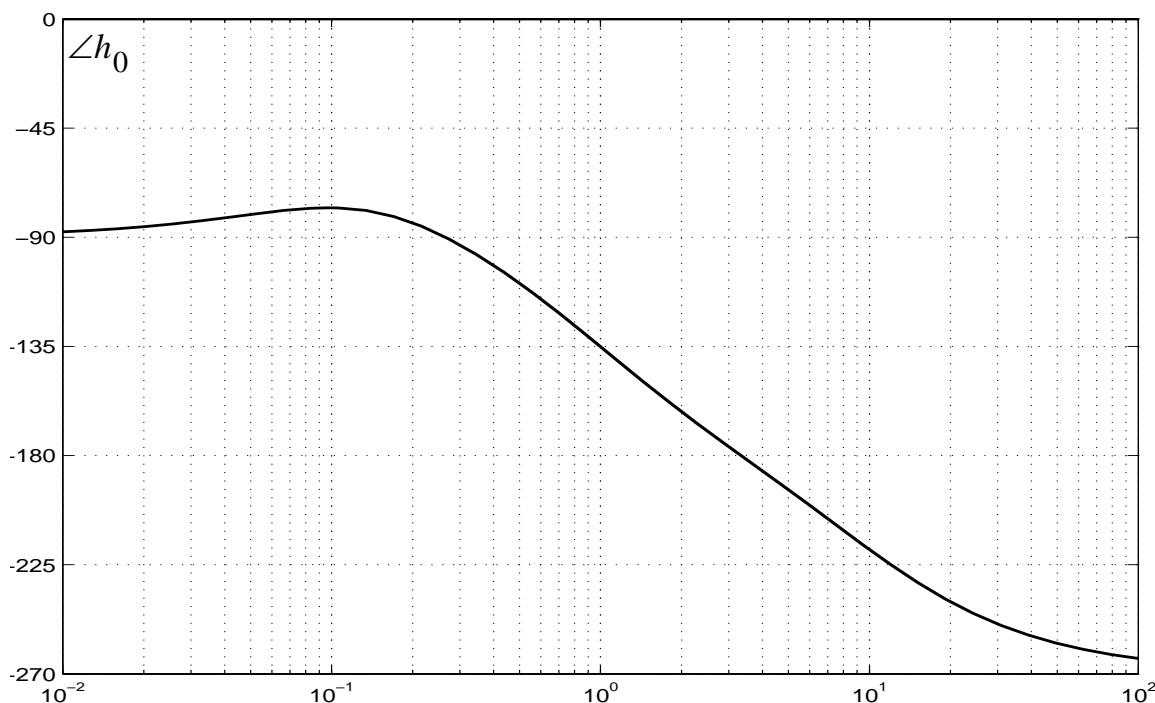
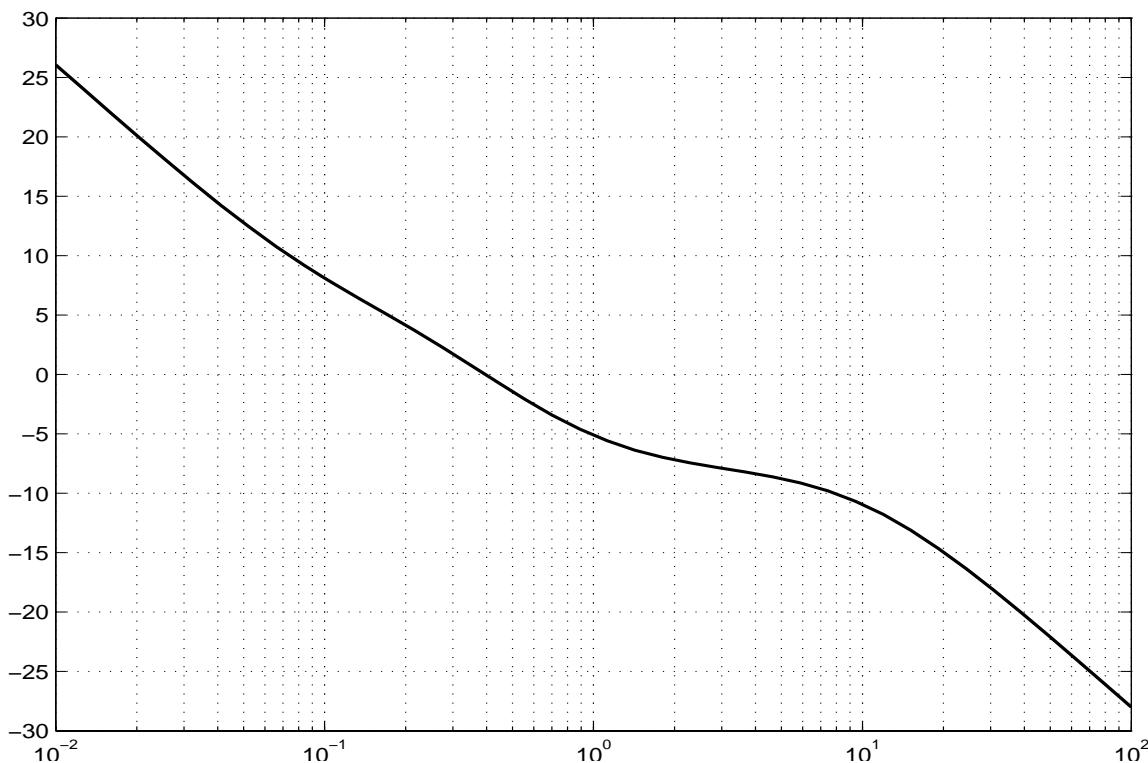
- a) (9 %) Tegn asymptotene for $|h_0|$ og $\angle h_0$ i figur 4.1, og levér den påtegnede figur som en del av besvarelsen. Det skal framgå hvordan du finner asymptotene, det er ikke nok å "tilpasser dem" til de gitte kurver. Spesielt må du angi hvordan du fastla 0-dB-linja.
- b) (6 %) Finn fasemargin ψ og forsterkningsmargin ΔK for de valgte verdier av T_i og K_p . Ut fra resultatet: Er K_p passe stor? Og hva med valget som ble gjort av T_i : Bør T_i justeres?
- c) (4 %) Tegn inn asymptoter for $|N(j\omega)|$ og $|M(j\omega)|$ i figur 4.1. (I den grad noen linjer kommer oppå andre, bruk farger, eller stiplet linje, eller legg ny linje litt på sida av den allerede inntegnede linja.)
- d) (5 %) PI-regulatoren skal nå byttes ut med en *diskret* PI-regulator, fortsatt med de gitte verdier på T_i og K_p . Dette svarer tilnærmet til å introdusere en tidsforsinkelse i reguleringssløyfa lik $0.5T$, der T er tastetida. Du velger $T = 0.1$. Hva blir endringa i fasemarginen?

Fag nr.: SIE3005 og 43021

Dato: 16. mai 2001

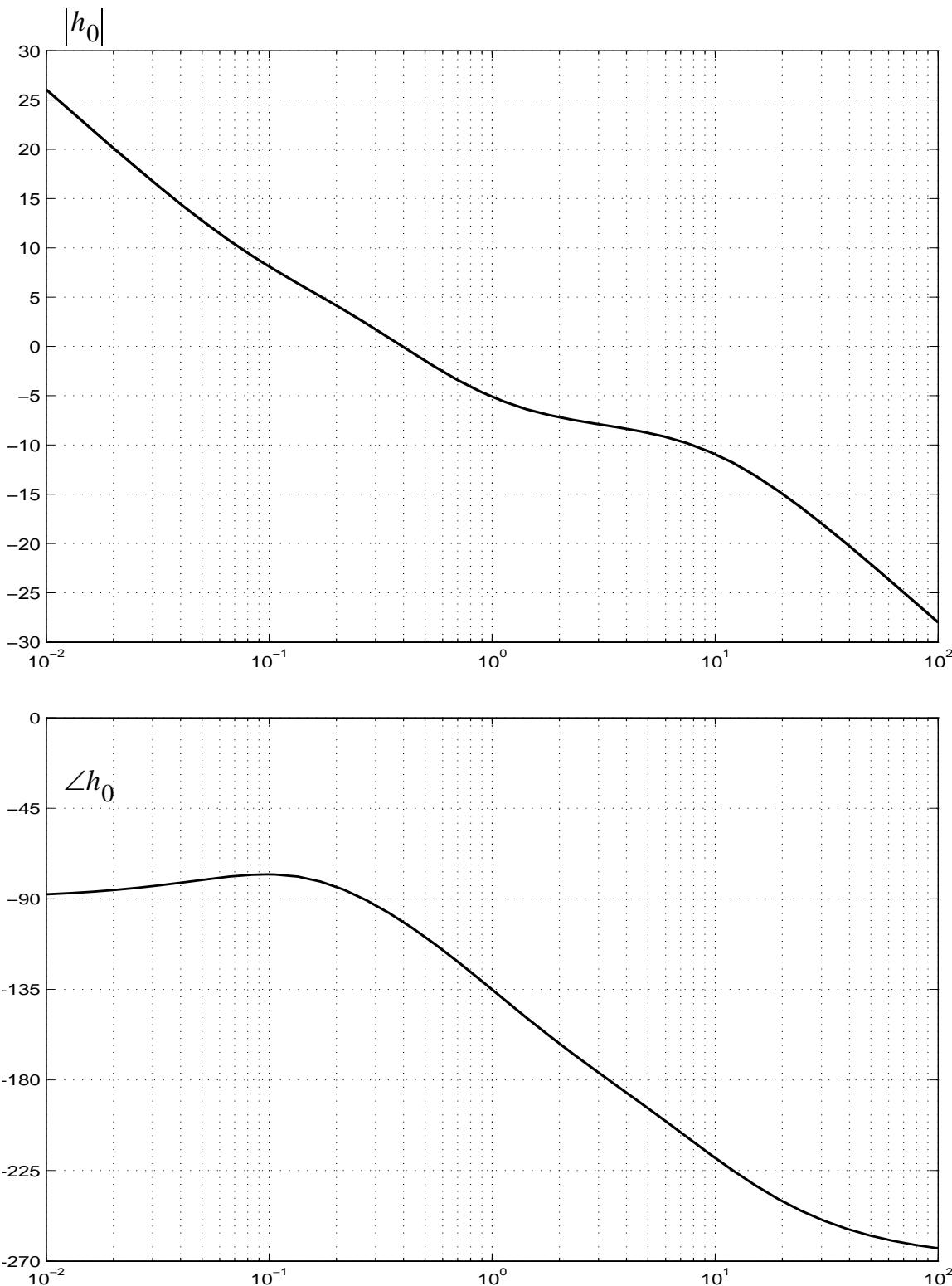
Student nr.:

Sidenr.:

 $|h_0|$ 

figur 4.1

Fag nr.: SIE3005 og 43021
Dato: 16. mai 2001
Student nr.:
Sidenr.:



figur 4.2 (samme som 4.1, hvis du trenger et ekstra ark)

Formelsamling

(3 sider, noe av dette trenger du kanskje...)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sf(s) \quad (\text{V.1})$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sf(s) \quad (\text{V.2})$$

$$\mathcal{L} [\dot{f}(t)] = sf(s) - f(t)|_{t=0} \quad , \quad \mathcal{L} [\ddot{f}(t)] = s^2 f(s) - sf(t)|_{t=0} - \dot{f}(t)|_{t=0} \quad (\text{V.3})$$

$$f(t) = \sum_{a_i} \frac{1}{(m-1)!} \left[\frac{\partial^{m-1}}{\partial s^{m-1}} \{(s-a_i)^m f(s) e^{st}\} \right]_{s=a_i} \quad (\text{V.4})$$

$$|\lambda I - A| = 0 \quad (\text{V.5})$$

$$\text{Rettlinja bevegelse: } f = ma \quad \text{Rotasjon: } d = J\dot{\omega} \quad (\text{V.6})$$

$$\Delta \dot{x} = \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x^p, u^p} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial u} \Big|_{x^p, u^p} \Delta u, \quad A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} \quad (\text{V.7})$$

Gitt en åpen prosess $h_0(s)$ med N_p poler i høyre halvplan. For at det lukkede (= tilbakekoplede) system skal bli stabilt, må vektoren $1 + h_0(j\omega)$ få en vinkelendring lik $2\pi N_p$ (dvs. *mot urviseren*) når ω går fra $-\infty$ til ∞ . (V.8)

$$\text{PI-regulator: } h_r = K_p \frac{1 + T_i s}{T_i s} \quad (\text{V.9})$$

$$\text{begrenset PD-regulator: } h_r = K_p \frac{1 + T_d s}{1 + \alpha T_d s}, \quad 0 < \alpha < 1 \quad (\text{V.10})$$

Lösning eksamen 1 SIE 3005/43021 regulerings teknikk
 16/5 - 2001, T.A.

1a) Setter $x_1 = p$ og $x_2 = m_s$. Vi får da
 blokkdiagonalettet:

$$\dot{x}_1 = k_2 [k_1(p_0 - x_1) + x_2 + u]$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{1}{T}x_2 + \frac{K}{T}k_2 [k_1(p_0 - x_1) + x_2 + u]$$

Setter $p_0 = 0$, og får da:

$$A = \begin{bmatrix} -k_1 k_2 & k_2 \\ -\frac{K k_1 k_2}{T} & -\frac{1}{T}(1 - K k_2) \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} k_2 \\ \frac{K}{T} k_2 \end{bmatrix}$$

$$C^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

NB!

$$c) h(s) = \frac{P}{m_e}(s) = \frac{h_1 \cdot \frac{1}{s}}{1 + k_1 h_1 \cdot \frac{1}{s}} = \frac{h_1}{s + k_1 h_1}$$

$$\text{der } h_1 = \frac{k_2}{1 - k_2 \frac{K}{1+Ts}} = \frac{k_2(1+Ts)}{1+Ts - k_2 K}$$

Setter h_1 inn i h :

$$h(s) = \frac{\frac{k_2(1+Ts)}{1+Ts - k_2 K}}{s + \frac{k_1 k_2 (1+Ts)}{1+Ts - k_2 K}} = \frac{k_2(1+Ts)}{s(1+Ts - k_2 K) + k_1 k_2 + k_1 k_2 Ts} = \frac{k_2(1+Ts)}{Ts^2 + (1+k_1 k_2 T - k_2 K)s + k_1 k_2}$$

b) Alternativt - ø bruker tilstandsrommodellen: Vi har

$$h(s) = C^T (sI - A)^{-1} b$$

$$\text{Søker først } (sI - A)^{-1} = \frac{\text{adj}(sI - A)}{|sI - A|}$$

$$\begin{aligned}
 |sI - A| &= \begin{vmatrix} s+k_1k_2 & -k_2 \\ \frac{k_1K}{T} & s + \frac{1}{T}(1-Kk_2) \end{vmatrix} \\
 &= \frac{1}{(s+k_1k_2)(s + \frac{1}{T}(1-Kk_2)) + \frac{k_1K}{T}k_2^2} \begin{bmatrix} s + \frac{1}{T}(1-Kk_2) & k_2 \\ -\frac{K}{T}k_1k_2 & s+k_1k_2 \end{bmatrix} \\
 &= \frac{1}{s^2 + (k_1k_2 + \frac{1}{T}(1-Kk_2))s + \frac{k_1k_2}{T}} \begin{bmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{bmatrix} = \frac{1}{q(s)} \cdot \begin{bmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{bmatrix} \\
 \Rightarrow h(s) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \dots & \dots \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{q(s)} = \frac{1}{q(s)} \cdot \begin{bmatrix} s + \frac{1}{T}(1-Kk_2) & k_2 \\ \dots & \dots \end{bmatrix} \\
 &= \frac{k_2s + \frac{1}{T}(1-Kk_2)k_2 + \frac{K}{T}k_2^2}{q(s)} = \frac{k_2(s + \frac{1}{T})}{s^2 + (k_1k_2 + \frac{1}{T}(1-Kk_2))s + \frac{k_1k_2}{T}}
 \end{aligned}$$

Det samme med $h(s)$ funnet fra bløkhdiagram!

d)

$$\begin{aligned}
 h(s) &= \frac{k_2}{T} \frac{1+Ts}{s^2 + \frac{1+k_1k_2T-k_2K}{T} + \frac{k_1k_2}{T}} = \frac{k_2}{T} \frac{1+Ts}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \Rightarrow \\
 \omega_n &= \sqrt{\frac{k_1k_2}{T}}, \quad \zeta = \frac{1+k_1k_2T-k_2K}{2\sqrt{k_1k_2T}}
 \end{aligned}$$

Når K er stor, dominerer spesulativt oppførsl:

Aktørene følger leverandør, og den positive tilbakekoplingsløypen motvirkes ikke tilstrekkelig av den negative og stabilisende tilbakeløypen som skyldes realøkonomisk motivert handel.

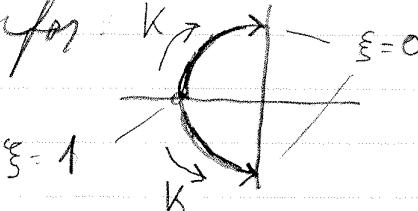
e)

Polene er kompleks konjugerte og systemet er stabilt for $0 < \xi < 1$. Vi definerer K_2 slik at $K = K_2$ gir $\xi = 0$, og K_1 slik at $K = K_1$ gir $\xi = 1$.

$$\text{Dette gir } 1 + k_1 k_2 T - k_2 K_2 = 0 \Rightarrow K_2 = \frac{1 + k_1 k_2 T}{k_2}$$

$$\text{og } \frac{1 + k_1 k_2 T - k_2 K_1}{2\sqrt{k_1 k_2 T}} = 1 \Rightarrow K_1 = \frac{1}{k_2} (1 + k_1 k_2 T - 2\sqrt{k_1 k_2 T})$$

Siden ω_0 fra (1.3) er uavhengig av K , må de komplekskonjugerte polene ligge i liklant avstand fra origo. Røttene blir derfor K - $\xi = 0$
en sirkelbue:



f) Dette er responsen til et system av typen $\frac{1}{1 + T_x s}$. Av figur 1.1

ser vi at dette bare kan ramme for $K = 0$, dvs. ingen spesifikativ oppførelse. Vi ser også at da er

$$T_x = \frac{1}{k_1 k_2}$$

2a)

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_p = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{3}(\beta - 3\gamma(x_2^p)^2) \end{bmatrix} \quad \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_p = \begin{bmatrix} 0 \\ \kappa_f \end{bmatrix}$$

Vi ser at det er bare x_2^p som inngår. Det er følgelig resten av modellen er lineær.

b)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{3}(\beta - 3\gamma(x_2^p)^2) \end{bmatrix}, \quad |xI - A| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 0 & \lambda - \frac{1}{3}(\beta - 3\gamma(x_2^p)^2) \end{vmatrix} \Rightarrow \lambda_{1,2} = \begin{cases} 0 \\ \frac{1}{3}(\beta - 3\gamma(x_2^p)^2) \end{cases}$$

Kursdynamikken er ustabil for x_2^p liten, da bln $\lambda_2 = \beta/3$

For x_2^p stor, derimot, dominerer leddet

$-3\gamma(x_2^p)^2$. Derned bln $\lambda_2 = \frac{1}{3}(\beta - 3\gamma(x_2^p)^2)$ negativ og skjapt bln kors-stabilt.

c) Vi har $N_p = 1 \Leftrightarrow$ én pol i h.b.-p. for det åpne system. (V.8) gir os da kvaat om

2π vendringar (i positiv dreiereking). Siden den vennligst store børsinneten går inn i v.b.-p., ser vi at den helstrukne kurve for θ alltid dreiser seg -2π om $(-1, 0) \Rightarrow$ ustabil for alle κ_p .

d) Den skjipable lôlka til høyre gir oss én vendring rundt $(-1, 0) \Rightarrow$ nêr et systemet stabilt.

Av figuren ser vi at $h(j0) = -270^\circ$. Av (2.2) ser vi at $h_u(j0) = -270^\circ$. Derned kan ikke h gi noe fasebidrag til h_u for $\omega = 0$. Altså kan ikke h , innehâlde noen ren integrasjon. Da gjørslig en begr. PD-regulator, som ikke gir noe fasebidrag ved $\omega = 0$.

2e) Det er ingen ren integrasjon foran forskyrelsenus aksjonspunkt. For å fjerne slasjonaert avsl. må v en et sprang, må det være minst en integrasjon der. Derved vil en bPD-regulator ikke fjerne slasjonaert avsl.

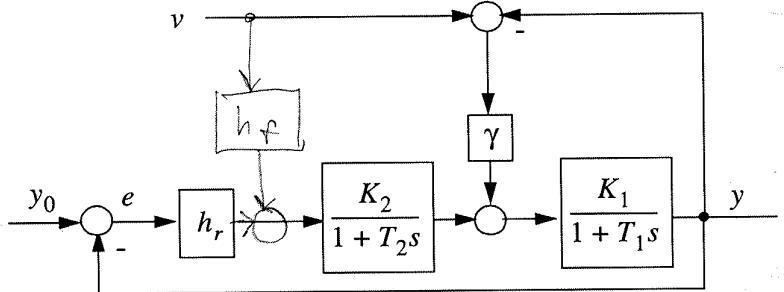
Dette kan bestaves algebraisk v.h.a. subtroddifteoremet:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s e(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{e(s)}{v(s)} v(s)$$

$$= \lim_{s \rightarrow 0} \delta \left(-hv(s)N(s) \right) \cdot \frac{1}{\delta} = \lim_{s \rightarrow 0} -\underbrace{\frac{1}{\beta s(-1+Ts)} \cdot \frac{\beta s(-1+Ts)(1+\alpha Tds)}{\beta s(-1+Ts)(1+\alpha Tds)}}_{h_v} + K_p K (1+Tds)$$

$$= \underline{\underline{-\frac{1}{K_p K}}} \Rightarrow \text{stasjonert fjernes ikke helt}$$

Oppgave 3 a)



Vi kaller $h_f i \cdot \frac{K_2}{1+T_2 s} + \gamma = 0 \Rightarrow h_f i(s) = -\frac{\gamma}{K_2} (1+T_2 s)$

b) $K_f = h_f i(s) \Big|_{s=0} = -\frac{\gamma}{K_2}$

Den fjerner slasjonaert avsl. når $v(t)$ er konstant (et sprang)

Oppgave 4 a)

Se neste side

- b) $\Delta K \approx 8 \text{ dB}$ og $\varphi \approx 79^\circ$, se neste side. Dette er litt romlige marginer, K_p kunne vært litt litt, f.eks. med 2 dB.

c) Se neste side

- d) $|h_o|$ blir uforandret $\Rightarrow \omega_c$ forbli den samme. $\varphi = \angle h_o(j\omega_c) + 180^\circ$

Endringa i freemargin blir da lik endringa i $\angle h_o(j\omega_c)$. Vi har

$$\tilde{h}_o(j\omega_c) = h_o(j\omega_c) + L e^{-j\omega_c \frac{T}{2}}$$

$$L e^{-j\omega_c \frac{T}{2}} = -\omega_c \frac{T}{2} = -0.4 \cdot 0.05 = -0.02 \text{ [rad]}$$

\nearrow
fra Bode-diagram
 $= -0.02 \frac{180}{\pi} = -1.15^\circ$
 \searrow

neste side

- b) T_i kunne vært mindre. Dette ville økt høyfrekvensen uten at freemarginen hadde blitt uakseptabelt lav.

[den umåttelig store]

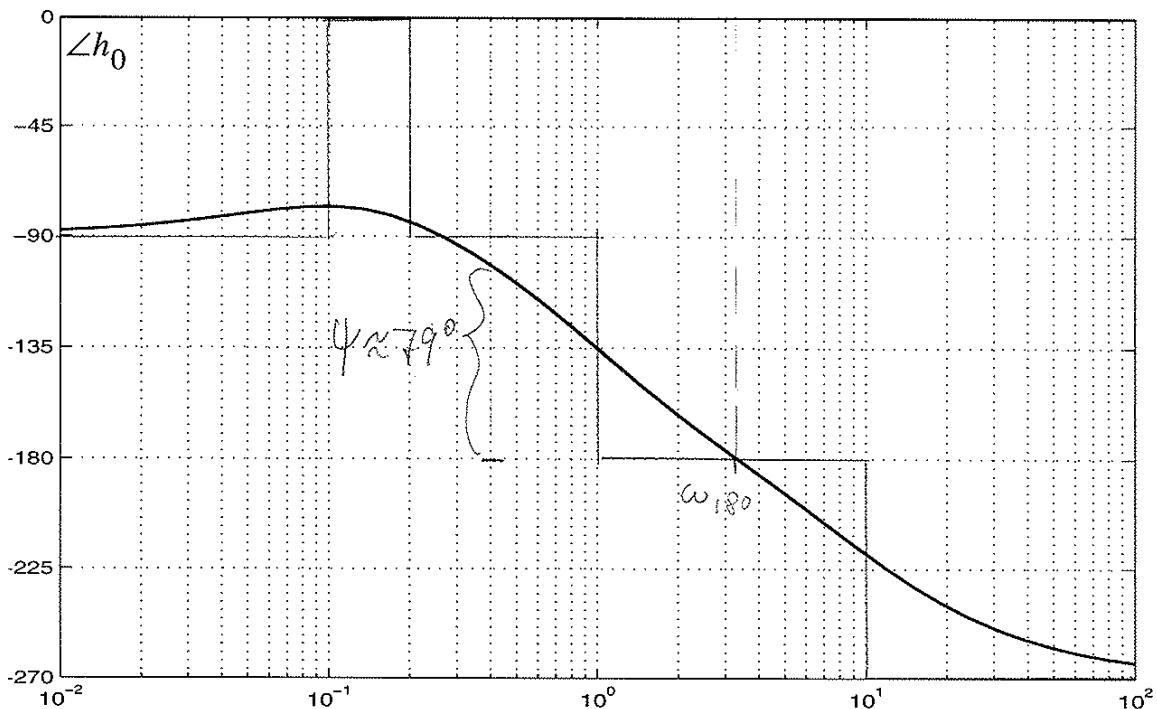
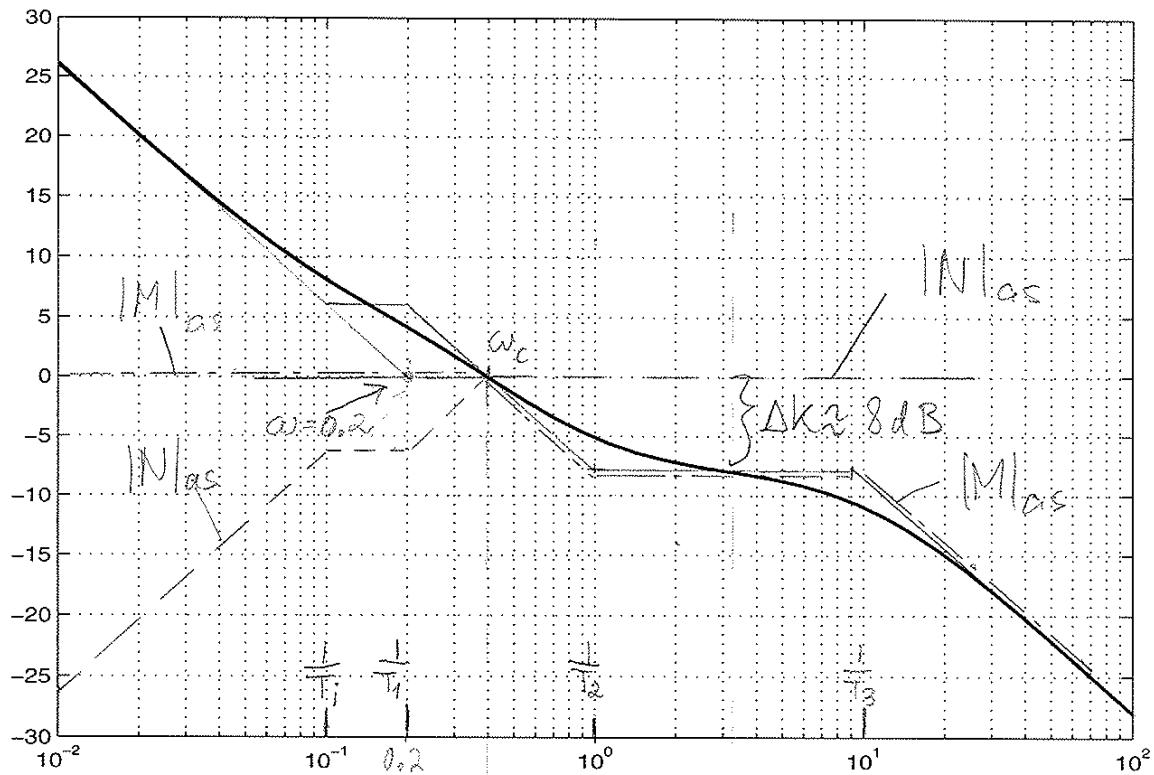
- 7 -

Fag nr.: SIE3005 og 43021
Dato: 16. mai 2001
Student nr.:
Sidenr.:

$$|h_0(j\omega)|_{as, \omega \ll 1} = \frac{2}{10\omega}$$

$$\Rightarrow \omega_{c, as, \omega \ll 1} = 0.2$$

$|h_0|$



figur 4.1



Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet (NTNU)

Faglig kontakt under eksamen: Trond Andresen, tlf. 7359 4358, mobil 9189 7045
T.A. går to veiledningsrunder, ca. kl. 1015 - 1100, og ca. kl. 1315 - 1345

Eksamens i SIE3005 reguleringssteknikk

mandag 29. juli 2002

Tid: 0900 - 1500

NB: Midtsemesterprøven teller ikke med – så dette er en “100%-eksamen”!

Sensur vil foreligge seinest 9. august.

Hjelpemiddelkombinasjon B1: Kalkulator med tomt minne tillatt. Ingen trykte eller håndskrevne hjelpemidler tillatt, unntatt Rottmanns formelsamling.

Prosentallene angir den relative vekt oppgavene tillegges ved bedømmelsen.

Flere spørsmål kan besvares meget enkelt ved å bruke **formelsamlinga** bakerst i oppgavesettet. Se kjapt gjennom den før du begynner – sjekk den alltid før du gir opp! Men du må forklare hvordan du bruker noe, når du henter det fra formelsamlinga. Noen spørsmål skal besvares ved å måle ut verdier på figurer i oppgavesettet – i slike tilfeller godtas en viss ”måleunøyaktighet”! Der hvor rubrikk for studentnr. etc. er angitt på sider i oppgavesettet, kan eller skal man tegne i figurer og levere det påtegnede arket som en del av besvarelsen.

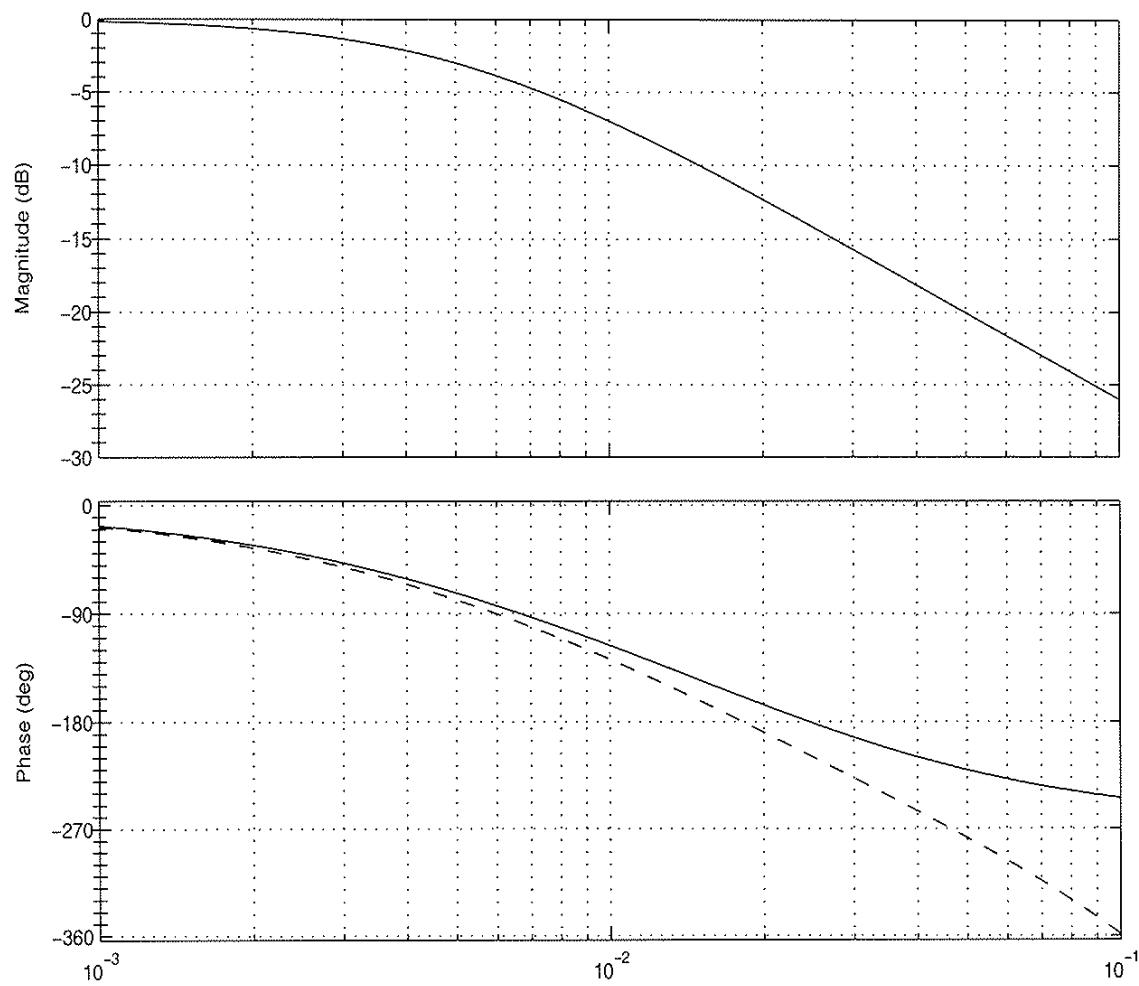
STUDENTS MAY ANSWER THIS EXAM IN ENGLISH IF THAT IS PREFERRED.

Oppgave 1 (45 %)

En prosess har transferfunksjonen
$$h(s) = \frac{1 - 50s}{10000s^2 + 250s + 1} \quad (1.1)$$

Bodediagram er vist i figur 1.1. Se bort fra den stiplete grafen helt til du kommer til deloppgave h).

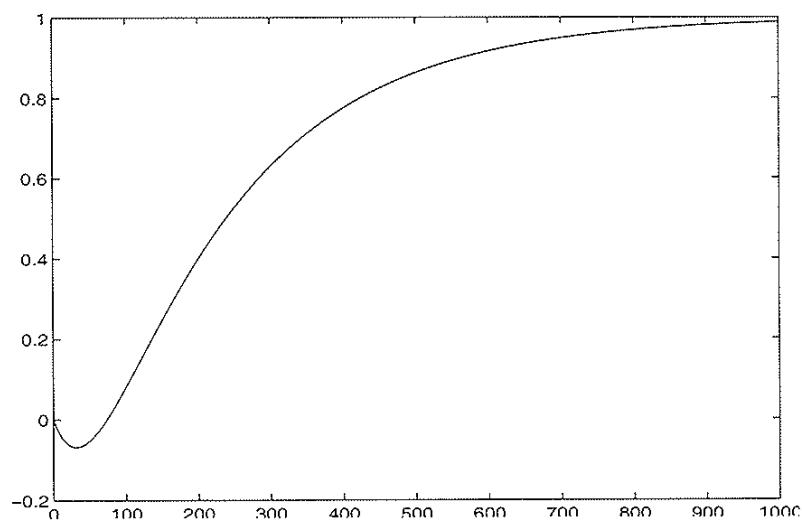
- (10 %) Finn, og tegn inn asymptoter for amplitude- og faseforløp i figur 1.1. Det skal framgå tydelig ved påtegning av opplysninger på arket eller i øvrig tekst hvordan du fastlegger asymptotene, det er ikke nok å tegne inn noen linjer ”som passer bra” til de oppgitte forløp. Er prosessen av minimum-fase type? Begrunn svaret!
- (5 %) Figur 1.2 viser enhetssprangresponsen til prosessen.
Forklar kort ut fra transferfunksjonen tidsforløpet like etter start, og tidsforløpet for stor t . Beregn, og tegn inn, tangenten til tidsforløpet i $t = 0$. (Tips: Begynnelsestverditeoremet)
- (4 %) Anta at prosessen skal reguleres med P-regulator (seriekompensasjon). I utgangspunktet velger man $K_p = 2$ (= 6 dB). Tegn inn 0-dB-linja for $h_0(s) = K_p h(s)$ i figur 1.1.
Finn så forsterkningsmargin ΔK og fasemargin ψ for $K_p = 2$.
Ta arket med figurene 1.1 og 1.2 ut av oppgavesettet og legg ved besvarelsen.
- (4 %) Anta at du øker forsterkningen til systemet til akkurat på stabilitetsgrensa.
Hva blir frekvensen (rad/sek) på de stående svingningene vi da får? (Tips: Kan finnes v.h.a. Bode-diagrammet). Finn det lukkede systems poler ved hjelp av denne frekvensen.



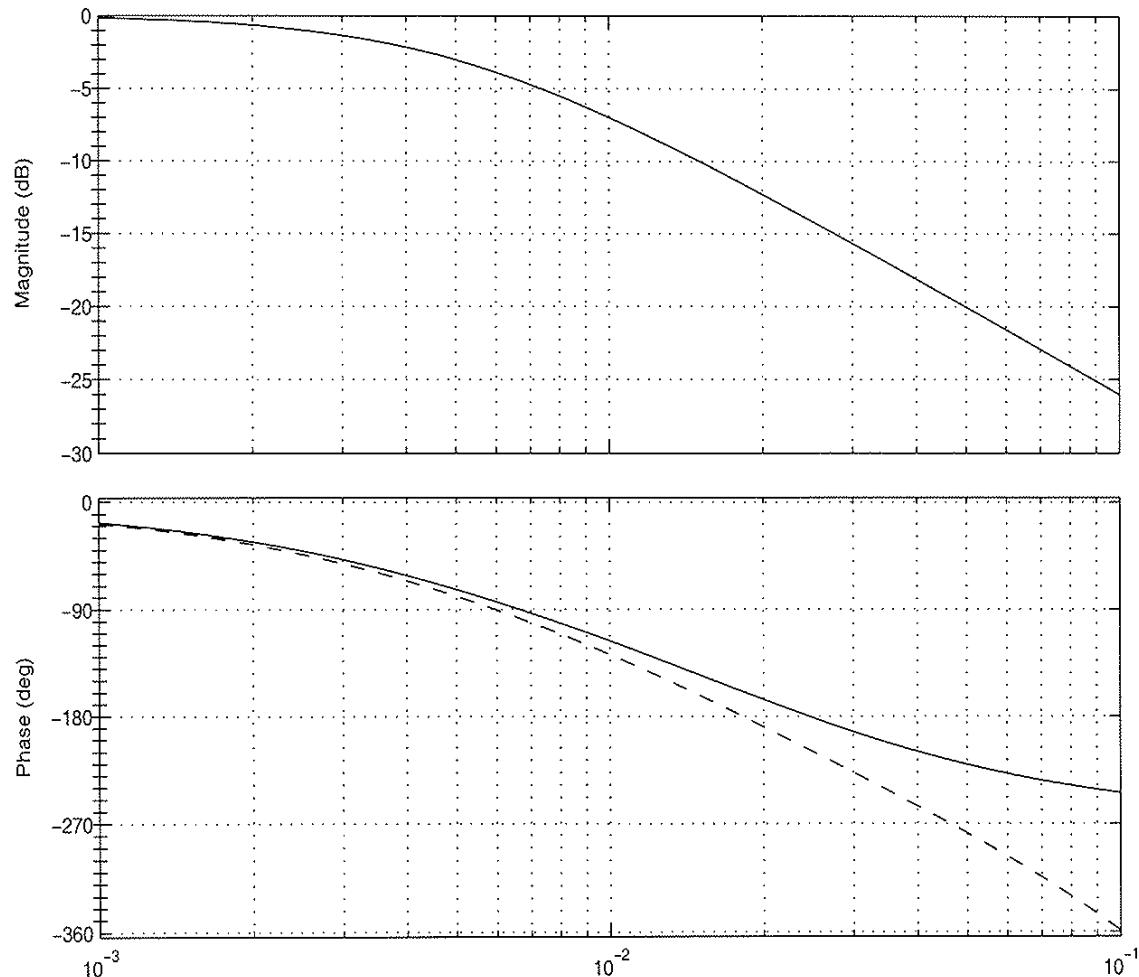
figur 1.1

Fag nr.: SIE3005
Dato: 29. juli 2002
Student nr.:
Side nr.:

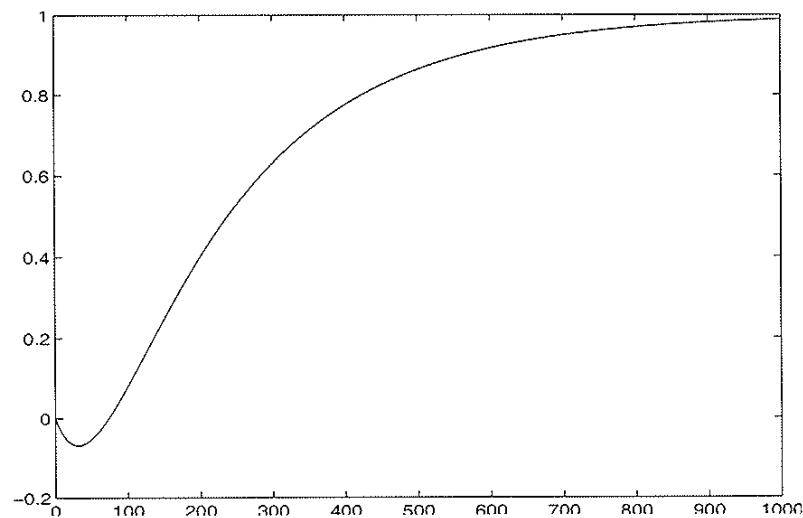
figur 1.2



(Ekstra ark hvis du trenger det:)

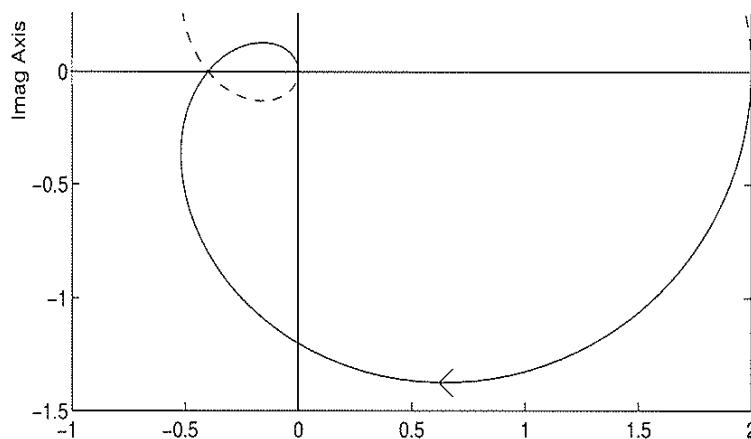


Fag nr.: STE3005
Dato: 29.juli 2002
Student nr.:
Side nr.:



Fag nr.: STE3005
 Dato: 29. juli 2002
 Student nr.:
 Side nr.:

figur 1.3



- e) (3 %) Figur 1.3 viser Nyquistkurven (polardiagrammet) for prosessen med $K_p = 2$. Tegn i figuren slik at det framgår hvordan du finner forsterknings- og fasemargin v.h.a. dette diagrammet. Du trenger ikke lese av ΔK og ψ , men du kan hvis du vil, sjekke resultatene mot de du fant under punkt (c).

Ta arket med figur 1.3 ut av oppgavesettet og legg ved besvarelsen.

- f) (5 %) Fra nå av skal vi i stedet anvende en PI-regulator på prosessen. Bruk Ziegler-Nichols' regler (se tabell 1.1 under) til å finne K_p og T_i .

(Tips: T_k i tabellen er lengden av en svingeperiode i den stående svingningen.)

Regulator	K_p	T_i	T_d
P	$0.5K_{pk}$	∞	0
PI	$0.45K_{pk}$	$T_k/1.2$	0
PID	$0.6K_{pk}$	$T_k/2$	$T_k/8$

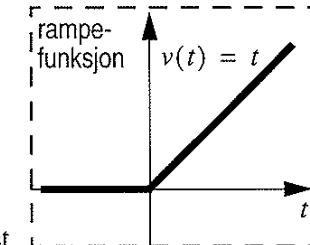
Tabell 1.1

- g) (7 %) En forstyrrelse $v(t)$ som er en rampefunksjon, påvirker vårt system, som vist i figur 1.4. Referansen antas konstant = 0.

Vis at forstyrrelsen fører til et stasjonært avvik

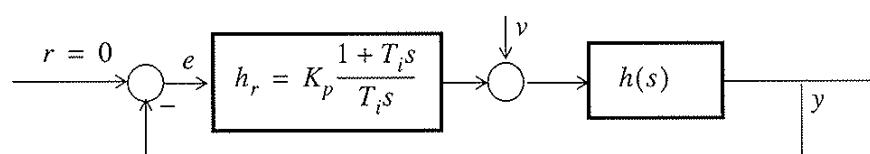
$$e(t = \infty) = -T_i/K_p$$

(Tips: En rampefunksjon er integralet av et enhetssprang).



Hva blir det stasjonære avviket hvis forstyrrelsen i stedet er et enhetssprang? (Dette kan besvares kort og verbalt).

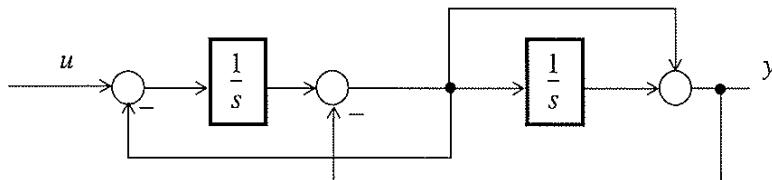
figur 1.4



- h) (4 %) Betrakt fra nå av den stipede grafen i bodediagrammet i figur 1.1. Den uttrykker at transferfunksjonen $h(s)$ (likning (1.1)) nå er modifisert med en tidsforsinkelse i serie med den. Finn denne tidsforsinkelsen ved hjelp av Bodediagrammet (Tips: Den er et rundt tall!).
- i) (3 %) Denne tidsforsinkelsen inngår ikke i den fysiske prosessen, vi har bare forutsatt den som et hjelpe middel fordi regulatoren skal realiseres som en *diskret* regulator. Hva er da tastetida ("samplingstida") T ? Er den valgt passe stor? Begrunn svaret!

Oppgave 2 (7 %)

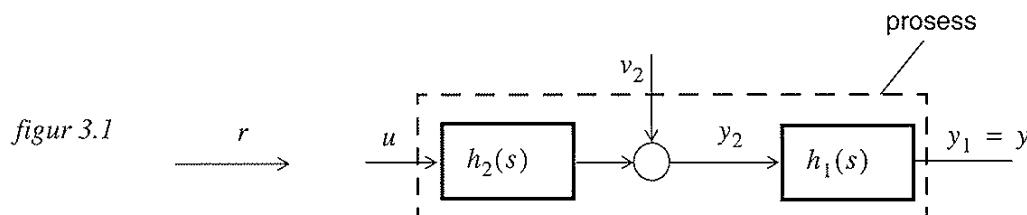
Du skal redusere blokkdiagrammet i figur 2.1, det vil si å finne transferfunksjonen fra u til y .



figur 2.1

Oppgave 3 (12 %)

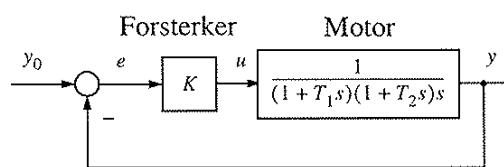
En prosess kan deles opp i to delsystemer i serie slik som vist i figur 3.1. En forstyrrelse angriper ved inngangen til det høyre delsystemet. Man velger kompensasjon ved intern tilbakekopling (kaskadereguleringssystem) for prosessen. Referansen som y skal følge, er r .



- a) (6 %) Kall regulatorene for h_{r1} og h_{r2} , og tegn blokkdiagram for prosessen med kompensasjon ved intern tilbakekopling.
- b) (6 %) Forklar (verbalt er tilstrekkelig) hvorfor reguleringsegenskapene - både når det gjelder å undertrykke forstyrrelsen og når det gjelder å følge referansen - kan gjøres bedre med bruk av kompensasjon ved intern tilbakekopling, sammenliknet med bruk av vanlig seriekompensasjon.

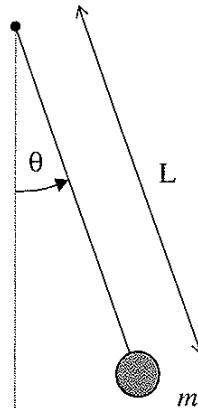
Oppgave 4 (9 %)

Figuren til høyre viser et følgereguleringsssystem (for vinkelposisjon) med en likestrømsmotor og proporsjonalregulator K . Finn, ved hjelp av Rouths kriterium, for hvilke verdier av K det lukkede system er stabilt!



Oppgave 5 (27 %)

Gitt en pendel bestående av ei stang med lengde L og en masse m (se figur 5.1). Stangas masse kan ignoreres. Pendelen er opphengt i et punkt med friksjon, som gir et bremsende dreiemoment som er proporsjonalt med pendelens vinkelhastighet $\dot{\theta}$. Dempekonstanten er D [Nm / (rad/s)].



figur 5.1

- a) (6 %) Vis at ei differensialligning for vinkelposisjonen θ er

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{L} \sin \theta - \frac{D}{mL^2} \dot{\theta} \quad (5.1)$$

Ligninga (5.1) er ulineær. Hvorfor?

- b) (4 %) Sett $x_1(t) = \theta(t)$, definér en passende $x_2(t)$, og formulér (5.1) som et sett av to første ordens differensialligninger, på formen (= tilstandsrommodell):

$$\dot{x} = f(x) \quad (5.2)$$

Fra nå av betrakter vi bare små vinkelutslag rundt likevektspunktet $\theta = 0$:

- c) (4 %) Linearisér systemet rundt likevektspunktet, dvs. du skal vise at matrisa A i tilnærminga

$$\Delta \dot{x} = A \Delta x, \text{ blir } A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{L} & -\frac{D}{mL^2} \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

- d) (8 %) Det oppgis at vinkelposisjonen ved $t = 0$ er $\theta_0 = 0$, og at pendelen da har hastigheten v_0 [m/s] langs sirkelbuen. Man kan da bruke dette, pluss Laplacetransformasjon og (5.3) til å finne $\theta(t)$. Det forlanges ikke her at du finner $\theta(t)$, men at du stopper et trinn før dette resultatet, dvs. du skal finne $\theta(s)$.

(Tips: Som et mellomresultat må du finne matrisa $(sI - A)^{-1}$).

- e) (5 %) Finn udempet resonansfrekvens ω_0 og relativ dempningsfaktor ζ for pendelen.

Formelsamling

(4 sider, noe av dette trenger du vel...)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sf(s) \quad (\text{V.1})$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sf(s) \quad (\text{V.2})$$

$$\mathcal{L}[\dot{f}(t)] = sf(s) - f(0) \quad , \quad \mathcal{L}[\ddot{f}(t)] = s^2f(s) - sf(0) - \dot{f}(0) \quad (\text{V.3})$$

$$\text{Residuregning: } f(t) = \sum_{a_i} \frac{1}{(m-1)!} \left[\frac{\partial^{m-1}}{\partial s^{m-1}} \{(s-a_i)^m f(s) e^{st}\} \right]_{s=a_i} \quad (\text{V.4})$$

$$|\lambda I - A| = 0 \quad (\text{V.5})$$

$$\text{Rettlinja bevegelse: } f = ma \quad \text{Rotasjon: } T = J\dot{\omega}, \text{ der } J = mL^2 \quad (\text{V.6})$$

Folding (konvolusjon):

$$y(t) = h(t)*u(t) = \int_0^t h(t-\tau)u(\tau)d\tau, \quad \mathcal{L}[h(t)*u(t)] = h(s)u(s) \quad (\text{V.7})$$

$$\Delta \dot{x} = \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x^p, u^p} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial u} \Big|_{x^p, u^p} \Delta u \quad , \quad A = \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x^p, u^p} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}_{x^p, u^p} \quad (\text{V.8})$$

Linearisering:
 $\Delta \dot{x} = A \Delta x + B \Delta u$

Gitt en åpen prosess $h_0(s)$ med N_p poler i høyre halvplan.Vektoren $1 + h_0(j\omega)$ får en netto vinkeldreining lik

$$\Delta \angle(1 + h_0) = -2\pi(N_n - N_p) \quad \text{når } \omega \text{ går fra } -\infty \text{ til } \infty. \quad (\text{V.9})$$

 N_n blir da antall poler i h.h.p. for det lukkede (tilbakekoplede) system.

Merk: Dreieretning er definert positiv mot urviseren.

Rouths tabell (i tilfellet vist her er n et oddetall):

$$\begin{array}{cccc}
 \alpha_n & \alpha_{n-2} & \dots & \alpha_1 \\
 \alpha_{n-1} & \alpha_{n-3} & \dots & \alpha_0 \\
 \beta_{n-1} & \beta_{n-3} & \dots & \\
 \zeta_{n-1} & \zeta_{n-3} & \dots & \\
 \cdot & & & \\
 \cdot & & & \\
 \cdot & & & \\
 \sigma_{n-1} & \sigma_{n-3} & & \\
 \eta_{n-1} & & & \\
 \omega_{n-1} & & &
 \end{array} \tag{V.10}$$

De nye koeffisientene i talltabellen framkommer etter følgende regler:

$$\beta_{n-1} = \frac{\alpha_n \quad \alpha_{n-2}}{\cancel{\alpha_{n-1}}} = \frac{\alpha_{n-1} \alpha_{n-2} - \alpha_n \alpha_{n-3}}{\alpha_{n-1}}$$

$$\beta_{n-3} = \frac{\alpha_n \quad \alpha_{n-4}}{\cancel{\alpha_{n-1}}} = \frac{\alpha_{n-1} \alpha_{n-4} - \alpha_n \alpha_{n-5}}{\alpha_{n-1}}$$

osv.

OPPGAVE 1

a) Vi må få $h(s)$ på formen

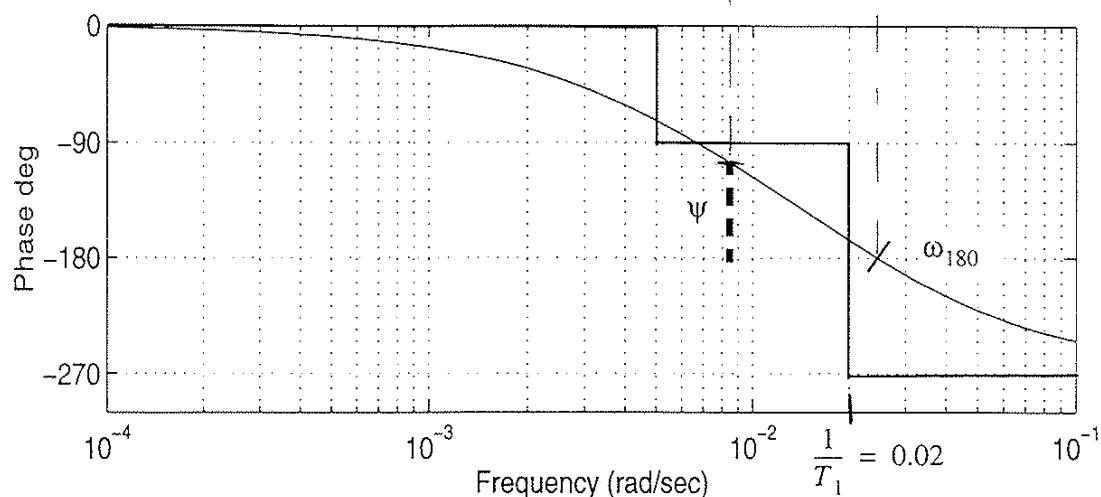
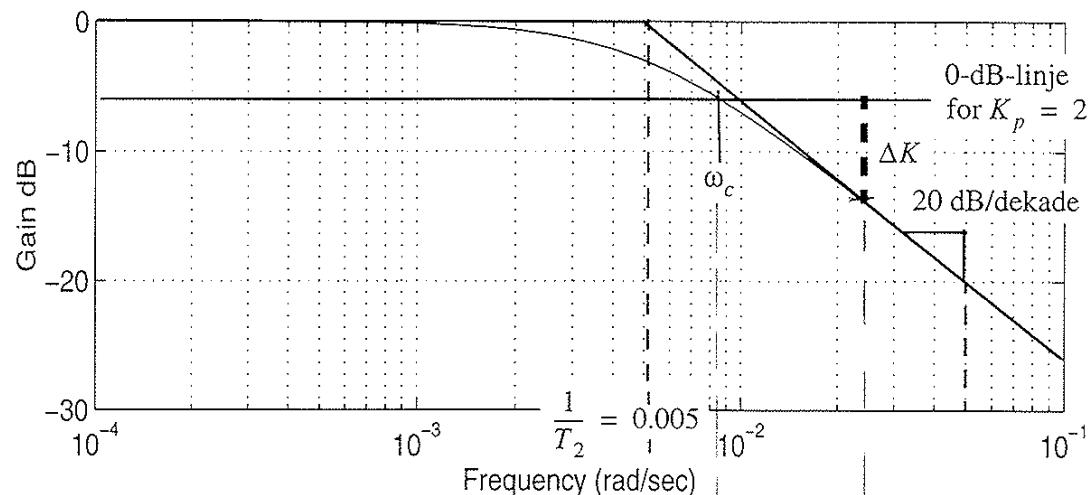
$$h(s) = \frac{(1 - 50s)}{(1 + T_1 s)(1 + T_2 s)} = \frac{(1 - 50s)}{1 + (T_1 + T_2)s + T_1 T_2 s^2} \quad (1)$$

Vi har $T_1 T_2 = 10000$ og $T_1 + T_2 = 250$. Dette gir ligninga

$T_{1,2}^2 - 250T_{1,2} + 10000 = 0 \Rightarrow T_{1,2} = 125 \pm \sqrt{125^2 - 10000} \Rightarrow T_{1,2} = 125 \pm 75$ som gir $T_1 = 50$ og $T_2 = 200$. Dermed har vi transferfunksjonen

$$h(s) = \frac{(1 - 50s)}{(1 + 50s)(1 + 200s)}$$

Merk at $|h(s)| = \left| \frac{1}{1 + 200s} \right|$.



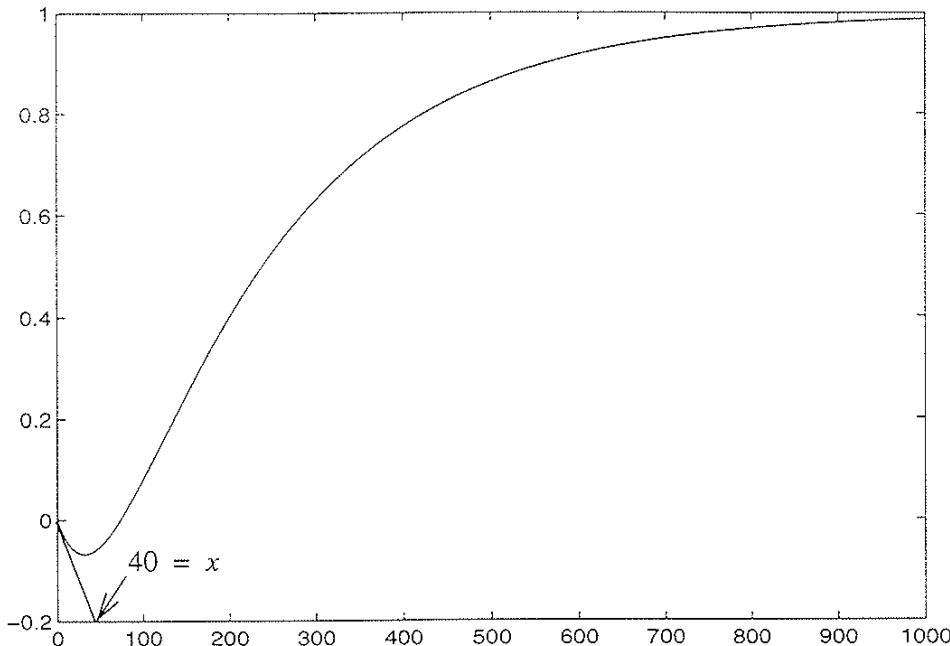
Figur 1: Bodediagram for prosess.

Vi ser i figur 1 at $\angle h_{as}$ knekker $-90^\circ + (-90^\circ)$ ved $\omega = \frac{1}{T_2}$ pga. nullpunktet $-\frac{1}{T_2}$ og polen

$\frac{1}{T_2} \cdot \angle h_{as}$ knekker -90° til ved $\omega = \frac{1}{T_1}$ pga. den andre polen.

Prosessen er ikke-minimum fase pga. det negative nullpunktet (nullpunktet i høyre halvplan).

b)



Figur 2: Enhetssprangresponsen til prosessen

Nullpunktet i høyre halvplan gir et transient forløp som svinger seg ned først. Responsen $\rightarrow 1$ når $t \rightarrow \infty$ fordi statisk forsterkning = 1 ($h(0) = \frac{1}{1}$). Tangenten finnes ved

at en bruker (V.2): $\lim_{t \rightarrow 0} \dot{y}(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} \left(sh(s) \frac{1}{s} \cdot s \right) = \lim_{s \rightarrow \infty} (sh(s)) = \frac{-50}{50 \cdot 200} = -0.005$

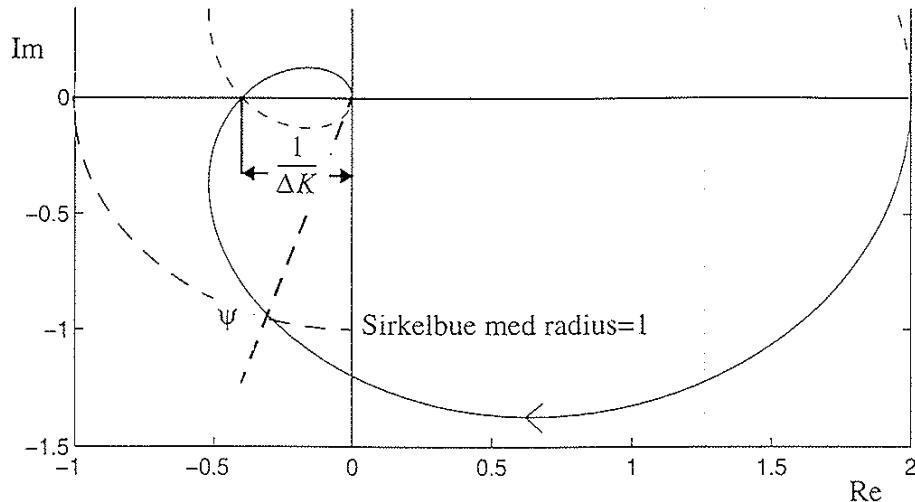
Størrelsen x på figur 2 finnes slik: $-\frac{0.2}{x} = -0.005 \Rightarrow x = 40$.

- c) 0-dB-linja er tegna på inn på figur 1. Vi leser av $\psi = 76^\circ$ og $\Delta K = 7.8$ dB.
- d) På stabilitetsgrensa har vi $\omega_c = \omega_{180}$, dvs. $|h(j\omega_{180})| = 1$ og $\angle h(j\omega_{180}) = -180^\circ$, dvs. at $h(j\omega_{180}) = -1$.

Det lukkede systemet på stabilitetsgrensa er gitt ved: $\frac{h(j\omega_{180})}{1 + h(j\omega_{180})}$.

$1 + h(j\omega_{180}) = 0 \Rightarrow \pm j\omega_{180}$ er poler i det lukkede systemet. Svingefrekvensen blir ω_{180} , avleses som $\omega_{180} \approx 0.022$ rad/s.

e)



Figur 3: Nyquistkurve for prosessen

- f) Vi bruker tabell 1.1, linje 2. Ser at vi trenger K_{pk} og T_k . Fra c) har vi at $K_{pk} = K_p + \Delta K = 6 + 7.8 = 13.8 \text{ dB} = 4.9$. T_k er periodetida for stående svingning: $\omega_{180} = \frac{2\pi}{T_k} \Rightarrow T_k = \frac{2\pi}{\omega_{180}} \approx \frac{6.28}{0.022} = 285$. Tabell 1.1 gir da $K_p = 0.45 \cdot 4.91 = 2.2$ og $T_i = \frac{285}{1.2} = 237.5$.

- g) Vi må finne $\frac{e}{v}(s) = -\frac{h(s)}{1 + h_r(s)h(s)}$. $v(t)$ er en rampefunksjon. Dermed har vi

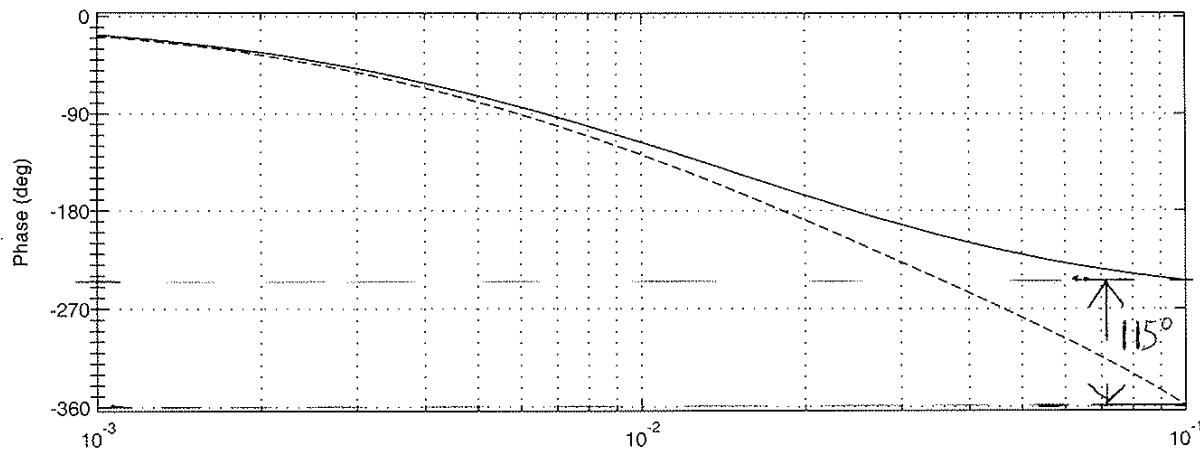
$$L(v(t)) = \frac{1}{s^2}. \text{ Får følgende grenseverdi:}$$

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) &= \lim_{s \rightarrow 0} \left(se(s) \frac{1}{s^2} \right) = \lim_{s \rightarrow 0} \left(\frac{1}{s} \frac{-1}{\frac{1}{h(s)} + h_r(s)} \right) = \lim_{s \rightarrow 0} \left(\frac{1}{s} \frac{-1}{\frac{(...)(...)}{(...)} + K_p \frac{T_i s + 1}{T_i s}} \right) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \left(\frac{1}{s} \frac{-T_i s}{\frac{(...)(...)(T_i s)}{(...)} + K_p (T_i s + 1)} \right) = -\frac{T_i}{K_p} \end{aligned}$$

Hvis $v(t)$ i stedet hadde vært lik $\mu_1(t)$, forsvinner $\frac{1}{s}$ i formelen over, og $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$.

1h

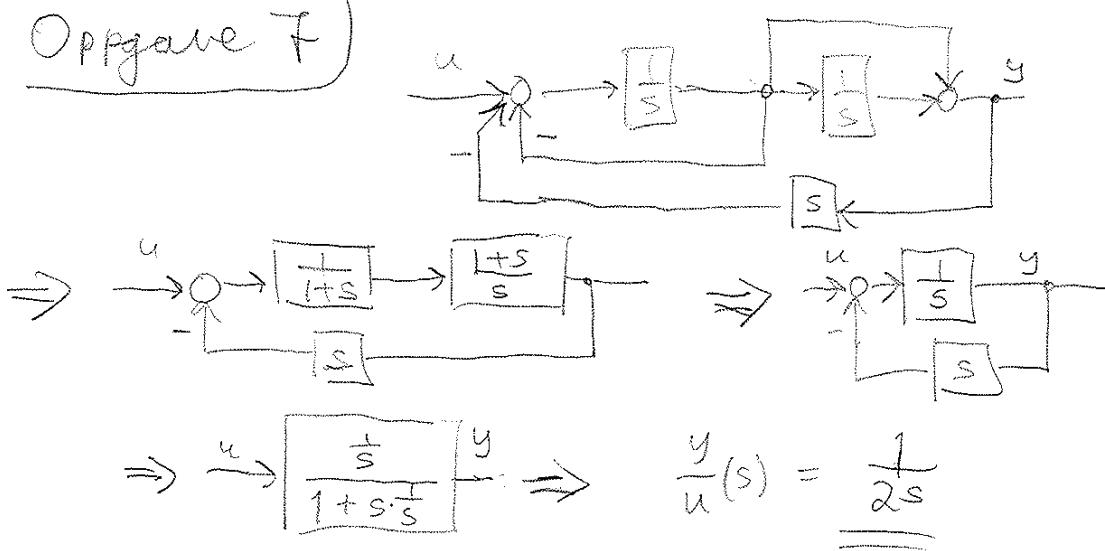
-4-

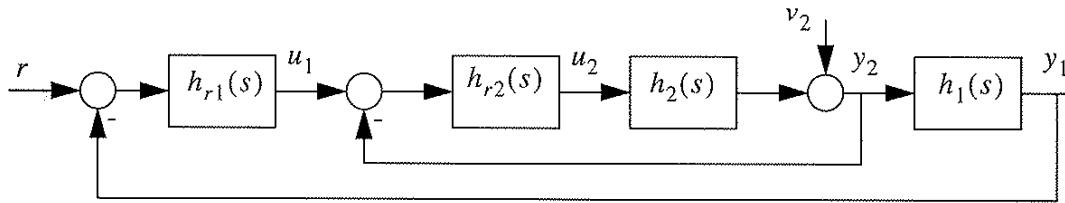


Tidsforsinkelsens fasebidrag ved frekvensen 0.1 er -115° , avlest i Bodediagram. Vi har $-\omega\tau = -115 \cdot \frac{\pi}{180}$ med $\omega = 0.1$. Dette gir $\tau = \frac{115\pi}{180} \cdot T = 20.07 \Rightarrow \underline{\tau = 20}$

1i) Ved dirstret reguleringsmønster er vinklene av holddelementet i en tilnærmet kontinuerlig analyse ved å introdusere en blokk med en tidsforsinkelse lik halve tanktida. Fra 1h) vet vi at $\frac{T}{2} = 20$ i dette tilfellet, $\Rightarrow T = 40$. Den minste tidskonstanten i prosessen er 50. T bør være flere ganger mindre enn denne, og er derfor for stor.

Oppgave 7)



Oppgave 3 a)

- 3 b) Ved riktig valg av $h_{r2}(s)$ kan man oppnå en reguleringsgrad $N_2(s) = \frac{1}{1 + h_2(s)h_{r2}(s)} \ll 1$ for den indre sløyfen, noe som undertrykker forstyrrelsen kraftig før den virker på den ytre sløyfen. Riktig $h_{r2}(s)$ gir også $M_2(s) = \frac{h_2(s)h_{r2}(s)}{1 + h_2(s)h_{r2}(s)} \approx 1$ med stor båndbredde, noe som bedrer egenskapene til den ytre sløyfen. Dermed: Høyere båndbredde, bedre stabilitetsegenskaper for det samlede system.
- Følger

Oppgave 4)

$$h_0(s) = \frac{K}{s(1+T_1s)(1+T_2s)} = \frac{t_0(s)}{n_0(s)}$$

(det karakteristiske)
som leder til polynomet

$$n_0(s) + t_0(s) = T_1 T_2 s^3 + (T_1 + T_2)s^2 + s + K$$

Rouths kriterium brukt på dette polynomet gir følgende talltabell

$$\begin{array}{c|c} T_1 T_2 & , \quad 1 \\ T_1 + T_2 & , \quad K \\ \hline \frac{T_1 + T_2 - KT_1 T_2}{T_1 + T_2} & \\ & K \end{array}$$

Alle elementene i først kolonne av Rouths talltabell skal ha samme fortegn. Antar vi at både T_1 og T_2 er positive, blir betingelsen for stabilitet

$$0 < K < \frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2}$$

(Dette er et eksempel fra læreboka; eks. 8.9
i 2002-utgaven)

Oppgave 5

- a) For roterende bevegelser har vi momentbalansen

$$T = I\ddot{\theta} \quad (1)$$

der T er moment, I er treghetsmoment og $\ddot{\theta}$ er vinkelakselerasjon.

Tyngdens komponent langs sirkelbua er: $mg \sin \theta$. Momentbidraget blir da: $Lmg \sin \theta$ (kraft · arm). Når vi tar med friksjonen blir summen av momentene som virker mot bevegelsen:

$$-D\dot{\theta} - Lmg \sin \theta \quad (2)$$

I dette tilfellet er treghetsmomentet i likning (1) $I = mL^2$. Dermed gir likning (1) og (2) følgende:

$$mL^2\ddot{\theta} = -D\dot{\theta} - Lmg \sin \theta \quad (3)$$

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{L} \sin \theta - \frac{D}{mL^2} \dot{\theta}$$

Dette kan også modelleres ved bruk av Newtons 2. lov Akselerasjonen blir $a = L\ddot{\theta}$. Kraft som følge av dreiemomentet blir $-\frac{D\dot{\theta}}{L}$. Dermed: $F = ma \Leftrightarrow -mg \sin \theta - \frac{D\dot{\theta}}{L} = mL\ddot{\theta}$.

Leddet med $\sin \theta$ gjør likning (3) ulineær.

- b) Setter $x_1(t) = \theta(t)$ og $x_2(t) = \dot{\theta}(t)$. Dermed kan likning (3) skrives på formen:

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (4)$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{g}{L} \sin x_1 - \frac{D}{mL^2} x_2$$

Her er $\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ og $f(\underline{x}) = \begin{bmatrix} x_2 \\ -\frac{g}{L} \sin x_1 - \frac{D}{mL^2} x_2 \end{bmatrix}$.

c) Vi skal linearisere rundt likevektspunktet $x_1 = 0$. Det gir modellen på formen $\dot{\underline{x}} = A\underline{x}$

$$\text{med } A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}_{x_1=0} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{L} \cos x_1 & -\frac{D}{mL^2} \end{bmatrix}_{x_1=0} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{L} & -\frac{D}{mL^2} \end{bmatrix}.$$

d) Laplacetransformen med bruk av formel (V.3) gir:

$$s\underline{x}(s) - \underline{x}_0 = A\underline{x}(s)$$

$$(sI - A)\underline{x}(s) = \underline{x}_0$$

$$\underline{x}(s) = (sI - A)^{-1}\underline{x}_0$$

$$\text{Her er } (sI - A) = \begin{bmatrix} s & -1 \\ \frac{g}{L} & s + \frac{D}{mL^2} \end{bmatrix} \Rightarrow (sI - A)^{-1} = \frac{1}{s^2 + \frac{D}{mL^2}s + \frac{g}{L}} \begin{bmatrix} s + \frac{D}{mL^2} & 1 \\ -\frac{g}{L} & s \end{bmatrix}.$$

$$\text{Vi har } \underline{x}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{v_0}{L} \end{bmatrix}. \text{ Merk at vi må regne om til vinkelhastighet. Målinga blir: } \theta = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \underline{x}.$$

Dette gir:

$$\theta(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s + \frac{D}{mL^2} & 1 \\ -\frac{g}{L} & s \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{v_0}{L} \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{s^2 + \frac{D}{mL^2}s + \frac{g}{L}}$$

$$\theta(s) = \frac{1}{s^2 + \frac{D}{mL^2}s + \frac{g}{L}} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{v_0}{L} \end{bmatrix} = \frac{\frac{v_0}{L}}{s^2 + \frac{D}{mL^2}s + \frac{g}{L}} \quad (5)$$

e) Vi skriver likning (5) som et andre ordens system, se side 10 i eksamensoppgava:

$$\theta(s) = \frac{\frac{v_0}{L}}{s^2 + \frac{D}{mL^2}s + \frac{g}{L}} = \frac{K\omega_0^2}{s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2}$$

Dette gir udempet resonansfrekvens $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}}$ og relativ dempningsfaktor

$$\zeta = \frac{D}{mL^2 \cdot 2\omega_0} = \frac{D}{2mgL} \sqrt{\frac{g}{L}} = \frac{D}{2mg^{1/2} L^{3/2}}$$



Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet (NTNU)

Faglig kontakt under eksamen: Trond Andresen, tlf. **7359 4358**, mobil **9189 7045**

T.A. går to veiledningsrunder, ca. kl. 1015 - 1100, og ca. kl. 1315 - 1345

Eksamen i SIE3005 reguleringsteknikk

torsdag 15. mai 2003

Tid: 0900 - 1300 (til 1500 for de med 100%-eksamen)

Sensur vil foreligge seinest 5. juni. Følg før det også med på fagets nettsted om flervalgsdelen av eksamen.

Hjelpemiddelkombinasjon B1: Kalkulator med tomt minne tillatt. Ingen trykte eller håndskrevne hjelpemidler tillatt, unntatt Rottmanns formelsamling.

Prosentallene angir den relative vekt oppgavene tillegges ved bedømmelsen.

Flere spørsmål kan besvares meget enkelt ved å bruke **formelsamlinga** bakerst i oppgavesettet. **Se kjapt gjennom den før du begynner.** Sjekk den alltid før du gir opp! Men du må forklare hvordan du bruker noe, når du henter det fra formelsamlinga. Noen spørsmål skal besvares ved å **måle ut verdier på figurer i oppgavesettet** – i slike tilfeller godtas en viss "måleunøyaktighet"! Der hvor rubrikk for studentnr. etc. er angitt på sider i oppgavesettet, **kan man tegne i figurer og levere det påtegnede arket som en del av besvarelsen.**

STUDENTS MAY ANSWER THIS EXAM IN ENGLISH IF THAT IS PREFERRED.

Oppgavene på side 1 – 4 skal løses av alle, både de som tar 70%- og de som tar 100%-eksamen.

Oppgave 1 (30 %)

$$\text{Gitt prosessen } h_u(s) = K \frac{1 - T_1 s}{s^2}, \quad K = 0.01, \quad T_1 = 5 \quad (1.1)$$

$$\text{Du skal bruke regulatoren } h_r = K_p \frac{1 + T_2 s}{1 + \alpha T_2 s}, \quad \alpha < 1. \quad (1.2)$$

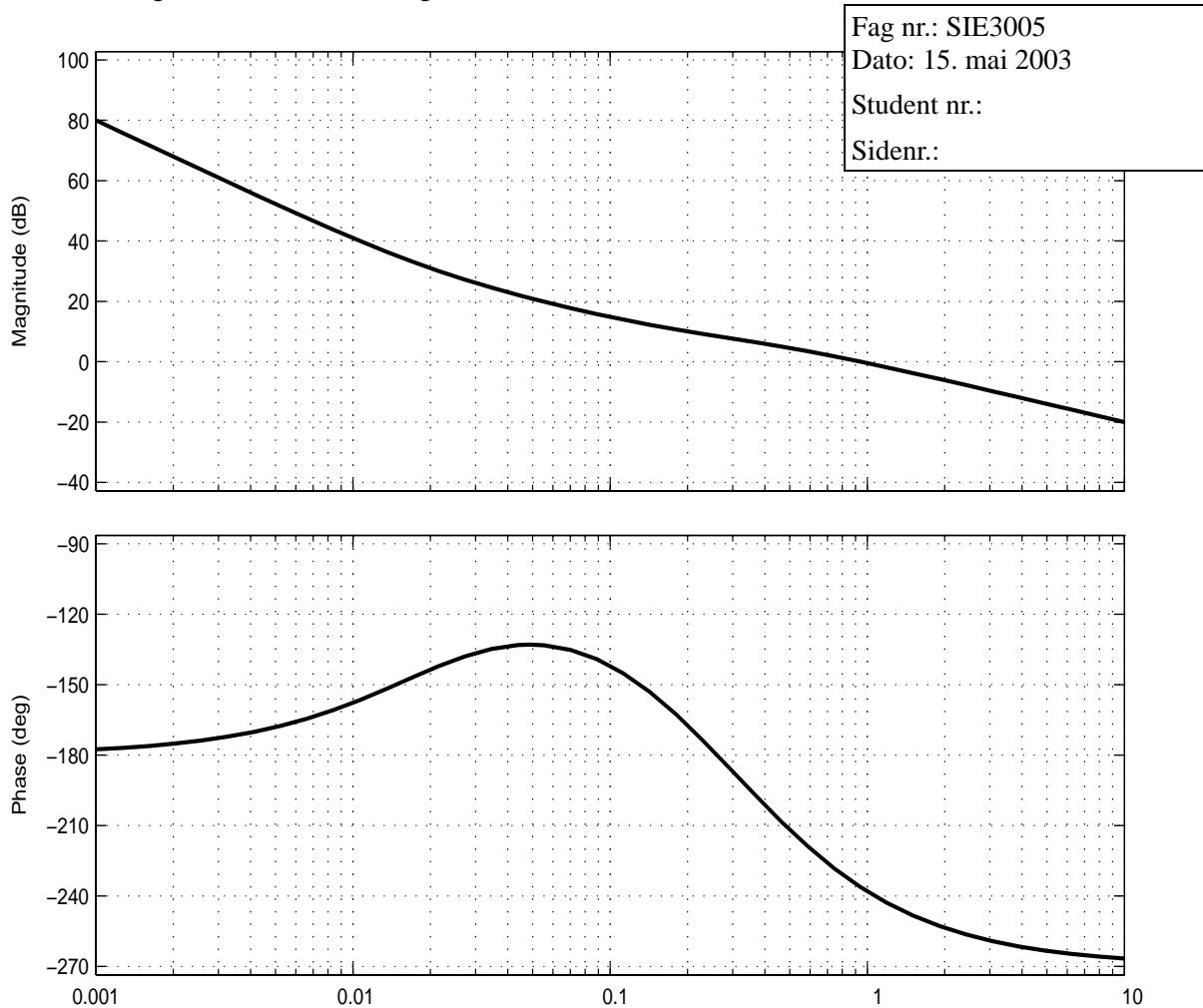
a) (2 %) Hva kaller vi denne type regulator? Hvorfor er dette et fornuftig valg av regulatortype for den gitte prosessen (kort, verbalt svar)?

b) (10 %) Figur 1.1 neste side viser Bode-diagram for $h_0 = h_r h_u$, med $T_2 = 50$, $\alpha = 0.05$, og $K_p = 1$. Er systemet stabilt med denne forsterkninga? (Begrunnet svar!)

Tegn inn asymptoter for amplitude og fase, og levér den påtegnede figur som en del av besvarelsen. Det skal framgå hvordan du finner asymptotene, det er ikke nok å "tilpasser dem" til de gitte kurver. Spesielt må du angi hvordan du fastlegger hvor venstre del av asymptoten til $|h_0|$ krysser 0-dB-linja.

c) (6 %) Regulatoren (1.2) skal nå realiseres diskret. Hva er den viktigste negative virkninga av å bruke diskret regulator, og hvordan kan vi tilnærmet få fram denne virkninga ved å analysere som om vi bruker kontinuerlig regulator? Bruk denne metoden, og skissér inn det modifiserte faseforløpet du da får for h_0 i figur 1.1. Tastetida (samplingstida) er $T = 1$.

- d) (5 %) Bestem ved hjelp av Bodediagrammet den K_p som gir forsterkningmargin omrent $\Delta K = 6\text{dB}$. Vurdér ut fra det dårligere faseforløpet ved kryssfrekvensen p.g.a. diskret regulator: Er tastetida valgt liten nok?



figur 1.1 (se også side 4)

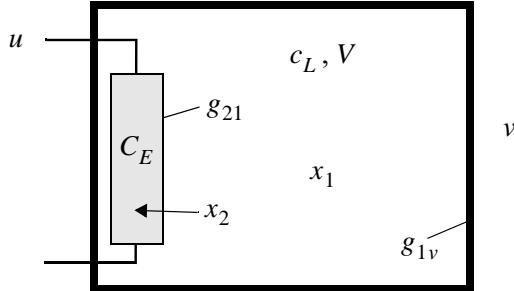
-
- e) (3 %) *For enkelhets skyld forutsetter vi i resten av denne oppgaven kontinuerlig regulator (1.2).* Reguleringsystemets stabilitet kan da vurderes ved hjelp av Rouths kriterium. Du skal ikke sette inn tallverdier, men bruk de algebraiske uttrykkene (1.1) og (1.2) slik de står. Sett opp Rouths tabell for det lukkede systemet.
- f) (3 %) Forklar med utgangspunkt i Rouths kriterium hva slags krav som må stilles til T_2 sammenlignet med T_1 . Dette kunne du sagt ut fra et enklere verbalt resonnement, bare ved å betrakte (1.1) og (1.2) uten å måtte bruke Rouths kriterium. Forklar det også!
- g) (1 %) Hvis du skulle brukt Rouths kriterium (vi forutsetter fortsatt kontinuerlig regulering) og prosessen (1.1) hadde inneholdt en tidsforsinkelse, hva måtte du ha gjort da?

Oppgave 2 (20 %)

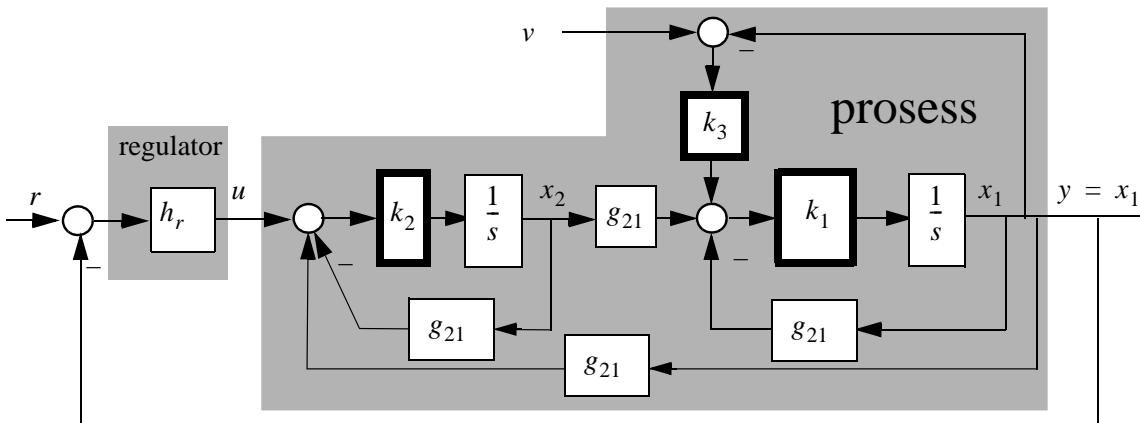
Et rom varmes opp av en ovn med en viss termisk treghet. Rommet har varmetap til omgivelsene. Rommet med ovn er skissert til høyre:

Vi har:

- $x_1 = y$: Temperatur i rom, antas jevnt fordelt [$^{\circ}\text{C}$].
- x_2 : Temperatur i ovn [$^{\circ}\text{C}$].
- v : Temperatur ute [$^{\circ}\text{C}$].
- u : Pådrag til ovn [W].
- C_E : Varmekapasitet i ovn [$\text{J}/^{\circ}\text{C}$]
- c_L : Spesifikk varmekapasitet for luft [$\text{J}/(\text{m}^3 \ ^{\circ}\text{C})$].
- V : Volum av rom [m^3].
- g_{21}, g_{1v} : Varmeovergangstall ovn/rom og rom/ute [$\text{W}/^{\circ}\text{C}$].



Figur 2.1 viser blokkskjemaet for prosessen (= rom + ovn) med seriekompenasjon:



figur 2.1

- a) (7 %) Finn størrelsene k_1, k_2, k_3 i figur 2.1.

Fra nå av kan du for enkelhets skyld bruke betegnelsene k_1, k_2, k_3 i resten av oppgaven, uten å sette inn for disse størrelsene:

- b) (6 %) Forutsett ingen ytre tilbakekobling, dvs. $h_r = 0$. Vis at transferfunksjonen fra v til y blir:

$$h_{vy}(s) = \frac{k_1 k_3 (s + k_2 g_{21})}{s^2 + [g_{21}(k_1 + k_2) + k_1 k_3]s + k_1 k_2 k_3 g_{21}} \quad (2.1)$$

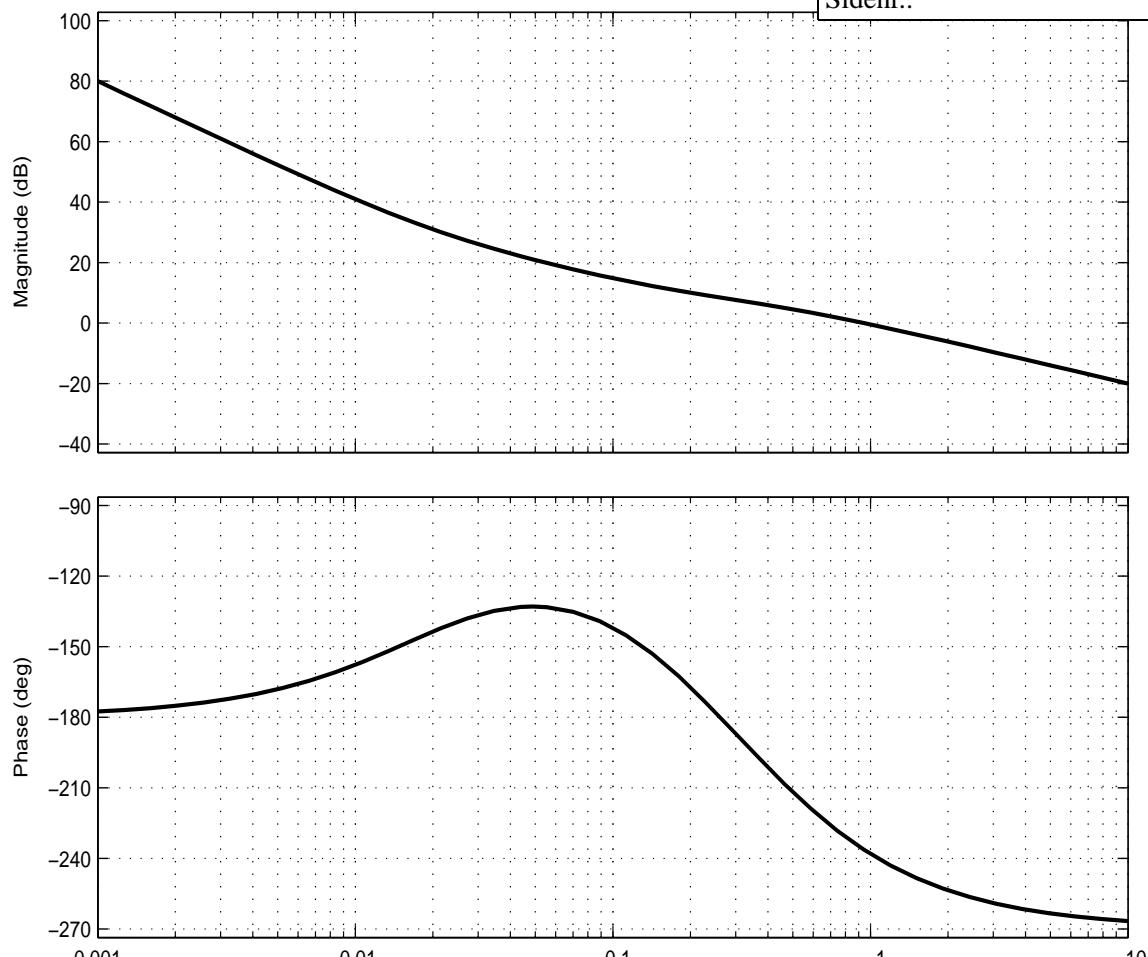
- c) (2 %) Forutsett fortsatt ingen ytre tilbakekobling, dvs. $h_r = 0$.
 Ut fra (2.1): Hva blir $y(\infty)$ når $v = v_0 = \text{konst.}$?
 Er svaret rimelig (kort fysisk, verbal forklaring)?
- d) (3.5 %) Anta at du har måling av utetemperaturen v . Finn den ideelle (= dynamiske) foroverkoppling fra v til u . Kommentér. (Tips: Den har formen $h_{fi} = -K_f(1 + T_f s)$.)
 Tegn inn blokken h_{fi} med forbindelser i blokdiagrammet i figur 2.1, og lever arket.
- e) (1.5 %) Finn så en konstant (= statisk) foroverkoppling med utgangspunkt i den ideelle. Hva oppnår du med denne konstante foroverkopplingen?
-

Fag nr.: SIE3005

Dato: 15. mai 2003

Student nr.:

Sidenr.:



Ekstra figur 1.1 hvis du trenger den

Seksjon med flervalgsoppgaver (“multiple choice”)

Les alt dette nøyne før du begynner:

Dere som har 100%-eksamen (full eksamen) skal gjøre alle flervalgsoppgavene.

Dere øvrige som tar 70%-eksamen, dvs. hvor resultatet fra midtsemesterprøven skal telle med i karakteren, skal hoppe over oppgavene O1 – O11, og bare gjøre oppgavene O12 – O19. Ikke kryss av noe som helst i feltene som gjelder oppgavene O1 – O11.

I de fleste oppgavene i denne seksjonen skal man krysse av bare *ett* av flere svaralternativer. Hvis man prøver å “gardere” ved å krysse av flere enn ett kryss der hvor det bare skal være ett kryss, nulles resultatet på oppgaven. Dette gjelder bortsett fra der hvor det er sagt spesielt fra at det kan være *flere riktige kryss* i den aktuelle oppgave.

Noen oppgaver har færre svaralternativer enn A – F. Avkryssing på overflødige svaralternativer ignoreres ved sensuren, så hvis man kommer i skade for å gjøre dette, teller det ikke.

Feil svar gir minuspoeng, så det er bedre å ikke krysse av, enn å tippe. Poeng for svaralternativ er satt slik at summen av alle mulige alternativ på en gitt oppgave = 0. Svært gale svar gir mer minus enn litt gale svar. Prosenttallet som oppgis ved hver oppgave forteller hva man kan oppnå ved helt korrekt avkryssing.

Svarskjemaet skal krysses av med **blå eller svart kulepenn**, slik: . Krysser du feil, kan krysset "slettes" ved å fylle hele ruta med blekk: . Når du skal slette et kryss på denne måten, er det viktig at ruta blir helt full av farge, slik at ikke noe av det hvite papiret synes inne i ruta. Korrekturlakk er forbudt, det kan skape problemer for arkmateren ved optisk innlesning. Og ikke brett svarskjemaet på noe vis.

Studentnummeret skal skrives pent to ganger. Skriv siffer omtrent slik: 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9. (Ikke skriv noe ifeltet “Eventuell ekstra ID”.)

Tips om arbeidsmåte: Ikke kryss av på svarskjemaet før du er ferdig med oppgavene. For hver oppgave noterer du et annet sted koden for plassering av riktig kryss, f.eks. "B", hvis du mener den aktuelle oppgave skal ha kryss der. Så kan du like før innlevering overføre slik informasjon til svarskjemaet, oppgave etter oppgave, i form av riktig plasserte kryss. Merk da at både **oppgavenummer og bokstaver for svaralternativ er (for det meste) trykket i tilfeldig ombyttet rekkefølge på svarskjemaet**, forskjellig for hver student. Så pass på hvor du setter kryssene!

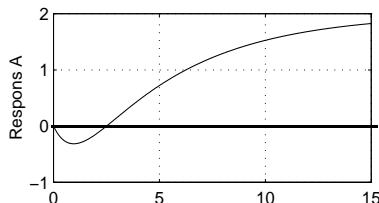
Du får utdelt to identiske eksemplarer av svarskjemaet (hvis ikke, be om to nye og identiske svarskjemaer fra eksamensvaka. De er identiske når nummeret øverst på hvert skjema er det samme. Kontrollér det!). Det ene svarskjemaet krysses av og innleveres. Det andre beholdes. Det kan du bruke til å lage en kopi av svarskjemaet før levering, og har med det muligheten til å kontrollere dine kryss mot fasiten som blir lagt ut på Veiven. Fasiten, og dine poeng for flervalgsdelen av denne eksamen, kunngjøres via fagets nettsted på “oppslagstavla”, sannsynligvis før 31. mai. Følg med der! Den endelige sensur, som gjelder hele besvarelsen, kommer seinest 5. juni. Hvis den er ferdig før, varsles dette på fagets oppslagstavle.

Utfyldt svarskjema skal legges inn i den øvrige besvarelse og leveres sammen med den.

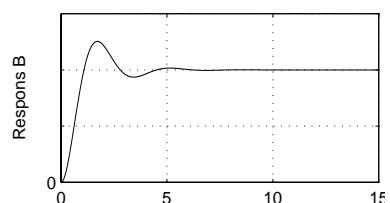
Oppgavesettets sider 6, 7 og 8 skal rives av og leveres for seg (for makulering).

I O1 – O6 (alle 2 %) er det gitt 6 transferfunksjoner. Samtidig er det oppgitt 6 enhetssprang-responser A til F, se figur til høyre. Hver transferfunksjon skal koples til riktig sprangrespons.

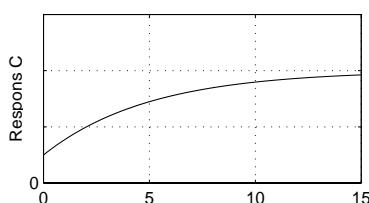
O1: $\frac{1+2s}{(1+0.5s)^2}$



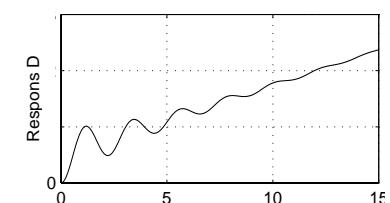
O2: $\frac{2(1-2s)}{(1+s)(1+5s)}$



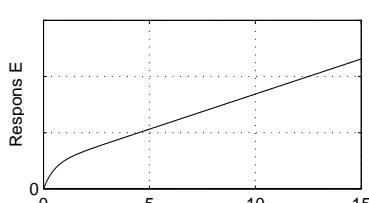
O3: $\frac{1+4s}{8s(1+0.5s)}$



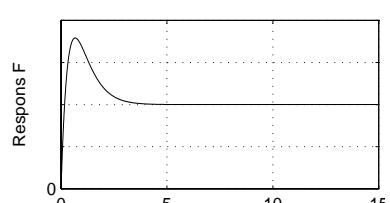
O4: $\frac{64}{64+6.4s+s^2}$



O5: $\frac{1+4s}{s^3+0.5s^2+8s}$



O6: $\frac{2(1+1.25s)}{(1+5s)}$



O7 (4 %) Relativ dempningsfaktor ζ for 2.ordens-delen av transferfunksjonen i O5 er

- A: 0.1188 B: 0.1105 C: 0.1024 D: 0.0931 E: 0.0884 F: 0.0732

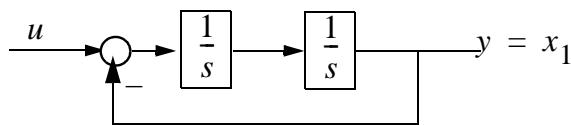
O8 (3 %)

Sprangresponsen for transferfunksjonen i O6 ovenfor, starter i $y(0) =$

- A: 0.0 B: 2.5 C: 1 D: 0.5 E: 2 F: 5

O9 (4 %) Her kan flere påstander (kryss) være riktige.

- A: For en fasevariabel tilstandsromform er tilstandene de deriverte av hverandre.
- B: Det finnes uendelig mange tilstandsrommodeller som gir samme impulsrespons for et system.
- C: Et lineært tidsinvariant system kan alltid representeres med et sett av differensielllikninger.
- D: Når det lineære systemet har kompleks konjugerte egenverdier, kan det ikke bringes på diagonal form.
- E: Et autonomt system kan ikke inneholde en tidsforsinkelse.
- F: Det er ikke mulig å finne en algebraisk løsning for responsen til en prosess med tidsforsinkelse i tilbakekoplingen.

O10 (3 %) Gitt systemet :

En tilstandsrommodell er

	matrisene A, B, C		matrisene A, B, C
A	$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$	D	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$
B	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$	E	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$
C	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$	F	$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$

O11 (4 %)Hva blir transisjonsmatrisen $\Phi(t)$?

A	$\begin{bmatrix} e^{-t} & e^t \\ -e^t & e^{-t} \end{bmatrix}$	D	$\begin{bmatrix} 1 & \sin t \\ -\sin t & 1 \end{bmatrix}$
B	$\begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix}$	E	$\begin{bmatrix} \sin t & \cos t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix}$
C	$\begin{bmatrix} e^{-t}\cos t & e^{-t}\sin t \\ -e^{-t}\sin t & e^{-t}\cos t \end{bmatrix}$	F	$\begin{bmatrix} \cos t & 1 \\ -1 & \cos t \end{bmatrix}$

Fra og med her skal også de med 70%-eksamen løse flervalgsoppgaver:

O12 (4 %) Her kan flere påstander (kryss) være riktige.

- A: Foroverkoppling fra referansen bedrer et systems stabilitet.
- B: Foroverkoppling fra forstyrrelsen bedrer et systems stabilitet.
- C: Ziegler-Nichols metode krever ikke at prosessens modell er kjent.
- D: Anti-windup (anti-integrator-overlading) trengs for en PI-regulator når det er metning i pådraget.
- E: Intern tilbakekoppling, sett i forhold til seriekompenasjon, kan ikke gi hurtigere regulering uten at det går ut over stabilitetsmarginene.
- F: Et system med tidsforsinkelse er et ikke-minum-fase-system.

O13 – O18, se nedenfor:

Gitt tre systemer, **S1** - **S3**. Systemene utsettes for sprang- eller rampefunksjoner som vist.

Kryss av alternativ A på svarkjemaet hvis kombinasjonen av system og inngangssignal gir null stasjonært avvik,

B hvis inngangssignal og system gir $0 < e(\infty) = \text{konst.} < \infty$,
eller C hvis inngangssignal og system gir $e(\infty) = \infty$.

O13 (2 %) System **S1** og signal **a**.

O14 (2 %) System **S1** og signal **b**.

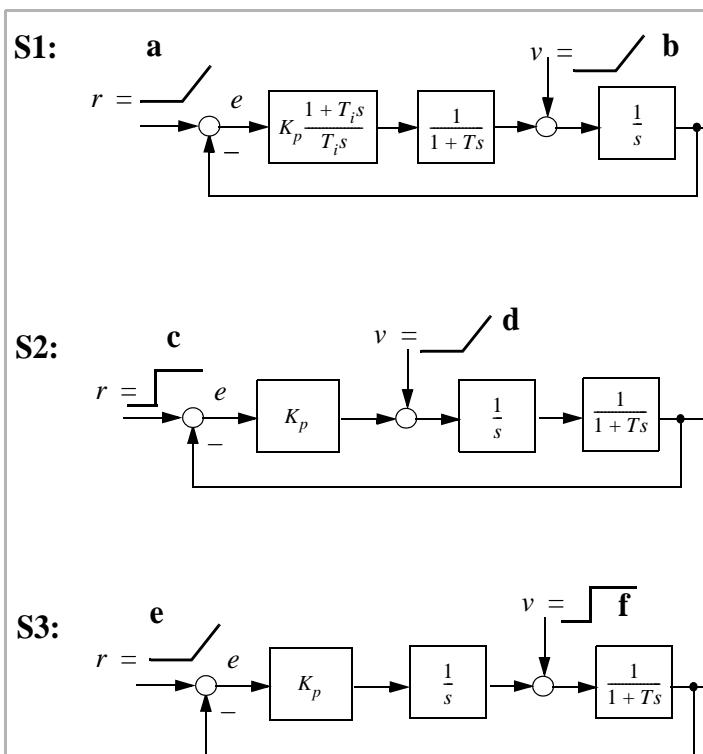
O15 (2 %) System **S2** og signal **c**.

O16 (2 %) System **S2** og signal **d**.

O17 (2 %) System **S3** og signal **e**.

O18 (2 %) System **S3** og signal **f**.

(Svaralternativene D, E og F lar du bare stå blanke i disse oppgavene.)

**O19 (4 %)**

Det rekursive uttrykket for det diskrete pådraget $u[k]$ for regulatoren i oppgave 1c (side 1 i dette oppgavesettet), med $K_p = 0.17$, blir:

A: $u[k] = \frac{2}{3}u[k-1] + 2.86e[k],$

B: $u[k] = \frac{2}{3}u[k-1] + 2.86e[k] - 2.81e[k-1],$

C: $u[k] = \frac{2}{3}u[k-1] - \frac{1}{3}u[k-2] + 2.86e[k] - 2.81e[k-1],$

D: $u[k] = \frac{2}{3}u[k-1] - \frac{1}{3}u[k-2] + 2.86e[k]$

E: $u[k] = u[k-1] - \frac{1}{3}u[k-2] + 2.86e[k] - 2.81e[k-1],$

F: $u[k] = u[k-1] + 2.86e[k] - 2.81e[k-1]$

(Tips: Svaret kan om ønskelig finnes uten å sette inn tallverdier – bare ved å eliminere uaktuelle alternativer).

Formelsamling

(4 sider, noe av dette trenger du kanskje...)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sf(s) \quad (\text{V.1})$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sf(s) \quad (\text{V.2})$$

$$\mathcal{L} [\dot{f}(t)] = sf(s) - f(t)|_{t=0}, \quad \mathcal{L} [\ddot{f}(t)] = s^2 f(s) - sf(t)|_{t=0} - \dot{f}(t)|_{t=0} \quad (\text{V.3})$$

$$\text{Residuregning: } f(t) = \sum_{a_i} \frac{1}{(m-1)!} \left[\frac{\partial^{m-1}}{\partial s^{m-1}} \{(s-a_i)^m f(s) e^{st}\} \right]_{s=a_i} \quad (\text{V.4})$$

$$|\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}| = 0 \quad (\text{V.5})$$

$$\text{Rettlinja bevegelse: } f = ma \quad \text{Rotasjon: } d = J\dot{\omega} \quad (\text{V.6})$$

Folding (konvolusjon):

$$y(t) = h(t)*u(t) = \int_0^t h(t-\tau)u(\tau)d\tau, \quad \mathcal{L} [h(t)*u(t)] = h(s)u(s) \quad (\text{V.7})$$

$$\begin{aligned} \Delta \dot{\mathbf{x}} &= \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{\mathbf{x}^p, \mathbf{u}^p} \Delta \mathbf{x} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} \Big|_{\mathbf{x}^p, \mathbf{u}^p} \Delta \mathbf{u} \\ \text{Linearisering:} \quad \mathbf{A} &= \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{\mathbf{x}^p, \mathbf{u}^p} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}_{\mathbf{x}^p, \mathbf{u}^p} \\ \Delta \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A} \Delta \mathbf{x} + \mathbf{B} \Delta \mathbf{u} \end{aligned} \quad (\text{V.8})$$

Gitt en åpen prosess $h_0(s)$ med N_p poler i høyre halvplan.

Vektoren $1 + h_0(j\omega)$ får en netto vinkeldreining lik

$$\Delta\angle(1 + h_0) = -2\pi(N_n - N_p) \quad \text{når } \omega \text{ går fra } -\infty \text{ til } \infty. \quad (\text{V.9})$$

N_n blir da antall poler i h.h.p. for det lukkede (tilbakekoppled) system.

Merk: Dreieretning er definert positiv *mot* urviseren. Merk: Dreieretning er definert positiv *mot* urviseren.

Rouths kriterium:

For stabilitet kreves for det første at alle koeffisienter i det karakteristiske polynom (nevnerpolynomet i det lukkede system) må ha samme fortegn. Dessuten må alle koeffisienter i den venstre kolonne i Rouths tabell (nedenfor) ha samme fortegn.

Kall det karakteristiske polynom: $\alpha_n s^n + \alpha_{n-1} s^{n-1} + \dots + \alpha_1 s + \alpha_0$

Rouhs tabell blir da (i tilfellet vist her er n et oddetal):

$$\begin{array}{cccc}
 \alpha_n & \alpha_{n-2} & \dots & \alpha_1 \\
 \alpha_{n-1} & \alpha_{n-3} & \dots & \alpha_0 \\
 \beta_{n-1} & \beta_{n-3} & \dots & \\
 \zeta_{n-1} & \zeta_{n-3} & \dots & \\
 \cdot & & & \\
 \cdot & & & \\
 \cdot & & & \\
 \sigma_{n-1} & \sigma_{n-3} & & \\
 \eta_{n-1} & & & \\
 \omega_{n-1} & & & \\
 \end{array} \tag{V.10}$$

De nye koeffisientene i tabellen framkommer etter følgende regler:

$$\beta_{n-1} = \frac{\alpha_n \cancel{\alpha_{n-2}}}{\cancel{\alpha_{n-1}}} \alpha_{n-3} = \frac{\alpha_{n-1} \alpha_{n-2} - \alpha_n \alpha_{n-3}}{\alpha_{n-1}}$$

$$\beta_{n-3} = \frac{\alpha_n \cancel{\alpha_{n-4}}}{\cancel{\alpha_{n-1}}} \alpha_{n-5} = \frac{\alpha_{n-1} \alpha_{n-4} - \alpha_n \alpha_{n-5}}{\alpha_{n-1}}$$

osv.

$$s \text{ erstattes med } \frac{2z-1}{Tz+1} \tag{V.11}$$

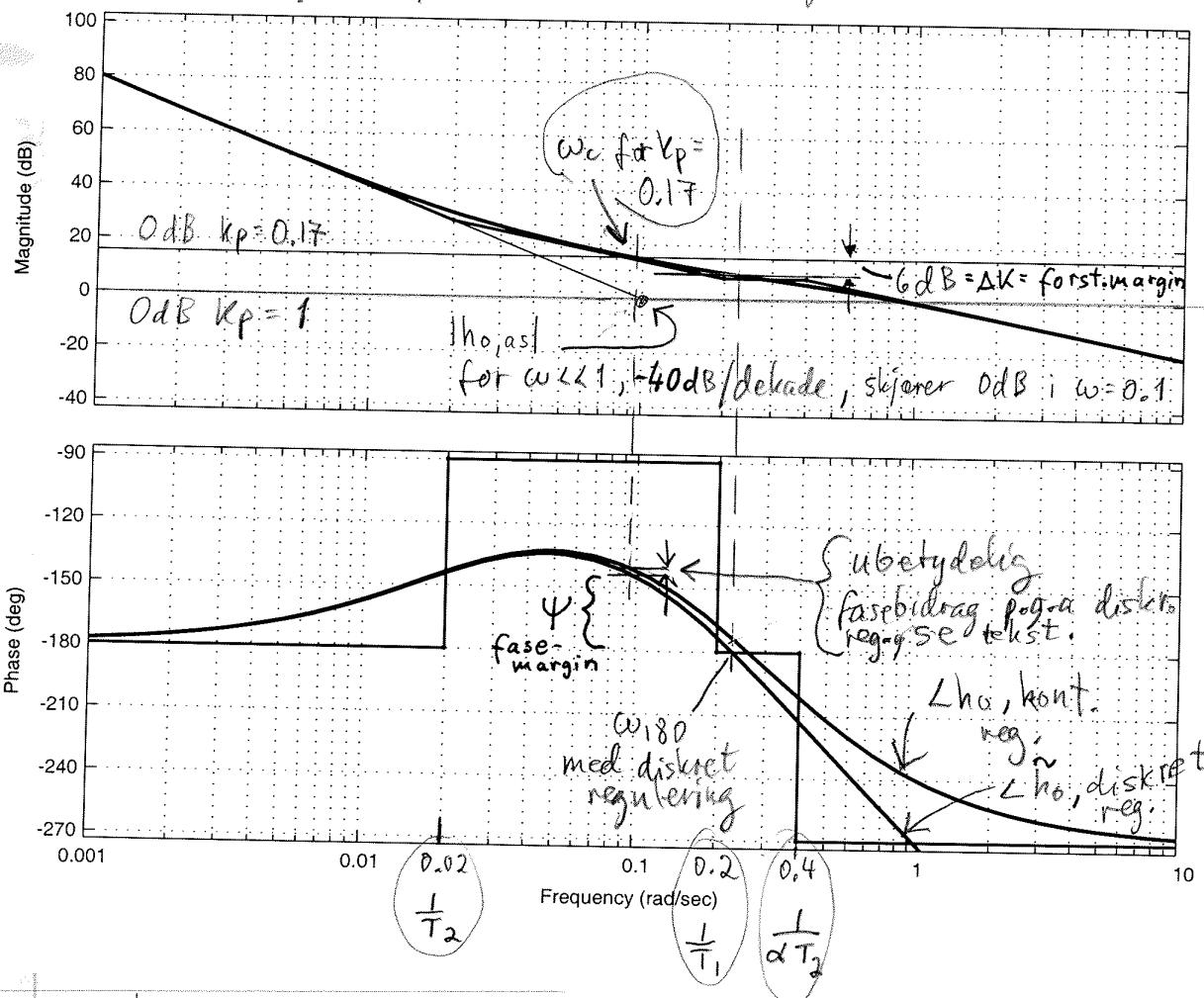
$$e^{-\tau s} \approx \frac{1 - \frac{\tau}{2}s}{1 + \frac{\tau}{2}s} \tag{V.12}$$

Løsningsforsøg eksamen 3005 regulerings-
teknikk 15/5 - 2003

1a) Dette er en begrenset PD-regulator.

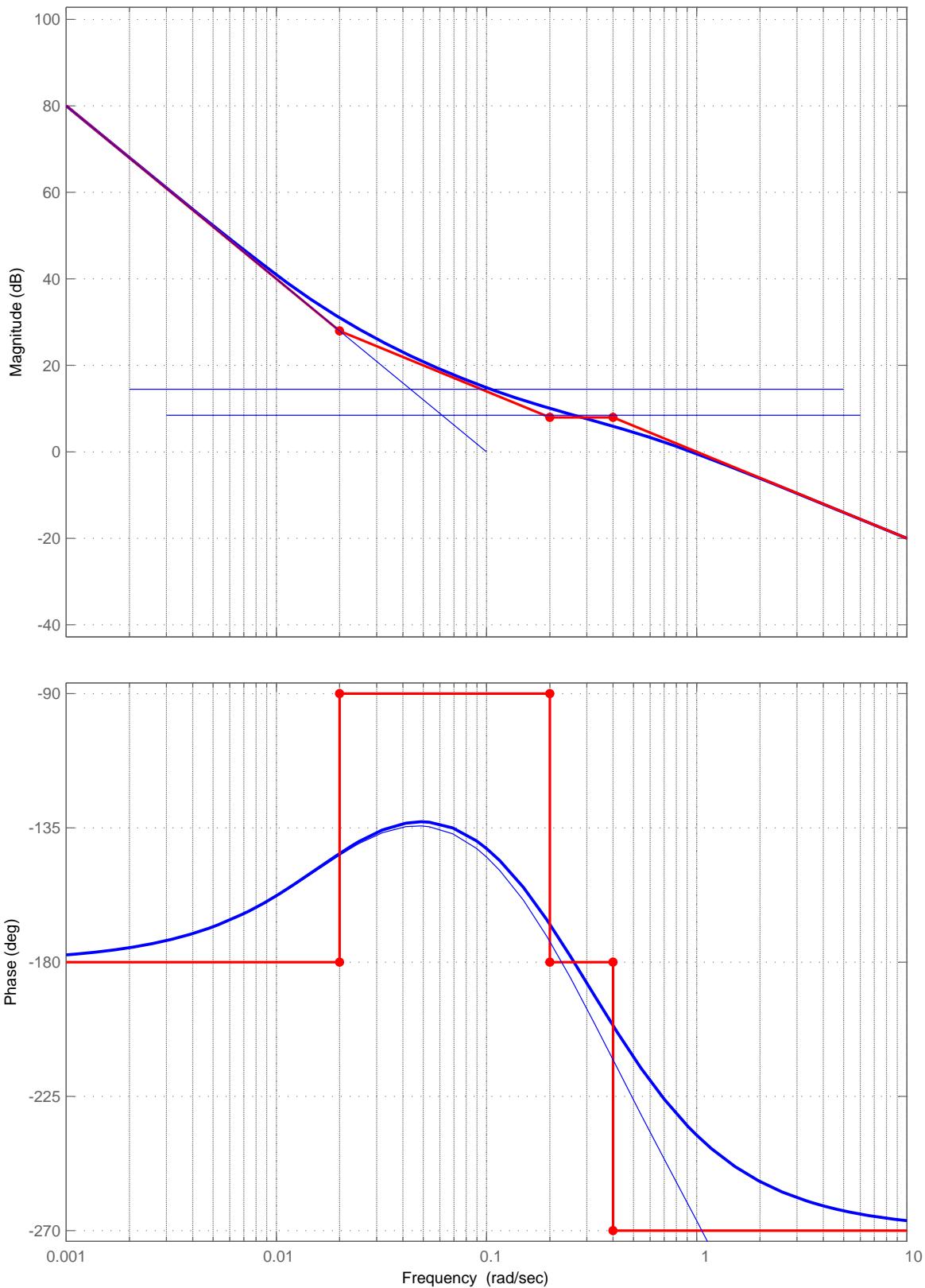
Prosesen har $\angle \hat{h}_n < -180^\circ$ $\wedge \omega \Rightarrow$
den kan bare stabiliseres med en regulator
med derivativ virking.

1b) Av Bode diagrammet ser vi at systemet er
ustabilt for $K_p = 1$. Se ellers figur:



For $K_p = 1$ er $\omega_c >> \omega_{180} \Rightarrow$ ustabilt system

Bode Diagram



- 2 -

1c) Holddelelementet fører tilnærmet til at det introduceres en fidsformulatrise $= \frac{1}{2}$ i den lukkede sløyfen. Dette gir tilnærmet en ny $\tilde{h}_o = h_o e^{-\frac{1}{2}s}$. Se figur forrige side. Vi må addere $-\frac{1}{2} \cdot w = -0.5w$ ved alle frekvenser, dvs. $-0.5 \cdot \frac{180}{\pi} \cdot w$ når vi gjør om til grader.

1d) Fra diagrammet ser vi at vi må redusere k_p med ca. 15.5 dB for å få 6 dB fasemargin. Ny k_p blir da $1 \cdot 10^{-\frac{15.5}{20}} \approx 0.17$.

Kryssfrequansen er ca. 0.093 . Fasebidraget blir da $-0.5 \frac{180}{\pi} \cdot 0.093 = -26.7^\circ \Rightarrow$ minimal innvirkning fra holddelelementet $\Rightarrow T_1$ er liten nok!

1e) Neveneren i det lukkede system blir $n_o(s) + t_o(s)$, der $h_o = \frac{t_o}{n_o} =$

$$s^2(1 + \alpha T_2 s) + k_p k (1 + T_2 s)(-T_1 s) \\ = \alpha T_2 s^3 + (1 - T_1 T_2 k_p k)s^2 + k_p k (T_2 - T_1)s + k_p k$$

Tabell:

$$\begin{array}{c} \alpha T_2 & k_p k (T_2 - T_1) \\ (1 - k_p k T_1 T_2) & k_p k \\ \hline k_p k \left(T_2 - T_1 - \frac{\alpha T_2}{1 - k_p k T_1 T_2} \right) \end{array}$$

1f) $k_p k$

Først må alle koefsinntrene i $n_o(s) + t_o(s)$ ha samme fortegn. Dette innebærer kravet $T_2 > T_1$,

- 3 -

noe som er rimelig, for ved $T_2 < T_1$ ville
det ikke bli mulig å få faren til å over
 -180° , des. ville ikke hatt noen derved vortesving.

1g) Erstatte e^{-Ts} med en razonal approksimasjon,
 $f\text{-chr. } e^{-Ts} \approx \frac{1 - \frac{Ts}{2}}{1 + \frac{Ts}{2}}$

Oppgave 2 a) Ni har for romtemperaturen:

$$C_L V \frac{dx_1}{dt} = g_{1V}(v - x_1) + g_{21}(x_2 - x_1)$$

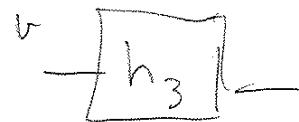
$$\Rightarrow \frac{1}{C_L V} = k_1, \quad g_{1V} = k_3$$

Før oven:

$$C_E \frac{dx_2}{dt} = u - g_{21}(x_2 - x_1)$$

$$\Rightarrow k_2 = \frac{1}{C_E}$$

2b) Definerer:



$$\text{Vi har } h_3 = \frac{k_3 \cdot k_1 \cdot s}{1 + (g_{21} + k_3)k_1 \cdot s} = \frac{k_1 \cdot k_3}{s + (g_{21} + k_3)k_1}$$

$$h_1 = \frac{k_2 \cdot s \cdot g_{21}}{1 + k_2 s g_{21}} = \frac{k_2 g_{21}}{s + k_2 g_{21}}$$

$$h_2 = \frac{k_1 \cdot s}{1 + (g_{21} + k_3)k_1 s} = \frac{k_1}{s + (g_{21} + k_3)k_1} \Rightarrow h_3 = k_3 \cdot h_2 \\ \Rightarrow n_3 = n_2 \\ t_3 = k_3 t_2$$

$$h_{vy} = h_3 \cdot \frac{1}{1 - h_1 h_2 g_{21}} = \frac{t_3}{n_3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{t_1}{n_1} - \frac{t_2}{n_2} \cdot g_{21}}$$

$$= \frac{t_3 \cdot n_1 \cdot n_2}{n_3 \cdot n_1 \cdot n_2 - t_1 t_2 n_3 g_{21}} = \frac{k_1 k_3 (s + k_2 g_{21})}{(s + k_2 g_{21})(s + (g_{21} + k_3)k_1) - k_1 k_2 g_{21}^2}$$

$$= \frac{k_1 k_3 (s + k_2 g_{21})}{s^2 + (k_2 g_{21} + k_1 k_3 + k_1 g_{21})s + k_1 k_2 k_3 g_{21} + k_1 k_2 g_{21}^2 - k_1 k_2 g_{21}^2}$$

$$= \frac{k_1 k_3 (s + k_2 g_{21})}{s^2 + (g_{21} + k_1 + k_2) + k_1 k_3 s + k_1 k_2 k_3 g_{21}}$$

- 5 -

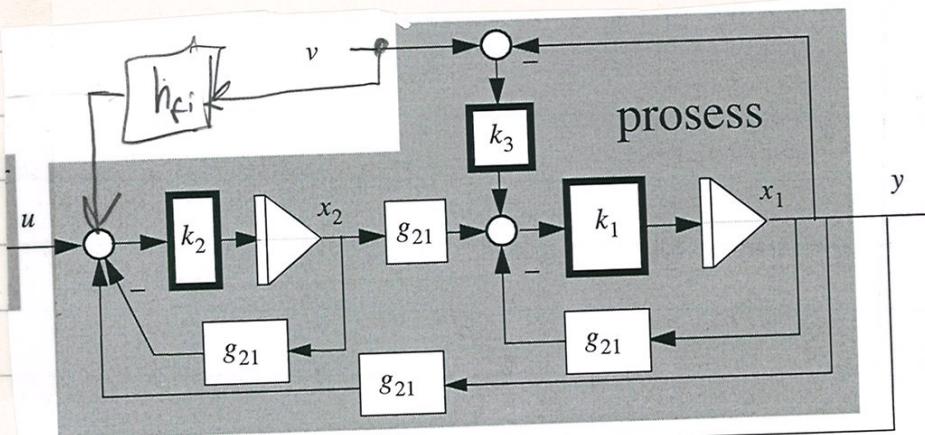
2c)

$$\text{Sluttfverdilikorennet: } y(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \left[h v y(s) \cdot \frac{V_0}{s} \right] = h v y(0)$$

$$= \frac{k_1 k_2 k_3 g_{21}}{k_1 k_2 k_3 g_{21}} \cdot V_0 = V_0 \Rightarrow \text{rimelig, for}$$

når det ikke er noen oppvarming til innelogg- y
 \rightarrow utelogg- V_0 .

2d)



figur 2.1

$$\text{Vår har } h_{fi} \cdot \frac{k_2 \cdot \frac{1}{s} \cdot g_{21}}{1 + k_2 \cdot \frac{1}{s} \cdot g_{21}} + k_3 = 0$$

$$\Rightarrow h_{fi} = \frac{-k_3 (s + k_2 g_{21})}{k_2 g_{21}} = -K_f (1 + T_f s)$$

(med $T_f = \frac{1}{k_2 g_{21}}$, $K_f = k_3$)

2-e) Statisk $h_f = h_{fi}(0) = -k_3$

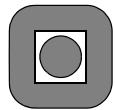
Dan fjerner avsl. når uteltemperaturen
er konstant.

derivat.
okhøyt
bed høye
frequenser
47

Eksamensoppgaver i SIE3005 reguleringsteknikk (flervalgs–seksjon) NTNU, 15. mai 2003

Høyeste oppnåelige samlet poengsum = 50.00

	A	B	C	D	E	F
o 1	-0.40	-0.40	-0.40	-0.40	-0.40	2.00
o 2	2.00	-0.40	-0.40	-0.40	-0.40	-0.40
o 3	-0.40	-0.40	-0.40	-0.40	2.00	-0.40
o 4	-0.40	2.00	-0.40	-0.40	-0.40	-0.40
o 5	-0.40	-0.40	-0.40	2.00	-0.40	-0.40
o 6	-0.40	-0.40	2.00	-0.40	-0.40	-0.40
o 7	-0.80	-0.80	-0.80	-0.80	4.00	-0.80
o 8	-0.60	-0.60	-0.60	3.00	-0.60	-0.60
o 9	1.33	1.33	-0.50	-1.75	-1.75	1.33
o10	-0.70	-0.43	-0.43	-0.43	3.00	-1.00
o11	-0.97	4.00	-0.97	-0.97	-0.10	-0.97
o12	-1.33	-1.33	1.33	1.33	-1.33	1.33
o13	2.00	-1.00	-1.00			
o14	-1.00	2.00	-1.00			
o15	2.00	-1.00	-1.00			
o16	-1.00	-1.00	2.00			
o17	-1.00	2.00	-1.00			
o18	2.00	-1.00	-1.00			
o19	-0.97	4.00	-0.97	-0.97	-0.97	-0.10



Faglig kontakt under eksamen: Tommy Gravdahl, tlf. 7359 4393, mobil 9014 4212
T.G. går to veiledningsrunder, ca. kl. 1015 - 1100, og ca. kl. 1315 - 1345

Eksamens i SIE3005 reguleringsteknikk

fredag 15. august 2003

Tid: 0900 - 1500

Sensur vil foreligge seinest 5. september.

Hjelpemiddelkombinasjon B1: Kalkulator med tomt minne tillatt. Ingen trykte eller håndskrevne hjelpebilder tillatt, unntatt Rottmanns formelsamling.

Prosentallene angir den relative vekt oppgavene tillegges ved bedømmelsen.

Flere spørsmål kan besvares meget enkelt ved å bruke **formelsamlinga** bakerst i oppgavesettet. **Se kjapt gjennom den før du begynner.** Sjekk den alltid før du gir opp! Men du må forklare hvordan du bruker noe, når du henter det fra formelsamlingen. Noen spørsmål skal besvares ved å **måle ut verdier på figurer i oppgavesettet** – i slike tilfeller godtas en viss "måleunøyaktighet"! Der hvor rubrikk for studentnr. etc. er angitt på sider i oppgavesettet, **kan man tegne i figurer og levere det påtegnede arket som en del av besvarelsen.**

STUDENTS MAY ANSWER THIS EXAM IN ENGLISH IF THAT IS PREFERRED.

Oppgave 1 (68 %)

Gitt prosessen som vist i figur 1. Ei vifte blåser luft med volumstrøm q [m^3/s] med inngangstemperatur v [$^\circ C$] forbi et varmeelement som varmer opp lufta til temperatur x_2 . Et stykke lengre ute i røret måles temperaturen $y = x_2(t-\tau)$, der τ er en tidsforsinkelse. Vi betrakter en lineær modell av prosessen. Den gjelder for en liten temperaturøkning i lufta.

Flere størrelser defineres:

u : Spenning over element [V].

P : Effekt ytt av element [W], antas å være $P = Gu$, der G er en konstant.

l : Avstand fra element til temperaturmåling [m]

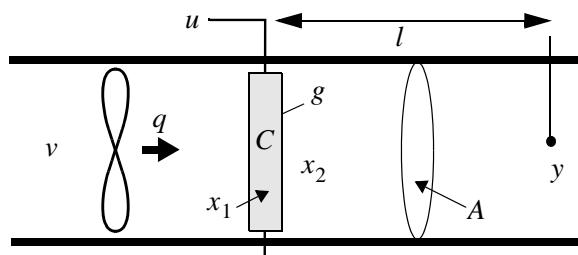
A : Tverrsnittsareal rør [m^2].

C : Varmekapasitet element [$J/^\circ C$]

g : Varmeovergangstall element/luft [$W/^\circ C$].

γ : Spesifikk varmekapasitet for luft [$J/(kg \ ^\circ C)$].

ρ : Spesifikk masse for luft [kg/m^3].



figur 1.1

Vi antar at alle størrelser er konstante, unntatt de tidsvariable x_1, x_2, y, v, u .

I det følgende bør du, for å forenkla arbeidet, innføre en koeffisient $\beta = \gamma\rho q$.

Til og med deloppgave (f) nedenfor er det ingen tilbakekopling (dvs. åpen sløyfe).

a) (3 %) Finn tidsforsinkelsen τ som funksjon av tre av de oppgitte koeffisienter.

b) (10 %) Prosessens modell blir $y = h_u u + h_v v$, med

$$h_u = K_u \frac{1}{1 + T_1 s} e^{-\tau s}, \quad h_v = K_v \frac{1 + T_2 s}{1 + T_1 s} e^{-\tau s} \quad (1.1)$$

Det oppgis at $K_v = 1$. Finn K_u , T_1 og T_2 ! (Tips for kontroll: Det oppgis at $T_2 = \frac{\beta}{g + \beta} T_1$
Dermed er $T_2 < T_1$, noe du trenger til oppgave (f) nedenfor.)

I det følgende trenger du ikke å ha greidd oppgave a) og b) for å få full uttelling. Bruk størrelsene K_u , T_1 og T_2 – du skal ikke sette inn noen tallverdier for dem.

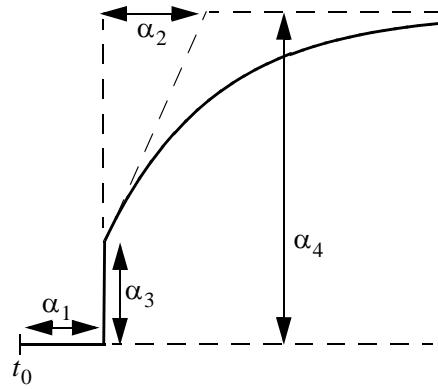
c) (2 %) Kan modellen (1.1) formuleres på tilstandsromform? (Kort, men begrunnet, verbalt svar!)

d) (4 %) Anta at $v = v_0$ og $u = u_0$ = konstante. Finn den tilsvarende konstante temperatur x_{20} i luften. Forklar verbalt hvorfor K_v i (1.1) må være = 1!

e) (5 %) Anta at $v = v_0$ og $u = u_0$ = konstante. Finn den tilsvarende konstante temperatur x_{10} i varmeelementet!

f) (7 %) Anta at $v = v_{01}$ har vært konstant i lengre tid, men så ved tida $t = t_0$ endrer seg som et sprang til en ny, noe større konstant verdi v_{02} . Responsen $y(t)$ er vist til høyre. Hva blir størrelsene α_i som er inntegnet der? Du må ikke begrunne svarene.

(Tips: Sett $u = 0$ i denne oppgaven. Tips til α_3 : begynnelsestidspunktet – se formelsamling.)



g) (5 %) Benytt symbolene h_u og h_v . Tegn blokkdiagram for en reguleringsstruktur med tilbakekopling og seriekompenasjon via en regulator kalt h_r . Referansen for ønsket utgangstemperatur kaller du r .

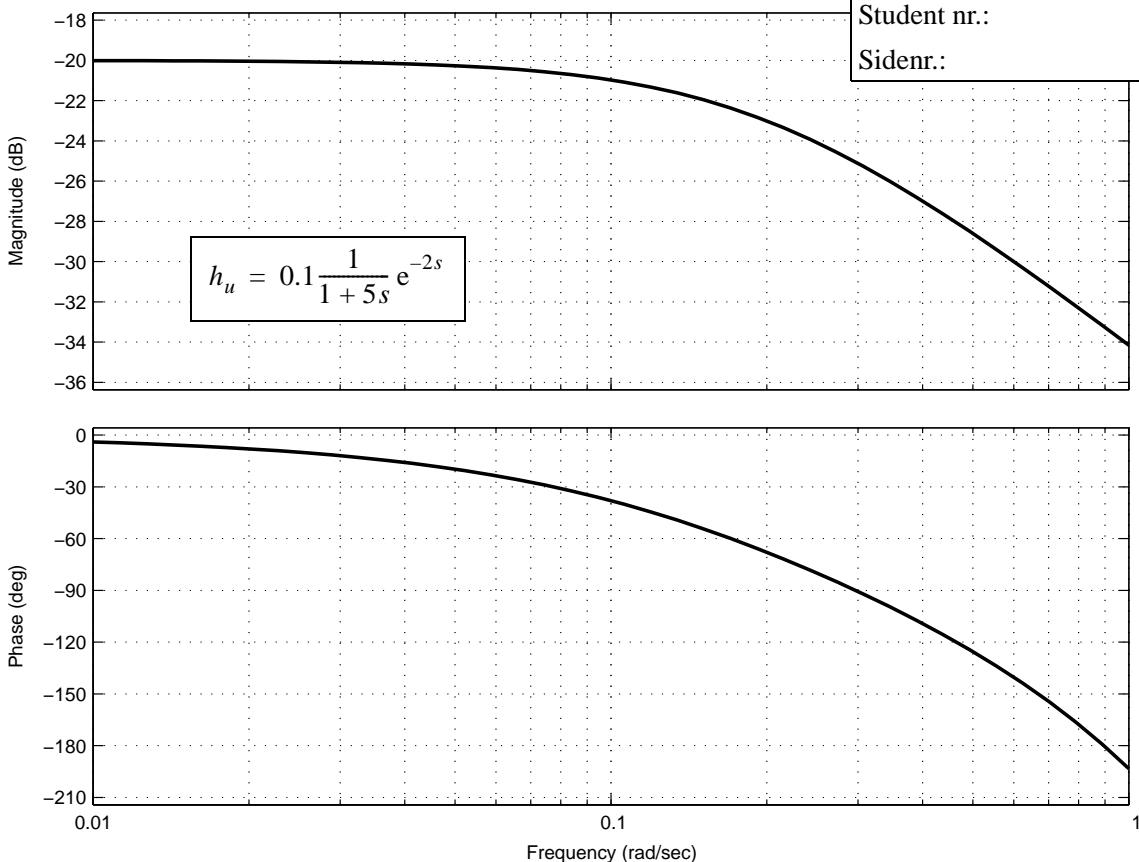
Temperaturen v kan måles. Føy til en foroverkoplingsstruktur med blokken h_f .

h) (5 %) Hva blir den ideelle foroverkoppling h_{fi} ? Angi en mer realistisk foroverkoppling! Hvilken innvirkning har denne foroverkopplingen på reguleringsystemets stabilitet?

i) (8 %) Anta nå at du ikke har foroverkoppling. Finn et uttrykk for det stasjonære avviket etter et enhetssprang i v . Forutsett proporsjonalregulering og regulatorforsterkning K_p . Alternativt: hvis h_r = PI-regulator, da vil den fjerne det stasjonært avviket. Forklar det verbalt, eller vis det!

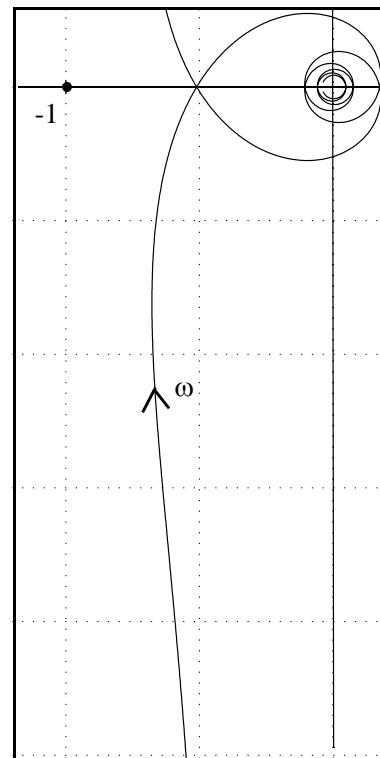
j) (8 %) Med tallverdier innsatt for et slikt system, blir Bode-diagrammet for h_u som vist i figur 1 på neste side. Finn verdier for K_p og T_i i en PI-regulator ved hjelp av Ziegler-Nichols' metode (se tabell i formelsamling). Legg ved Bode-diagrammet med påtegninger, for å vise hvordan du har kommet fram til svaret!

Fag nr.: SIE3005
 Dato: 15. august 2003
 Student nr.:
 Sidenr.:



figur 1.2

- k) (7 %) Med ferdig innstilt PI-regulator blir Nyquistkurven for $h_0 = h_r h_u$ som vist i figur 1.3. Forklar hvordan du kan se av Nyquistkurven at det er integralvirkning i regulatoren! Hvordan kan du se av kurven at det er en tidsforsinkelse i h_0 ? Finn forsterkningsmarginen ΔK fra figuren. Er den akseptabel? Vis også i figuren hvordan du kan avlese fasemarginen ψ , men du trenger ikke finne den.

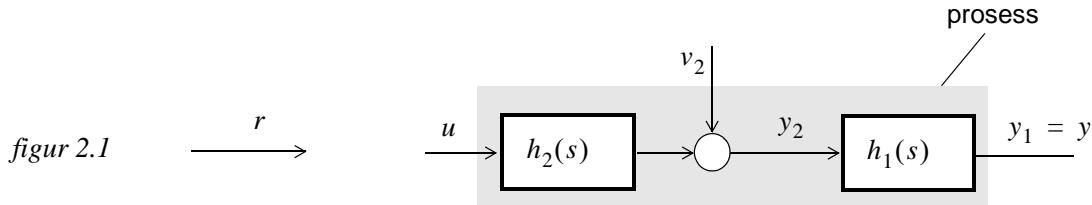


figur 1.3

- l) (4 %) Vi skal til slutt forutsette en annen driftssituasjon, nå med stort variasjonsområde for referansetemperaturen r . Da blir en lineær prosessmodell utilstrekkelig. Du skal identifisere, og kort forklare om, én ulinearitet i prosessen som man da må ta hensyn til! (Tips: Det er flere ulineariteter.)

Oppgave 2 (12 %)

En prosess kan deles opp i to delsystemer i serie slik som vist i figur 2.1. En forstyrrelse angriper ved inngangen til det høyre delsystemet. Man velger kompensasjon ved intern tilbakekopling (kaskadereguleringssystem) for prosessen. Referansen som y skal følge, er r .



- a) (6 %) Kall regulatorene for h_{r1} og h_{r2} , og tegn blokkdiagram for prosessen med kompensasjon ved intern tilbakekopling.
- b) (6 %) Forklar hvorfor reguleringsegenskapene – både når det gjelder å undertrykke forstyrrelsen og når det gjelder å følge referansen – kan gjøres bedre med bruk av kompensasjon ved intern tilbakekopling, sammenliknet med bruk av vanlig seriekompenasjon.

Oppgave 3 (8%)

Det skal lages en diskret PI-regulator. Tastetida (“samplingstida”) er $T = 0.5$.

Regulatorparametrene er $K_p = 2$ og $T_i = 10$.

Svaret skal uttrykkes som en rekursiv formel, hvor du skal finne de tre koeffisientene f_1, g_0, g_1 :

$$u[k+1] = f_1 u[k] + g_0 e[k+1] + g_1 e[k] \quad (3.1)$$

Oppgave 4 (2 %)

Når trengs anti-overlading (“anti-windup”)? Kort verbalt svar!

Oppgave 5 (10 %)

Gitt prosessen beskrevet av $\ddot{y} + \omega^2 y = u + \beta \dot{u}$, der ω^2, β er konstanter > 0 . (5.1)

a) (2 %) Finn transferfunksjonen $h(s) = \frac{y}{u}(s)$

b) (4 %) Vi søker $\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c}^T$ i en tilstandsrommodell som representerer systemet:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{Ax} + \mathbf{bu} & \text{Vis at en slik } \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{bmatrix}. \text{ Finn de tilhørende } \mathbf{b} \text{ og } \mathbf{c}^T. \\ y &= \mathbf{c}^T \mathbf{x} \end{aligned} \quad (5.2)$$

c) (2 %) Finn egenverdiene og en egenvektormatrise \mathbf{M} .

d) (2 %) Hva betyr koeffisienten β for prosessens stabilitet? Er prosessen asymptotisk stabil, marginalt stabil eller ustabil? Begrunn svaret!

Formelsamling

(4 sider, noe av dette trenger du kanskje...)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sf(s) \quad (\text{V.1})$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sf(s) \quad (\text{V.2})$$

$$\mathcal{L} [\dot{f}(t)] = sf(s) - f(t)|_{t=0}, \quad \mathcal{L} [\ddot{f}(t)] = s^2 f(s) - sf(t)|_{t=0} - \dot{f}(t)|_{t=0} \quad (\text{V.3})$$

$$\text{Residuregning: } f(t) = \sum_{a_i} \frac{1}{(m-1)!} \left[\frac{\partial^{m-1}}{\partial s^{m-1}} \{(s-a_i)^m f(s) e^{st}\} \right]_{s=a_i} \quad (\text{V.4})$$

$$|\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}| = 0 \quad (\text{V.5})$$

$$\text{Rettlinja bevegelse: } f = ma \quad \text{Rotasjon: } d = J\dot{\omega} \quad (\text{V.6})$$

Folding (konvolusjon):

$$y(t) = h(t)*u(t) = \int_0^t h(t-\tau)u(\tau)d\tau, \quad \mathcal{L} [h(t)*u(t)] = h(s)u(s) \quad (\text{V.7})$$

$$\Delta \dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{\mathbf{x}^p, \mathbf{u}^p} \Delta \mathbf{x} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} \Big|_{\mathbf{x}^p, \mathbf{u}^p} \Delta \mathbf{u}$$

Linearisering:

$$\Delta \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \Delta \mathbf{x} + \mathbf{B} \Delta \mathbf{u}, \quad \mathbf{A} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{\mathbf{x}^p, \mathbf{u}^p} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}_{\mathbf{x}^p, \mathbf{u}^p} \quad (\text{V.8})$$

Gitt en åpen prosess $h_0(s)$ med N_p poler i høyre halvplan.

Vektoren $1 + h_0(j\omega)$ får en netto vinkeldreining lik

$$\Delta\angle(1 + h_0) = -2\pi(N_n - N_p) \quad \text{når } \omega \text{ går fra } -\infty \text{ til } \infty. \quad (\text{V.9})$$

N_n blir da antall poler i h.h.p. for det lukkede (tilbakekoppled) system.

Merk: Dreieretning er definert positiv mot urviseren.

Ziegler-Nichols metode

Regulator	K_p	T_i	T_d
P	$0.5K_{pk}$	∞	0
PI	$0.45K_{pk}$	$T_k/1.2$	0
PID	$0.6K_{pk}$	$T_k/2$	$T_k/8$

(V.10)

(Tips: $T_k = 2\pi/\omega_{180}$, dvs lengden av en svingeperiode i den stående svingningen.)

$$s \text{ erstattes med } \frac{2z-1}{Tz+1}, \text{ der } z \text{ betyr tidsforskyving, dvs. } zx[k] = x[k+1] \quad (\text{V.11})$$

$$e^{-\tau s} \approx \frac{1 - \frac{\tau}{2}s}{1 + \frac{\tau}{2}s} \quad (\text{V.12})$$

$$\text{PI-regulator: } h_r = K_p \frac{1 + T_i s}{T_i s} \quad (\text{V.13})$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & & \ddots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & \ddots & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \cdots & -\alpha_{n-2} & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \cdot \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{c}^T = [\rho_0 \ \rho_1 \ \rho_2 \ \cdots \ \rho_{n-1}]$$

(V.14)

gir $\frac{y}{u}(s) = h(s) = \frac{\rho_{n-1}s^{n-1} + \dots + \rho_1s + \rho_0}{s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \dots + \alpha_1s + \alpha_0}$

$$x[\text{dB}] = 20\log_{10}(x) \quad (\text{V.15})$$

Oppgave 1a) Fra fig. 1.1. ser vi at volumet mellom varmeelement og temp.-måling er $A \cdot l = V$.

I høyel av T fidsenheker fylles dette volumet med ugy luft $\Rightarrow q \cdot T = V = A \cdot l \Rightarrow T = \underline{\underline{A \cdot l / q}}$

1b) Effektbalanse rundt varmeelementet:

$$C \dot{x}_1 = -g(x_1 - x_2) + G \cdot u \quad (1)$$

(akkumuleret) (bortleddet) (tilfort)

Dessuten: All varme som strømmer ut fra elementet tas opp av forbistrømmende luft:

$$g(x_1 - x_2) = \gamma p q (x_2 - v) \quad (2)$$

Løser (2) m.h.p. x_1 og bruker $\beta = \gamma p q$:

$$x_1 = \frac{g + \beta}{g} x_2 - \frac{\beta}{g} v \quad (3)$$

Setter (3) inn i (1) og Laplace transformerer i:

$$C \frac{g + \beta}{g} s \cdot x_2 - C \frac{\beta}{g} s \cdot v = -g \left(\frac{g + \beta}{g} x_2 - \frac{\beta}{g} v - x_2 \right) + G \cdot u \quad (4)$$

$$\Rightarrow C \frac{g + \beta}{g} s \cdot x_2 + \beta x_2 = (\beta + C \frac{\beta}{g} s) v + G \cdot u \quad (5)$$

$$\Rightarrow x_2 = \frac{G}{C \frac{g + \beta}{g} s + \beta} \cdot u + \frac{\beta (1 + C \frac{\beta}{g} s)}{C \frac{g + \beta}{g} s + \beta} \cdot v$$

$$\Rightarrow x_2 = \frac{G/\beta}{C \frac{g + \beta}{g\beta} s + 1} \cdot u + \frac{1 + C/g \cdot s}{C \frac{g + \beta}{g\beta} s + 1} \cdot v$$

$$\Rightarrow T_1 = C \frac{g + \beta}{g\beta}, \quad K_u = \frac{G}{\beta}, \quad T_2 = \frac{C}{g}$$

{Med $y = e^{-T_2 s} \cdot x_2$, følger (1;1)}

- 2 -

1c) Nei, den inneholder en tidsforsinkelse.

Alternativt: Tidsforsinkelsen e^{-Ts} kan tilmaunes med et rasonabelt utbykki i s. Da går det.

1d) $x_{20} = y_0$ fordi tidsforsinkelsen ikke spiller noen rolle når de variable er konstante.

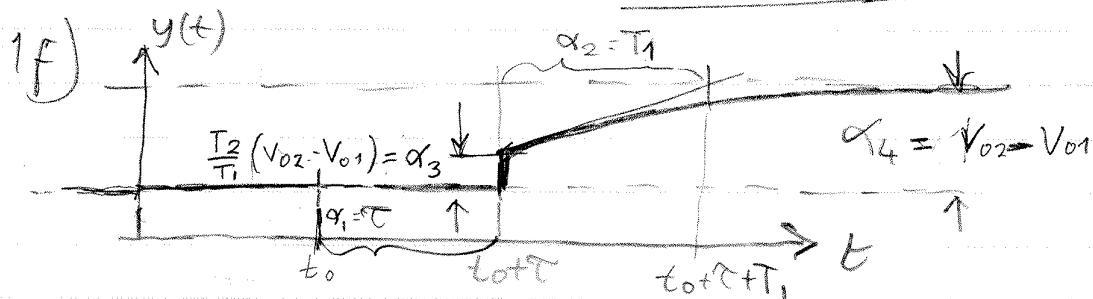
$$\text{Da blir } x_{20} = h_u(s) \Big|_{s=0} \cdot u_0 + h_v(s) \Big|_{s=0} \cdot v_0 = K_u \cdot u_0 + V_0$$

Vi setter $u_0 = 0$ (superposisjonsprinippet gir der):

Ingen effekt på systemet og konstant temperatur v_0 inn. Da må $x_{20} = y_0$ være $= V_0 \Rightarrow K_v = 1$.

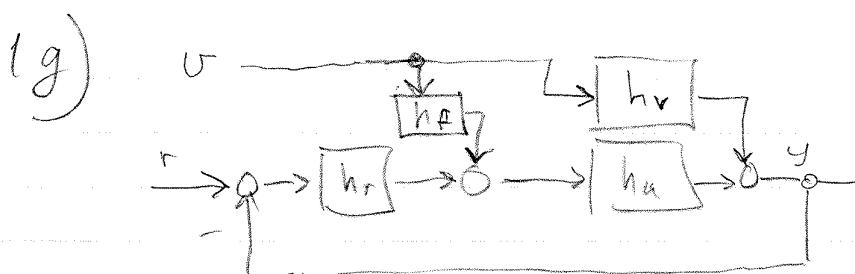
1e) Vi har fra (3) at

$$x_1 = \frac{g+\beta}{g} x_2 - \beta v \Rightarrow x_{10} = \frac{g+\beta}{g} \left(\frac{G}{\beta} \cdot u_0 + V_0 \right) - \frac{\beta}{g} V_0 \\ = \underline{\underline{\frac{g+\beta}{\beta g} G u_0 + V_0}}$$



Vi setter $u = 0$, og bruker $h'_v = K_v \frac{1 + \frac{T_2 s}{T_1 s}}{1 + T_1 s}$ (uten tidsforsinkelse).

Begynnlesverditeoren: $\lim_{s \rightarrow \infty} x_2(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} s h'_v(s) \frac{V_{02} - V_{01}}{s} = \frac{T_2}{T_1} (V_{02} - V_{01}) = \alpha_3$



$$1h) Vi krevrer $h_f h_u + h_v = 0 \Rightarrow h_f = -\frac{h_v}{h_u} = \underline{\underline{\frac{-1}{K_u} (1+T_2 s)}}$$$

- 3 -

1h) (forts.) Mer realistisk: $- \frac{1}{K_u} \frac{1 + T_1 s}{1 + \alpha T_2 s}, 0 < \alpha < 1$

Tingen inverkar \hat{p} på systemets stabilitet.

1j) Stabilitetskriteriet: $e(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} \hat{s}(-h_v N) \cdot \frac{1}{\hat{s}}$

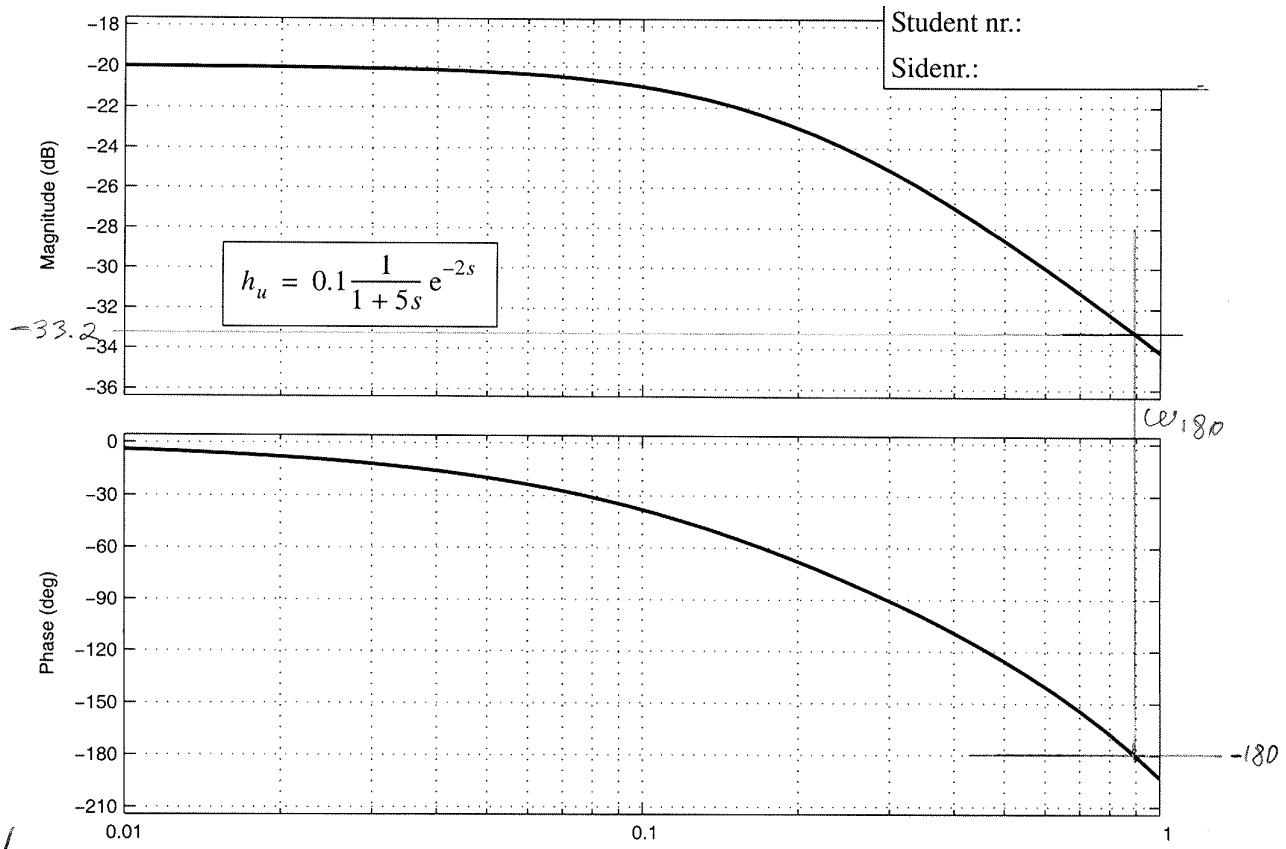
$$= \lim_{s \rightarrow 0} \left(\frac{1 + T_2 s}{1 + T_1 s} e^{-T_2 s} \cdot \frac{1}{1 + h_o(s)} \right) = \lim_{s \rightarrow 0} \left(\frac{1}{1} \cdot 1 \cdot \frac{N_o(s)}{h_o(s) + t_o(s)} \right) =$$

$$= \lim_{s \rightarrow 0} \left(\frac{1 + T_1 s}{(1 + T_1 s) + K_p K_u e^{-\infty}} \right) = - \frac{1}{1 + K_p K_u}$$

Med integralvirkning (Pi-regulator) blir sistet mellomenultat venfor:

$$- \lim_{s \rightarrow 0} \left(\frac{T_i s (1 + T_1 s)}{T_i s (1 + T_1 s) + K_p (1 + T_1 s) K_u e^{-\infty}} \right) = 0$$

1j)



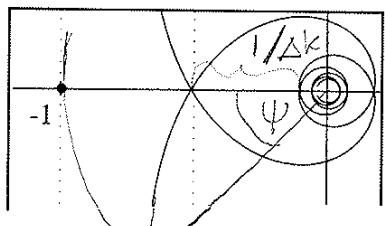
$K_p k = 33.2$ [dB] ger stående svängning, $\omega_{180} = 0.9$

$$\Rightarrow \text{PI-reg. för } K_p = \underline{\underline{26.3 \text{ dB}}} = \underline{\underline{20.6}}, T_i = \frac{2\pi}{1.2 \cdot \omega_{180}} = 5.82$$

$= 0.45 \cdot K_p$

1 b) $|h_0(j\omega)| \rightarrow \infty$ når $\omega \rightarrow 0$ \Rightarrow det må være en integrasjon i h_0 . Siden det ikke er noen i h_0 , må den være i h_r .

Tidsforsinkelsen sees av spiralformen når ω øker.



sirkelbue
med $R=1$

$$1/\Delta k \approx 0.5 \\ \Rightarrow \underline{\Delta k = 2 = 6 \text{ dB}}$$

Dette er akseptabel Δk .

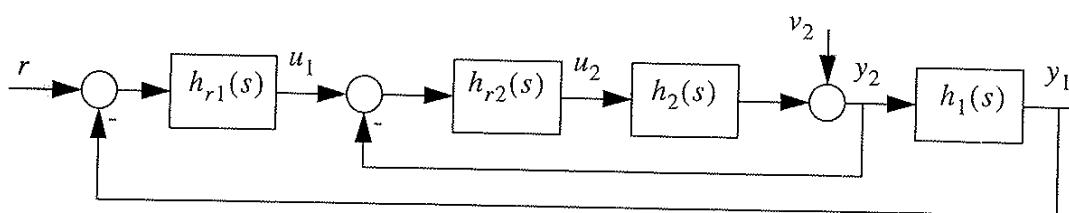
Hvordan finne ψ sees av
figur til venstre.

1 c) To ulineariteter skal nevnes her:

(i) Effekten er proporsjonal med spenningsen kvadrat, dvs. $P = \frac{U^2}{R} \Rightarrow$ ulinear ladd i pådraget

(ii) Hvis $x_2 \gg v$, dvs. kraftig oppvarming, vil
hunla utvide seg merkbart etter varmeelementet.
Dette betyr at tidsforsinkelsen T blir en funksjon
av $x_2 \Rightarrow$ ulinearitet.

2 a)



b) Ved riktig valg av $h_{r2}(s)$ kan man oppnå en reguleringsgrad $N_2(s) = \frac{1}{1 + h_2(s)h_{r2}(s)} \ll 1$ for den indre sløyfen, noe som undertrykker forstyrrelsen kraftig før den virker på den ytre sløyfen. Riktig $h_{r2}(s)$ gir også $M_2(s) = \frac{h_2(s)h_{r2}(s)}{1 + h_2(s)h_{r2}(s)} \approx 1$ med stor båndbredde, noe som bedrer egenskapene til den ytre sløyfen. Dermed: Høyere båndbredde, bedre stabilitets-egenskaper før det sammelde system.

(og etter)

Oppgave 3) Se læreboka eksempel 11.6 : Alle s

$$\text{i PI-reg. erstattes med } \frac{2z-1}{Tz+1} \Rightarrow u[k] = K_p \frac{\frac{1+T_i(\frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1})}{T_i(\frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1})}}{e[k]}$$

Vi multipliserer med $T(z+1)$ i teller og nevner, og får

$$u[k] = K_p \frac{T(z+1) + 2T_i(z-1)}{2T_i(z-1)} e[k]$$

Dette gir

$$2T_i(z-1)u[k] = K_p(T(z+1) + 2T_i(z-1))e[k] \Leftrightarrow$$

$$u[k+1] - u[k] = \frac{K_p}{2T_i}(Te[k+1] + Te[k] + 2T_ie[k+1] - 2T_ie[k]) \Leftrightarrow$$

$$u[k+1] = u[k] + K_p \left(\left(1 + \frac{T}{2T_i}\right)e[k+1] - \left(1 - \frac{T}{2T_i}\right)e[k] \right)$$

Innsett tallverdier $\Rightarrow f_1 = 1, g_0 = 2.05, g_1 = -1.95$

Oppgave 4) Anti-overlading kreves når det er integral virking i regulatoren og det er metring pådraget.

Oppgave 5)

a) Laplacetransformer på begge sider av (5.1) :

$$s^2y + \omega_0^2y = u + \beta s \cdot u \Rightarrow \frac{y}{u} = h(s) = \frac{1 + \beta s}{s^2 + \omega_0^2} \quad (1)$$

b) Bruker fasvariabel form, (V.14) og (1) med $\alpha_0 = \omega_0^2$:

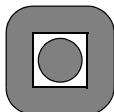
$$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & 0 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, c^T = [1 \ \beta] \quad (2)$$

c) Egenverdiene er pôlene i (1): $\lambda^2 + \omega_0^2 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm j\omega_0$

$$A \underline{m}_1 = \lambda_1 \underline{m}_1 \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} m_{11} \\ m_{21} \end{bmatrix} = +j\omega_0 \cdot \begin{bmatrix} m_{11} \\ m_{21} \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{m}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ j\omega_0 \end{bmatrix}, \underline{m}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -j\omega_0 \end{bmatrix}$$

d) To disklinke pôler på im.-aksen \Rightarrow marginalt stabil.

Kan også sees ut fra imp. respons $h(t)$, fordi $0 < h(\infty) < \infty$



Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet (NTNU)

Faglig kontakt under eksamen: Trond Andresen, tlf. **7359 4358**, mobil **9189 7045**
Han går to veiledningsrunder, ca. kl. 0945 - 1015 og ca. kl. 1115 - 1145

Eksamens i TTK4105 reguleringsteknikk

tirsdag 24. mai 2005

Tid: 0900 - 1300

Denne besvarelsen teller 70% på karakteren

Sensur vil foreligge innen tre uker. Følg med på fagets nettsted for mulig tidligere resultat.

Hjelpemiddelkombinasjon D: Kalkulator med tomt minne tillatt. Ingen trykte eller håndskrevne hjelpebidrag tillatt, unntatt Rottmann.

Prosentallene angir den relative vekt oppgavene tillegges ved bedømmelsen.

Flere spørsmål kan besvares meget enkelt ved å bruke **formelsamlinga** bakerst i oppgavesettet. **Se kjapt gjennom den før du begynner.** Sjekk den alltid før du gir opp! Men du må forklare hvordan du bruker noe, når du henter det fra formelsamlinga. Noen spørsmål skal besvares ved å **måle ut verdier på figurer i oppgavesettet** – i slike tilfeller godtas en viss "måleunøyaktighet"! Der hvor rubrikk for studentnr. etc. er angitt på sider i oppgavesettet, **kan man tegne i figurer og levere det påtegnede arket som en del av besvarelsen.**

STUDENTS MAY ANSWER THIS EXAM IN ENGLISH IF THAT IS PREFERRED.

Oppgave 1 (46 %)

Figur 1.2 viser frekvensresponsen i Bodediagram for en prosess $h_u(s)$, med heltrukken linje.

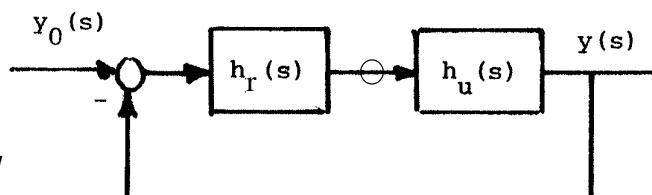
- a) (5 %) Du skal foreslå en transferfunksjon for $h_u(s)$. Det oppgis at den inneholder tre ledd med tidskonstanter T_1, T_2, T_3 og en forsterkning K .

Angi en tallverdi for K . Tidskonstantene trenger du ikke angi tallverdier for, men du skal oppgi hvilken som er minst, middels og størst. (Tips: Det er to første ordens ledd i nevner, og ett i teller, dessuten er $h_u(s)$ ikke-minimum-fase.)

NB: *Du kan løse resten av oppgave 1 sjøl om du ikke greier dette punktet. :-)*

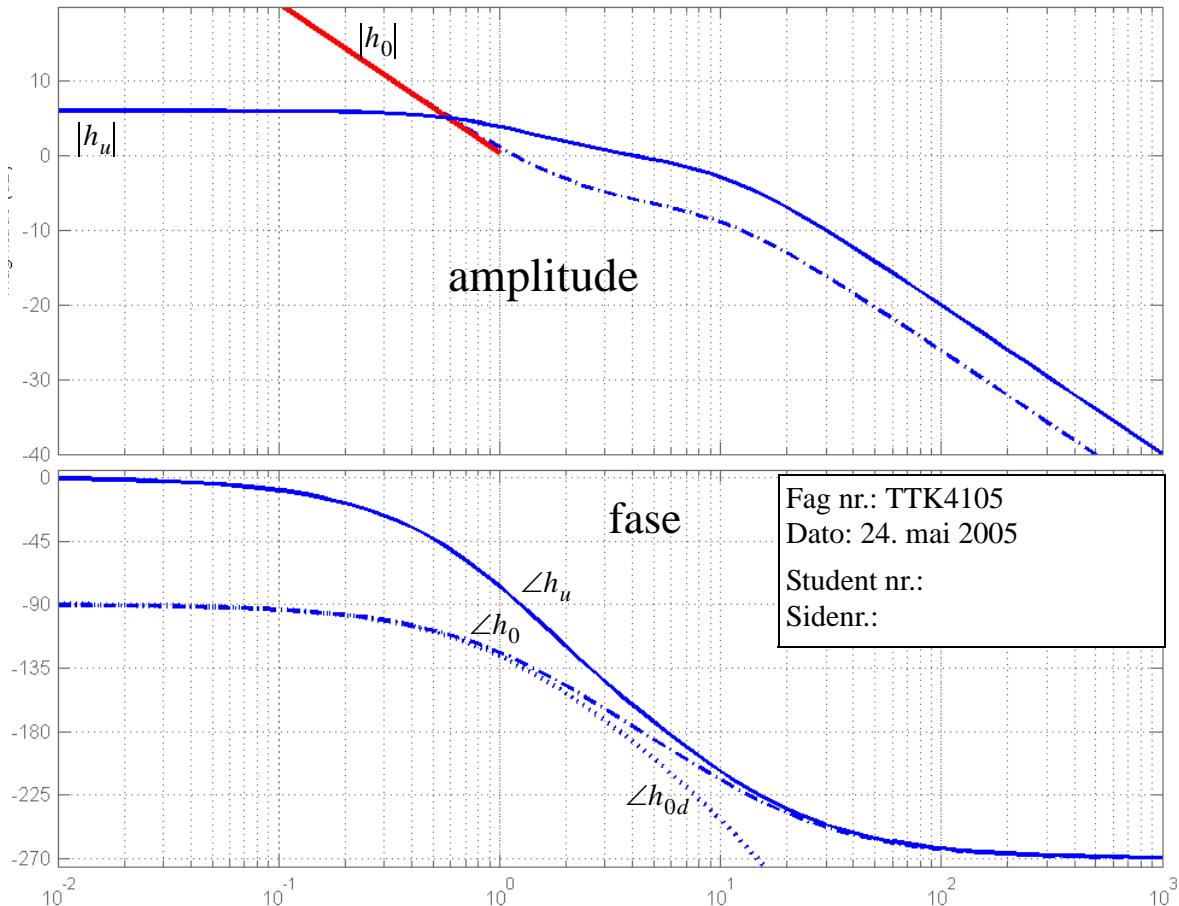
Prosesseen ønskes regulert med seriekompensasjon som vist i figur 1.1 .
(Ignorér intil videre summasjonspunktet som er antydet foran $h_u(s)$.)

figur 1.1



- b) (2 %) Man prøver seg med en proporsjonalregulator $h_r(s) = K_p$, og setter $K_p = 1$. Hva er den viktigste grunn til at verdien $K_p = 1$ er helt uakseptabel? Begrunnet, kort og verbalt svar, som kan finnes ved å studere figur 1.2!

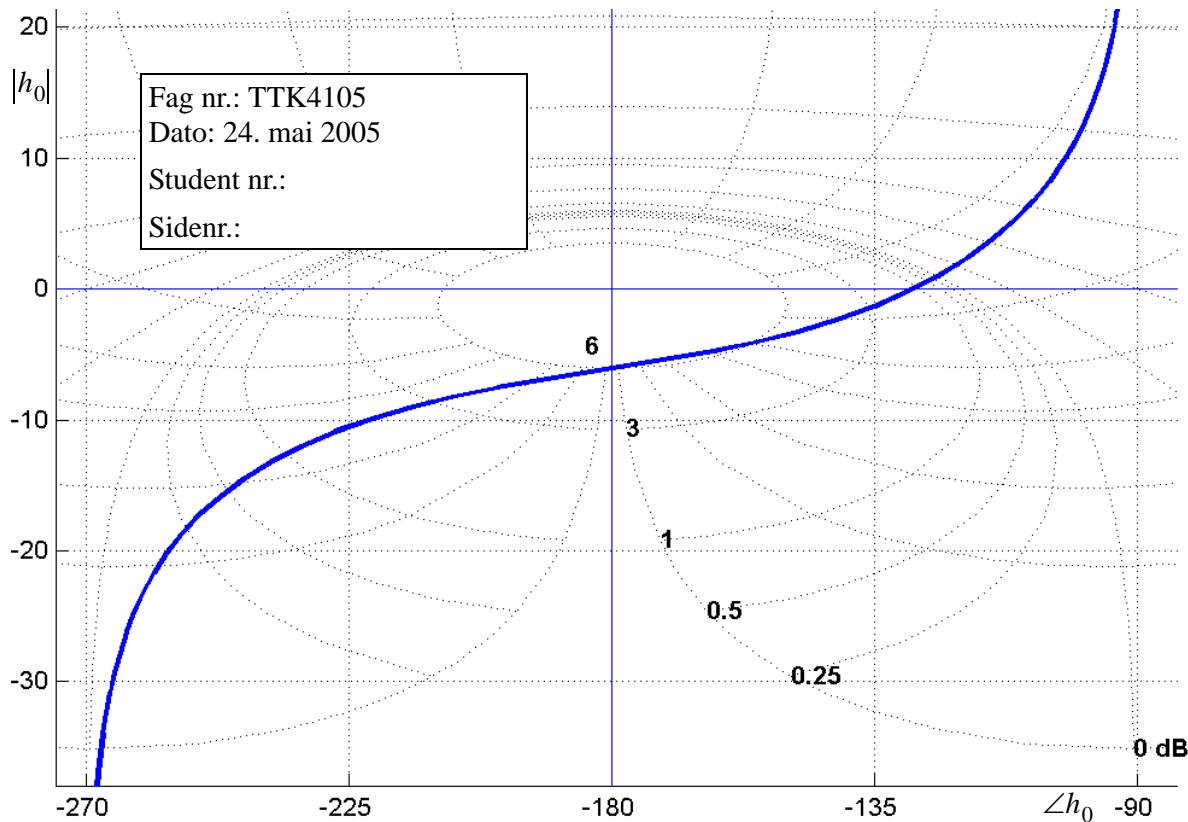
- c) (5 %) Det velges en PI-regulator $h_r(s) = K_p \frac{1 + T_i s}{T_i s}$. Forklar kort prosedyren for å finne K_p og T_i ved hjelp av Ziegler-Nichols' regler. Finn så K_p og T_i .



figur 1.2

- d) (4 %) De stiplede linjene viser Bodediagram for $h_0 = h_r h_u$, med parametre valgt i følge punkt c) ovenfor. Hva blir forsterknings- og fasemargin ΔK og ψ for reguleringssystemet? ΔK skal oppgis i [dB].
- e) (4 %) Forklar hvorfor $\angle h_0$ har 90° dårligere faseforløp enn $\angle h_u$ ved lave frekvenser. Forklar hvorfor $\angle h_0$ og $\angle h_u$ faller sammen ved høye frekvenser.
- f) (4 %) Den venstre del av asymptotene for $|h_0|$ er vist i figur 1.2. Finn frekvensen hvor denne skjærer 0-dB-linja, uttrykt ved K_p , T_i og K . (Den skal altså ikke leses av numerisk.)
- g) (4 %) Tegn inn i figur 1.2 asymptotene for forløpet til $|N(j\omega)|$ ved frekvenser noe mindre enn h_0 's kryssfrekvens ω_c . (Tips: $N = 1/(1 + h_0)$.) Tegn inn asymptotene for frekvenser noe over ω_c . Levér dette påtegnede ark som en del av besvarelsen.

- h) (6 %) Se Nichols-diagrammet med h_0 inntegnet, i figur 1.3. Markér hva som er forsterknings- og fasemargin ΔK og ψ . Levér også dette påtegnede ark som en del av besvarelsen. Hva blir maksimalverdien av $|N(j\omega)|$? Er dette en rimelig verdi? Markér verdien, og ved hvilken frekvens den inntreffer, med et tydelig punkt i Bodediagrammet i figur 1.2. Skissér inn $|N(j\omega)|$ grovt i figur 1.2 basert på dette og asymptotene fra punkt g) ovenfor.



figur 1.3

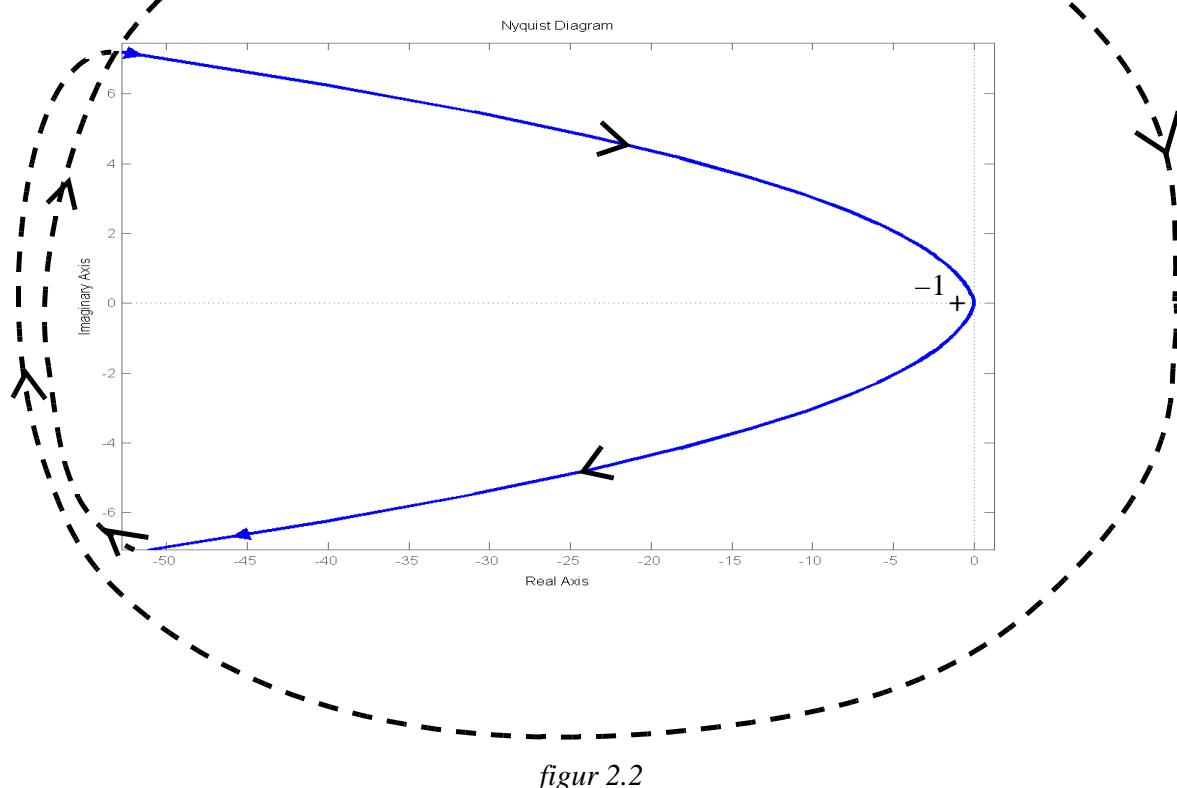
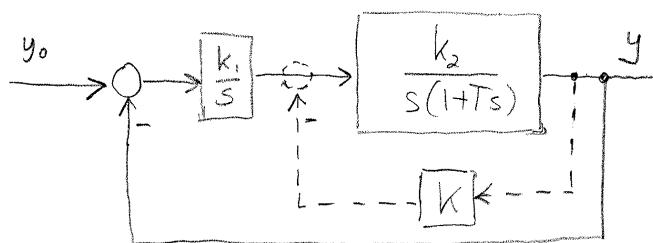
- i) (4 %) **(Generelt spørsmål, ikke knyttet spesielt til denne oppgaven:)**
 N har to forskjellige tolkninger: *Reguleringsgrad* og *avviksforhold*. Forklar begge begrep. Det kan f.eks. gjøres med utgangspunkt i et enkelt blokkskjema som inneholder tre blokker, kalt h_r , h_u og h_v .
- j) (4 %) PI-regulatoren skal implementeres diskret. Den prikkede grafen i figur 1.2 viser det nye faseforløpet $\angle h_{0d}$ når virkninga av holdelementet er tatt med (tips: virkninga svarer omrent til en tidsforsinkelse lik halve tastetida). Er tastetida akseptabelt liten? Finn ved hjelp av de oppgitte grafer for $\angle h_0$ og $\angle h_{0d}$, tastetida T for den diskrete regulatoren. (Tips: det er enklest å måle den størrelsen du trenger ved frekvensen 10.)
- k) (4 %) Anta at det kommer inn en målbar forstyrrelse v i summasjonspunktet som er antydet i figur 1.1. Hva blir den ideelle forverkopling h_{fi} ? (Tips: svaret er ytterst enkelt, og kan finnes meget raskt ...)

Oppgave 2 (24 %)

Gitt systemet i figur 2.1. Ignorér den stiplede tilbakekopplinga inntil videre. Konstantene k_1 , k_2 og T er alle positive.
Vi har

$$h_0(s) = \frac{k_1 k_2}{s^2(1+Ts)}$$

figur 2.1



figur 2.2

- a) (5 %) Figur 2.2 viser Nyquistkurven (polardiagrammet) for h_0 , for ett sett av parametre k_1 , k_2 og T . Grafen vil ha samme kvalitative forløp for alle k_1 , k_2 og $T > 0$. Den stiplede delen av grafen indikerer en uendelig stor "sirkel". Forklar hvorfor det lukkede system i figur 2.1 er ustabil. Hvor mange poler har det lukkede system i høyre halvplan!
- b) (5 %) Systemet kan stabiliseres ved å innføre en indre tilbakekoppling som er indikert stiptet i figur 2.1. Finn ved hjelp av Rouths kriterium for hvilke K det blir stabilt! (Tips: Det blir stabilt bare K er stor nok!)

c) (5 %) Anta at K er slik at systemet er stabilt. Referansen er en rampefunksjon med Laplacetransform $y_0(s) = 1/s^2$. Finn det stasjonære avviket $e(t = \infty)$.

d) (5 %) Med $K > 0$, skal du formulere systemet i figur 2.1 på tilstandsromform. Finn A, b, c^T i

$$\dot{x} = Ax + by_0, \quad y = c^T x. \quad (2.1)$$

e) (4 %) Anta at blokka med K modifiseres slik at utgangen på blokka blir $Ky|y|$, ikke Ky som til nå. Reguleringssystemet er nå ulineært.

På referansen settes signalet $y_0(t) = \delta(t)$ (en impuls).

Vil systemet noensinne komme til ro i $y = 0$?

Vil y svinge seg ut mot uendelig amplitud?

(Du skal gjøre enkle verbale betrakninger her, uten linearisering. Se dette punktet i sammenheng med punkt b) ovenfor).

Formelsamling

(5 sider, noe av dette trenger du kanskje...)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sf(s), \quad \text{og} \quad \lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sf(s) \quad (\text{V.1})$$

$$\mathcal{L} [\dot{f}(t)] = sf(s) - f(0) \quad , \quad \mathcal{L} [\ddot{f}(t)] = s^2 f(s) - sf(0) - \dot{f}(0) \quad (\text{V.2})$$

$$\text{Residuregning: } f(t) = \sum_{a_i} \frac{1}{(m-1)!} \left[\frac{\partial^{m-1}}{\partial s^{m-1}} \{(s-a_i)^m f(s) e^{st}\} \right]_{s=a_i} \quad (\text{V.3})$$

$$\text{Tidsforsinkelse: } \mathcal{L} [f(t-\tau)] = e^{-\tau s} f(s) \quad (\text{V.4})$$

$$|\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}| = 0 \quad (\text{V.5})$$

$$\text{Rettlinja bevegelse: } f = ma \quad \text{Rotasjon: } d = I \dot{\omega} \quad (\text{V.6})$$

Folding (konvolusjon):

$$y(t) = h(t)*u(t) = \int_0^t h(t-\tau)u(\tau)d\tau, \quad \mathcal{L} [h(t)*u(t)] = h(s)u(s) \quad (\text{V.7})$$

$$\text{Linearisering: } \Delta \dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{\mathbf{x}^p, \mathbf{u}^p} \Delta \mathbf{x} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} \Big|_{\mathbf{x}^p, \mathbf{u}^p} \Delta \mathbf{u}, \quad \mathbf{A} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{\mathbf{x}^p, \mathbf{u}^p} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}_{\mathbf{x}^p, \mathbf{u}^p} \quad (\text{V.8})$$

$$\Delta \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \Delta \mathbf{x} + \mathbf{B} \Delta \mathbf{u}$$

Gitt en åpen prosess $h_0(s)$ med N_p poler i høyre halvplan.

Vektoren $1 + h_0(j\omega)$ får en netto vinkeldreining lik

$$\Delta \angle(1 + h_0) = -2\pi(N_n - N_p) \quad \text{når } \omega \text{ går fra } -\infty \text{ til } \infty \quad (\text{V.9})$$

N_n blir da antall poler i h.h.p. for det lukkede (tilbakekoppled) system.

Merk: Dreieretning er definert positiv *mot* urviseren.

$$x[\text{dB}] = 20 \cdot \log_{10}(x) \quad (\text{V.10})$$

Rouths kriterium:

For stabilitet kreves først at alle koeffisienter i det karakteristiske polynom (nevnerpolynomet i det lukkede system) må ha samme fortegn. Dessuten må alle koeffisienter i den venstre kolonne i Rouths tabell (nedenfor) ha samme fortegn.

Kall det karakteristiske polynom: $\alpha_n s^n + \alpha_{n-1} s^{n-1} + \dots + \alpha_1 s + \alpha_0$

Rouhs tabell blir da (i tilfellet vist her er n et oddetal):

$$\begin{array}{cccc}
 \alpha_n & \alpha_{n-2} & \dots & \alpha_1 \\
 \alpha_{n-1} & \alpha_{n-3} & \dots & \alpha_0 \\
 \beta_{n-1} & \beta_{n-3} & \dots & \\
 \zeta_{n-1} & \zeta_{n-3} & \dots & \\
 \cdot & & & \\
 \cdot & & & \\
 \cdot & & & \\
 \sigma_{n-1} & \sigma_{n-3} & & \\
 \eta_{n-1} & & & \\
 \omega_{n-1} & & & \\
 \end{array} \quad (\text{V.11})$$

De nye koeffisientene i tabellen framkommer etter følgende regler:

$$\begin{aligned}
 \beta_{n-1} &= \frac{\alpha_n \alpha_{n-2} - \cancel{\alpha_{n-1} \alpha_{n-3}}}{\alpha_{n-1}} = \frac{\alpha_{n-1} \alpha_{n-2} - \alpha_n \alpha_{n-3}}{\alpha_{n-1}} \\
 \beta_{n-3} &= \frac{\alpha_n \alpha_{n-4} - \cancel{\alpha_{n-1} \alpha_{n-5}}}{\alpha_{n-1}} = \frac{\alpha_{n-1} \alpha_{n-4} - \alpha_n \alpha_{n-5}}{\alpha_{n-1}}
 \end{aligned}$$

osv.

Ziegler-Nichols' regler :

(V.12)

Regulator	K_p	T_i	T_d
P	$0.5K_{pk}$	∞	0
PI	$0.45K_{pk}$	$T_k/1.2$	0
PID	$0.6K_{pk}$	$T_k/2$	$T_k/8$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \cdots & -\alpha_{n-2} & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{c}^T = [\rho_0 \ \rho_1 \ \rho_2 \ \cdots \ \rho_{n-1}]$$

(V.13)

gir

$$\frac{y}{u}(s) = h(s) = \frac{\rho_{n-1}s^{n-1} + \dots + \rho_1s + \rho_0}{s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \dots + \alpha_1s + \alpha_0}$$

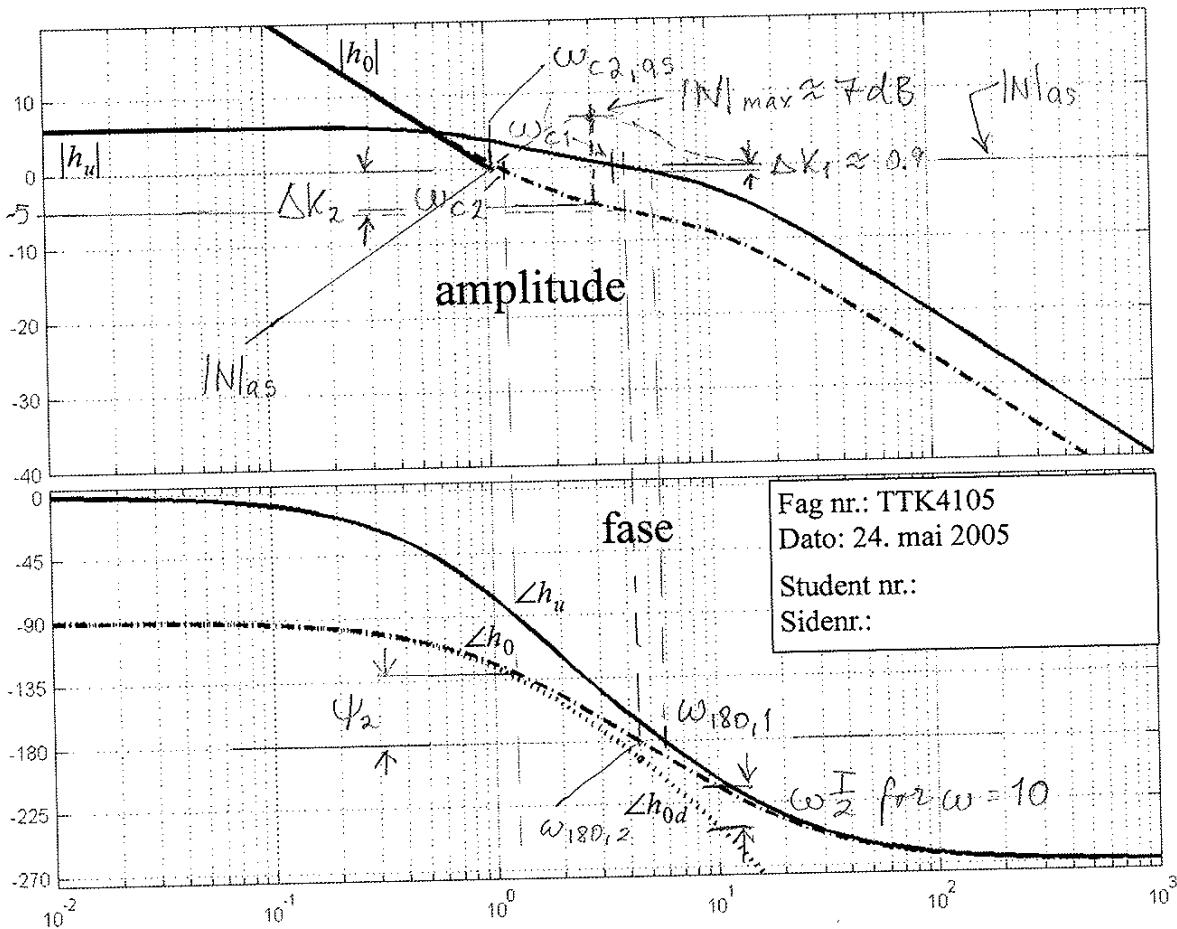
Løsningsforslag eksamen i TTK4105
Reguleringsteknikk, 24. mai 2005

(a) Amplituden knekker opp nedenfor
fortsetter å falle rundt $\omega \approx 3$: Vi har
et ledd av typen $1-T_2 s$ i seller.

$$\text{Prøver } h_u = K \frac{1-T_2 s}{(1+T_1 s)(1+T_3 s)}, \text{ med } T_1 > T_2 > T_3.$$

$\angle h_u(0) = 0$, $\angle h_u(j\omega) = -270^\circ$, stemmer med grafen!
 $|h_u(0)| = 6 \text{ dB} \Rightarrow K = \underline{2}$. $|h_u(j\omega)|_{\omega \gg 1}$ faller
med (-1), stemmer også med grafen!

(b) ω_{c1} er for stor $\omega_{180,1}$. Forsterkningsmargin
 ΔK_1 blir for liten. Systemet er nesten instabilt.



1c) Start systemet med P-regulator og liker K_p .

Då K_p gradvis til systemet kommer i en stående svingsing. Vi finner $\omega_{180} \approx 5\pi$. Tabell V.12

$$\text{gir da } T_i = T_k / 1.2 = \frac{2\pi}{\omega_{180}} / 1.2 = \frac{2\pi}{5\pi} / 1.2 = \underline{\underline{0.92}}$$

$$K_p = 0.45 K_{p,\text{krit}} = 0.45 \cdot 10^{\frac{\Delta K_1}{20}} = 0.45 \cdot 10^{\frac{0.8}{20}} = \underline{\underline{0.495 \approx 0.5}}$$

(Grafene er basert på $T_i = 0.85 \cdot T_k \approx T_k / 1.2$; jeg brukte tilfeldigvis denne varianten da jeg laget grafene. Dette har minimal betydning).

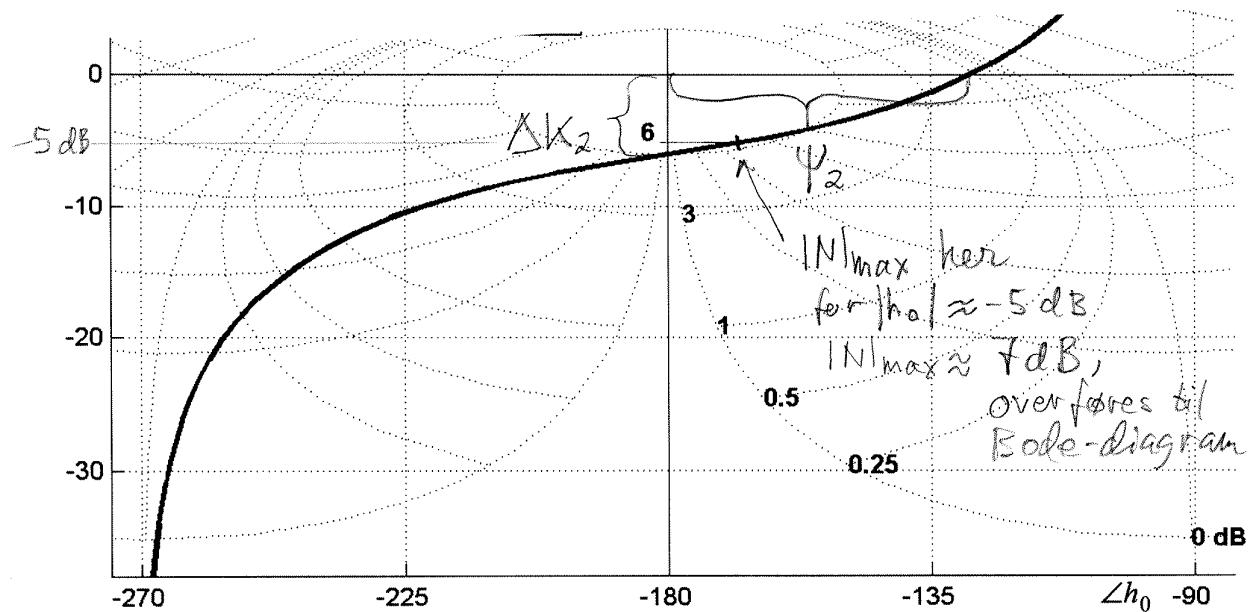
1d) Fra grafen: $\Delta K_2 \approx \underline{\underline{6dB}}$, $\psi_2 \approx \underline{\underline{51^\circ}}$

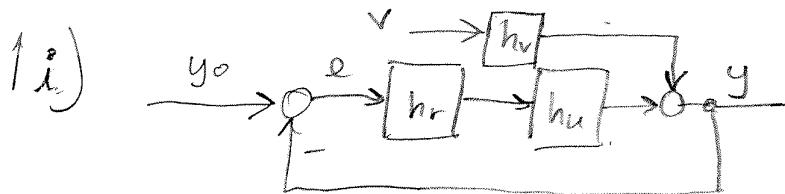
1e) $\angle h_o(0) = \angle h_u(0) - 90^\circ$, fordi $\angle h_r(0) = -90^\circ$
p-g-a integratoren i nevneren. $\angle h_o(j\infty) = \angle h_u(j\infty)$ fordi
PI-regulatoren $\rightarrow K_p$ når $\omega \rightarrow \infty$.

1f) $|h_o(j\omega)|_{as, \omega \ll 1} = \frac{K_p K}{T_i \omega} \Rightarrow \omega_{c2,as} = \frac{K_p K}{\underline{\underline{T_i}}}$

1g) se figur fornige side.

1h)





$$\text{avviksforhold} = \frac{e}{y_0} = N = \frac{1}{1+h_r+h_u} = \frac{1}{1+h_o}$$

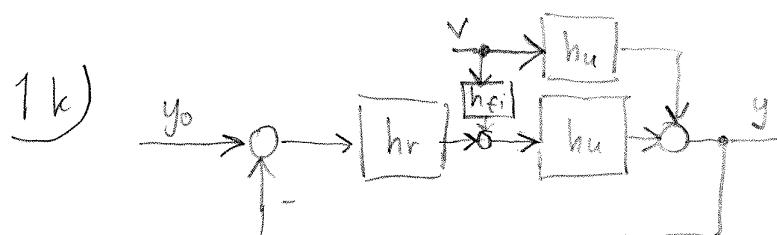
reguleringsgrad: $y_{uten} = h_v \cdot v$, $y_{med} = h_v \cdot N \cdot v$

$\frac{y_{med}}{y_{uten}} = N$. "Med" refererer seg her til "med tilbakekoppling".

1 j) Vi har allerede, for diskret regulering,

$\Delta K_2 = 6 \text{ dB}$, $\varphi_2 = 51^\circ$, $|N|_{\max} = 7 \text{ dB}$. Av grafen ser vi at $\angle h_{od}$ er merkbart mer negativ enn $\omega_{180,2}$ (dvs. for $\angle h_o$). Siden ΔK_2 er på grunn for det vi vil ønske og $|N|_{\max}$ er noe over allerede, bør vi gå noe ned med tidskonstanten for $\angle h_{od}$. Då $\angle h_{od} \approx \angle h_o$ i dette området.

Leser av $\omega \frac{T}{2}$ for $\omega = 10$: $\frac{10T}{2} \approx 30^\circ \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{\pi}{6} \Rightarrow T \approx 0.1$



Vi krever $h_{fi} h_u + h_u = 0 \Rightarrow h_{fi} = -1$

2a) Grafen viser at kritiske punkter

$$2 \text{ ganger} \underset{\text{med univisjon}}{\Delta L(1+h_0)} = -4\pi$$

V_i har ingen poler i h.h.p. for $h_0 \Rightarrow N_p = 0$

(V.9) gir oss $\Delta L(1+h_0) = -2\pi(N_n - N_p)$.

$$\text{Sett inn: } -4\pi = -2\pi(N_n - 0)$$

$\Rightarrow N_n = 2$. Systemet er ustabil med to poler
i h.h.p. for det lukkede system.

2b) Reduserer den indre sløyfa først

$$h_1 = \frac{\frac{k_2}{s(1+Ts)}}{1 + \frac{Kk_2}{s(1+Ts)}} = \frac{k_2}{Ts^2 + s + Kk_2}$$

$$h_0 \text{ blir nå: } h_0 = \frac{k_1 k_2}{Ts^3 + s^2 + Kk_2 s} = \frac{t_0}{N_0}$$

Det karakteristiske polynom = nevneren i $\frac{y}{y_0}(s) =$

$$N_0 + t_0 = Ts^3 + s^2 + Kk_2 s + k_1 k_2$$

Rouths tabell blir da:

$$\begin{array}{cc} T & Kk_2 \\ \hline 1 & k_1 k_2 \\ \hline Kk_2 - Tk_1 k_2 & \Rightarrow \underline{K > k_1 T} \end{array}$$

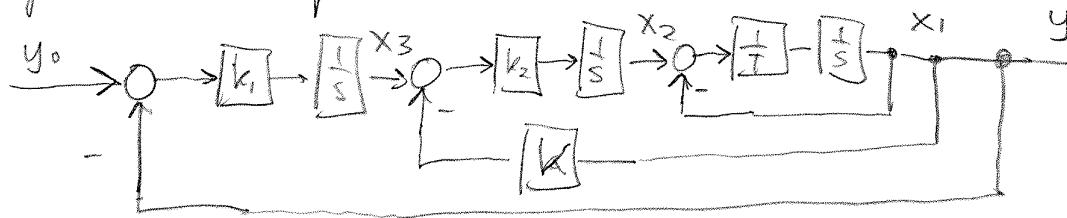
$$k_1 k_2$$

2c) V_i har én integrator i h_0 . Vi kan forenkle

$0 < e(\infty) < \infty$. Regner ut:

$$e(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s e(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \left[\underbrace{\frac{N_0}{N_0 + t_0} \cdot y_0(s)}_N \right] = \lim_{s \rightarrow 0} \left(s \frac{\frac{Ts^3 + s^2 + Kk_2 s}{s^3 + s^2 + Kk_2 s + k_1 k_2}}{s^2} \cdot \frac{1}{s^2} \right) = \underline{\underline{K/k_1}}$$

2d) figur 2.1 omformet:



$$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{T} & 0 & 0 \\ -k_2 k & 0 & k_2 \\ -k_1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ k_1 \end{bmatrix}, \quad c^T = [1 \ 0 \ 0]$$

fasevariabel form er også en metode som
alstørtes her: Fra b) kan vi

$$\frac{y}{y_0}(s) = \frac{\frac{t_0}{n_0 + t_0}}{Ts^3 + s^2 + Kk_2 s + k_1 k_2} \cdot V.13 \text{ gir da}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k_1 k_2}{T} & -\frac{K k_2}{T} & -\frac{1}{T} \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad c^T = [\frac{k_1 k_2}{T} \ 0 \ 0]$$

2e) For mål y forsvinner virkinga av tilbakekopplinga via k . Da er systemet ustabil \Rightarrow Systemet kan ikke komme til ro i $y=0$. På den andre siden vil stor y være til en kraftig tilbakekoppling via k , da er systemet stabilt og vil ikke sørge seg ut mot uendelig amplitade: $0 < y(t) < \infty$!



Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet (NTNU)

Faglig kontakt under eksamen: Trond Andresen, tlf. **7359 4358**, mobil **9189 7045**
Han går to veiledningsrunder, ca. kl. 0945 - 1015 og ca. kl. 1115 - 1145

Eksamens i TTK4105 reguleringssteknikk

tirsdag 9. august 2005

Tid: 0900 - 1300

Denne besvarelsen teller 100% på karakteren – midtsemesterprøven teller ikke

Sensur vil foreligge innen tre uker. Følg med på fagets nettsted for mulig tidligere resultat.

Hjelpemiddelkombinasjon D: Kalkulator med tomt minne tillatt. Ingen trykte eller håndskrevne hjelpeMidler tillatt, unntatt Rottmann.

Prosentallene angir den relative vekt oppgavene tillegges ved bedømmelsen.

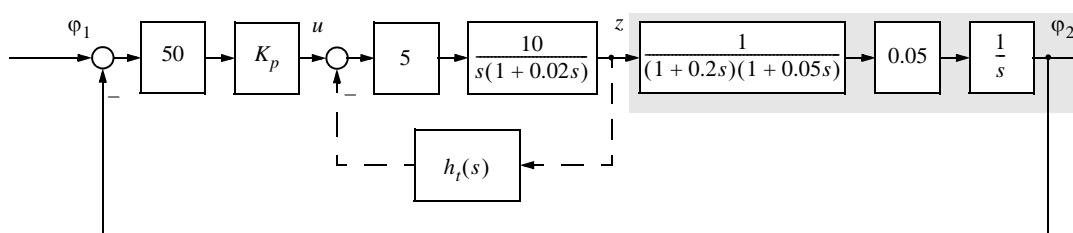
Flere spørsmål kan besvares meget enkelt ved å bruke **formelsamlinga** bakerst i oppgavesettet. **Se kjapt gjennom den før du begynner.** Sjekk den alltid før du gir opp! Men du må forklare hvordan du bruker noe, når du henter det fra formelsamlinga. Noen spørsmål skal besvares ved å **måle ut verdier på figurer i oppgavesettet** – i slike tilfeller godtas en viss "måleunøyaktighet"! Der hvor rubrikk for studentnr. etc. er angitt på sider i oppgavesettet, **kan man tegne i figurer og levere det påtegnede arket som en del av besvarelsen.**

STUDENTS MAY ANSWER THIS EXAM IN ENGLISH IF THAT IS PREFERRED.

Oppgave 1 (18 %)

Figur 1.1 viser blokkdiagrammet for et forholdsvis komplisert elektro-hydraulisk system for dreining i horisontalplanet av ei jordbasert antennen som skal følge en satellitt over himmelen.

Referansevinkelen φ_1 er en rampefunksjon (= øker lineært med tida), og φ_2 er antennas vinkelposisjon. Se inntil videre bort fra den interne tilbakekopplinga $h_t(s)$ som er antydet i figuren.



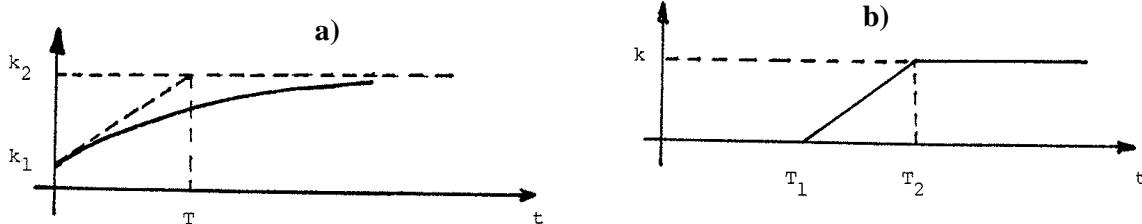
figur 1.1

- a) (8 %) Vi betrakter en del av den uregulerte (= åpne) prosessen fra z til utgangen φ_2 (det skraverte området). Sett $\varphi_2 = y$ og finn matriser A , b , c^T i en tilstandsrommodell

$$\dot{x} = Ax + bz, y = c^T x . \quad (1.1)$$

- b) (5 %) En kollega foreslår å bruke rein proporsjonalregulering K_p , uten intern tilbakekopling. Du bør svare at dette ikke er akseptabelt, uansett verdi av K_p . Forklar!
- c) (5 %) Hvis man innfører en intern tilbakekopling som en rein forsterkning: $h_t = K_t$, vil det for en passende verdi av K_t (som du ikke trenger å regne på for å besvare dette spørsmålet) løse problemet fra punkt b). Forklar!
 Men en viktig egenskap med dette servosystemet vil da samtidig gå tapt. Forklar!
 (En mer komplisert intern tilbakekopling vil løse begge problemer, men det er ikke tema i dette eksamenssettet ... ;-)).

Oppgave 2 (15 %)



figur 2.1

Finn rimelige transferfunksjoner som svarer til sprangresponsene i figur 2.1.

Poeng gis som følger: a) (5 %), b) (6 %).

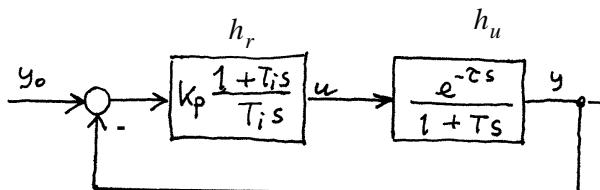
(Tips: Begge svar kan kontrolleres v.h.a. sluttverditeoremet, men dette kreves ikke. På spørsmål a) kan begynnelsesverditeoremet komme til nytte, men du kan også klare deg uten.)

- c) (4 %) Hvilke av disse transferfunksjonene svarer til systemer som er asymptotisk stabile?
 Begrunnet, kort svar!

Oppgave 3 (41 %)

En prosess h_u skal reguleres med
 en PI-regulator h_r som vist i figur 3.1.
 En mulig framgangsmåte i dette tilfellet
 er å begynne med å velge $T_i = T$, og så
 bestemme en K_p som er akseptabel.

figur 3.1



- a) (6 %) Finn den K_p som bringer systemet på stabilitetsgrensa. *I dette spesielle tilfellet kan denne lett beregnes algebraisk – vi trenger ikke bruke Bode-diagram.*

Er resultatet rimelig (begrunn svaret)?

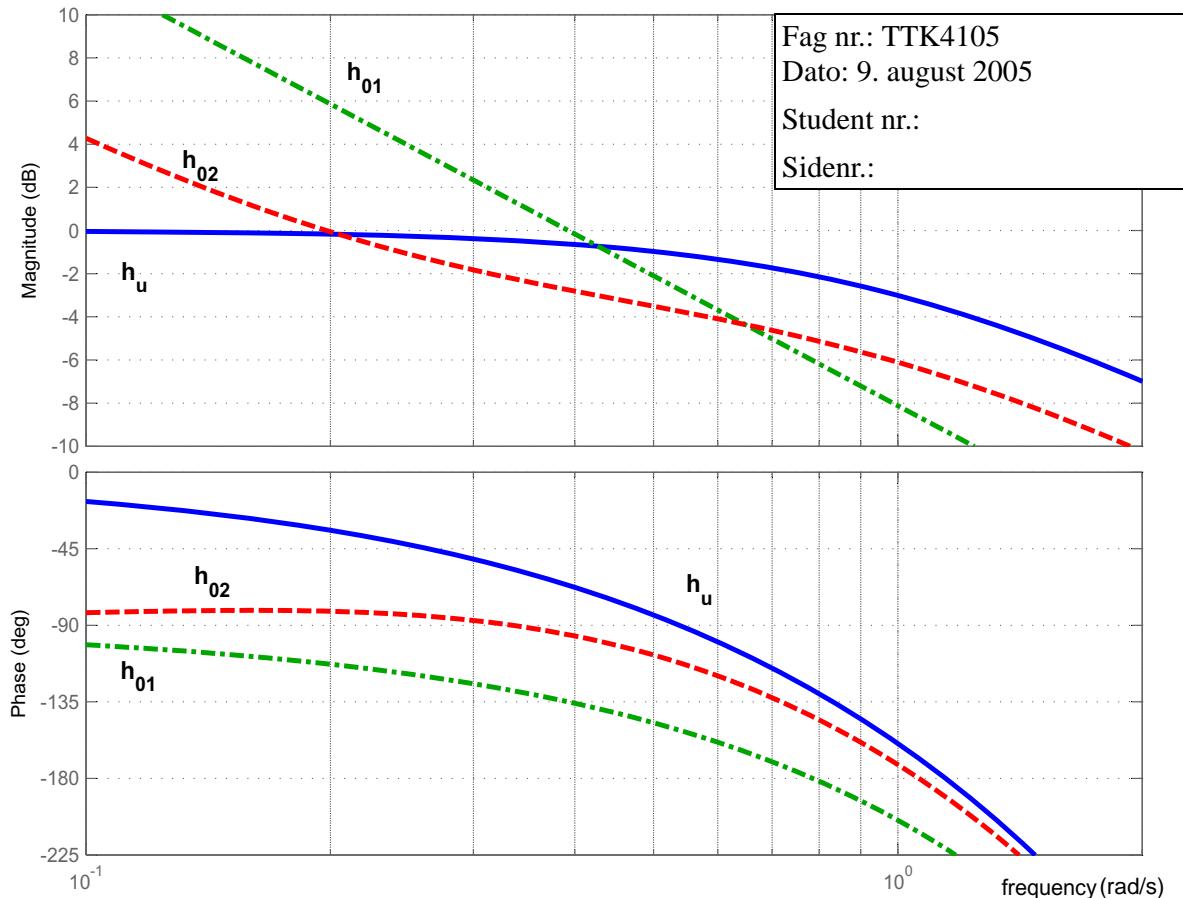
(To tips: Svaret blir et uttrykk som inneholder T og τ . Et nyttig mellomresultat er at $\omega_{180} = \pi/(2\tau)$, dvs. ω_{180} er uavhengig av K_p).

- b) (6 %) Vi forlanger størst mulig båndbredde på betingelse av at forsterkningsmargin og fasemargin skal tilfredsstille henholdsvis $\Delta K \geq 6$ dB og $\psi \geq 45^\circ$. Hva blir da K_p ? (Igjen skal du finne et algebraisk uttrykk).

Vi betegner resultatet av syntesen ovenfor med $h_{01} = h_r h_u$.

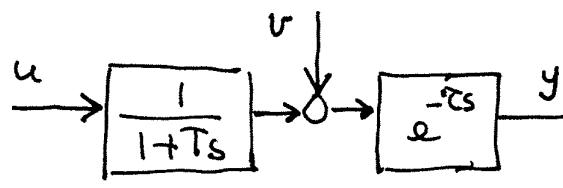
En alternativ framgangsmåte er å bruke Ziegler-Nichols' metode for å fastlegge *begge* parametre i PI-regulatoren. Regulatoren du da finner, kaller du h_{r2} .

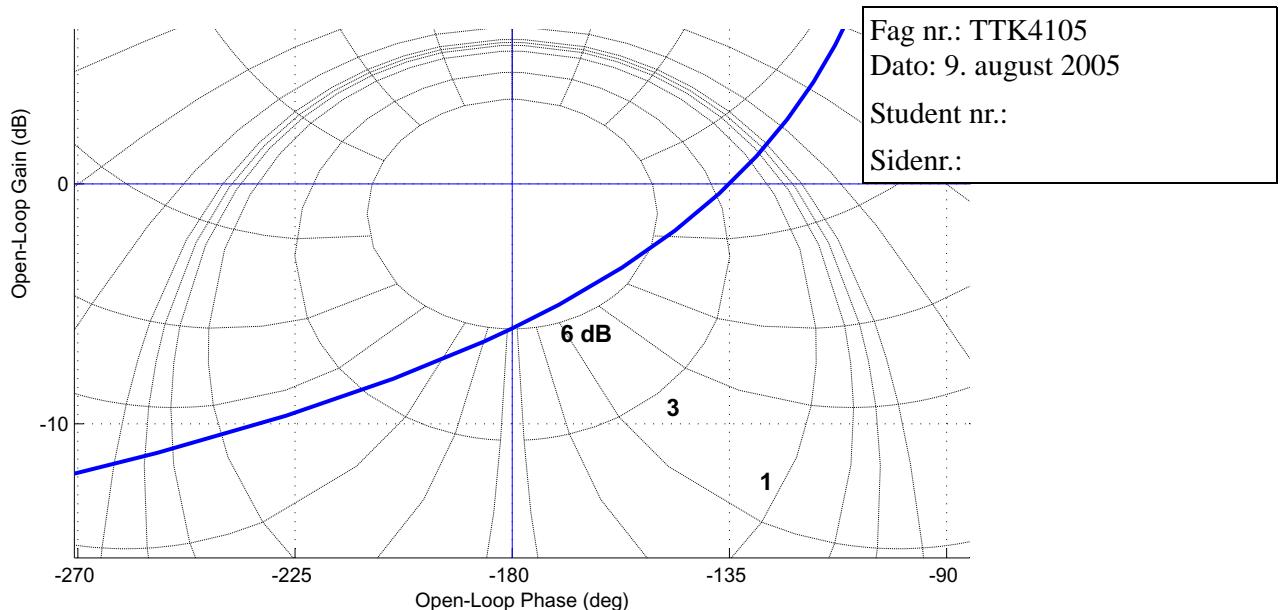
Sett fra nå av $T = 1$ og $\tau = 2$. Figur 3.2 med Bodediagrammer skal brukes i det følgende:



figur 3.2

- c) (5 %) Finn K_p og T_i ved hjelp av Ziegler-Nichols metode brukt på Bodediagrammet av prosessen h_u .
- d) (4 %) I figur 3.2 er også Bodediagrammet for $h_{02} = h_{r2}h_u$, og $h_{01} = h_{r1}h_u$ fra den første metoden (med $T = 1$ og $\tau = 2$). Hvilken metode ga best resultat? Begrunnet svar!
- e) (7 %) I Nichols-diagrammet i figur 3.3 neste side er grafen for h_{01} vist. Finn maksimalverdien av $|N_1(j\omega)|$! Er den akseptabel? Hva bør eventuelt justeres noe? Finn ut ved hvilken frekvens maksimalverdien inntreffer! Skisser $|N_1(j\omega)|$ grovt i Bodediagrammet, og levér det påtegnede ark som del av besvarelsen!
- f) (5 %) En forstyrrelse v angriper inne i prosessen, som vist til høyre. Tegn blokkskjema for reguleringssystemet med en foroverkopplingsblokk h_f lagt til i strukturen. Bruk bare symbolene h_r for regulator-blokka.





figur 3.3

- g) (4 %) Finn et algebraisk uttrykk for den ideelle forkoppling $h_{fi}(s)$. Finn en mer realistisk foroverkoppling. (Tips: Bortsett fra fortegnet, har denne samme struktur som en begrenset PD-regulator.)
- h) (4 %) Du skal nå drøfte hva som skjer for forskjellige verdier av T og τ , og betrakter forholdet T/τ . Hvis denne brøken er liten, er foroverkopplinga mer verdifull, og omvendt. Forklar! (Dette kan gjøres verbalt uten regning – ved betraktninger på blokkskjemaet med foroverkoppling.)

Oppgave 4 (8 %)

Du skal lage en diskret PI-regulator basert på den kontinuerlige, $h_r(s) = K_p \frac{1 + T_i s}{T_i s}$.

Tastetida er T . Regulatoralgoritmen får formen

$$u[k] = u[k-1] + g_0 e[k] + g_1 e[k-1], \text{ der } e \text{ er avvik og } u \text{ er pådrag} \quad (4.1)$$

Finn uttrykkene for koeffisientene g_0 og g_1 .

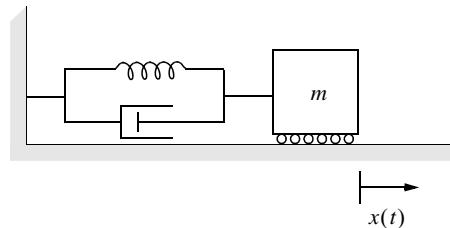
Oppgave 5 (18 %)

Gitt Van der Pols ligning:

$$\ddot{x} + \alpha(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0, \quad \alpha > 0 \quad (5.1)$$

- a) (6 %) Definér tilstander $x_1 = x$ og $x_2 = \dot{x}$. Skriv opp ligningssettet $\dot{\underline{x}} = f(\underline{x})$.

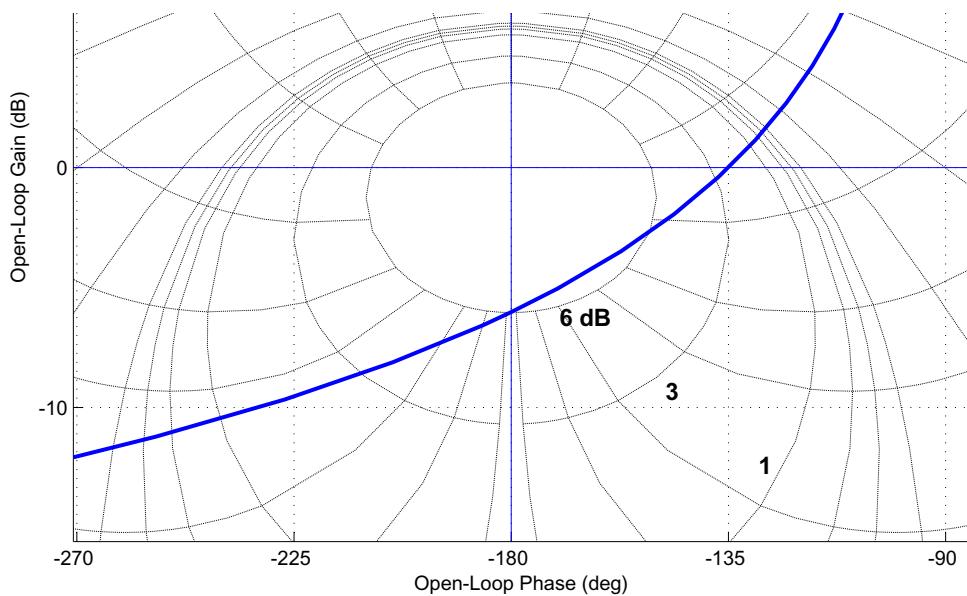
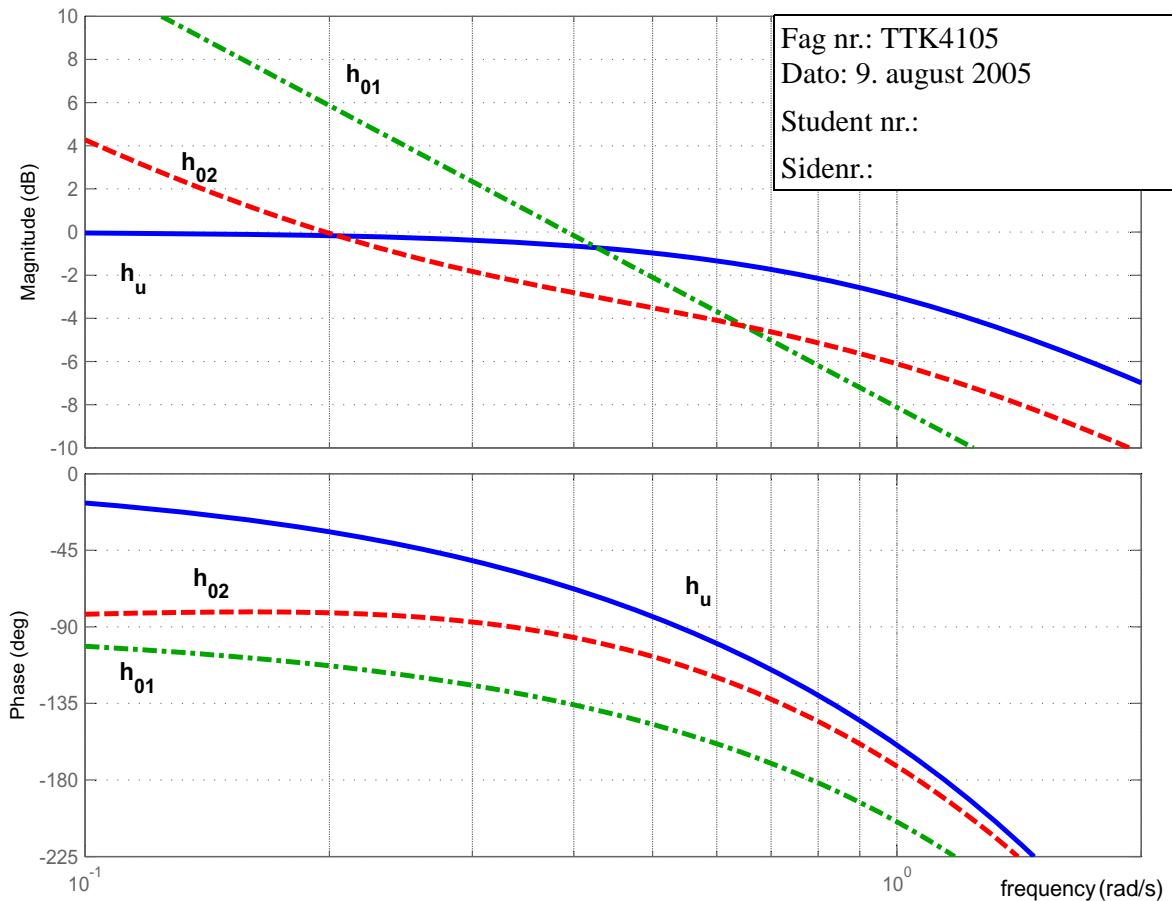
- b) (5 %) Finn matrisa A i en linearisert modell $\Delta\dot{\underline{x}} = A\Delta\underline{x}$ for et vilkårlig arbeidspunkt $\underline{x}^p = \begin{bmatrix} x_1^p \\ x_2^p \end{bmatrix}$ der $\Delta\underline{x}$ representerer små variasjoner rundt \underline{x}^p slik at $\underline{x} = \underline{x}^p + \Delta\underline{x}$.
- c) (7 %) Ligning (5.1) kan representer et ulineært masse-fjær-demper-system på vannrett, friksjonsløst underlag, hvor den ene av tre parametre: m = masse, f = dempekonstant, k = fjærkonstant – endrer seg avhengig av massens posisjon, mens de to andre er konstante.



Finn m, f og k for systemet gitt ved ligning (5.1).

Hvorfor vil aldri dette (merkelige) masse-fjær-demper-systemet kunne komme til ro?

Et ekstra ark, om du skulle trenge det....



Formelsamling

(5 sider, noe av dette trenger du kanskje...)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sf(s), \quad \text{og} \quad \lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sf(s) \quad (\text{V.1})$$

$$\mathcal{L} [\dot{f}(t)] = sf(s) - f(t)|_{t=0}, \quad , \quad \mathcal{L} [\ddot{f}(t)] = s^2 f(s) - sf(t)|_{t=0} - \dot{f}(t)|_{t=0} \quad (\text{V.2})$$

$$\text{Residuregning: } f(t) = \sum_{a_i} \frac{1}{(m-1)!} \left[\frac{\partial^{m-1}}{\partial s^{m-1}} \{(s-a_i)^m f(s) e^{st}\} \right]_{s=a_i} \quad (\text{V.3})$$

$$\text{Tidsforsinkelse: } \mathcal{L} [f(t-\tau)] = e^{-\tau s} f(s) \quad (\text{V.4})$$

$$|\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}| = 0 \quad (\text{V.5})$$

$$\text{Rettlinja bevegelse: } f = ma \quad \text{Rotasjon: } d = I \dot{\omega} \quad (\text{V.6})$$

Folding (konvolusjon):

$$y(t) = h(t) * u(t) = \int_0^t h(t-\tau) u(\tau) d\tau, \quad \mathcal{L} [h(t) * u(t)] = h(s) u(s) \quad (\text{V.7})$$

$$\Delta \dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{\mathbf{x}^p, \mathbf{u}^p} \Delta \mathbf{x} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} \Big|_{\mathbf{x}^p, \mathbf{u}^p} \Delta \mathbf{u}, \quad \mathbf{A} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{\mathbf{x}^p, \mathbf{u}^p} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}_{\mathbf{x}^p, \mathbf{u}^p} \quad (\text{V.8})$$

Linearisering:

$$\Delta \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \Delta \mathbf{x} + \mathbf{B} \Delta \mathbf{u}$$

Gitt en åpen prosess $h_0(s)$ med N_p poler i høyre halvplan.

Vektoren $1 + h_0(j\omega)$ får en netto vinkeldreining lik

$$\Delta \angle(1 + h_0) = -2\pi(N_n - N_p) \quad \text{når } \omega \text{ går fra } -\infty \text{ til } \infty \quad (\text{V.9})$$

N_n blir da antall poler i h.h.p. for det lukkede (tilbakekoppled) system.

Merk: Dreieretning er definert positiv mot urviseren.

$$x[\text{dB}] = 20 \cdot \log_{10}(x) \quad (\text{V.10})$$

Rouths kriterium:

For stabilitet kreves for det første at alle koeffisienter i det karakteristiske polynom (nevnerpolynomet i det lukkede system) må ha samme fortegn. Dessuten må alle koeffisienter i den venstre kolonne i Rouths tabell (nedenfor) ha samme fortegn.

Kall det karakteristiske polynom: $\alpha_n s^n + \alpha_{n-1} s^{n-1} + \dots + \alpha_1 s + \alpha_0$

Rouhs tabell blir da (i tilfellet vist her er n et oddetall):

$$\begin{array}{cccc}
 \alpha_n & \alpha_{n-2} & \dots & \alpha_1 \\
 \alpha_{n-1} & \alpha_{n-3} & \dots & \alpha_0 \\
 \beta_{n-1} & \beta_{n-3} & \dots & \\
 \zeta_{n-1} & \zeta_{n-3} & \dots & \\
 & \ddots & & \\
 & \ddots & & \\
 & \ddots & & \\
 \sigma_{n-1} & \sigma_{n-3} & & \\
 \eta_{n-1} & & & \\
 \omega_{n-1} & & &
 \end{array} \quad (\text{V.11})$$

De nye koeffisientene i tabellen framkommer etter følgende regler:

$$\beta_{n-1} = \frac{\alpha_{n-1} \alpha_{n-2} - \alpha_n \alpha_{n-3}}{\alpha_{n-1}} = \frac{\alpha_{n-1} \alpha_{n-2} - \alpha_n \alpha_{n-3}}{\alpha_{n-1}}$$

$$\beta_{n-3} = \frac{\alpha_{n-1} \alpha_{n-4} - \alpha_n \alpha_{n-5}}{\alpha_{n-1}} = \frac{\alpha_{n-1} \alpha_{n-4} - \alpha_n \alpha_{n-5}}{\alpha_{n-1}}$$

osv.

Ziegler-Nichols' regler : (V.12)

Regulator	K_p	T_i	T_d
P	$0.5K_{pk}$	∞	0
PI	$0.45K_{pk}$	$T_k/1.2$	0
PID	$0.6K_{pk}$	$T_k/2$	$T_k/8$

$$T_k = \frac{2\pi}{\omega_{180}}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \ddots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \ddots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & \ddots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \cdots & -\alpha_{n-2} & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{c}^T = [\rho_0 \ \rho_1 \ \rho_2 \ \cdots \ \rho_{n-1}]$$

gir (V.13)

$$\frac{y}{u}(s) = h(s) = \frac{\rho_{n-1}s^{n-1} + \dots + \rho_1s + \rho_0}{s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \dots + \alpha_1s + \alpha_0}$$

Diskret regulator: Alle s erstattes med $\frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1}$, der z er en tidsforskyvingsoperator (V.14)

Løsningsforslag TTK 4105 reguleringssteknikk

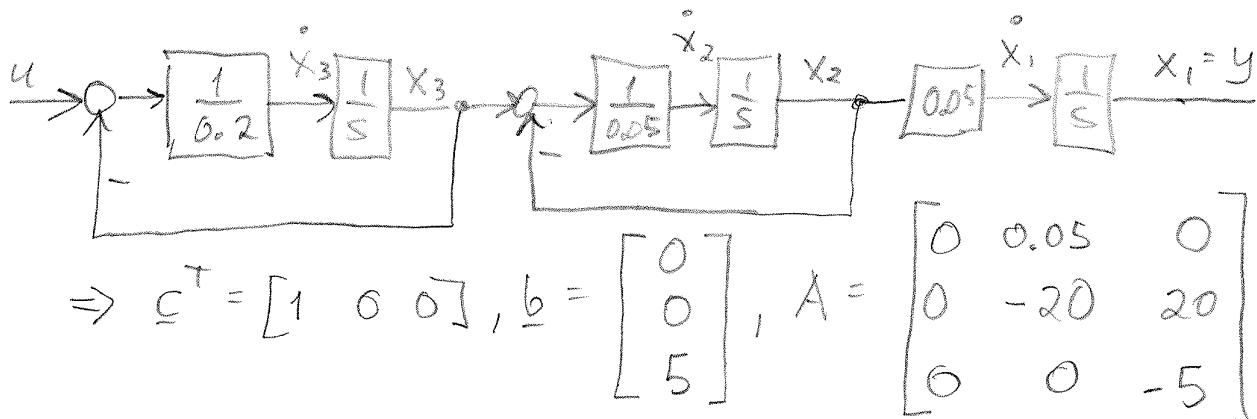
9. august 2005 (T.A.)

$$1a) h_{\varphi z} = \frac{0.05}{s(1+0.2s)(1+0.05s)} = \frac{5}{s^3 + 25s^2 + 100s}$$

Metode I: faservariabel form (V.13):

$$\underline{c}^T = [5 \ 0 \ 0], \underline{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -100 & -25 \end{bmatrix}$$

Metode II: dairelementert bløkdiagram:



Begge svar godtas!

1b) h_0 med bare K_p får to rene integrasjoner i serie med tre 1.-ordensledd. $\angle h_0$ vil da $< -180^\circ \forall K_p$. Systemet vil være instabilt $\forall K_p$.

$$1c) h_t = K_t endrer h_{uz} til h_{uz}^{(2)} = \frac{-50}{s(1+0.02s)}$$

$$\Rightarrow h_{uz}^{(2)} = \frac{50}{0.02s^2 + s + 50K_t} \Rightarrow \angle h_{uz}^{(2)} = 0 \text{ for lav frekvens,}$$

og kan holdes nær 0 til høy båndbredd ved å velge K_t stor. Mens h_{uz} starter med -90° ved lav frekvens, og faller mot -180° for $a > 50$. $\Rightarrow h_{uz}^{(2)}$ gjør stabilt system.

Samtlig forsvinner da en av to reelle integra-
sjoner i h_0 . Detmed minker systemet evnen til å
følge referansen uten etasjonsatt avstikk.

2a) Sprangresponsen kan betraktes som en
sum av to responsen: $k_1 u_i(t) + (k_2 - k_1)(1 - e^{-\frac{t}{T}})$

Laplacetransformert er dette $\frac{k_1}{s} + (k_2 - k_1) \frac{1}{s(1+Ts)} = h(s)s$
 $\Rightarrow h(s) = k_1 + \frac{k_2 - k_1}{1+Ts} = \frac{k_1 + k_1 Ts + k_2 - k_1}{1+Ts} = k_2 \frac{1 + \frac{k_1}{k_2} Ts}{1+Ts}$

2b) Deler problemet i to. Setter først $T_1 = 0$ og finner
en transferfunksjon $h'(s)$. Responsen kan spaltes
opp i komponenter som vist her:



$$y'(t) = y_1(t) + y_2(t)$$

$$y'(s) = y_1(s) + y_2(s) = \frac{k}{T_2 T_1} \cdot \frac{1}{s^2} - \frac{k}{T_2 T_1} \frac{1}{s^2} e^{-(T_2 - T_1)s} = h'(s) \cdot \frac{1}{s}$$

$$\Rightarrow h'(s) = \frac{k}{T_2 - T_1} \cdot \frac{1}{s} (1 - e^{-(T_2 - T_1)s})$$

Siden den egentlige responsen er forslagget T_1 til høyre, blir
da $h(s) = h'(s) e^{-T_1 s} = \frac{k}{T_2 - T_1} \cdot \frac{1}{s} (e^{-T_1 s} - e^{-T_2 s})$

2c) Begge er a.s.!
For impuls-
responsene $\rightarrow 0$ når
sprangresponsene \rightarrow konst.

3a) $h_0 = K_p \frac{1+T_1 s}{T_1 s} \cdot \frac{e^{-T_1 s}}{1+Ts} = \frac{K_p}{T_1 s} e^{-T_1 s}$ når $T_1 = T$.

$\angle h_0 = -90^\circ - \omega \tau$, spesielt er $-180^\circ = -90^\circ - \omega_{180} T \Rightarrow \omega_{180} = \frac{180}{2\tau}$
eller $\frac{\pi}{2\tau}$ i radianer, som brukes fra nå av (dette mellomres-
ultatet var jo oppgitt.)

$|h_0| = \frac{K_p}{T \omega} \Rightarrow \frac{K_p, \text{krit}}{T \omega_{180}} = 1$, da er $\omega_c = \omega_{180}$, og vi er på stab.grensa.

Dette gir $K_p, \text{krit.} = \omega_{180} \cdot T = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{T}{\tau}$

3b) $\Delta K = 6 \text{ dB}$ betyr at $K_p = 0.5 \cdot K_p, \text{krit.} = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{T}{\tau}$

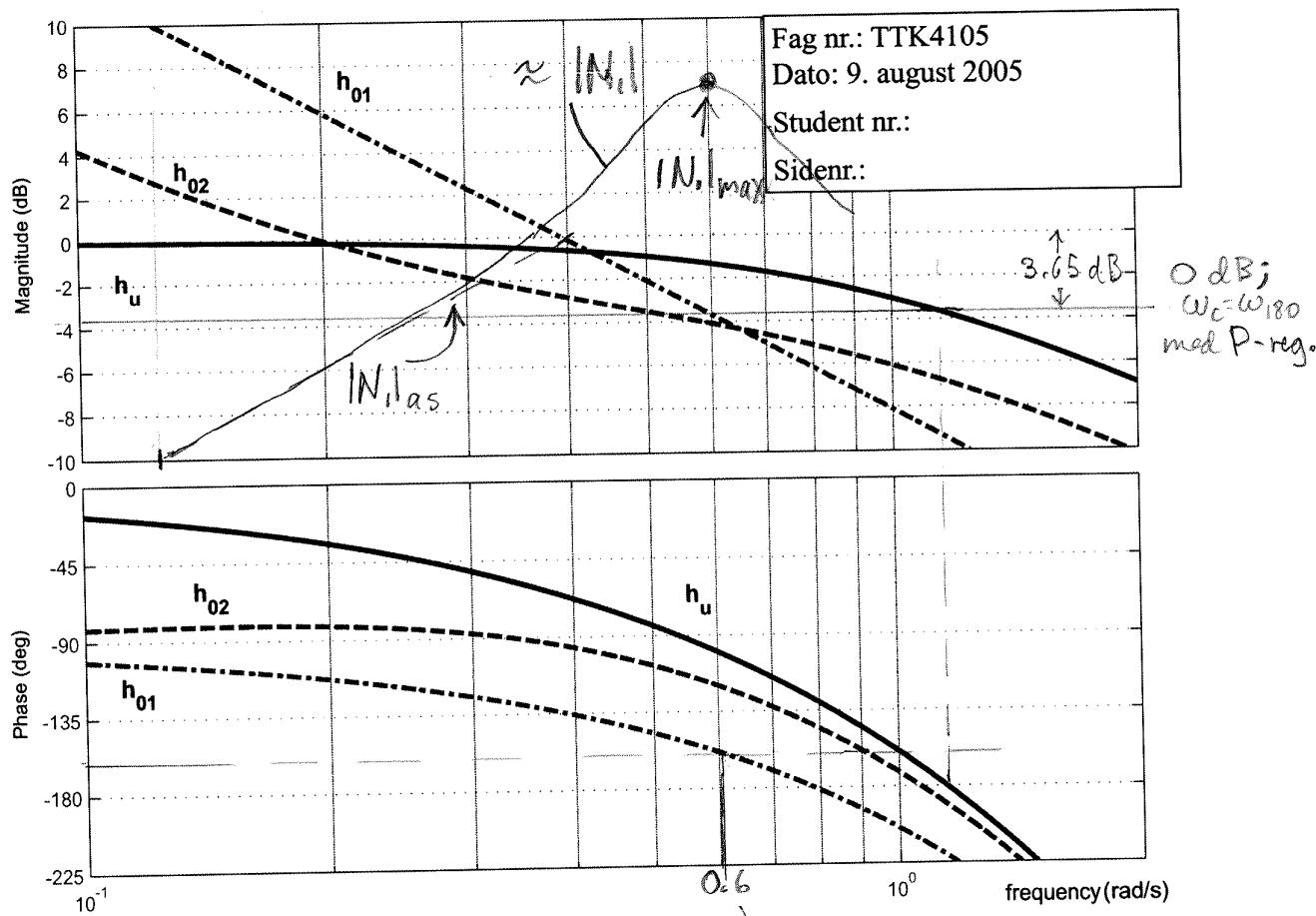
Vi må sjekke hva deles φ dette inneholder: kryssfaseveissen ω_c
gis av $|h_0(j\omega_c)| = 1 \Leftrightarrow \frac{K_p}{T \omega_c} = 1 \Rightarrow \omega_c = \frac{K_p}{T} = \frac{\pi}{4\tau}$

$\varphi = \angle h_o(j\omega_c) - \angle h_o(j\omega_{180}) = -\frac{\pi}{2} - \omega_c \tau - (-\pi)$

 $= \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4\tau} \cdot \tau = \frac{\pi}{4} = 45^\circ$. Med andre ord ianfør den initiale vælgte k_p og ω_c alderat berevet til φ , noe som er uvanlig, og som vi måtte sjekke. Vi står derfor fast ved $k_p = \frac{\pi}{4\tau}$.

3c) Fra h_u i Bode-diagrammet: 0-dB linja kan flyttes ≈ 3.65 dB ned. Dette svarer til at $K_{p,krit.} = K_{pk} = 10^{(3.65/20)}$ ≈ 1.52 . Fra tabell (V.12): $k_p = 0.45 K_{pk} = 0.685$

Vi leser av ω_{180} i Bode-diagrammet: $\omega_{180} \approx 1.14$
 Fra tabell (V.12): $T_i = T_k / 1.2 = \frac{2\pi}{\omega_{180} \cdot 1.2} = \frac{2\pi}{1.14 \cdot 1.2} = 4.6$

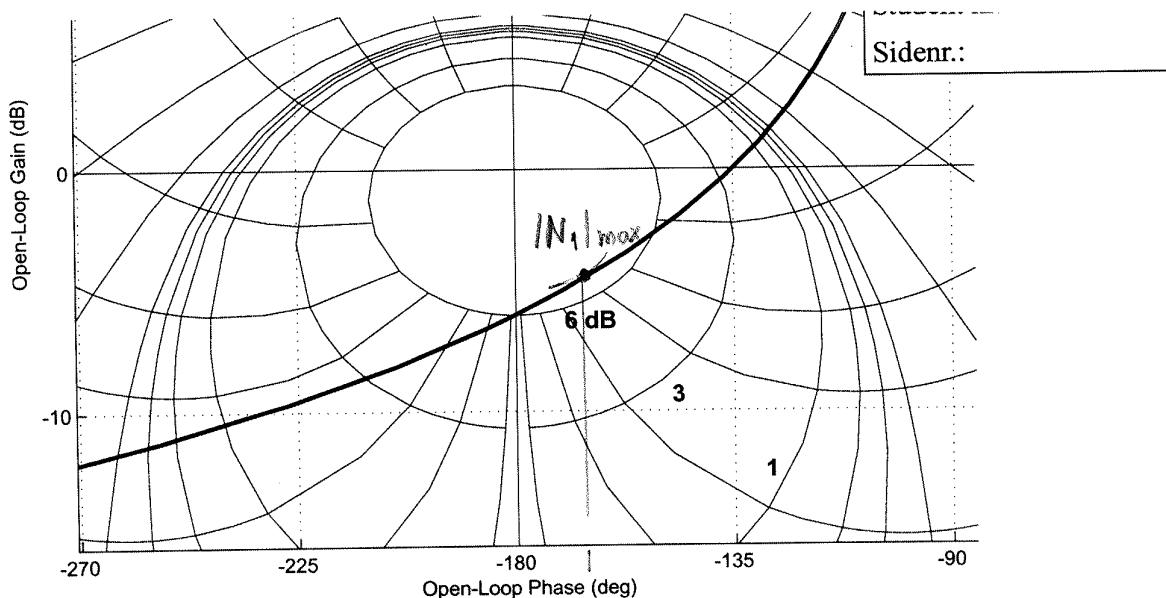


figur 3.2

$\omega \approx 0.6$ ved $|N_1|_{max}$
 eller litt større

(3d)

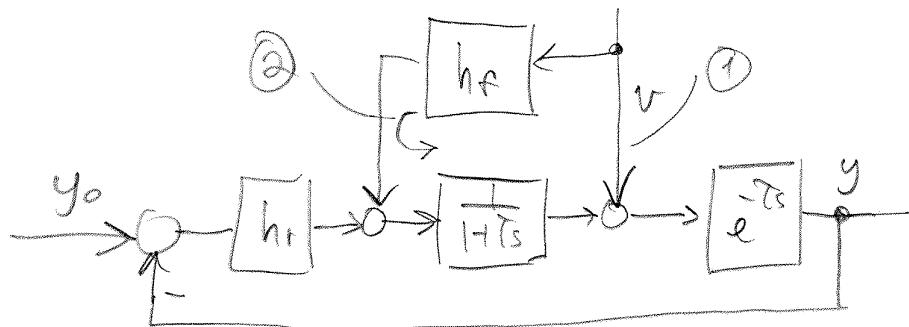
h_{02} har betydelig lavere kryssfrekvens enn $h_{01} \Rightarrow$
 h_{r2} gir langsmere regulering enn h_{r1} . Samtidig
oppfyller h_{r1} krevene til ΔK og Ψ , jfr. a). (uten
at dette kreves, så kan man avlere en uønsket
stor faremargin for $h_{02} \approx 100^\circ$!). Vi velger derfor
 h_{r1} , altså den første metoden!



3e) $|N_1|_{\text{max}}$ avleses til ca. 7 dB. Litt høy. K_p i h_{r1}
kan reduseres litt, eller T_i kan økes litt, slik
at $|N_1|_{\text{max}} < 6 \text{ dB}$.

Viser at $\angle h_{01} \approx -167^\circ$ ved $|N_1|_{\text{max}}$. Fra Bode-diagrammet gir dette at ω er ca. 0.6 ved $|N_1|_{\text{max}}$
(tilsvarende kunne vi ha brutt $|h_{01}|$; godt å også!)
Se grot skisse av $|N_1|$ i Bodediagram forrige side.

3f)



3g) For fullstendig kansellering av v 's virkning:

$$h_{fi} \cdot \frac{1}{1+Ts} + 1 = 0 \Rightarrow h_{fi} = -(1+Ts)$$

Erstattes med mer realistisk $h_f = -\frac{1+Ts}{1+\alpha Ts}$, $0 < \alpha < 1$
som ikke har $h_f(j\omega) = \infty$.

3h) Fra blokdiagrammet i 3f): Liten T gjør den parallele greina ② nesten like rask som greina ①. Stor α gjør at virkninga av v har hånd om av h_f mye seinere, og h_f blir dermed relativt viktigere. α bør derfor være minst mulig for å få stort effekt av h_f .

4) Se læreboka, eksempel 11.6

Oppgave 5 a)

$$\begin{array}{l} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 - \alpha(x_1^2 - 1)x_2 \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{l} \end{array} \right. = f(\underline{x})$$

5b)

$$\text{Bruker (V.8): } A = \left\{ \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right\} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1-2\alpha x_1^p x_2^p & -\alpha(x_1^p - 1) \end{bmatrix}$$

5c)

Newton's 2. lov for lineært m-f-d-system

$$F = ma \Leftrightarrow -kx - f\ddot{x} = m\ddot{x} \Leftrightarrow m\ddot{x} + f\ddot{x} + kx = 0$$

Sammenholdes dette med (4.1), får vi

$$\begin{cases} m = 1 \\ k = 1 \\ f = \alpha(x^2 - 1) \end{cases}$$

Eigenverdier fra 5b) gir av

$$\begin{aligned} |\lambda I - A| = 0 &\Leftrightarrow \lambda^2 + \alpha((x_1^p)^2 - 1)\lambda + (1 - 2\alpha x_1^p x_2^p) \\ &\Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{-\alpha((x_1^p)^2 - 1) \pm \sqrt{(\alpha^2(x_1^p)^2 - 1)^2 - 4(1 - 2\alpha x_1^p x_2^p)}}{2} \end{aligned}$$

Hvis $|x_1^p| < 1$, ser vi at $\operatorname{Re}(\lambda_1) > 0$ når $\alpha > 0$; systemet er instabilt. Derved kan systemet aldri komme til ro i det eneste mulige likverkspunkt $\underline{x} = \underline{0}$.

Alternativt, enklere og mer "fysisk":

"Dempkonstanten" f blir < 0 for små x .

Systemet blir da instabilt.



Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet (NTNU)

Faglig kontakt under eksamen: Trond Andresen, tlf. **7359 4358**, mobil **9189 7045**
Han går to veiledningsrunder, ca. kl. 0940 - 1010 og ca. kl. 1115 - 1145.

Eksamens i TTK4105 reguleringssteknikk

torsdag 8. juni 2006

Tid: 0900 - 1300

Denne besvarelsen teller **100% på karakteren**.

Sensur vil foreligge innen tre uker. Den blir også lagt ut på fagets nettsted når den er klar.

Hjelpemiddelkombinasjon D: Kalkulator med tomt minne tillatt. Ingen trykte eller håndskrevne hjelpemidler tillatt, unntatt Rottmann.

Prosenttallene angir den relative vekt oppgavene tillegges ved bedømmelsen.

Flere spørsmål kan besvares meget enkelt ved å bruke **formelsamlinga** bakerst i oppgavesettet. Se **kjapt gjennom den for du begynner**. Sjekk den alltid før du gir opp! Men du må forklare hvordan du bruker noe, når du henter det fra formelsamlinga. Noen spørsmål skal besvares ved å **måle ut verdier på figurer i oppgavesettet** – i slike tilfeller godtas en viss "måleunøyaktighet"! Der hvor rubrikk for studentnr. etc. er angitt på sider i oppgavesettet, **kan man tegne i figurer og levere det påtegnede arket som en del av besvarelsen**.

STUDENTS MAY ANSWER THIS EXAM IN ENGLISH IF THAT IS PREFERRED.

Oppgave 1 (34 %)

En data/video-projektor har ei pære med veldig høy temperatur. Temperaturen i glødetråden er x_2 . Temperaturen i glasset i pæra er x_1 . I drift er pæra kjølt av ei vifte, som blåser luft forbi den med omgivelsestemperaturen v . Effekten som leveres til glødetråden er u . En enkel lineær modell er

$$\begin{aligned} C_1 \frac{dx_1}{dt} &= g_2(x_2 - x_1) - g_1(x_1 - v) \\ C_2 \frac{dx_2}{dt} &= u - g_2(x_2 - x_1) \end{aligned} \tag{1.1}$$

der C_i , g_i er konstante koeffisienter.

- a) (6 %) Finn elementene i A , \underline{b} , e i en tilstandsrommodell av systemet,

$$\dot{x} = Ax + bu + ev \tag{1.2}$$

(Merk: e er her en vektor med konstante elementer, og har ingen ting å gjøre med symbolet e som brukes i andre sammenhenger for avvik!)

b) (6 %) Projektoren slås av. Det er ganske opplagt hva x_1 og x_2 går mot da. Men vis hvordan dette framgår av (1.1)!

c) (9 %) Jo større effekt u , jo større temperatur i glødetråden, x_2 . Finn transferfunksjonen $h(s)$ fra u til x_2 !

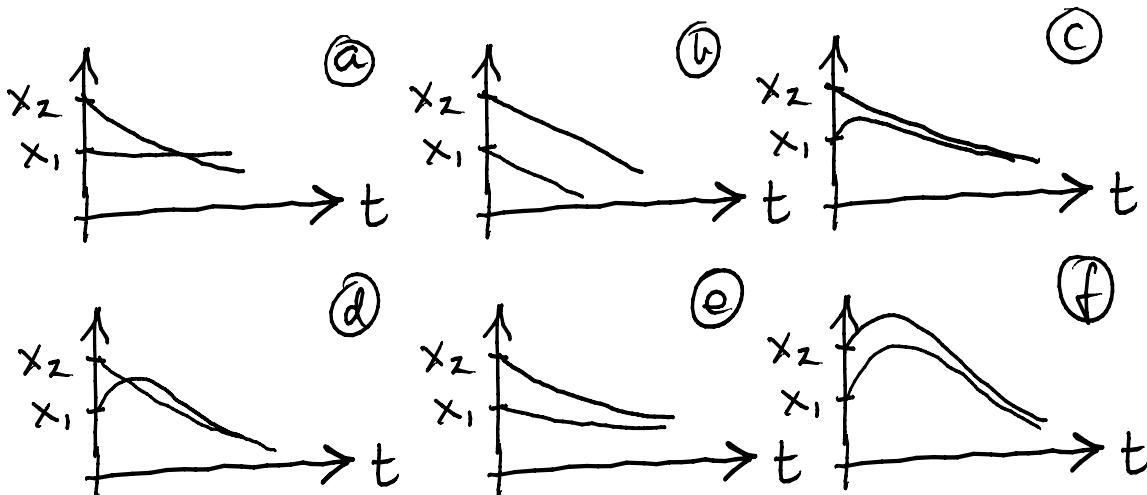
Tips: Dette kan gjøres på flere måter. For å lette regnearbeidet oppgis følgende om $h(s)$:

$$h(s) = \frac{? \cdot s + (g_1 + g_2)}{? \cdot s^2 + [C_2(g_1 + g_2) + ?]s + g_1 g_2} \quad (1.3)$$

Du skal altså finne ut hva som skal stå der det er spørsmålstege. Men du kommer videre på underoppgavene nedenfor sjøl om du ikke greier rett svar her.

d) (7 %) Anta konstant effekt u_0 . Finn den stasjonære temperaturen i glødetråden x_{20} ved hjelp av sluttverditeoremet, når vi for enkelhets skyld setter romtemperaturen v konstant = 0 grader. Deretter: hva blir x_{20} hvis romtemperaturen er 20 grader?

Figur 1.1 viser noen mulige og umulige alternative tidsforløp når projektoren slås av.



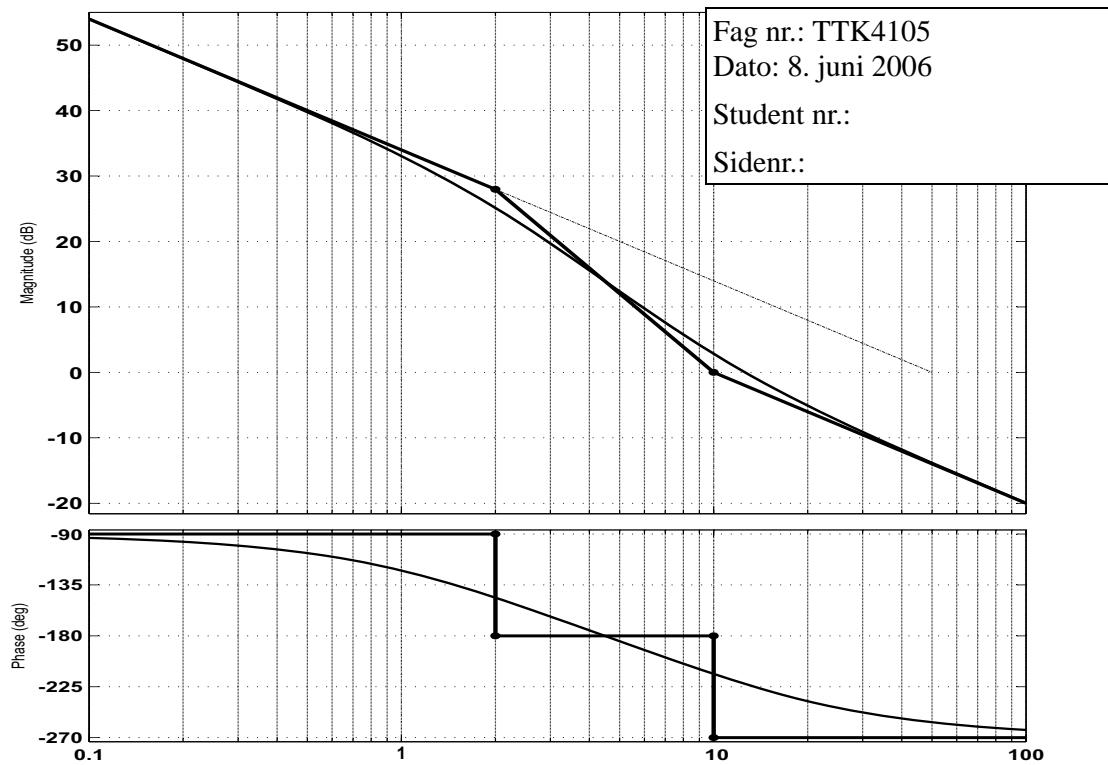
figur 1.1

e) (3 %) Projektoren slås av på korrekt vis: da går vifta en god stund etter at pære er slukket. Hvilket forløp i figur 1.1 beskriver det som da skjer? Du trenger ikke begrunne ditt valg. Regning kreves ikke.

f) (3 %) Projektoren slås av på ukorrekt vis: du drar ut støpselet og både pære og vifte mister dermed strømmen samtidig. Hvilket forløp i figur 1.1 beskriver det som da skjer? Du trenger heller ikke begrunne ditt valg, og regning er ikke nødvendig.

Oppgave 2 (33 %)

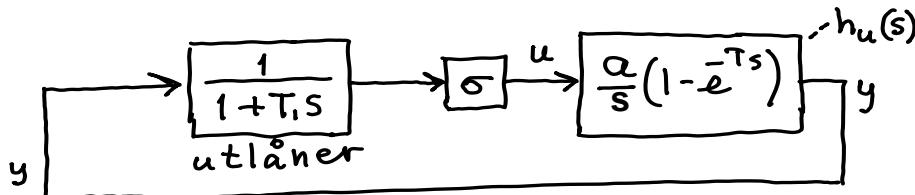
Bodediagrammet i figur 2.1 viser frekvensresponsen inklusive asymptoter til en åpent stabil prosess $h_u(s)$. Det er også tegnet inn en tynn “hjelpeelinje” som du kan bruke i punkt a) nedenfor.



figur 2.1

- a) (9 %) Finn $h_u(s)$! (- Men hvis du ikke greier det, kan du likevel løse resten av oppgave 2.)
- b) (8 %) Anta at $h_u(s)$ skal reguleres med proporsjonalregulator $h_r = K_p$. Finn den K_p som gir forsterkningsmargin $\Delta K = 6\text{dB}$! Hva blir da fasemarginen ψ ? Tegn i Bodediagrammet, og levér det påtegnede ark som del av besvarelsen!
- c) (6 %) Ved nærmere ettertanke ønsker du integralvirkning i regulatoren, fordi du vil at reguleringssystemet skal følge et referansesignal med null stasjonært avvik. Hvilke referansesignal (sprang, rampe og/eller parabel) vil systemet da kunne følge med null stasjonært avvik? Kort verbalt svar er tilstrekkelig, men du kan regne hvis du vil.
(Tips: hvis du vil regne, kan det være nyttig å skrive $h_0 = h_r h_u$ som

$$h_0 = \frac{t_0}{s^2 n_0'}$$
, der n_0' ikke har noen integrasjoner.)
- d) (6 %) Det viser seg at du for denne prosessen ikke kan bruke en PI-regulator hvis du vil ha integralvirkning. Du må da også legge inn derivativirkning, altså bruke en PID-regulator. Forklar hvorfor!
- e) (4 %) Regulatoren skal implementeres diskret, med tastetid $T = 0.02$. Dette gir et ekstra negativt fasebidrag. Hvor stort er dette bidraget ved $\omega = 3$, i grader?

Oppgave 3 (18 %)

figur 3.1

Figur 3.1 viser blokkskjemaet for en prosess hvor en pengeutlåner søker å øke sin inntektsstrøm y [kr./år] fra sine eksisterende utlån, ved å låne ut på nytt (re-investere) en andel $0 < \sigma < 1$ av den mottatte inntektsstrøm. Pengestrømmen av nye utlån er u [kr./år].

T [år] er lånenes nedbetalingstid.

a [1/år] er en konstant bestemt av renta r [1/år] og nedbetalingstid T . Til seinere bruk oppgis at

$$a = \frac{r}{1 - e^{-rT}} \quad (\text{merk at } r \text{ er definert slik at f.eks. } 6\% \text{ rente her blir } 0.06) \quad (3.1)$$

(For spesielt interesserte: blokka h_u beskriver et såkalt annuitetslån, i kontinuerlig-tid-versjon. Men du trenger ikke vite noe "faglig" om økonomi for å løse denne oppgaven.)

Utlåneren låner ikke ut sin inntektsstrøm det øyeblikk han mottar den – denne tregheten er modellert som ei 1.-ordens blokk med tidskonstant T_1 .

a) (4 %) Kan systemet beskrives på tilstandsromform? Kort, begrunnet, verbalt svar!

b) (6 %) Betrakt delprosessen h_u isolert (ingen tilbakekopling). Skissér impulsresponsen til h_u (bare velg og merk av en vilkårlig a og T for skisseringas del)!

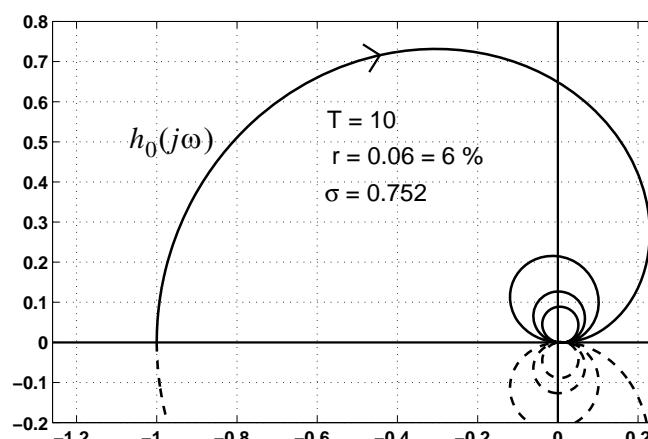
c) (8 %) Systemet har en sløyfetransferfunksjon

$$h_0(s) = -\frac{\sigma a(1 - e^{-Ts})}{s(1 + T_1 s)} \quad (3.2)$$

Hvorfor negativt fortegn?

Figuren til høyre viser polar(Nyquist)-diagrammet for $h_0(j\omega)$ for et sett av verdier for σ , r og T . Det oppgis at $h_0(j\omega)$ har sin mest negative realverdi for $\omega = 0$.

Bruk dette og Nyquists stabilitetskriterium til å vise at utlånerens inntektsstrøm y vil vokse hvis

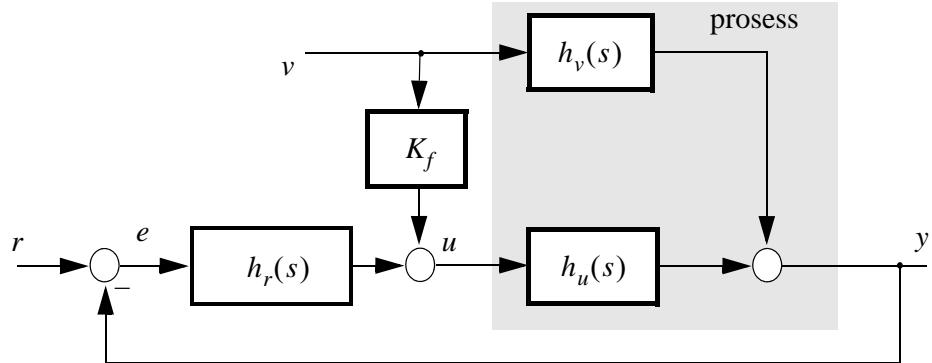


$$\sigma r T > 1 - e^{-rT} !$$

(Tips: du trenger her (3.1)).

Oppgave 4 (7 %)

Gitt en reguleringsstruktur som vist i figur 4.1:



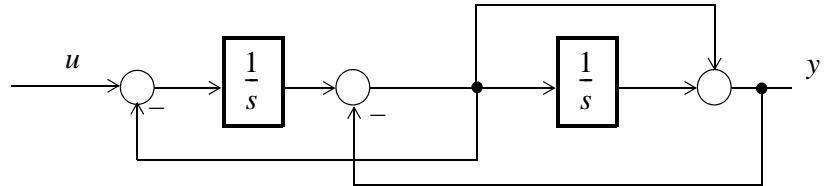
figur 4.1

$$\text{Her er } h_u(s) = \frac{1}{(s+a)^2} e^{-\tau s} \text{ og } h_v(s) = \frac{K}{1+Ts} .$$

Du skal finne en *statisk foroverkopling* (som er en konstant forsterkning, kall den K_f). K_f fjerner stasjonært avvik p.g.a. forstyrrelsen v , når v er et sprang. Finn K_f !

Oppgave 5 (8 %)

Du skal redusere blokkdiagrammet i figur 5.1, det vil si å finne transferfunksjonen fra u til y .



figur 5.1

Formelsamling

(5 sider, noe av dette trenger du kanskje...)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sf(s), \quad \text{og} \quad \lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sf(s) \quad (\text{V.1})$$

$$\mathcal{L} [\dot{f}(t)] = sf(s) - f(0) \quad , \quad \mathcal{L} [\ddot{f}(t)] = s^2 f(s) - sf(0) - \dot{f}(0) \quad (\text{V.2})$$

$$\text{Residuregning: } f(t) = \sum_{a_i} \frac{1}{(m-1)!} \left[\frac{\partial^{m-1}}{\partial s^{m-1}} \{(s-a_i)^m f(s) e^{st}\} \right]_{s=a_i} \quad (\text{V.3})$$

$$\text{Tidsforsinkelse: } \mathcal{L} [f(t-\tau)] = e^{-\tau s} f(s) \quad (\text{V.4})$$

$$|\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}| = 0 \quad (\text{V.5})$$

$$\text{Rettlinja bevegelse: } f = ma \quad \text{Rotasjon: } d = I \dot{\omega} \quad (\text{V.6})$$

Folding (konvolusjon):

$$y(t) = h(t)*u(t) = \int_0^t h(t-\tau)u(\tau)d\tau, \quad \mathcal{L} [h(t)*u(t)] = h(s)u(s) \quad (\text{V.7})$$

$$\text{Linearisering: } \Delta \dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{\mathbf{x}^p, \mathbf{u}^p} \Delta \mathbf{x} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} \Big|_{\mathbf{x}^p, \mathbf{u}^p} \Delta \mathbf{u}, \quad \mathbf{A} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{\mathbf{x}^p, \mathbf{u}^p} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}_{\mathbf{x}^p, \mathbf{u}^p} \quad (\text{V.8})$$

$$\Delta \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \Delta \mathbf{x} + \mathbf{B} \Delta \mathbf{u}$$

Gitt en åpen prosess $h_0(s)$ med N_p poler i høyre halvplan.

Vektoren $1 + h_0(j\omega)$ får en netto vinkeldreining lik

$$\Delta \angle(1 + h_0) = -2\pi(N_n - N_p) \quad \text{når } \omega \text{ går fra } -\infty \text{ til } \infty \quad (\text{V.9})$$

N_n blir da antall poler i h.h.p. for det lukkede (tilbakekoppled) system.

Merk: Dreieretning er definert positiv mot urviseren.

$$x[\text{dB}] = 20 \cdot \log_{10}(x) \quad (\text{V.10})$$

Rouths kriterium:

For stabilitet kreves for det første at alle koeffisienter i det karakteristiske polynom (nevnerpolynomet i det lukkede system) må ha samme fortegn. Dessuten må alle koeffisienter i den venstre kolonne i Rouths tabell (nedenfor) ha samme fortegn.

Kall det karakteristiske polynom: $\alpha_n s^n + \alpha_{n-1} s^{n-1} + \dots + \alpha_1 s + \alpha_0$

Rouhs tabell blir da (i tilfellet vist her er n et oddetall):

$$\begin{array}{cccc}
 \alpha_n & \alpha_{n-2} & \dots & \alpha_1 \\
 \alpha_{n-1} & \alpha_{n-3} & \dots & \alpha_0 \\
 \beta_{n-1} & \beta_{n-3} & \dots & \\
 \zeta_{n-1} & \zeta_{n-3} & \dots & \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \\
 \sigma_{n-1} & \sigma_{n-3} & & \\
 \eta_{n-1} & & & \\
 \omega_{n-1} & & & \\
 \end{array} \quad (\text{V.11})$$

De nye koeffisientene i tabellen framkommer etter følgende regler:

$$\beta_{n-1} = \frac{\alpha_n \cancel{\alpha_{n-2}}}{\cancel{\alpha_{n-1}} \alpha_{n-3}} = \frac{\alpha_{n-1} \alpha_{n-2} - \alpha_n \alpha_{n-3}}{\alpha_{n-1}}$$

$$\beta_{n-3} = \frac{\alpha_n \cancel{\alpha_{n-4}}}{\cancel{\alpha_{n-1}} \alpha_{n-5}} = \frac{\alpha_{n-1} \alpha_{n-4} - \alpha_n \alpha_{n-5}}{\alpha_{n-1}}$$

osv.

Ziegler-Nichols' regler : (V.12)

Regulator	K_p	T_i	T_d
P	$0.5K_{pk}$	∞	0
PI	$0.45K_{pk}$	$T_k/1.2$	0
PID	$0.6K_{pk}$	$T_k/2$	$T_k/8$

$$T_k = \frac{2\pi}{\omega_{180}}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \ddots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \ddots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & \ddots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \cdots & -\alpha_{n-2} & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{c}^T = [\rho_0 \ \rho_1 \ \rho_2 \ \cdots \ \rho_{n-1}]$$

$$\text{gir } \frac{y}{u}(s) = h(s) = \frac{\rho_{n-1}s^{n-1} + \dots + \rho_1s + \rho_0}{s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \dots + \alpha_1s + \alpha_0} \quad (\text{V.13})$$

Diskret regulator: Alle s erstattes med $\frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1}$, der z er en tidsforskyvingsoperator. (V.14)

Diskret regulator medfører en ekstra tilnærma tidsforsinkelse = $\frac{T}{2}$ i sløyfetransferfunksjonen. (V.15)

Løsningsforslag eksamen i regulerings-teknikk 8. juni 2006, T.A.

Oppg. 1a)

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{g_1+g_2}{C_1} & \frac{g_2}{C_1} \\ \frac{g_2}{C_2} & -\frac{g_2}{C_2} \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{C_2} \end{bmatrix}, e = \begin{bmatrix} \frac{g_1}{C_1} \\ 0 \end{bmatrix}$$

b) $x_1 \rightarrow v, x_2 \rightarrow v$. Benytter at $\ddot{x}_1 \text{ og } \ddot{x}_2 = 0$
når $t = \infty$: (1.1) blir da:

$$\left. \begin{array}{l} 0 = g_2(x_2 - x_1) - g_1(x_1 - v) \\ 0 = 0 - g_2(x_2 - x_1) \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 = v \\ x_2 = x_1 \end{array}$$

c) En metode er å beregne $h(s) = [0 \ 1] \cdot (sI - A)^{-1} b$, hvor A og b er gitt ovenfor.

En annen er å Laplace transformere (1.1),
eliminere x_1 og løse m.h.p. $\frac{x_2}{u}$:

$$C_1 s x_1 = g_2(x_2 - x_1) + g_1(x_1 - 0) \quad (1)$$

$$C_2 s x_2 = u - g_2(x_2 - x_1) \quad (2)$$

$$(1) \text{ gir } x_1 = \frac{g_2 x_2}{C_1 s + (g_1 + g_2)} \quad (3)$$

Sætter (3) inn i (2) og multipliserer ut:

$$C_1 C_2 s^2 x_2 + C_2 (g_1 + g_2) s x_2 = [C_1 s + (g_1 + g_2)] (u - g_2 x_2) + g_2^2 x_2$$

$$\Rightarrow \frac{x_2}{u}(s) = h(s) = \frac{C_1 s + (g_1 + g_2)}{C_1 C_2 s^2 + [C_2 (g_1 + g_2) + g_2 C_1] s + g_1 g_2} \text{ 96}$$

d) $L[u(t)] = \frac{u_0}{s}$ (sprang). $x_{20} = \lim_{t \rightarrow \infty} x_2(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s x_2(s) =$

$$\lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \left[\frac{x_2}{u} \cdot \frac{u_0}{s} \right] = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{x_2(s)}{u} \cdot u_0 = u_0 h(s) \Big|_{s=0} = \frac{g_1 + g_2}{g_1 g_2} u_0$$

x_{20} øker også med 20 grader når $v = 20$.

e) Forløp ② er korrekt. [Begge temperaturer faller nør eksponentielt.]

f) Forløp ③. [en starfase vil glasset bli varmere fordi varmen fra glødebrænderne akkumuleres i glasset i stedet for å bli ledet bort av kjølelufta. Dette kan skade pøra og er årsaken til at vifta går en stund etter at pøra er slått av.]

Oppgave 2 a) $|h(j\omega)| = \frac{K}{\omega} = \text{rett hjelpeledd}$

i figur 2.1. $\frac{K}{\omega} = 1$ for $\omega \ll 1$ for $\omega = 50 \Rightarrow K = 50$.

Kneppe ned ved $\omega = 2$ gir tidskonstant $T_1 = 0.5$ i nevner. Kneppe opp ved $\omega = 10$ gir $T_2 = 0.1$ i teller. Men telleren blir $(1 - 0.1s)$ fordi fasen knepkes ned, ikke opp. Av alt dette $\Rightarrow h_u(s) = 50 \frac{1 - 0.1s}{s(1 + 0.5s)}$

b) Se neste side.

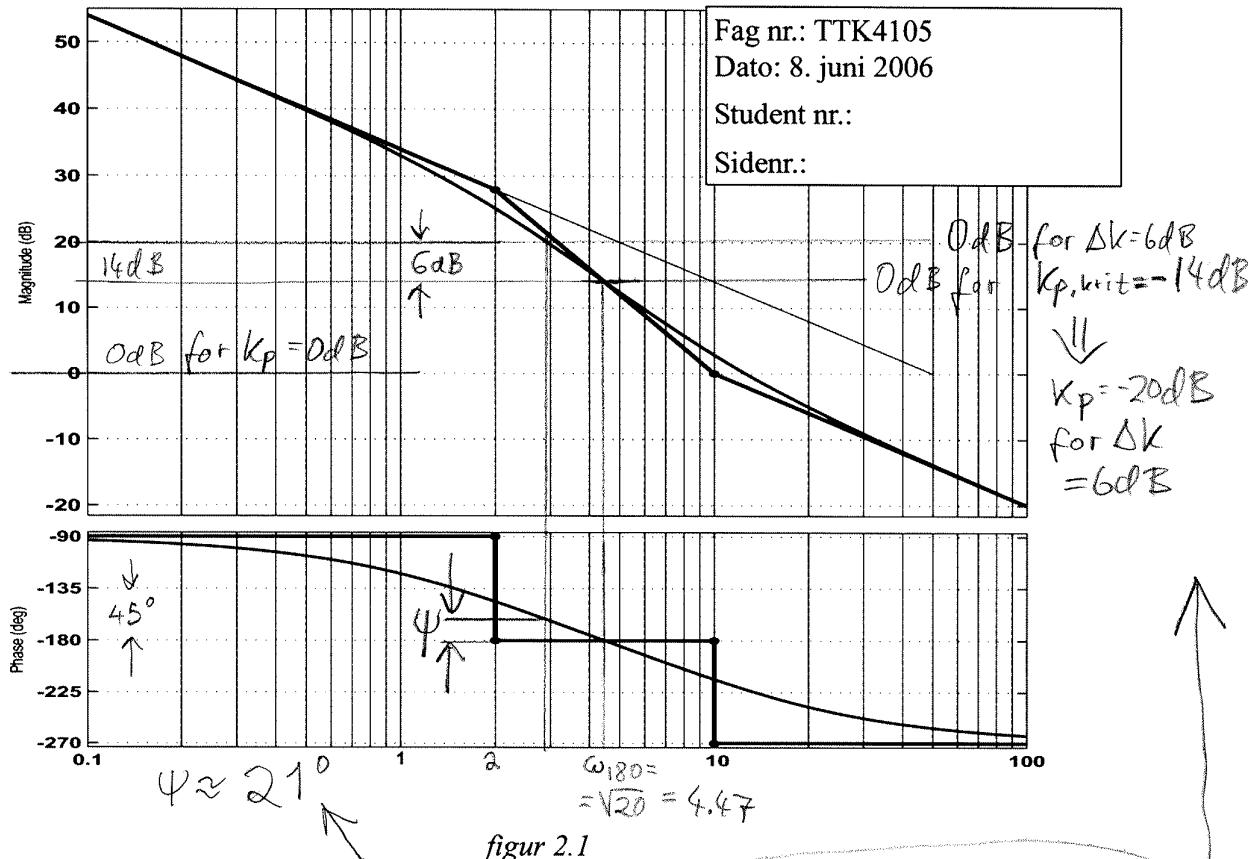
c) Sprang og rampe, fordi det da er to integratorer mellom referanse og utgang.
Se lærebok side 307-308.

d) Med PI-regulator vil $\angle h_o(j\omega) < -180^\circ$ for $\omega \ll 1$, og bli enda mer negativ når ω øker \Rightarrow det lakkede systemet er ustabilt. Fasen må derfor løftes over -180° når ω_c , derfor brøks derivativvirking.

e) Tidsforsinkelsen p.g.a kolddelementet i den diskrete regulatoren er tilnærma $\frac{T}{2}$.

$$\begin{aligned} \text{Fase bidraget} &= -\omega \frac{T}{2} = 3 \cdot 0.01 = 0.03 \text{ rad} \\ &= 0.03 \frac{180}{\pi} = \underline{\underline{1.72^\circ}} \quad [= \text{ubetydelig}] \end{aligned}$$

- 4 -

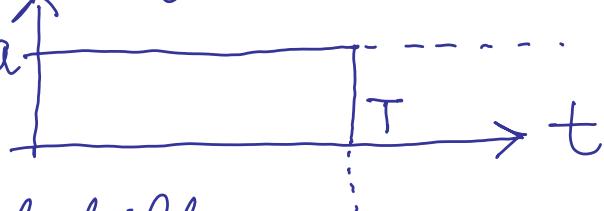


a) (%) Finn $h_u(s)$! Men hvis du ikke gjør i 1.1, kan du ikke løse resten av oppgave !

- b) (%) Anta at $h_u(s)$ skal reguleres med proporsjonalregulator $h_r = K_p$. Finn den K_p som gir forsterkningsmargin $\Delta K = 6dB$! Hva blir da fasemarginen ψ ? Tegn i Bodediagrammet, og lever det påtegnede ark som del av besvarelsen!

Oppgave 3a)

Kan ikke beskrives på tr-form fordi det inneholder en tidsforsinkelse. Alternativt, e^{-Ts} må approksimeres med et rasjonalt nøyaktig i s.

6) $h_u(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s} e^{-Ts} \Rightarrow$ impulsresponsen blir summen av et sprang og et negativt og forsinket sprang: 

9) Systemet er åpen stabilt, så vi må bare sjekke at $h_o(j\omega)$ går på venstre side av $-1 \Rightarrow$ ustabilitet \Leftrightarrow vinkel. Det er oppgitt at $h_o(j\omega)$ er mest negativ for $\omega=0$. Da blir kravet $h_o(j0) < -1$. Vi har

$$h_o(j0) = h_o(0) = \lim_{s \rightarrow 0} \left[-\frac{6a}{s} \cdot \frac{(1 - [1-Ts + \frac{T^2s^2}{2!} + \dots])}{1+Ts} \right]$$

$-6aT$ (kunne også brukt L'Hopital)

$$-6 \frac{\Gamma}{1-e^{-rT}} \cdot T < -1 \Rightarrow$$

$$\underline{6rT > 1 - e^{-rT}}$$

Oppgave 4)

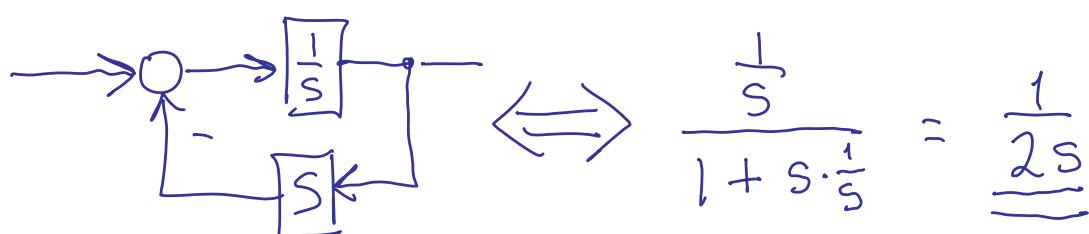
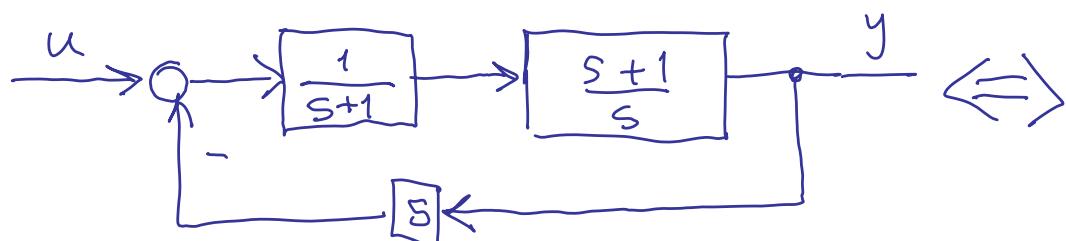
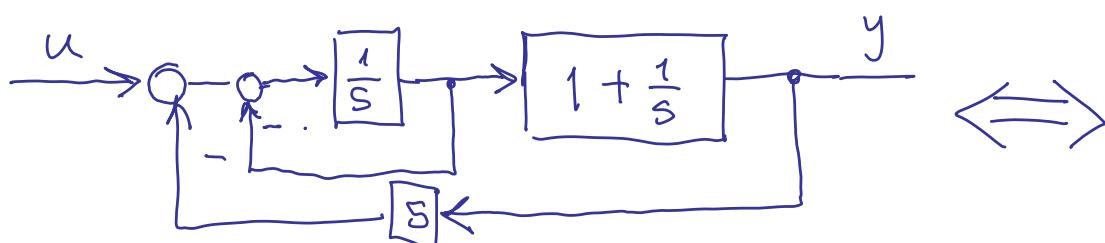
Den ideelle foroverleopling $h_{fi}(s)$

$$\text{gir } h_{fi} = h_u + h_v = 0 \Rightarrow h_{fi} = -\frac{h_v}{h_u}$$

Den statiske foroverleopling er

$$K_f = h_{fi}(s) \Big|_{s=0} = -\frac{\frac{k}{(t+\tau s)}}{\frac{1}{(s+a)^2} e^{-\tau s}} \Big|_{s=0} = -\frac{ka^2}{\underline{\underline{}}$$

Oppgave 5)





Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet (NTNU)

Faglig kontakt under eksamen: Trond Andresen, tlf. **7359 4358**, mobil **9189 7045**
Han går to veiledningsrunder, ca. kl. 0940 - 1010 og ca. kl. 1115 - 1145.

Eksamens i TTK4105 reguleringsteknikk

mandag 4. juni 2007

Tid: 0900 - 1300

Denne besvarelsen teller **100% på karakteren**.

Sensur vil foreligge innen tre uker. Den blir også lagt ut på fagets nettsted når den er klar.

Hjelpemiddelkombinasjon D: Kalkulator med tomt minne tillatt. Ingen trykte eller håndskrevne hjelpemidler tillatt, unntatt Rottmann.

Prosenttallene angir den relative vekt oppgavene tillegges ved bedømmelsen.

Flere spørsmål kan besvares meget enkelt ved å bruke **formelsamlinga** bakerst i oppgavesettet. Se **kjapt gjennom den før du begynner**. Sjekk den alltid før du gir opp! Men du må forklare hvordan du bruker noe, når du henter det fra formelsamlinga.

Noen spørsmål skal besvares ved å **måle ut verdier på figurer i oppgavesettet** – i slike tilfeller godtas en viss "måleunøyaktighet"! Der **kan man tegne i figuren og levere det påtegnede arket som en del av besvarelsen**. Oppgavesettet har dobbelt sett med sider der hvor det er slike figurer.

STUDENTS MAY ANSWER THIS EXAM IN ENGLISH IF THAT IS PREFERRED.

Oppgave 1 (32 %) (Tips: det er ikke noe krevende regnearbeid i denne oppgaven)

Gitt prosessen $h_0(s) = h_r h_u(s) = K_p \frac{1-Ts}{1+Ts} e^{-\tau s}$, T og $\tau > 0$ (1.1)

a) (5 %) Skissér grovt enhetssprangresponsen til h_0 . Men indikér K_p , T og τ i skissen. Er systemet åpent stabilt?

b) (3 %) Sett $K_p = 0.25$. Skissér Nyquist(= polar)diagrammet til h_0 .
(Tips: Diagrammet blir uhyre enkelt og ser liketan ut for alle verdier av T og $\tau > 0$).

c) (5 %) Bruk nå Nyquist-diagrammet:

Hva blir den øvre verdi K_{pk} ($= K_p$, kritisk) når det lukkede system (altså med enhetstilbakekopling) er på stabilitetsgrensa?

Hva blir forsterkningsmarginen ΔK (i [dB]) når $K_p = 0.25$?

K_p kan i dette tilfellet også være noe negativ før det lukkede system blir ustabilt. Finn den nedre grensa $K_{pkn} < 0$, hvor det lukkede system blir ustabilt!

- d) (4 %) Det benyttes *fra nå av og i resten av oppgaven* en rasjonal approksimasjon for $e^{-\tau s}$. Det oppgis at det lukkede system $h(s)$ da blir

$$h(s) = \frac{K_p(1-Ts)\left(1-\frac{\tau}{2}s\right)}{(1+Ts)\left(1+\frac{\tau}{2}s\right) + K_p(1-Ts)\left(1-\frac{\tau}{2}s\right)} \quad (1.2)$$

Hvilken rasjonal approksimasjon for $e^{-\tau s}$ er det som er benyttet?

- e) (4 %) Finn K_{pk} og K_{pkn} ved hjelp av Rouths kriterium. Sammenlign med resultatene fra punkt c).

- f) (4 %) For $K_p > K_{pk}$ blir det lukkede system ustabilt. Det får N_n poler i høyre halvplan.
Finn N_n ved hjelp av Nyquists kriterium!

(NB: husk at ω gjennomløper $-\infty$ til $+\infty$, ikke 0 til $+\infty$.)

Alternativt kan du finne N_n ved hjelp av Rouths kriterium.

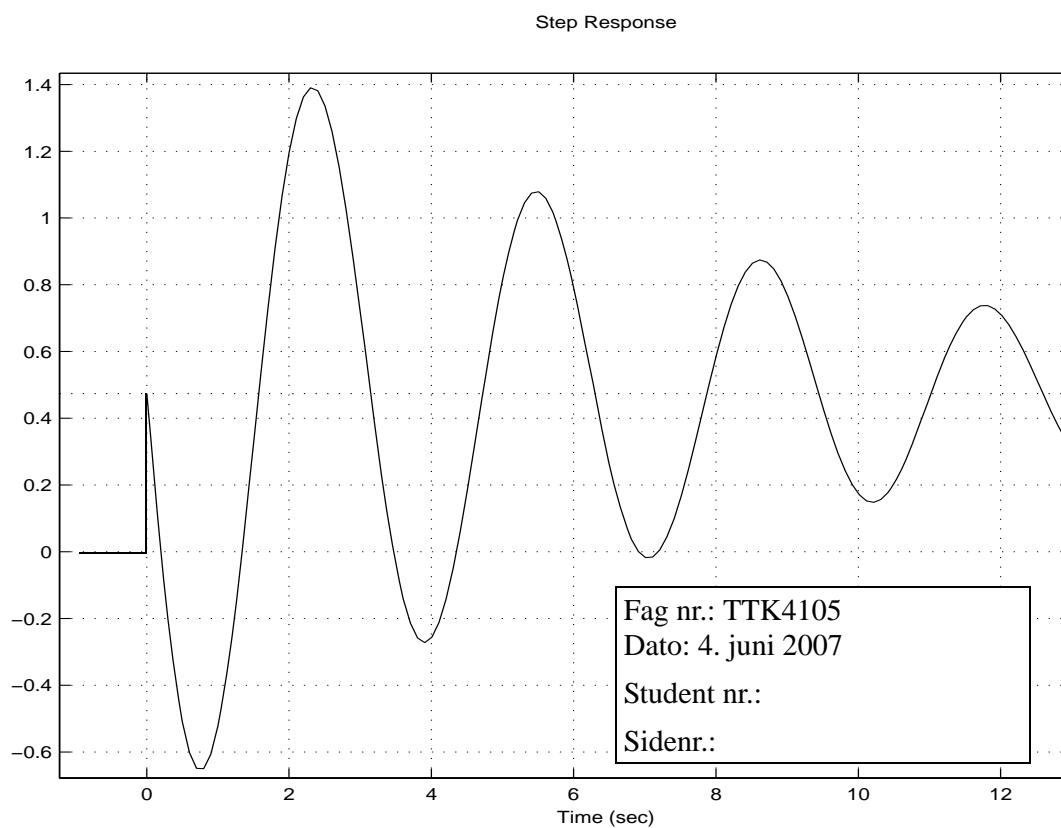
Det gis poeng bare for ett alternativ, så du trenger ikke gjøre begge deler.

- g) (7 %) Vi setter $K_p = 0.9$, $T = 1$, $\tau = 0.5$. Inngangsignalet til $h(s)$ er et enhetssprang.

Regn ut ω_0 (tips: rundt tall!). Responsen til $y(t)$ blir som vist i figur 1.1.

Finn ω_0 med utgangspunkt i målinger på grafen!

(Tegn i diagrammet og lever det som del av besvarelsen.)

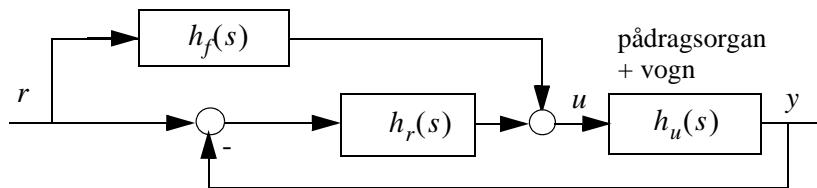


figur 1.1

Oppgave 2 (21 %)

Figur 2.1 viser en struktur med enhetstilbakekopling og foroverkoppling fra referansen.

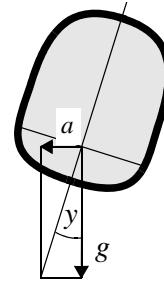
figur 2.1



- a) (5 %) (Se i dette punktet bort fra figurteksten “pådragsorgan + vogn”.)

Finn transferfunksjonen $h(s) = \frac{y}{r}(s)$. Finn den ideelle foroverkoppling $h_{fi}(s)$.

Vi skal nå anvende dette på et *krengetog*. Vognene skal krenge i svingene slik at vektorsummen av gravitasjon og sidekraft peker mest mulig vinkelrett mot golvet. Vi forenkler problemet til følgende: Betrakt ei enkelt vogn (figur 2.2) med trehetsmoment J [kgm²] rundt lengdeaksen. Vogna tenkes å være opplagret i sitt tyngdepunkt. Vi har med andre ord ingen pendelvirkning – i den grad vogna dreier seg rundt sin lengdeakse, er det fordi den påsettes et ytre dreiemoment d [Nm] fra togets reguleringssystem. Pådragsorganet har en viss treghet, og må derfor trekkes inn i prosessmodellen $h_u(s)$. Dreiemomentet d følger differensialligningen



figur 2.2

$$\dot{d} = \frac{1}{T}(-d + Ku) \quad (2.1)$$

I dette tilfellet er u signalet *inn* på pådragsorganet. Vinkelposisjonen y til vogna betraktes som systemutgang. Parameteren g er tyngdens akselerasjon, og sentripetalakselerasjonen kalles a . $a(t)$ måles, og omregnes løpende til en ekvivalent referansevinkel $r(t)$ for vogna, $r = \arctg(a/g)$ (men du trenger ikke denne formelen til spørsmålene i denne oppgaven, så dette var bare for å bidra til å forklare systemets virkemåte.)

- b) (7 %) Vis at den ideelle foroverkoppling $h_{fi}(s)$ fra r til u i dette tilfellet blir

$$h_{fi}(s) = \frac{J}{K}(s^2 + Ts^3). \quad (2.2)$$

Foreslå en mer realistisk foroverkoppling $h_f(s)$ som har den egnskap at dens amplitude → konst. når $\omega \rightarrow \infty$! Hva betyr denne forverkopplinga for systemets stabilitet?

- c) (4 %) Hvorfor må du ha derivativirkning i regulatoren $h_r(s)$ for dette systemet? Verbalt svar er tilstrekkelig.
- d) (5 %) Anta at vi ønsker null stasjonært avvik når referansen er en rampefunksjon; $r(t) = at$, $t > 0$. Trengs det integralvirkning i regulatoren?
Ut fra c) og d): Hva slags regulator ender vi da opp med? Verbale svar er tilstrekkelige.

Oppgave 3 (21 %) (diverse)

- a) (5 %) Du skal svare på om følgende systemer er asymptotisk stabile, marginalt stabile eller ustabile. De er gitt ved sine transferfunksjoner:

$$\frac{1}{s^2}, \quad \frac{1-Ts}{1+Ts}, \quad \frac{1+Ts}{1-Ts}, \quad \frac{1}{(1+Ts)(1-Ts)}, \quad \frac{e^{-\tau s}}{1+s^2}, \quad (3.1)$$

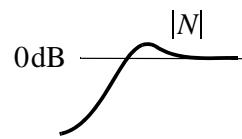
Svar ved å angi bokstavene A, M, U i samme rekkefølge som transferfunksjonene er listet opp. For at gjetting ikke skal premieres, gis det minus ett poeng for feil svar. Sett derfor X hvis du er usikker.

- b) (2 %) Hvilke to stabile systemer i (3.1) er av ikke-minimum-fase type? Angi dem med nummer ut fra rekkefølgen i (3.1).

- c) (4 %) Skissen til høyre viser et typisk amplitudeforløp for et avviksforhold

$$|N(j\omega)| = \left| \frac{1}{1 + h_0(j\omega)} \right|, \quad h_0 = h_r h_u$$

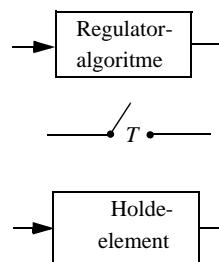
Hvilke to kvalitative endringer skjer med grafen hvis forsterkninga i regulatoren h_r økes?



- d) (5 %) Tegn blokkdiagram hvor en generell kontinuerlig monovariabel

prosess $\frac{y}{u}(s) = h_u(s)$ inngår i et diskret reguleringsystem.

(Tips: diagrammet skal bl.a. inneholde de tre elementer som er vist til høyre.) Indikér hvor $r[k], y[k], u[k], u(t), y(t)$ er i diagrammet



- e) (5 %) Hvordan går du fram hvis du vil lage en diskret regulator med utgangspunkt i en kontinuerlig regulator? Hvordan kan du ta hensyn til virkninga av tastetida T , i de tilfeller at denne er så stor at dens virkning ikke kan ignoreres?

Oppgave 4 (10 %)

Gitt en prosess $\frac{y}{u}(s) = h_u(s) = \frac{s+1}{s^2 + 5s + 6}$ (4.1)

- a) (5 %) Vis at denne kan representeres ved tilstandsromformen

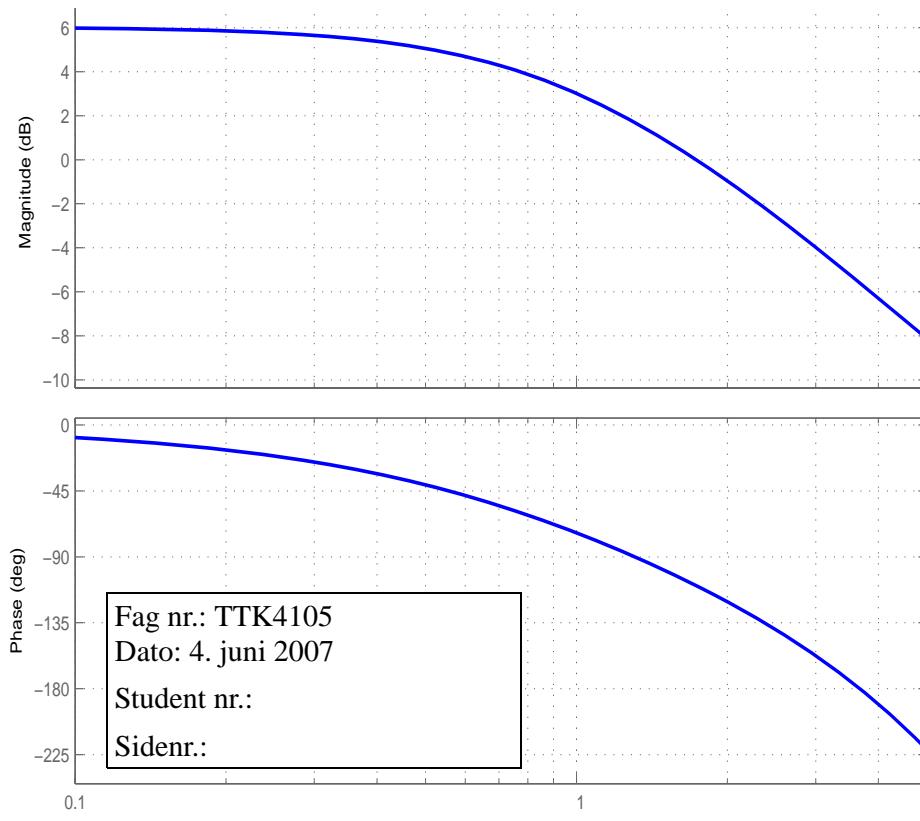
$$\dot{\underline{x}} = A\underline{x} + \underline{b}u, \quad y = \underline{c}^T \underline{x}, \quad \text{der } A = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \underline{c}^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

- b) (5 %) Finn transisjonsmatrisa $\Phi(t)$!

Anta $u(t) = \mu_1(t)$ (enhetssprang), og $\underline{x}(0) = \underline{0}$. Vis at $\underline{x}(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}(1 - e^{-3t}) \\ \frac{1}{2}(1 - e^{-2t}) \end{bmatrix}$!

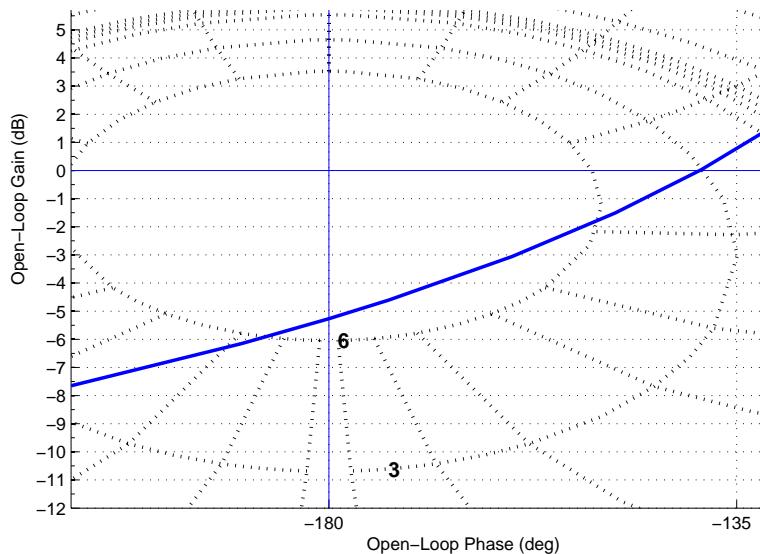
Oppgave 5 (16 %)

Figur 5.1 viser frekvensresponsen til en $h_0 = h_r h_u$ med proporsjonalregulator; $K_p = 0.1$.



figur 5.1

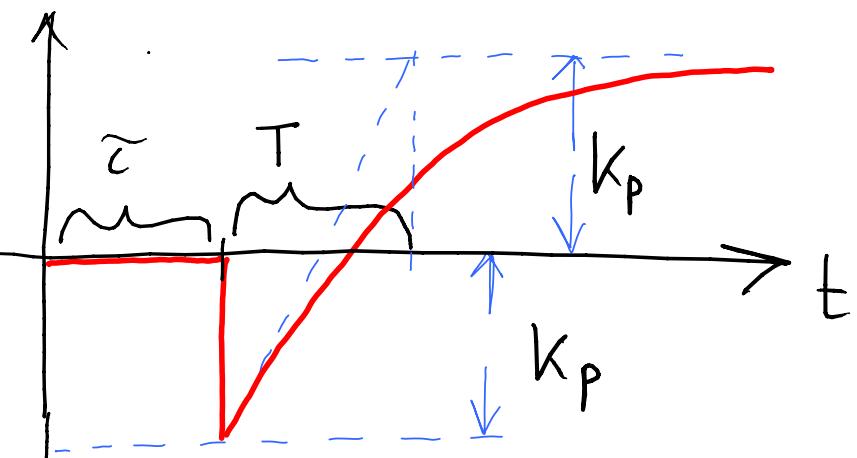
- a) (4 %) Er det lukkede system stabilt for denne verdien av K_p ? Begrunnet svar!
- b) (6 %) Det skal brukes PI-regulator på systemet. Finn verdier for K_p og T_i ved hjelp av Ziegler-Nichols' metode!
- c) (3 %) Med parametre valgt i følge pkt. b), blir frekvensgangen til den åpne sløyfes transferfunksjon som vist i Nichols-diagrammet til høyre. Kommentér!
- d) (3 %) Hvor mye ville du eventuelt ha endret K_p ? (Tegn i diagrammet og lever denne siden som del av besvarelsen!)



Løsningsforslag eksamen i regulerings-teknikk 4/6 - 2007

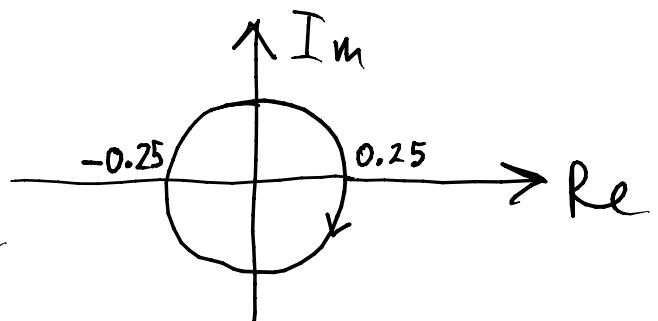
Oppg. 1a)

Kan finnes v.h.o.a. beg. verdi og sluttverdi, og/eller 1. linje s. 11 i oppgavesettet



1b)

$$|h_0| = 0.25 \frac{\sqrt{1+(\omega T)^2}}{\sqrt{1+(\omega T)^2}} \cdot 1 = 0.25 = \text{sirkel}$$



1c) Systemet er åpent stabilt.

Da skal ikke Nyquistkurven anslutte -1. Sirkelen har radius $= K_p$. Da blir $K_{pk} = 1$. $\Delta K = 4 = 12 \text{ dB}$. $|h_0|$ for $K_p < 0$ blir $|K_p|$. Sirkelen har også radius $|K_p| \Rightarrow K_{pk_n} = -1$.

$$1d) h = \frac{t_0/n_0}{1 + t_0/n_0} = \frac{\overline{t_0}}{n_0 + t_0} \Rightarrow \frac{t_0}{n_0} = K_p \frac{1 - T_s}{1 + T_s} \frac{(1 - \frac{T_s}{2})}{(1 + \frac{T_s}{2})}$$

$\Rightarrow e^{-\tilde{C}s}$ approksimeres med $\frac{1 - \frac{T_s}{2}s}{1 + \frac{T_s}{2}s}$

1e) Newton polynommet i $h =$

$$(1 + K_p) \frac{T_s}{2} s^2 + \left(T + \frac{\tilde{C}}{2}\right)(1 - K_p)s + (1 + K_p)$$

1e, forts) Rouths tabell blir da:

$$(1+k_p) \frac{T\zeta}{2} \quad 1+k_p$$

$$\frac{(1-k_p)(T+\frac{\zeta}{2})}{1+k_p} \quad 0$$

Vi krever ingen fortengnsskifft $\Leftrightarrow -1 < k_p < 1$
Spørsmål med resultatet fra 5.

(Ellers gjelder det for et 2-orders system at
Venstre kolonne blir identisk med polynoms
koefisienter. Det er da tilstrekkelig å sjekke
om disse har samme fortegn.)

1f) Nyquist: $\Delta L(1+h_0) = -4\pi = -2\pi (N_n - 0) \Rightarrow \underline{N_n = 2}$

Routh: $k_p > 1 \Rightarrow$ to fortegnsskifft $\Rightarrow \underline{\underline{N_n = 2}}$
 $k_p < -1 \Rightarrow \underline{\underline{\underline{\underline{N_n = 2}}}}$

1g) Fra 1e): $n_0 + t_0 = (1+k_p) \frac{T\zeta}{2} s^2 + (T + \frac{\zeta}{2})(1-k_p)s + (1+k_p)$
 $\Rightarrow s^2 + \frac{1-k_p}{1+k_p} \cdot \frac{T+\frac{\zeta}{2}}{\frac{T\zeta}{2}} s + \frac{2}{T\zeta} = s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2$
 $\Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{2}{T\zeta}} = \underline{\underline{2}}$.

Måler over tre perioder, $t_2 - t_1 \approx 9.45$

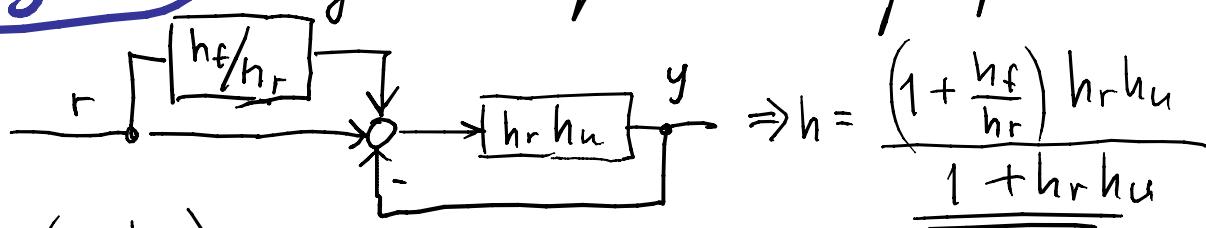
$$\text{Da er } \beta = \frac{\frac{2\pi}{9.45/3}}{9.45/3} = \frac{6\pi}{9.45} = 1.9947$$

Ved t_2 til t_1 er amplituden h.hv. 5.05 cm og
1.45 cm. Vi har da $e^{-\alpha \cdot 9.45} = \frac{1.45}{5.05} \Rightarrow$

$$\alpha = \frac{1}{9.45} \ln \left(\frac{5.05}{1.45} \right) = 0.1320$$

$$\omega_0 = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = \sqrt{1.9947^2 + 0.1320^2} = \underline{\underline{1.9991 \approx 2}}$$

Oppg. 2 a) Flytter høyre summarjonspunkt:



Hvis $\left(1 + \frac{h_f}{h_r}\right) h_r h_u = 1 + h_r h_u$ blir $h = 1$. Dette oppnås med $h_f = \frac{1}{h_u} = \underline{h_{fi}}$

2b)

$$u \xrightarrow{\frac{(2,1)}{\frac{K}{1+Ts}}} d \xrightarrow{(V,6) \frac{1}{Js^2}} y \Rightarrow h_u = \frac{K}{Js^2(1+Ts)}$$

$$\Rightarrow h_{fi} = \frac{1}{h_u} = \frac{1}{K} \frac{1}{(s^2 + Ts^3)}$$

Velger h_f slik at $|h_f(j\omega)| \rightarrow \text{konst.}$ når $\omega \rightarrow \infty$:

$$h_f = \frac{J}{K} \cdot \frac{s^2 + Ts^3}{(1+\alpha Ts)^3}, \quad 0 < \alpha \ll 1$$

Føroverkoppling betyr ingenting for systemets stabilitet!

2c)

$\angle h_o(j\omega) < -180^\circ \forall \omega$. For å få stabilt lukket system må $\angle h_o$ løftes over -180° . Det krever derivativrirkning.

2d)

Kravet oppfylles hvis $\angle h_o$ fra r til y. h_o inneholder to integrasjoner. Da følger det ingen i h_r . Derved gir 2c) og 2d) som resultat: (begrenset) PD-regulator

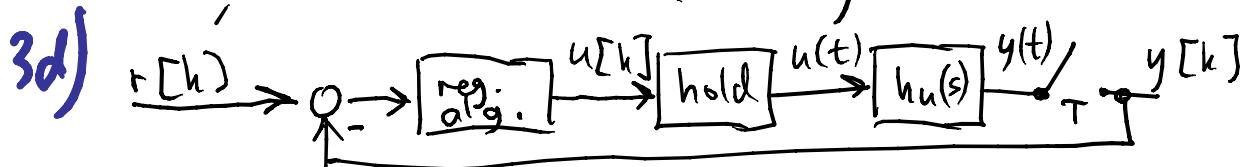
Oppg. 3a)

- 4 -

UAUUM

3b) 2,5

- 3c) Stiplet graf indikerer endringa:
- kryssfrekvensen øker (bra)
 - resonans toppen blir høyere (dårlig: mindre stabilitet)
-



- 3e) Antar at regulatoren er kontinuerlig, og bestemmer parametre på det grunnlaget. Så erstattes alle s'ene i $h_r(s)$ med $\frac{2}{T} \left(\frac{s-1}{s+1} \right)$.

Dette gir en rekursiv formel for den diskrete regulator.

Hvis T er "stor", kan man gjøre som ovenfor, men må bare først putte inn en tidsforskjellse $e^{-\frac{T}{2}s}$ i h_0 .

- Oppg. 4a) Gjør dette ved å vise at (4.2) gir (4.1). Vi har $h(s) = C(I - A)^{-1}B =$

$$\begin{matrix} & \frac{1}{s+3} & 0 & 1 \\ & 0 & \frac{1}{s+2} & 1 \\ \begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \frac{2}{s+3} & -\frac{1}{s+2} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \frac{2}{s+3} & -\frac{1}{s+2} \end{bmatrix} \end{matrix} = \frac{2(s+2) - (s+3)}{(s+3)(s+2)} = \frac{s+1}{s^2 + 5s + 6}$$

4b) $\Phi(t) = e^{At} = (\text{i dette tilfellet}) = e^{At} = \begin{bmatrix} e^{-3t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}$

4b forts.)

- 5 -

$$x(t) = \int_0^t e^{\lambda(t-\tau)} b u(\tau) d\tau = \int_0^t \begin{bmatrix} e^{-3(t-\tau)} & 0 \\ 0 & e^{-2(t-\tau)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} d\tau \cdot 1$$

$$= \int_{\tau=0}^t \begin{bmatrix} e^{-3(t-\tau)} \\ e^{-2(t-\tau)} \end{bmatrix} d\tau = - \int_{\alpha=t}^0 \begin{bmatrix} e^{-3\alpha} \\ e^{-2\alpha} \end{bmatrix} d\alpha = \int_0^t \dots = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}(1 - e^{-3t}) \\ \frac{1}{2}(1 - e^{-2t}) \end{bmatrix}$$

Oppg. 5a) Se neste side.

5b)

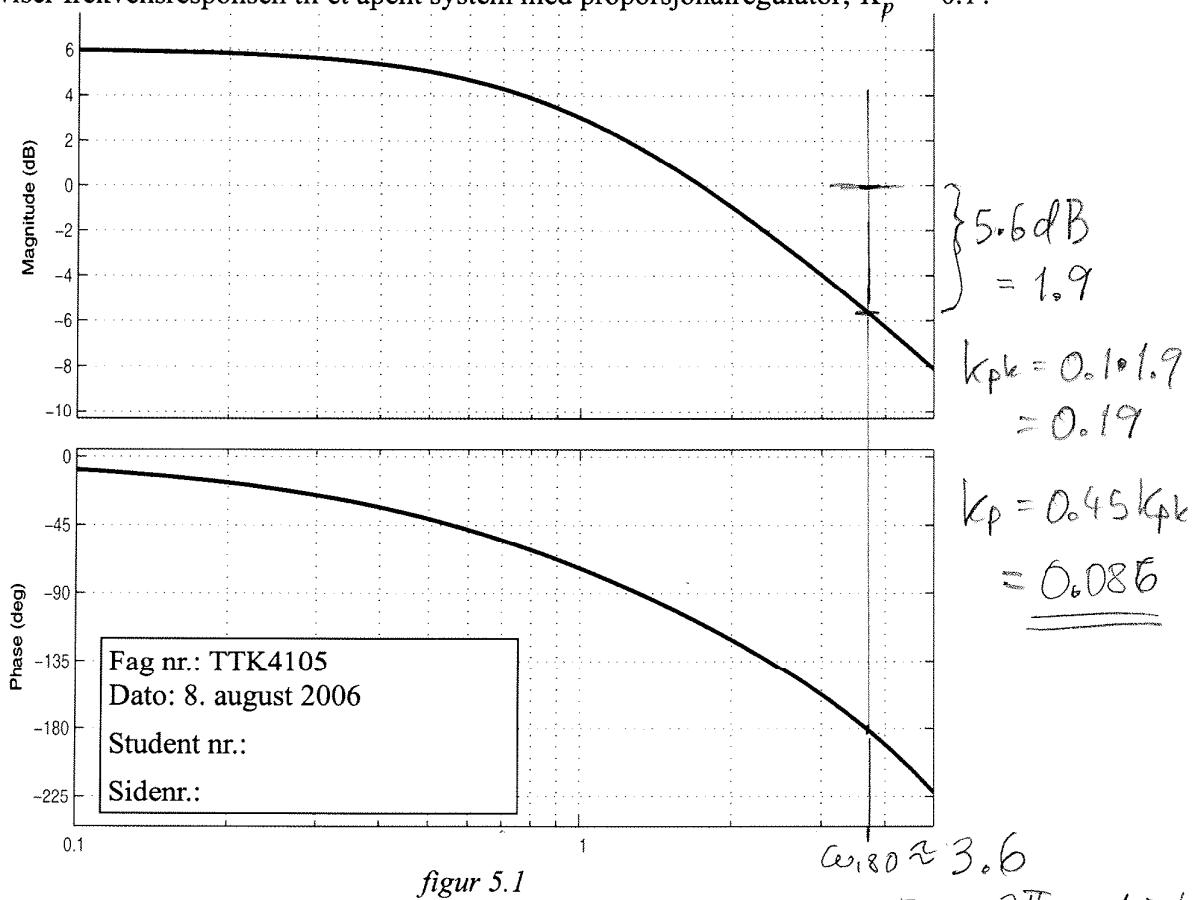
— u —

5c) Resonansstøpper i $|N(j\omega)|$ blir mye over 6dB. Dette indikerer for dårlig stabilitet. K_p må reduseres, eller T_i kan økes.

5d) Se neste side.

Oppgave 5

Figur 5.1 viser frekvensresponsen til et åpent system med proporsjonalregulator; $K_p = 0.1$.



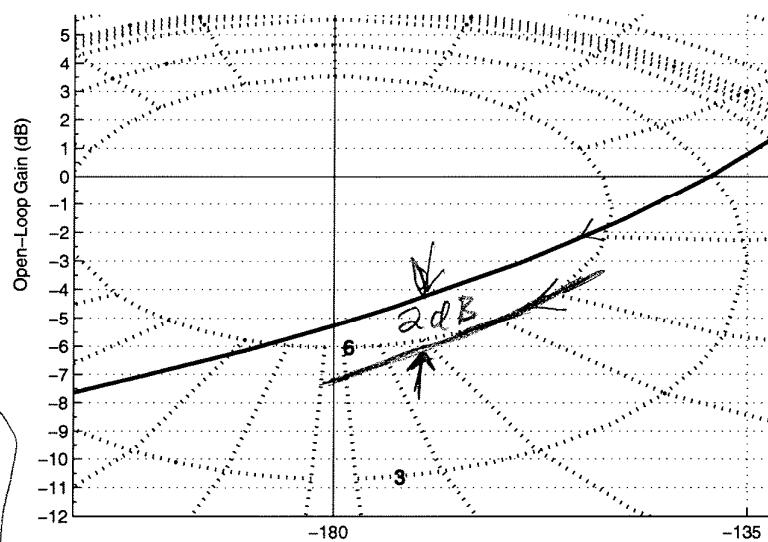
a) (%) Er det lukkede system stabilt for denne verdien av K_p ? Begrunnet svar!

$$T_k = \frac{2\pi}{3.6} = 1.74$$

b) (%) Det skal brukes PI-regulator på systemet. Finn verdier for K_p og T_i ved hjelp av Ziegler-Nichols' metode!

$$T_i = \frac{T_k}{1.2} = 1.45$$

c) (%) Med parametre valgt i følge pkt. b), blir frekvensgangen til den åpne sløyfes transferfunksjon som vist i Nichols-diagrammet til høyre. Kommentér!



d) (%) Hvor mye ville du eventuelt ha endret K_p ? (Tegn i diagrammet og lever denne siden som del av besvarelsen!)

$\rightarrow K_p$ bør reduseres med $\approx 2 \text{ dB}$



Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet (NTNU)

Faglig kontakt under eksamen: Trond Andresen, mobil **9189 7045**
Han går to veiledningsrunder, ca. kl. 0940 - 1010 og ca. kl. 1115 - 1145.

Eksamens i TTK4105 reguleringsteknikk

mandag 25. mai 2009

Tid: 0900 - 1300

Sensur vil foreligge innen tre uker. Den blir også lagt ut på fagets nettsted når den er klar.

Hjelpemiddelkombinasjon D: Kalkulator med tomt minne tillatt. Ingen trykte eller håndskrevne hjelpemidler tillatt, unntatt Rottmann.

Prosentallene angir den relative vekt oppgavene tillegges ved bedømmelsen. Denne besvarelsen teller 100% på karakteren.

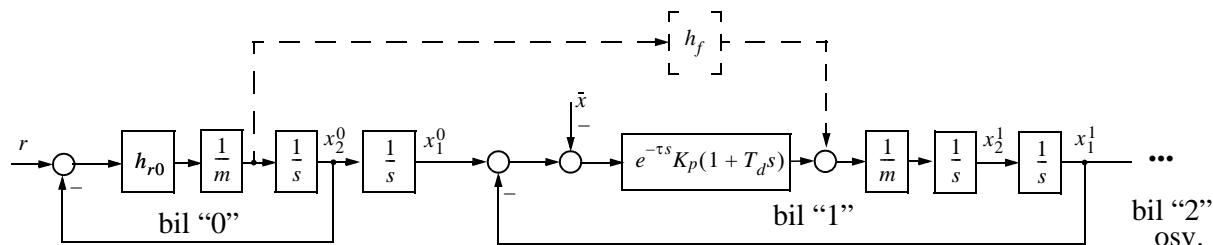
Flere spørsmål kan besvares meget enkelt ved å bruke formelsamlinga bakerst i oppgavesettet. Se kjapt gjennom den før du begynner. Sjekk alltid den før du gir opp! Men du må forklare hvordan du bruker noe, når du henter det fra formelsamlinga. Noen spørsmål skal besvares ved å lese av verdier på grafer i oppgavesettet – i slike tilfeller godtas en viss "måleunøyaktighet"! Der kan man tegne i figuren og levere det påtegnede arket som en del av besvarelsen.

Oppgave 1 (40 %)

I en bilkø forplantes hastighetssvingninger bakover i køen. Vi skal blant annet se på dette fenomenet. For enkelhets skyld antar vi at farten er så lav at vi kan se bort fra luftmotstand og annen friksjon, og at alle biler er av samme type og har avstandsregulering, unntatt den første (bil nr. "0"), som følger en hastighetsreferanse. Hver bil har masse m . Avstanden mellom bil n og bil $n-1$, $n = 1, 2, \dots$, skal holdes mest mulig konstant = \bar{x} . Avstandsregulatorene er identiske og antas som

$$h_r(s) = e^{-\tau s} K_p (1 + T_d s) \quad (1.1)$$

I regulatoren inngår sjåførens oppførsel, og τ er reaksjonstida. Motor og gasspedal er også med i regulatoren. Pådraget fra regulatoren er motorens skyvekraft på bilen. Vi viser systemet bare med bil nr. "0" og "1" i køen, men flere biler er antydet:

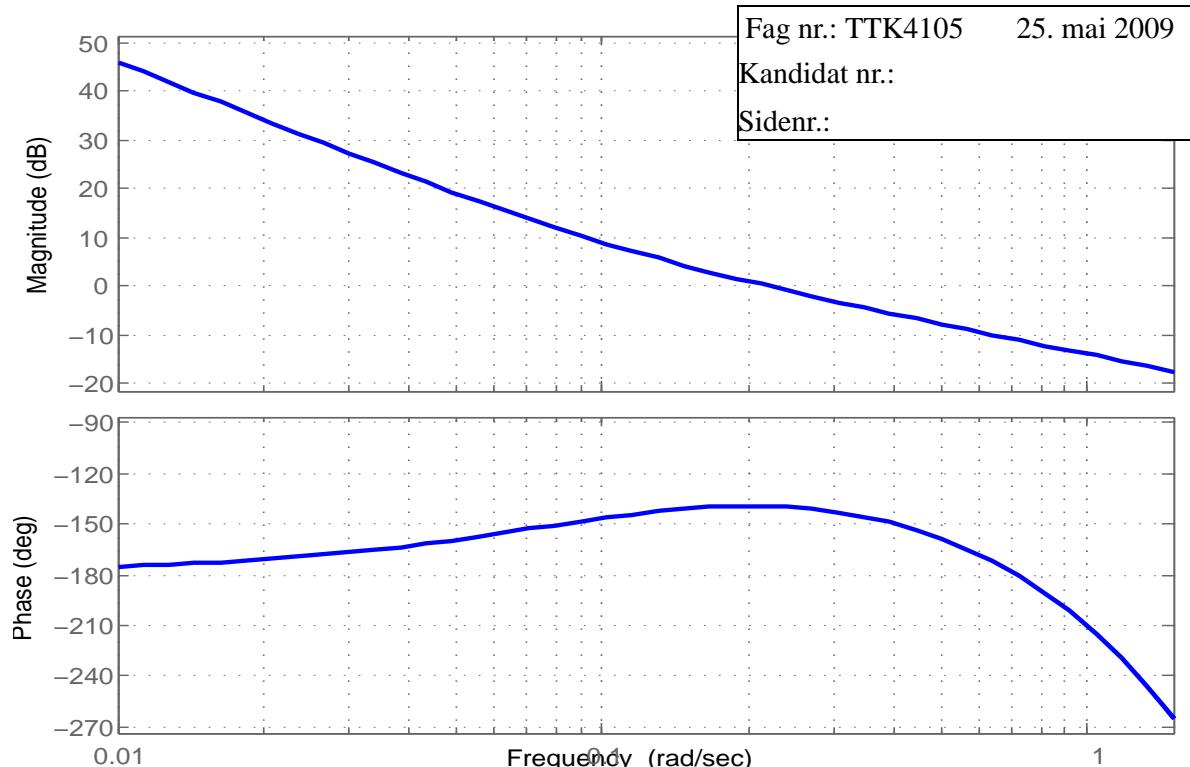


figur 1.1

I figur 1.1 er r en konstant hastighetsreferanse for bil nr. 0. h_{r0} er en hastighetsregulator, som vi ikke skal studere i detalj. x_2^0 [m/s] og x_1^0 [m] er hastighet og posisjon for bil "0".

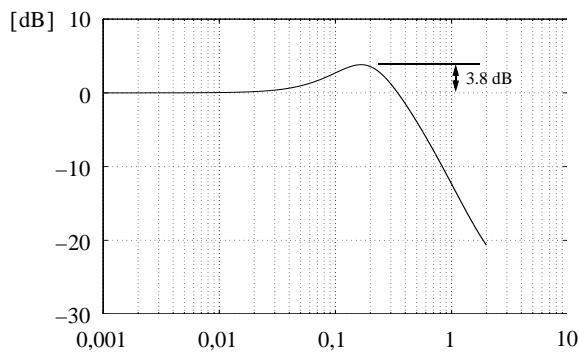
Se inntil videre bort fra den stippledde delen av figuren. I hele denne oppgaven kan du se bort fra \bar{x} .

- a) (5 %) Vi krever at det ikke skal være noe stasjonært hastighetsavvik for bil "0". Trengs det en integrator i $h_{r0}(s)$? Svaret må begrunnes, verbalt eller ved hjelp av sluttverditeoremet!
- b) (7 %) Figur 1.2 viser Bodediagram for $h_0 = h_r/(ms^2)$ for et sett parameterverdier: $K_p/m = 0.02$, $\tau = 2$, $T_d = 10$. Du skal tegne inn asymptoter i figuren og leve det påtegnede arket. Det skal framgå hvordan du har fastlagt asymptotene, det er ikke nok å "smyge dem" inntil grafen på øyemål. Asymptotene for $\angle h_0$ har i dette tilfelle gyldighet bare for en del av h_0 . Forklar!

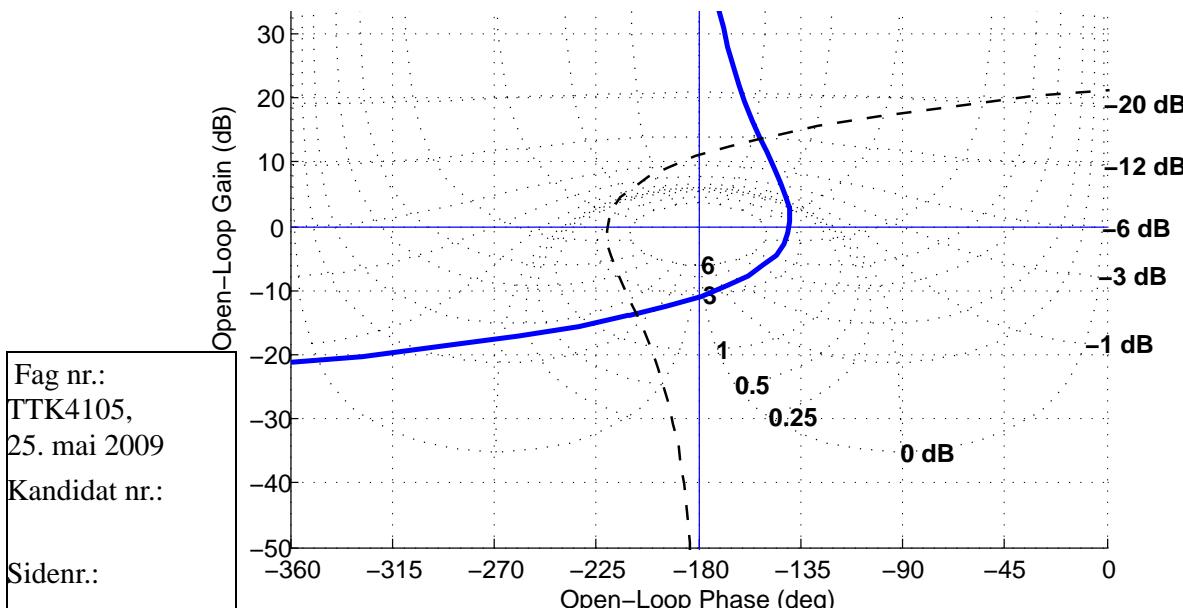


figur 1.2

- c) (5 %) Bil "1" (og de øvrige etter denne) må ha derivativirkning i regulatoren, slik det er vist i (1.1). Hvorfor? (1.1) er en enkel, men litt for optimistisk regulatormodell. Hvorfor?
- d) (3 %) Les av fasemargin ψ og forsterkningsmargin ΔK i diagrammet. Er disse akseptable?
- e) (4 %) Finn følgeførholdet fra hastighet inn til hastighet ut: $M(s) = \frac{x_2^n}{x_2^{n-1}}(s)$.
- f) (4 %) Figuren til høyre viser $|M(j\omega)|$.
Anta at bil nr. "0" kjører i 8 [m/s], men varierer sin hastighet sinusformet rundt denne med amplitude 0.5 [m/s] og frekvens 0.17 [rad/s]. Dette fører til forsterkede svingninger for bilene bak. Vis at amplituden på hastighetsvariasjonen til bil nr. 5 blir 4.45 [m/s].



- g) (4 %) Figur 1.3 viser et Nichols-diagram, hvor man med utgangspunkt i grafen for h_0 kan lese av både $|N|$ og $|M|$. Sjekk fasemargin ψ og forsterkningsmargin ΔK , og sammenlign med resultatet fra d). Markér det punkt hvor du kan avlese resonanstoppen til $|M|$ (NB: ikke $|N|$!). Levér det påtegnede arket som del av besvarelsen.



figur 1.3

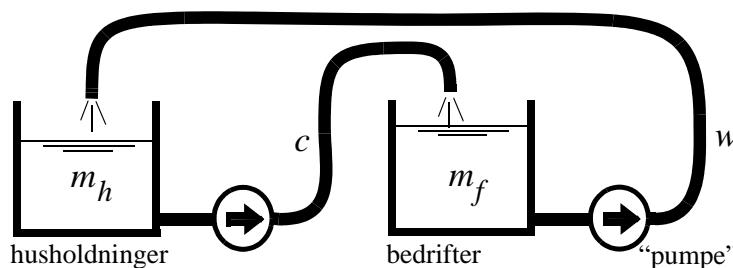
- h) (4 %) Vi skal nå ta med den stiplete foroverkopplinga i figur 1.1. (Den realiseres reikt praktisk ved at hver bil måler egen akselerasjon og sender målinga trådløst til etterfølgende bil.) Med litt manipulering ser man at dette svarer til en foroverkoppling fra referanse. Finn hva som skal stå i blokka h_f (tips: i dette tilfelle blir det en konstant!).

- i) (4 %) Med denne foroverkopplinga: Hva blir nå $M(s) = \frac{x_2^n}{x_2^{n-1}}(s)$? (Tips: svaret er veldig enkelt.) Hva kan vi si om oppførselen til en bilkø med slik foroverkoppling mellom bilene?

Oppgave 2 (27 %)

Gitt en meget enkel samfunnsøkonomisk modell (*du trenger ikke kunne noe økonomi for å løse denne oppgaven*).

Modellen består av to “kar” som det sirkulerer “væske” imellom, se figur til høyre. “Væsken” i dette systemet er *penger*. Vi har:



m_h, m_f = pengebeholdning hos henholdsvis husholdninger og bedrifter (=“firms”= f) [kr.]

w = pengestrøm fra bedriftene til husholdningene, dvs. lønn (w = “wages”) [kr./ år]

c = pengestrøm fra husholdningene til bedriftene, dvs. privat kjøp av varer og tjenester (c = “consumption”= forbruk) [kr./ år]

Alle disse størrelser er variable i tida t . Det forutsettes at strømmene c og w fra hver sektor “pumpes ut” proporsjonalt med pengebeholdningene der, slik at vi har

$$c = m_h/T_h \text{ og } w = m_f/T_f, \text{ der } T_h \text{ og } T_f \text{ er konstanter [år]} \quad (2.1)$$

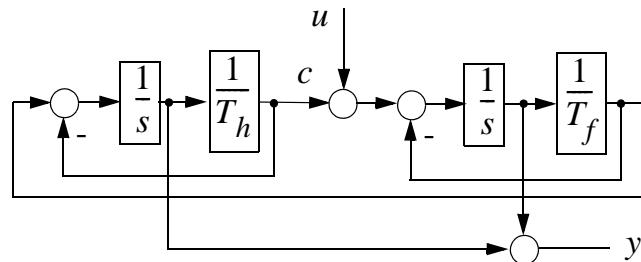
- a) (6 %) Finn en tilstandsrommodell for systemet, med $x_1 = m_f$ og $x_2 = m_h$.
Er dette et *autonomt* system? (Begrunnet svar!)

- b) (12 %) Ved tida $t = 0$ har vi startverdier m_{f0} og m_{h0} . Vis at tidsforløpet $m_f(t)$ er

$$m_f(t) = m_{f0}e^{-\alpha t} + \frac{m}{\alpha T_h}(1 - e^{-\alpha t}), \text{ der } \alpha = \frac{1}{T_f} + \frac{1}{T_h} \text{ og } m = m_{f0} + m_{h0}$$

$$\text{Finn } \frac{m_f}{m_h}(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{m_f(t)}{m_h(t)}. \text{ Kommentér resultatet: Er det rimelig?} \quad (2.2)$$

- c) (4 %) Vi innfører nå en pengestrøm u som representerer det offentliges kjøp av varer og tjenester. Den er et pådrag i vår modell, som adderes til privat forbruk c . Den samlede pengemengde i systemet er $y = m_f + m_h$.
Se blokkdiagram til høyre.



$$\text{Finn } A, b, c^T \text{ i tilstandsrommodellen } \dot{x} = Ax + bu, \quad y = c^T x \quad (2.3)$$

- d) (5 %) Finn transferfunksjonen $h(s) = \frac{y}{u}(s)$, v.h.a. (2.3) eller blokkdiagrammet over.

Det viser seg at transferfunksjonen kan forenkles til $h(s) = 1/s$. Dette kunne du ha funnet ut ved en verbal betraktning på systemet uten å måtte regne deg fram. Forklar!

Oppgave 3 (16 %)

- a) (4 %) En prosess $h_u = \frac{1}{s+a}$, $a > 0$ skal reguleres med PI-regulator $h_r = K_p \frac{1+T_i s}{T_i s}$.

Forklar hvorfor det lukkede system er stabilt for alle $K_p, T_i > 0$.

- b) (6 %) Samme prosess skal nå reguleres med *diskret* PI-regulator. Vi velger $T_i = 1/a$. Tastetida er T . Tilnærm virkninga av holdeelementet med en transportforsinkelse, betrakt systemet som kontinuerlig, og vis ved *utregning* (ikke grafisk) at reguleringssystemet blir ustabilt for $K_p > \pi/T$ (Tips: Finn først ω_{180} , som er uavhengig av K_p !).

- c) (6 %) Ved å bruke et 1.ordens rasjonalt uttrykk som en tilnærmelse til $e^{-\frac{T_s}{2}}$, kan du gjøre ustabilitets-sjekken fra b) ved hjelp av Rouths kriterium. Vis at svaret blir $K_p > 4/T$. Hvorfor tillates en større K_p med denne metoden, sammenlignet med svaret fra b)?

Oppgave 4 (4 %)

Når trengs anti-overlading (anti wind-up) og hvordan virker denne? Kort, verbal forklaring!

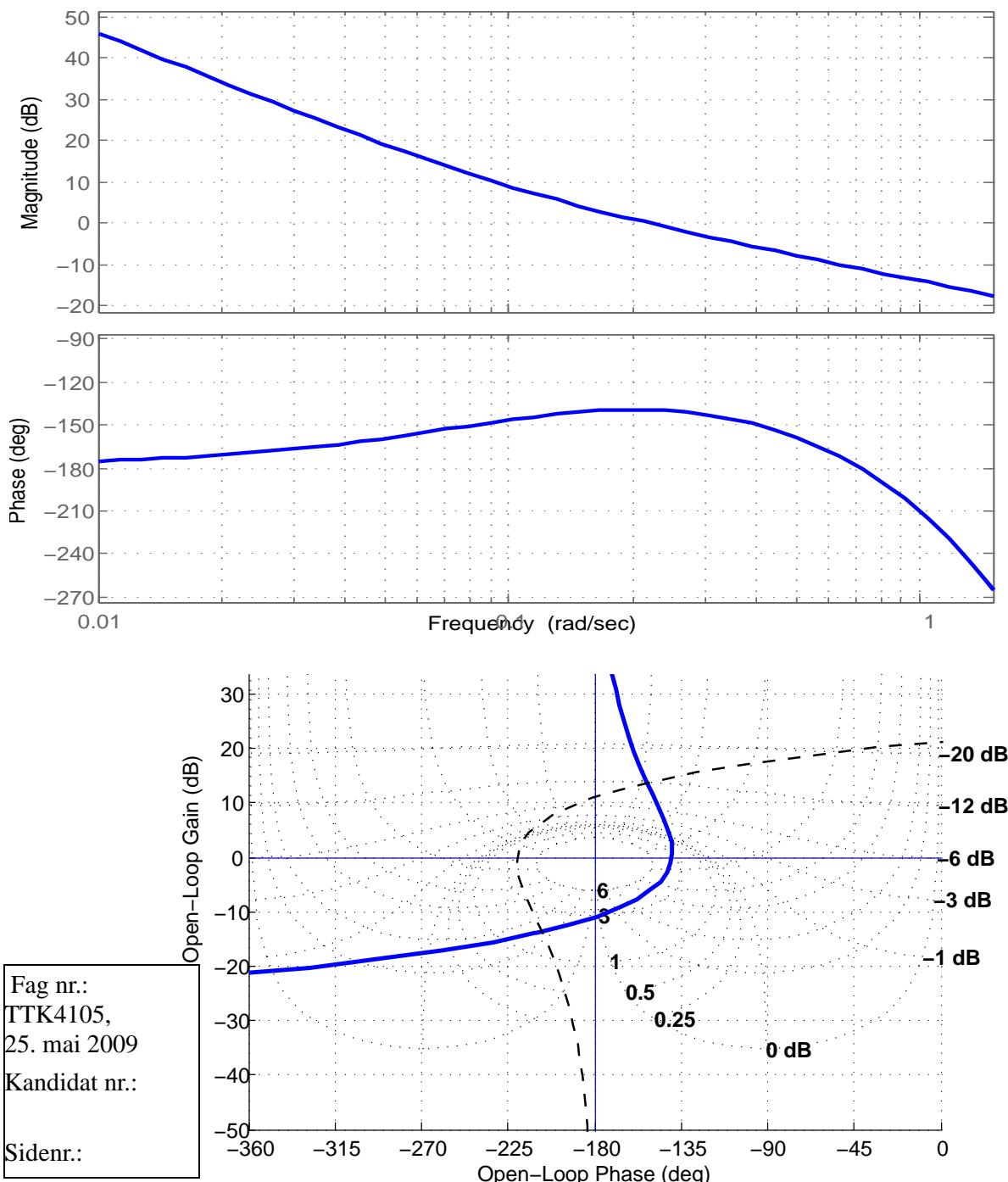
Oppgave 5 (5 %)

Når er en Otto Smith-regulator nyttig? Hva er dens største fordel? Kort, verbal forklaring!

Oppgave 6 (8 %)

Finn ny verdi for K_p/m i oppgave 1b) og figur 1.2, i følge Ziegler-Nichols regler (for alternativet proporsjonalregulering). (Denne oppgaven kan løses uavhengig av resten av oppgave 1.)

(Under er to av figurene i oppgavesettet gjentatt, så du kan bruke dem om nødvendig:)



1a) Når $r = \text{konstant}$ og det allerede er en integrator i prosessen, krever det ingen i h_r . Se tabell 9.1 i læreboka med $q=0, p=1$. Sluttfelteoremet, se regning side 307.

1b) Grafer neste side.

1c) Uten derivativveking vil $\angle h_0 < -180^\circ + \infty$.

Derfor ustabilt manuell verdi av K_p .

Modellen burde egentlig inneholdt et ekstra ledd i h_r : $\frac{1}{1+T_1 s}$ fordi pådragorganet har en viss treghet, og dessuten kan ikke h_r ha ∞ forsterkning når $\omega \rightarrow \infty$.

1d) Se neste side. $\Delta k = 11 \text{ dB} > 6 \text{ dB}$ er bra. $\varphi = 40^\circ < 45^\circ$ er litt under grensa. Men "akseptabelt" godtas også.

$$1e) \frac{x_2^n}{x_{2^{n-1}}(s)} = \frac{s x_1^n}{s x_{1^{n-1}}(s)} = \frac{x_1^n}{x_{1^{n-1}}(s)} = \frac{h_0}{1+h_0}$$

$$= \frac{t_0}{n_0 + t_0} \left(\text{der } h_0 = \frac{t_0}{n_0}\right) = \frac{K_p e^{-\tau s} (1+T_2 s)}{m s^2 + K_p e^{-\tau s} (1+T_2 s)}$$

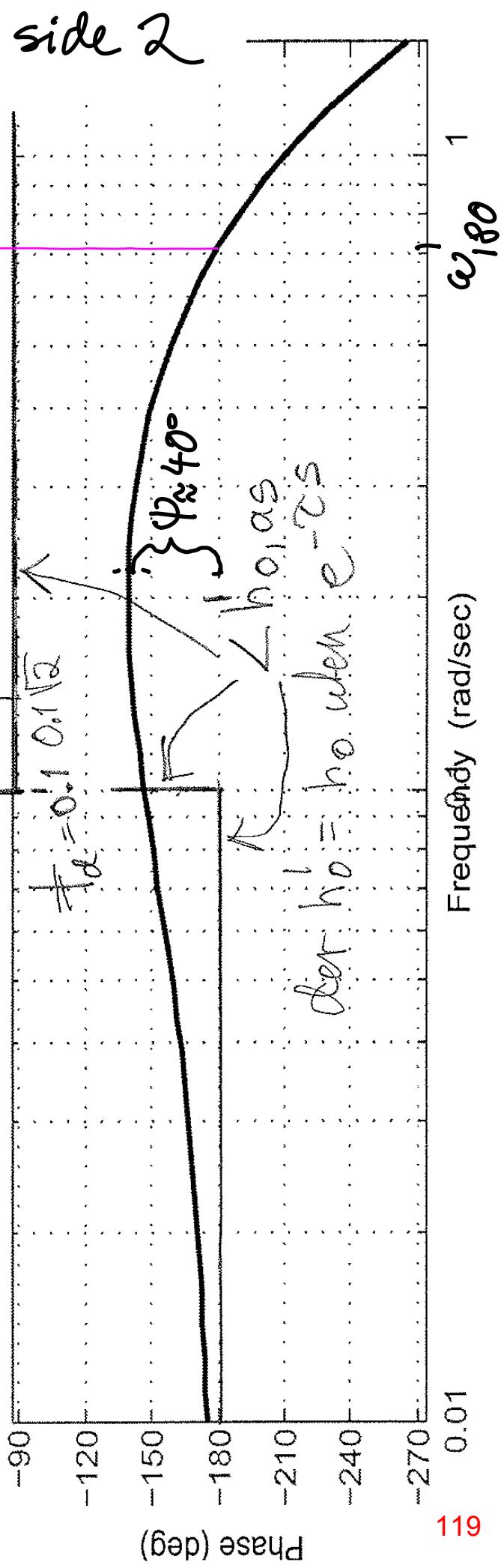
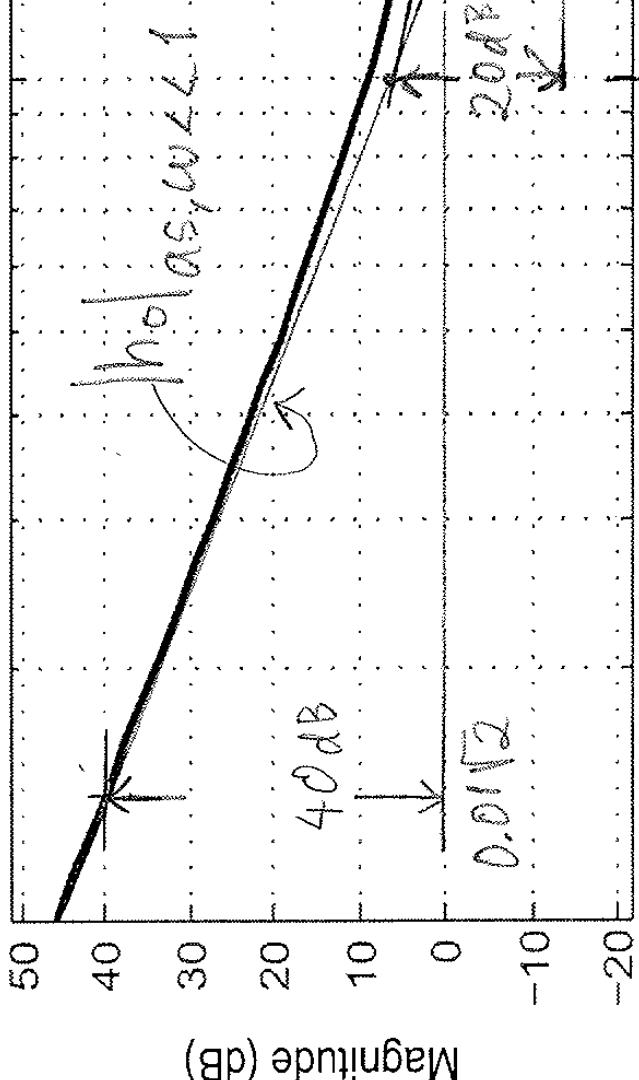
1f) Forsterkninga gjennom fan beld ved $\omega = 0.17$:
 $\omega = 0.17$ er ved resonanstoppen til $|M(j\omega)|$ som er 3.8 dB . Fan ledels forsterkning = $5 \cdot 3.8 [\text{dB}] = 19 [\text{dB}]$. I absolutt verdi er dette $10^{\frac{19}{20}} = 8.91$. Amplituden på sinusvingning bil "5" blir da $0.5 \cdot 8.91 = \underline{4.45}$

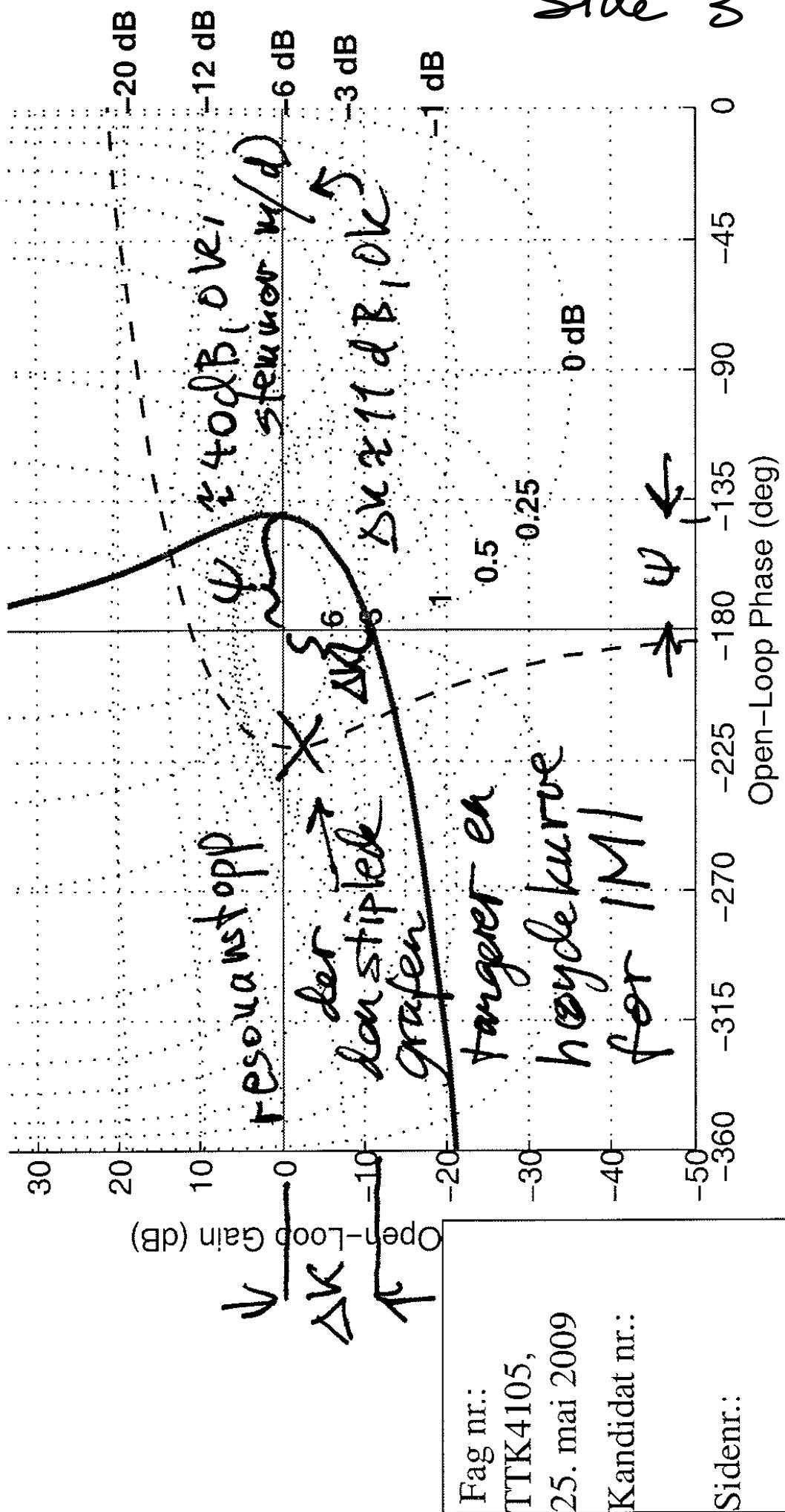
1g) Se side 3

Fag nr.: TTK4105 25. mai 2009

Kandidat nr.:

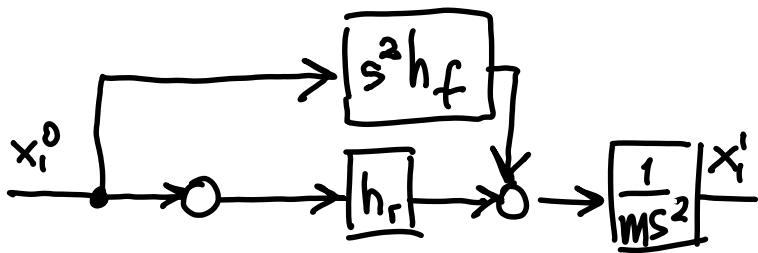
Sidenum:





Side 4

1h) Figur 1.1 \Leftrightarrow



\Leftrightarrow foroverkoppling fra referansen. Da må
 $s^2 h_f \cdot \frac{1}{m s^2} = 1 \Rightarrow h_f = m$

1-i) $M(s) = 1$. Alle biler følger på perfekt.

side 5

$$\begin{aligned} \text{2) "Væske" (penge) balance bedrifter: } m_f &= c - w & (1) \\ \text{ "hus holdn." : } m_h &= w - c & (2) \end{aligned}$$

$$\text{Med } x_1 = m_f, x_2 = m_h, w = \frac{m_f}{T_f}, c = \frac{m_h}{T_h} \text{ blir}$$

$$\text{dette} \quad x_1 = -\frac{1}{T_f} x_1 + \frac{1}{T_b} x_2 \quad (3)$$

$$\ddot{x}_2 = \frac{1}{T_f} x_1 - \frac{1}{T_R} x_2 \quad (4)$$

$$\text{eller } \dot{x} = Ax, \text{ med } A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{T_f} & \frac{1}{T_n} \\ \frac{1}{T_f} & -\frac{1}{T_n} \end{bmatrix}$$

Systemet er autonomet, fordi det ikke påvirkes utenfra, verken av pådriv eller føreskrivelser.

2 b) Dette kan gjøres på flere måter - jeg bruker

2. linje i formelsamling, side 10: $\underline{x}(s) = (sI - A)^{-1} \underline{x}(t=0)$

$$\text{Vikar } \underline{x}(t=0) = \begin{bmatrix} m_{f0} \\ m_{h0} \end{bmatrix} \cdot (sI - A) = \begin{bmatrix} s + \frac{1}{T_f} & -\frac{1}{T_h} \\ -\frac{1}{T_f} & s + \frac{1}{T_h} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$(sI - A)^{-1} = \frac{\text{adj}(A)}{|A|} = \frac{1}{s^2 + (\frac{1}{T_f} + \frac{1}{T_h})s} \begin{bmatrix} s + \frac{1}{T_h} & \frac{1}{T_h} \\ \frac{1}{T_f} & s + \frac{1}{T_f} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$X(s) = \frac{1}{s(s + (\frac{1}{T_f} + \frac{1}{T_h}))} \begin{bmatrix} s + \frac{1}{T_h} & \frac{1}{T_h} \\ \frac{1}{T_f} & s + \frac{1}{T_f} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} m_{f0} \\ m_{h0} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

side 6

Leg innfører $\alpha = \frac{1}{T_f} + \frac{1}{T_h}$, og får

$$x_1(s) = \frac{(s + \frac{1}{T_h})m_{f0} + \frac{1}{T_h}m_{h0}}{s(s + \alpha)}$$

Residuregning: $x_1(t) = \sum_i \text{res } x_1(s)$

$$= \left. \frac{(s + \frac{1}{T_h})m_{f0} + \frac{1}{T_h}m_{h0}}{s + \alpha} e^{ts} \right|_{s=0} + \left. \frac{(s + \frac{1}{T_h})m_{f0} + \frac{1}{T_h}m_{h0}}{s} e^{ts} \right|_{s=-\alpha}$$

Betyr at $m = m_{f0} + m_{h0}$ og får

$$x(t) = \frac{m}{T_h \alpha} + \frac{e^{-\alpha t}}{-\alpha} \left(-\frac{1}{T_f} m_{f0} + \frac{1}{T_h} (m - m_{f0}) \right) =$$

$$x_1(t) = \frac{m}{\alpha T_h} + e^{-\alpha t} \cdot \frac{1}{\alpha} \left(-\alpha m_{f0} - \frac{m}{T_h} \right) = m_{f0} e^{-\alpha t} + \frac{m}{\alpha T_h} (1 - e^{-\alpha t})$$

$$m_f(\infty) = x_1(\infty) = \frac{m}{\alpha T_h}. \quad \text{P.g.a symmetri mellom } m_h(\infty) \text{ da vvere}$$

$$m_h(\infty) = \frac{m}{\alpha T_f} \Rightarrow \frac{m_f(\infty)}{m_h(\infty)} = \frac{T_f}{T_h}$$

Dette kunne også formes slik: Systemet er marginalt stabilt og uten ytre påvirksninger. Da vil $x(\infty) = \text{konst.}$

Av f. eks. (3) følger da at $-\frac{1}{T_f} x_1 + \frac{1}{T_h} x_2 = 0$

$$\Rightarrow \frac{m_f(\infty)}{T_f} = \frac{m_h(\infty)}{T_h} \Rightarrow \frac{m_f(\infty)}{m_h(\infty)} = \frac{T_f}{T_h}$$

Resultatet er rimelig. Siden pengestrømmene ut av begge "kasser" nå er like, vil "verkemengden" i karet bli proporsjonal med T for samme "kvar".

2c)

$$(3) \text{ för måttet koeff: } \dot{x}_1 = \dots + u,$$

$$\Rightarrow b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad A \text{ är nu fört}$$

$$\text{försl: } y = u_f + M_h = x_1 + x_2 = \underline{\underline{C^T x}}. \quad \text{Fra}$$

formellutning $A \cdot g$, vänje T , har vi:

$$h(s) = C^T (sI - A)^{-1} b. \quad Vi \text{ har alltså något att } (sI - A)^{-1},$$

2d)

$$\Rightarrow h(s) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{s(s+\alpha)} \begin{bmatrix} s + \frac{1}{T_n} & \frac{1}{T_n} \\ \frac{1}{\alpha} & s + \frac{1}{T_F} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{s(s+\alpha)} \left[(s + \frac{1}{T_n}) + \frac{1}{T_n} \right] + \left[\frac{1}{\alpha} \right] \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{s(s+\alpha)} \left(s + \frac{1}{T_n} \right) + \frac{1}{T_F} = \frac{s+\alpha}{s(s+\alpha)} = \underline{\underline{\frac{1}{s}}}$$

Dette känne vi tänkta språks, först den sista
 "skön" inn i siffran är u , och allt annat
 i siffran. Så här är totalt påtagenbart, men u
 var en integral av u , $\Rightarrow h(s) = \frac{u}{u(s)} = \underline{\underline{\frac{1}{s}}}$

$$3a) h_0 = K_p \frac{1+T_{is}}{T_{is} s + a} ; \angle h_0 = -\frac{\pi}{2} + \angle(1+T_{is}\omega) - \angle(j\omega a)$$

$\Rightarrow 0 < \omega < \frac{\pi}{2} \omega_c$

$\Rightarrow \angle h_0$ mit abnehmender negativer Frequenz sinkt $\rightarrow -\pi \Rightarrow$ grüner Punkt kann elektrisch stabil $\rightarrow 1 \Rightarrow$ all. d. stabil.

$$3b) h_0 \approx K_p \frac{1 + \frac{s}{a}}{\frac{s}{a} s + a} = \frac{K_p - \frac{T_p}{2}s}{s^2 + a^2} = h_0$$

$$\angle h_0 = -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\omega \Rightarrow -\pi = -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\omega_{180}$$

$$\Rightarrow \omega_{180} = \frac{\pi}{T}$$

$$|h_0| = \frac{K_p}{\omega} \Rightarrow 1 = \frac{K_p}{\omega c} \Rightarrow K_p = \omega c$$

Vi. kann unbestabil mydem war $\omega_c > \omega_{180} \Leftrightarrow K_p > \frac{\pi}{T} =$

Side 8

3c) Braker $e^{-\frac{Ts}{2}} \approx \frac{1 - \frac{Ts}{4}}{1 + \frac{Ts}{4}}$ merk: 4!

$$\Rightarrow h_0 = \frac{t_0}{n_0} = \frac{K_p (1 - \frac{Ts}{4})}{s(1 + \frac{Ts}{4})}$$

Sjekker det karakteristiske polynom for det lukkede system:

$$h_0 + t_0 = s(1 + \frac{T}{4}s) + K_p(-\frac{Ts}{4})$$

$$= \frac{T}{4}s^2 + (1 - K_p \frac{T}{4})s + K_p. \text{ For et}$$

2. ordens polynom forenkles Routh
 til bare å kreve samme fortegn for alle koeffisienter \Rightarrow systemet er ustabilt for $-K_p \frac{T}{4} < 0 \Leftrightarrow K_p > \frac{4}{T}$

K_p tillates å være større

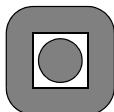
fordi approksimasjonen $\frac{1 - \frac{Ts}{4}}{1 + \frac{Ts}{4}}$

har mindre negativ fasegang enn $e^{-\frac{Ts}{2}}$. Dette gir et for optimistisk bilde.

4) Integraldelen av regulatoren koples ut når pådraget når en metning.

5) Når det er en tidsforsinkelte i prosessen. Vi kan da velge regulator som om tidsforsinkelsen ikke varigikk i den løshede sløyfa.

6) Vi har med utgangspunkt i $\Delta K = 11 \text{ dB}$ som vi fant i 1d) at $K_{pk} = (\text{kritisk } K_p) = K_p + 11 [\text{dB}]$
 Så skal man ifølge Z.-N. redusere K_{pk} med $6 \text{ dB} \Rightarrow$ endelig K_p blir $K_p = K_{pk} - 6 [\text{dB}] = \text{opprikelig } K_p + 5 \text{ dB}$
 $\Rightarrow \frac{K_p}{m} [\text{dB}] = 20 \log_{10}(0.02) + 5$
 eller $\frac{K_p}{m} = 0.02 \cdot 10^{\frac{5}{20}} = \underline{\underline{0.0356}}$



Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet (NTNU)

Faglig kontakt under eksamen: Trond Andresen, mobil **9189 7045**
Han går to veiledningsrunder, ca. kl. 0940 - 1010 og ca. kl. 1115 - 1145.

Eksamens i TTK4105 reguleringsteknikk

lørdag 19. mai 2012

Tid: 0900 - 1300

Sensur vil foreligge innen tre uker. Den blir også lagt ut på its learning når den er klar.

Hjelpe middelkombinasjon D: Kalkulator med tomt minne tillatt. Ingen trykte eller håndskrevne hjelpe midler tillatt, unntatt Rottmann, som også er tillatt.

Prosentallene angir den relative vekt oppgavene tillegges ved bedømmelsen. Denne besvarelsen teller 100% på karakteren.

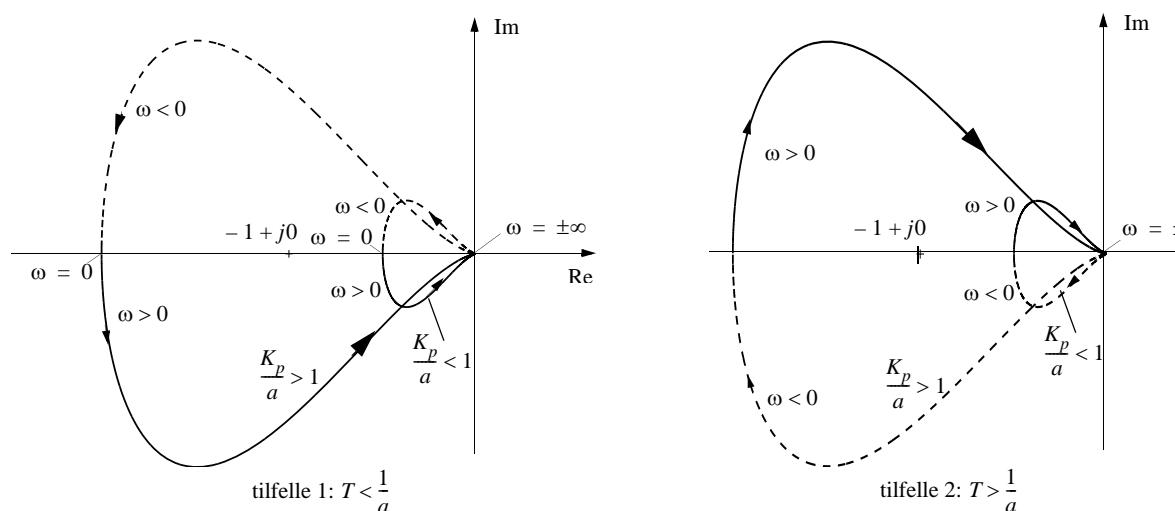
Flere spørsmål kan besvares meget enkelt ved å bruke formelsamlinga bakerst i oppgavesettet. Se kjapt gjennom den før du begynner. Sjekk alltid den før du gir opp! Men du må forklare hvordan du bruker noe, når du henter det fra formelsamlinga. Noen spørsmål skal besvares ved å lese av verdier på grafer i oppgavesettet – i slike tilfeller godtas en viss "måleunøyaktighet". Det inkluderes noen ekstra ark her i tilfelle du roter deg bort ved tegning. Tips: bruk blyant!

Oppgave 1 (18 %)

Figur 1.1 viser polardiagrammer (Nyquist-diagrammer) for en prosess med proporsjonalregulator,

$$h_0(s) = h_r(s)h_u(s) = K_p \frac{1}{(1+Ts)(s-a)} , \quad a > 0 \quad (1.1)$$

Polardiagrammene for $h_0(j\omega)$ er vist i to del-figurer, avhengig av innbyrdes forhold mellom prosessparametrene T og a .



figur 1.1



Norges teknisk-naturvitenskapskole universitet (NTNU)

Fagleg kontakt under eksamen: Trond Andresen, mobil **9189 7045**
T.A. går to rettleiingsrundar, ca. kl. 0940 - 1010 og ca. kl. 1115 - 1145.

Eksamens i TTK4105 reguleringsteknikk lørdag 19. mai 2012

Tid: 0900 - 1300

Sensur vil vere klar innan tre veker. Den blir og lagt ut på its learning når den er klar.

Hjelpe middelkombinasjon D: Bestemt, enkel kalkulator tillate. Og Rottmanns formelsamling er tillate. Ingen andre skriftlege hjelpe middel er tillate.

Denne eksamensoppgåva tel 100 % på karakteren.

Fleire spørsmål kan du enkelt svare på med å bruke formelsamlinga bakerst i oppgavesettet. Sjekk alltid den før du gjev opp! Men du må forklare korleis du brukar det, når du tar noko frå formelsamlinga.

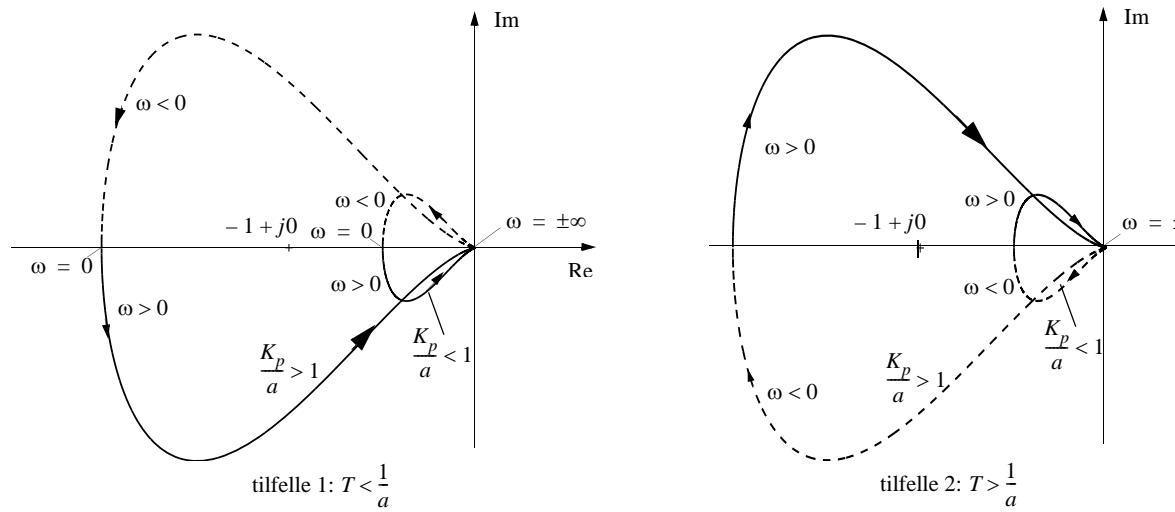
Nokre spørsmål skal svarast på ved å måle ut verdier på figurar i oppgåvesettet – i slike tilfelle vil ein godta noko "målefeil"! Det blir inkludert nokre ekstra ark her i høve du rotar deg vekk ved teikning. Tips: bruk blyant!

Oppgave 1 (18 %)

Figur 1.1 viser polardiagrammer (Nyquist-diagrammer) for en prosess med proporsjonalregulator,

$$h_0(s) = h_r(s)h_u(s) = K_p \frac{1}{(1+Ts)(s-a)} , \quad a > 0 \quad (1.1)$$

Polardiagrammene for $h_0(j\omega)$ er vist i to del-figurer, avhengig av innbyrdes forhold mellom prosessparametrene T og a .



figur 1.1

- a) (2 %) Er denne prosessen åpent stabil (dvs. når man ikke har tibakekopling), eller er den åpent ustabil? Begrunn svaret!
- b) (4 %) Finn v.h.a. Nyquists stabilitetskriterium hvilket krav som må stilles til K_p for at det lukkede systemet skal bli stabilt i tilfelle 1. Kan det lukkede system bli stabilt i tilfelle 2? Begrunn svaret!
- c) (4 %) Finn antall poler i høyre halvplan for det lukkede system **i tilfelle 2** for $K_p < a$ og $K_p > a$, v.h.a. Nyquists kriterium.
- d) (3 %) Sjekk resultatene fra b) og c) ved hjelp av nevnerpolynomet i det lukkede system.
- e) (5 %) Finn en tilstandsrommodell $\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c}^T$ av h_0 .

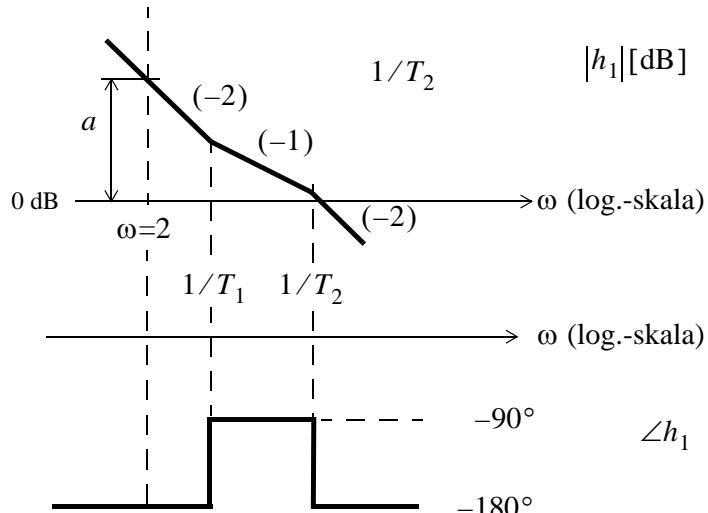
Oppgave 2 (20%)

Du skal finne transferfunksjoner $h_i(s)$ for to systemer som er gitt ved sine asymptotiske Bode-diagrammer. Benytt de oppgitte parametre a , T_1 , T_2 . (a er i absoluttverdi, ikke i dB. T_2 trengs bare for $h_1(s)$).

- a) (6 %) I tillegg til å finne $h_1(s)$, svar på dette:

$h_1(s)$ er transferfunksjonen for to integratorer i serie med en bestemt type regulator. Hva slags regulator, og hvorfor denne typen regulator i dette tilfellet?

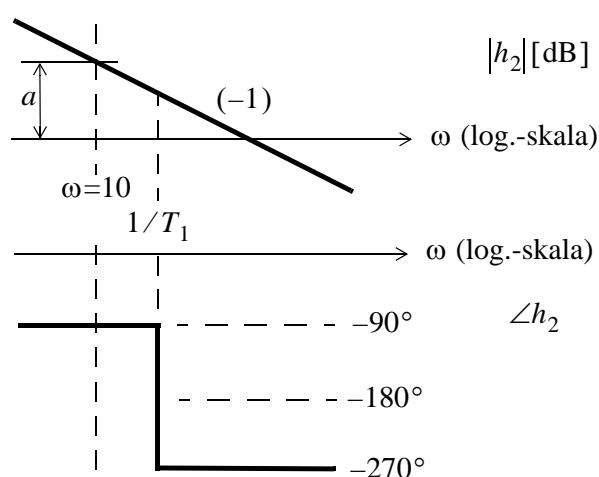
- b) (4 %) Hvor bør 0-dB-Inja legges for å få størst mulig fasemargin ψ ? Hva blir da kryssfrekvensen ω_c ?



- c) (6 %) I tillegg til å finne $h_2(s)$, svar på dette:

$h_2(s)$ tilhører en annen klasse transferfunksjoner enn $h_1(s)$. Hva er karakteristisk for denne klassen av transferfunksjoner?

- d) (4 %) Vis at den a som gir forsterkningsmargin $\Delta K = 6$ dB blir $a = 0.05/T_1$.



Oppgave 3 (23 %)

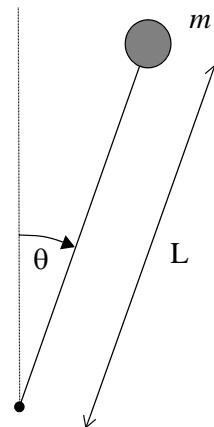
Gitt en invertert pendel bestående av ei stang med lengde L og en masse m . Stangas masse kan ignoreres. Pendelen er festet i et punkt med friksjon, som gir et bremsende dreiemoment som er proporsjonalt med pendelens vinkelhastighet $\dot{\theta}$. Dempekonstanten er D [Nm / (rad/s)].

- a) (7 %) Er dette et autonomt system?

Vis at ei differensialligning for vinkelposisjonen θ er

$$\ddot{\theta} = \frac{g}{L} \sin \theta - \frac{D}{mL^2} \dot{\theta} \quad (3.1)$$

Ligninga (3.1) er ulineær. Hvorfor?



- b) (4 %) Sett $x_1(t) = \theta(t)$, definér en passende $x_2(t)$, og formulér (3.1) som et sett av to første ordens differensialligninger, på formen (= tilstandsrommodell):

$$\dot{\underline{x}} = f(\underline{x}) = \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2) \\ f_2(x_1, x_2) \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

Fra nå av betrakter vi bare små vinkelutslag rundt likevektpunktet $\theta = 0$:

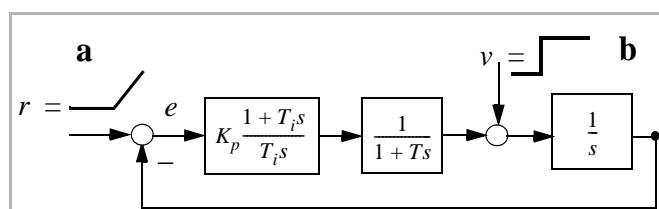
- c) (4 %) Linearisér systemet rundt likevektpunktet, dvs. du skal vise at matrisa A i tilnærminga

$$\Delta \dot{\underline{x}} = A \Delta \underline{x}, \text{ blir } A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{L} & -\frac{D}{mL^2} \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

- d) (8 %) Det oppgis at vinkelposisjonen ved $t = 0$ er $\theta_0 = 0$, og at pendelen da har vinkelhastigheten ω_0 [m/s]. Man kan da bruke dette, pluss Laplacetransformasjon og (3.3) til å finne $\theta(t)$. Det forlanges ikke her at du finner $\theta(t)$, men at du stopper et trinn før dette resultatet, dvs. du skal finne $\theta(s)$.

Oppgave 4 (6 %)

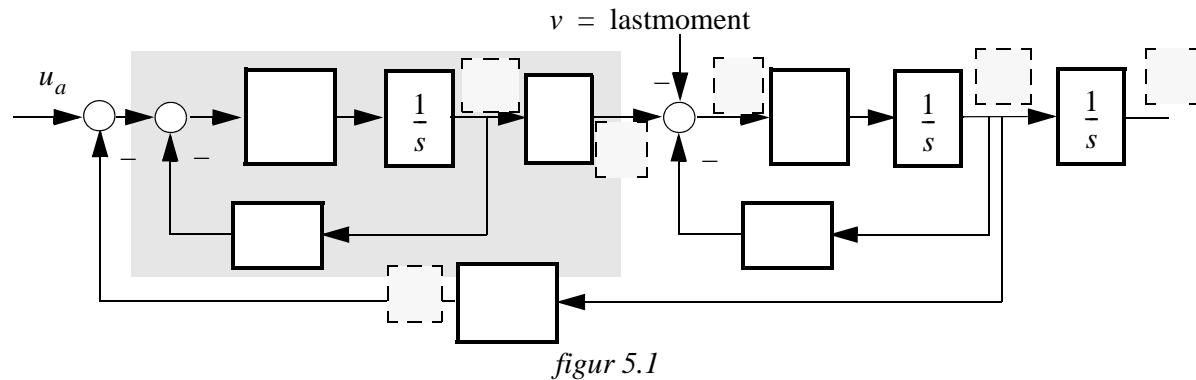
Gitt systemet i figuren til høyre. Det antas at regulatorparametre er valgt slik at det lukkede system er asymptotisk stabilt. Systemet utsettes for en sprang- eller rampefunksjon som vist. Du skal svare på om signal "a" og signal "b" (vurdert hver for seg) gir null stasjonært avvik: $e(\infty) = 0$, eller om avviket blir $0 < e(\infty) = \text{konst.} < \infty$, eller om det blir $e(\infty) = \infty$.



Du kan oppgi de to svarene ut fra begrunnede regler som du husker, eller du kan regne deg fram til dem.

Oppgave 5 (12 %)

Gitt blokkskjemaet for en likestrømsmotor i figur 5.1:



- a) (7 %) Du skal skrive inn følgende størrelser på korrekt vis i blokkskjemaet (til hjelp, se antydede posisjoner for noen av størrelsene):

- vinkelposisjon θ og vinkelhastighet ω
- ankerstrøm i_a
- motindusert spenning i rotor, e_a
- avgitt motormoment T_m
- netto moment til akselerasjon av motor, d
- anermotstand R_a og ankerinduktans L_a
- momentkonstant K_T og spenningskonstant K_v for motindusert spenning
- motorens treghetsmoment J og motorens dempekonstant B

Fag nr.: TTK4105 19. mai 2012
 Kandidat nr.:
 Side nr.:

Tips: Transferfunksjonen for undersystemet som er indikert med skravert

$$\text{rekktangel til venstre i figur 5.1, er } \frac{K_T}{R_a + L_a s} \quad (5.1)$$

Dette tipset er også nyttig for punkt b) nedenfor. Det gjør det mulig å besvare b) sjøl om du ikke greidde noe på punkt a).

For enkelhets skyld kan du, om du foretrekker det, tegne i figuren, og levere dette arket som en del av besvarelsen.

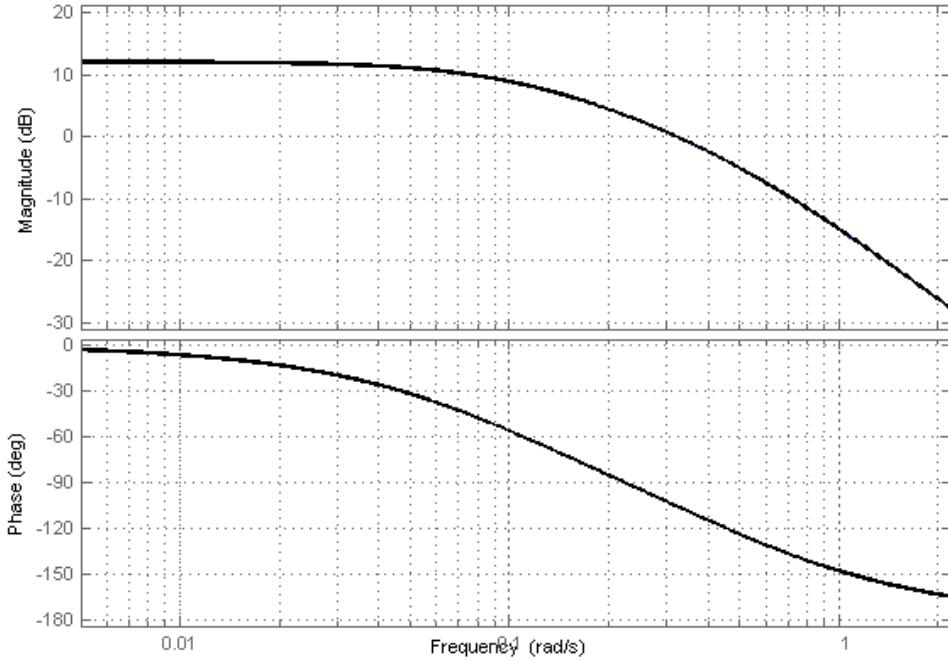
- b) (5 %) Anta at lastmomentet (forstyrrelsen v) kan måles (vi kan f.eks. tenke oss at motoren står i en heisekran med en måleinnretning for lastens vekt). Finn den ideelle foroverkoppling fra v til u_a som helt eliminerer virkningen av v . Hva blir den beste *statiske* foroverkoppling fra v til u_a ? Hva eliminerer den?

Oppgave 6 (21 %)

- a) (6 %) Gitt en prosess h_u , se bodediagram øverst neste side. Det oppgis at

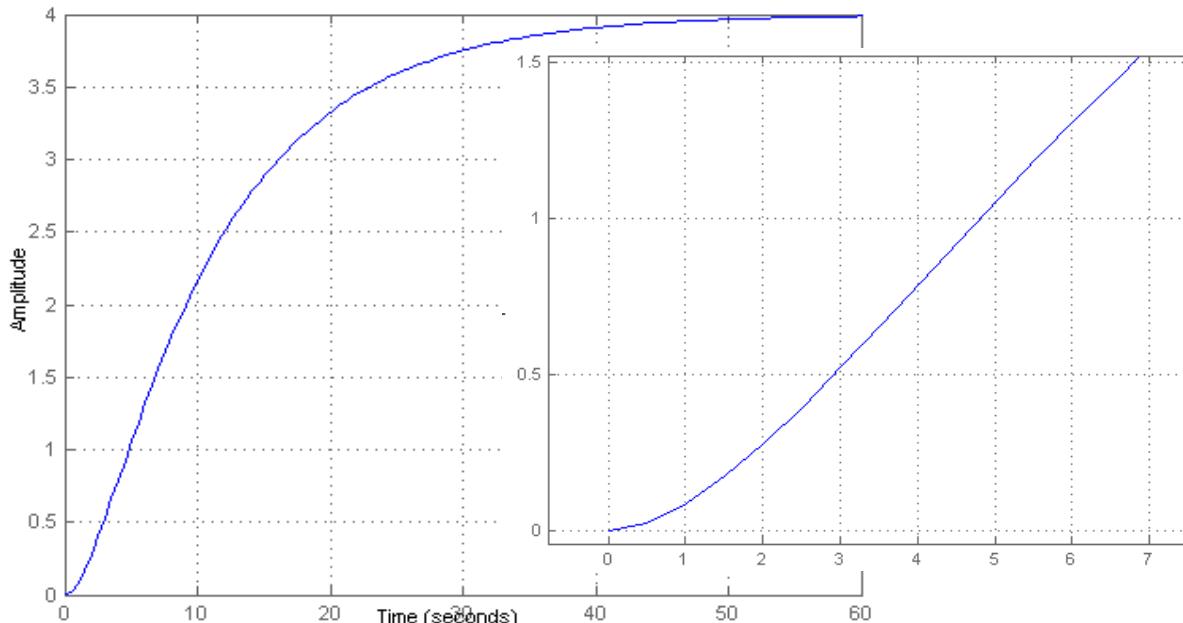
$$h_u = \frac{4}{1 + 12s + 20s^2}. \quad (6.1)$$

Tegn inn asymptoter for amplitude og fase. Levér dette arket som del av besvarelsen. Det skal framgå hvordan du har fastlagt asymptotene, det er ikke nok å "smyge" dem inntil den oppgitte grafen. Oppgi bl.a. hvilken dB-verdi $|h_u|$ har helt til venstre.



Fag nr.: TTK4105 19. mai 2012
 Kandidat nr.:
 Side nr.:

- b) (5 %) Prosessen skal reguleres med en PI-regulator. Finn K_p og T_i til denne ved hjelp av Skogestads SIMC-metode. Åpen-sløyfe-sprangrespons er som vist under, i to skalaer:



- c) (4 %) Du skal nå regulere den gitte h_u med diskret regulator. Velg en rimelig tastetid T og begrunn valget. Du må da endre én parameter som er inngangsdata i Skogestads SIMC-metode. Hvilken, og hvor mye?
- d) (6 %) For dette systemet er Ziegler-Nichols' lukket-sløyfe-metode ubrukelig. Hvorfor?
 Beslektet spørsmål: Hvor stor er forsterkningsmarginen med proporsjonalregulator og $K_p = 1$? Og hvor stor er fasemarginen?

Løsningsforslag til eksamen i TTK4105 Reguleringsteknikk

19. mai 2012

Oppgave 1 (18%)

Gitt transferfunksjon

$$h_0(s) = K_p \frac{1}{(1+Ts)(s-a)}, \quad a > 0. \quad (1)$$

- a) (2%) Prosessen er åpent ustabil pga pol $s = a$ i høyre halvplan.
- b) (4%) Totalt vinkelbidrag er gitt av

$$\Delta\angle(1 + h_0(s)) = -2\pi(N_n - N_p). \quad (2)$$

For at det lukkede systemet skal bli stabilt, dvs $N_n = 0$ må dermed vinkelbidraget bli 2π .

- (i) Tilfelle 1, $T < \frac{1}{a}$: Systemet er lukket stabilt dersom $\frac{K_p}{a} > 1$ siden kurven omslutter punktet (-1,0) én gang i positiv vinkelretning for dette tilfellet.
- (ii) Tilfelle 2, $T > \frac{1}{a}$: Kurven omslutter punktet (-1,0) i negativ vinkelretning. Systemet kan dermed ikke bli stabilt i dette tilfellet.
- c) (4%) Tilfelle 2, $T > \frac{1}{a}$:
 - (i) $K_p < a$: Vinkelbidraget $\angle(1 + h_0(s)) = 0$. Fra (2) så blir dermed $N_n = 1$.
 - (ii) $K_p > a$: Vinkelbidraget $\angle(1 + h_0(s)) = -2\pi \Rightarrow N_n = 2$.
- d) (3%) Nevnerpolynom i lukket sløyfe:

$$n_0(s) + t_0(s) = K_p + Ts^2 + s(1-Ta) - a \quad (3)$$

$$= s^2 + \left(\frac{1}{T} - a\right)s + \frac{1}{T}(K_p - a) \quad (4)$$

For at alle røttene skal ligge i venstre halvplan, så må alle koeffisientene i andregradspolynomet ha samme fortegn. Altså $\frac{1}{T} - a > 0$ og $K_p - a > 0$ siden koeffisienten for s^2 (1) er positiv. Dermed er det kun tilfelle b)(i) hvor systemet er lukket stabilt.

- e) (5%) Tilstandsrom model, styrbar kanonisk form. Transferfunksjon (1) kan skrives om til

$$h_0(s) = \frac{K_p}{Ts^2 + s(1-Ta) - a} = \frac{\frac{K_p}{T}}{s^2 + \left(\frac{1}{T} - a\right)s - \frac{a}{T}}. \quad (5)$$

Fra formelsamling (V.19 - V.20):

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{a}{T} & -\left(\frac{1}{T} - a\right) \end{bmatrix}, \quad (6)$$

$$b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (7)$$

$$c^T = \begin{bmatrix} K_p & 0 \end{bmatrix}. \quad (8)$$

Oppgave 2 (20%)

Gitt Bode plot i oppgaveteksten

- a) (6%) $h_1(s)$ starter med -180° fase. Pga. -2 asymptote er dette en dobbel integrator. Deretter nullpkt i $\omega = \frac{1}{T_1}$ og pol i $\omega = \frac{1}{T_2}$. Dette gir h_1 på formen

$$h_1(s) = K \frac{1 + T_1 s}{s^2(1 + T_2 s)} \quad (9)$$

For lave frekvenser er

$$|h_1(j\omega)| \approx \frac{K}{\omega^2} \quad (10)$$

Gitt $|h_1(j\omega)| = a$ ved $\omega = 2$, så blir $K = 4a$. Regulatoren er en begrenset PD-regulator. Systemet er åpent ustabilt pga dobbel integrator, og fasen må dermed løftes for at det lukkede systemet skal bli stabilt. Begrenset PD-virkning gir lavere forsterkning ved høye frekvenser enn ideell PD-regulator. Dette forhindrer mulig forsterkning av høyfrekvent støy.

- b) (4%) Ut ifra symmetribetrakninger på asymptotene, ser vi at 0-dB linja burde legges slik at den krysser midt mellom $1/T_1$ og $1/T_2$ for å få størst mulig fasemargin. Dette gir geometrisk middelverdi (logaritmisk skala) $\omega_c = \left(\frac{1}{T_1} \cdot \frac{1}{T_2}\right)^{\frac{1}{2}}$.

- c) (6%) $h_2(s)$ består av en forsterkning, én integrator, ett nullpunkt og et førsteordens ledd:

$$h_2(s) = \frac{K'(1 - T_1 s)}{s(1 + T_1 s)}, \quad (11)$$

hvor $|h_2(j\omega)| = a$ ved $\omega = 10$, og det kun er én integrator. Dermed blir $K' = 10a$.

Systemet er et ikke-minimum fase system, og er spesielt vanskelig å regulere.

- d) (4%) Indikert i asymptotisk fasediagram er $\omega_{180} = 1/T_1$. Fra

$$\Delta K = \frac{1}{|h_2(j\omega_{180})|} = \frac{1}{10a} = \frac{1}{1/T_1} \quad (12)$$

som gir $a = 0.05/T_1$ (6dB ≈ 2).

Oppgave 3 (23%)

Pendelsystem med friksjon i festepunktet

- a) (7%) Systemet har ingen pådrag er dermed autonomt. Momentbalanse gir

$$I\ddot{\theta} = LG_x - F_D, \quad (13)$$

hvor $I = mL^2$ (V.6) er treghetsmomentet til kula, $G_x = mg \sin \theta$ er tyngdekomponenten ortogonalt på arma med lengde L og F_D er dempeleddet fra friksjonen. Fra masse-fjær-demper er $F_D = D\dot{\theta}$. Dermed blir modellen

$$\ddot{\theta} = \frac{g}{L} \sin \theta - \frac{D}{mL^2} \dot{\theta}. \quad (14)$$

Systemet er ulineært pga sinus-leddet.

- b) (4%) Definerer

$$\mathbf{x} := \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} \quad (15)$$

Dette gir

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (16)$$

$$\dot{x}_2 = \frac{g}{L} \sin x_1 - \frac{D}{mL^2} x_2 \quad (17)$$

- c) (4%) Likevektspunkt finnes ved $\dot{\mathbf{x}} = 0$. Dette gir $x_2 \equiv 0$ og $x_1 = \pi n, n = 0, 1, \dots$. Betrakter likevektspunktet (0,0). Bruker (V.8) i formelsamlinga:

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{cc} 0 & -\frac{1}{mL^2} \\ \frac{g}{L} \cos x_1 & 0 \end{array} \right] \Big|_{x=(0,0)} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{mL^2} \\ \frac{g}{L} & 0 \end{bmatrix} \quad (18)$$

- d) (8%) $(sI - \mathbf{A})^{-1}$ er gitt av

$$\begin{bmatrix} s & -1 \\ -\frac{g}{L} & s + \frac{D}{mL^2} \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{s(s + \frac{D}{mL^2}) - \frac{g}{L}} \begin{bmatrix} s + \frac{D}{mL^2} & 1 \\ \frac{g}{L} & s \end{bmatrix} \quad (19)$$

Måling $y = \theta(t)$, dermed er $c^T = [1 \ 0]$ og kun første rad av (19) er interessant. Initialtilstand for det lineariserte systemet er gitt av $\Delta \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_0 - \bar{\mathbf{x}}_0 = [0 \ \omega_0]^T$. Dermed vil kun element (1,2) bidra i uttrykket for $\theta(s)$ som blir gitt av

$$\theta(s) = \frac{1}{(s^2 + s \frac{D}{mL^2} - \frac{g}{L})} \omega_0 \quad (20)$$

Oppgave 4 (6%)

To alternative løsningsmetoder: enten ved bruk av regler for antall rene integrasjoner mellom forstyrrelse/referanse, eller ved bruk av sluttverditeoremet

- (i) Rampefunksjon på referansen $r(s)$: Rampefunksjon har transferfunksjon $\frac{k}{s^2}$. Det er to rene integrasjoner i $h_0(s)$, det vil derfor ikke være stasjonæravvik i dette tilfellet.

- (ii) Sprang i forstyrrelsen $v(s)$: integrator mellom forstyrrelsen og $e(s)$. Feilen er gitt av (V.10 i form)

$$e(s) = -N(s)v(s)\frac{1}{s}, \quad N(s) = \frac{1}{1 + h_0(s)} \quad (21)$$

$$= -\frac{1}{s} \frac{T_i s^2 (1 + T_s)}{(1 + T_i s + T_i s^2 (1 + T_s))} v(s) \quad (22)$$

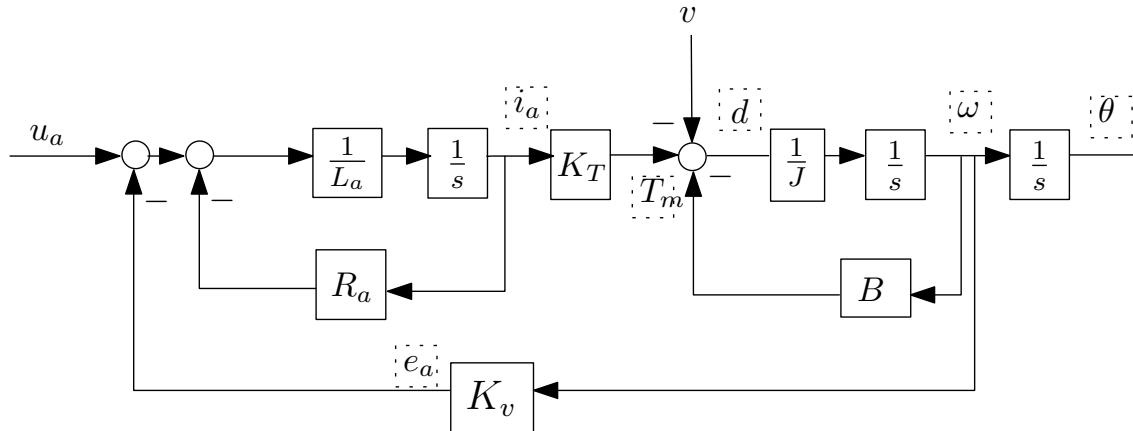
Sluttverditeoremet:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s e(s) = \lim_{s \rightarrow 0} -\frac{1}{s} \frac{T_i s^2 (1 + T_s)}{(K_p(1 + T_i s) + T_i s^2 (1 + T_s))} \frac{k}{s} = 0 \quad (23)$$

pga av s^3 utenfor parentes i teller og s^2 utenfor parentes i nevner. Altså null stasjonæravvik også i dette tilfellet.

Oppgave 5 (12%)

- a) (7%) Se figur 1



Figur 1: Blokkdiagram for oppgave 5a

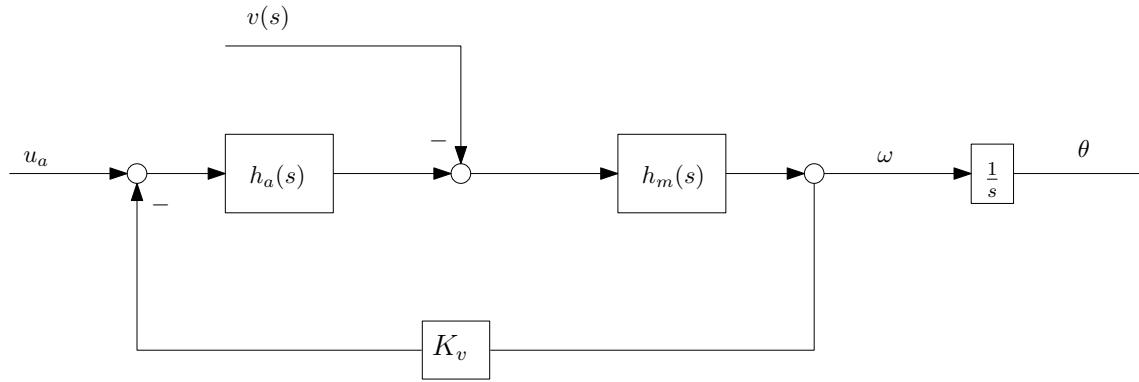
- b) (5%) Reduserer blokkdiagramet i figur 1 til blokkdiagram i figur 2. Merk at tilbakekoblingen er en del av prosess (motor) modellen, og ikke en tilbakekoblingssløyfe fra utgangen. De to transferfunksjonene i figur 2 er gitt av

$$h_a(s) = \frac{K_T}{R_a + L_a s} \quad (24)$$

$$h_m(s) = \frac{1}{B + J s} \quad (25)$$

Foroverkoblingen h_{fv} må være slik at den motvirker forstyrrelsen v . Transferfunksjonen fra v til ω i åpen sløyfe blir

$$\frac{T_m}{v} = (h_{fv} h_a - 1) \quad (26)$$



Figur 2: Reduksjon av blokkdiagram.

Merk fortegnet (minus) i summasjonspunktet hvor forstyrrelsen kommer inn i systemet. Kravet for ideell foroverkobling blir at

$$h_{fvi}h_a - 1 = 0 \quad (27)$$

Dette gir ideell foroverkobling

$$h_{fvi}(s) = \frac{1}{h_a(s)} = \frac{R_a + L_a s}{K_T}. \quad (28)$$

Statisk foroverkobling er følgelig gitt av

$$h_{fvs} = h_{fvi}(s)|_{s=0} = \frac{R_a}{K_T}. \quad (29)$$

Den statiske foroverkoblingen motvirker konstante forstyrrelser forskjellig fra null. Den statiske foroverkoblingen fra forstyrrelsen innvirker ikke på stabilitetsegenskapene til den lukkede sløyfen.

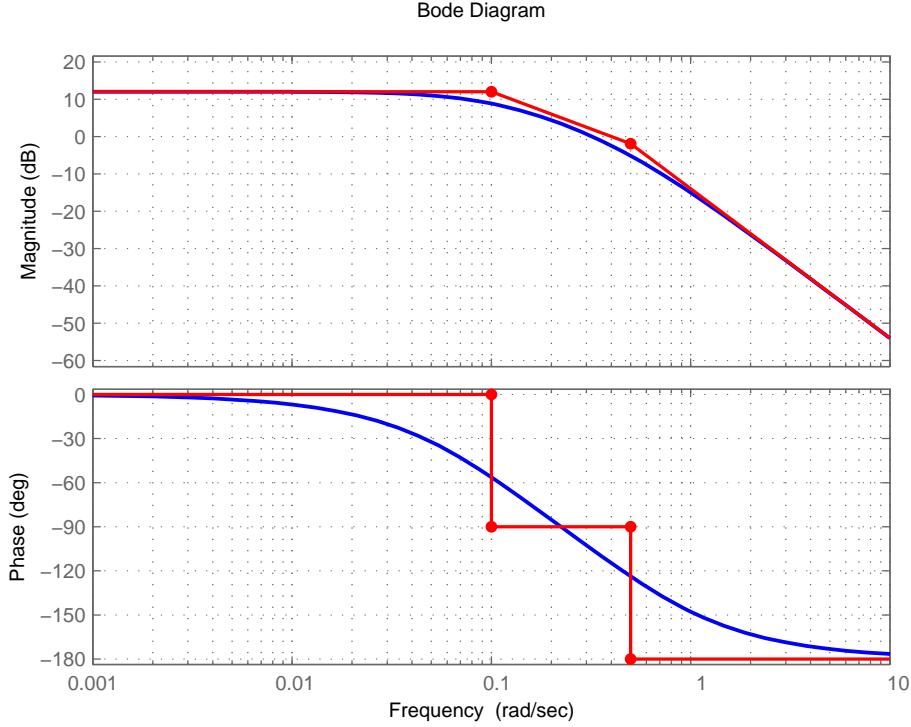
Oppgave 6 (21%)

Gitt bodediagram og prosessen (faktorisert):

$$h_u(s) = \frac{4}{1 + 12s + 20s^2} = \frac{4}{(1 + 10s)(1 + 2s)} = \frac{K}{(1 + T_1 s)(1 + T_2 s)} \quad (30)$$

- a) (6%) Transferfunksjon (30) gir følgende asymptotisk bodediagram:
1. Statisk forsterkning $K = 20 \log_{10}(4) \approx 12\text{dB}$, 0° fase.
 2. Pol i $\omega = 1/T_1 = 0.1$, (-1) i asymptote, -90° fasebidrag.
 3. Ny pol i $\omega = 1/T_2 = 0.5$, (-1) i asymptotebidrag, totalt (-2), -90° fasebidrag, totalt -180° .
- b) (5%) Identifiserer 1. ordens model med tidsforsinkelse,

$$h_s(s) = \frac{K e^{-\theta s}}{1 + T_1 s} \quad (31)$$



Figur 3: Asymptotisk bodediagram for transferfunksjon (30)

Største tidskonstant dominerer prosessen. Fra forstørret vindu av sprangrespons approksimeres tidsforsinkelsen til $\theta = 1$ sekund. Fra oppgavebeskrivelsen og likning (30) vet vi at prosessen er 2.ordens med én liten og én stor tidskonstant. Den store tidskonstanten vil dominere prosessen. Dermed kan man ut ifra denne betraktnign approksimere $T_1 = 10$. Normalt vil tidskonstanten leses av grafisk, enten som 63% av fullt utslag ($K = 4$), eller i skjæringen mellom fullt utslag og tangenten. Sistnevnte metode vil i dette tilfellet kunne gi betydelig større tidskonstant enn 10 sekund; en god avlesningsfeil godtas her.

Vi bruker kjent tidskonstant og finner 1. ordens, approksimert model med tidsforsinkelse:

$$h_p = \frac{4e^{-1s}}{1 + 10s} \quad (32)$$

Dersom vi velger en aggressiv regulering, er et rimelig valg for ønsket lukket-sløyfe tidskonstant $\tau_c = 0.5\theta = 0.5$. Normalt rask innstilling oppnås ved $\tau_c = \theta = 1$, mens konservativ (mer robust) regulering oppnås ved å velge $\tau_c = 2\theta = 2$. Alle svar godtas. Regulatorparametre for PI-regulator med SIMC tuningsregler med normalt rask innstilling gir (V.16)

$$K_p = \frac{10}{4(1+1)} = 1.25 \quad (33)$$

$$T_i = \min(10, 4(1+1)) = 8 \quad (34)$$

Tilsvarende gir SIMC tuningsregler med aggressiv regulering (V.16)

$$K_p = \frac{10}{4(1+0.5)} = 1.67 \quad (35)$$

$$T_i = \min(10, 4(1+0.5)) = 6. \quad (36)$$

c) (4%) Diskret regulering. Velger tastefrekvens dobbelt av høyeste frekvens i prosessen ($1/T_2$). Dvs, tastetid $T = 1s$. Parameteren som må endres som er inngangsdata i SIMC tuningen er tidforsinkelsen θ som nå blir $\tilde{\theta} = \theta + \frac{T}{2} = 0.5 + 0.5 = 1$ sekund.

d) (6%)

- (i) ZN tuningsmetode i lukket sløyfe fungere ikke i dette tilfellet da fasen aldri er lavere enn -180° , og systemet kan ikke plasseres på stabilitetsgrensa ved kun å øke forsterkning. Vi vil derfor ikke oppnå stående sviningninger som er nødvendig i ZN metode.
- (ii) Fasen krysser aldri -180° , amplituden har (-2) i asymptote og synker monoton med denne raten for frekvenser over $1/T_2$. Forsterkningsmarginen blir derfor uendelig i dette tilfellet. Fasemarginen er endelig og kan leses av til ca 80° .



Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet (NTNU)

Faglig kontakt under eksamen: Trond Andresen, mobil **9189 7045**
Han går to veiledningsrunder, ca. kl. 0940 - 1010 og ca. kl. 1115 - 1145.

Eksamens i TTK4105 reguleringssteknikk

torsdag 30. mai 2013

Tid: 0900 - 1300

Sensur vil foreligge innen tre uker. Den blir også lagt ut på its learning når den er klar.

Hjelpe middelkombinasjon D: Kalkulator med tomt minne tillatt. Ingen trykte eller håndskrevne hjelpe midler tillatt, unntatt Rottmann, som også er tillatt.

Prosentallene angir den relative vekt oppgavene tillegges ved bedømmelsen. Denne besvarelsen teller 100% på karakteren.

Flere spørsmål kan besvares meget enkelt ved å bruke formelsamlinga bakerst i oppgavesettet. Se kjapt gjennom den før du begynner. Sjekk alltid den før du gir opp! Men du må forklare hvordan du bruker noe, når du henter det fra formelsamlinga. Noen spørsmål skal besvares ved å lese av verdier på grafer i oppgavesettet – i slike tilfeller godtas en viss "måleunøyaktighet". Det inkluderes noen ekstra ark her i tilfelle du roter deg bort ved tegning. Tips: bruk blyant!

Oppgave 1 (6 %)

Et diskret signal $x[k]$ skal *lavpassfiltreres* med et tidsdiskret filter, det vil si at vi ønsker å dempe de høye frekvenskomponentene i signalet. Kall utgangssignalet fra filteret $y[k]$. Filteret har tidsintervall T mellom hver gang det inkrementeres. (altså T = "tastetid" = "samplingstid"). Vi lager filteret med utgangspunkt i en kontinuerlig transferfunksjon $\frac{1}{1 + T_1 s}$, og ønsker tilnærmet samme knekkfrekvens.

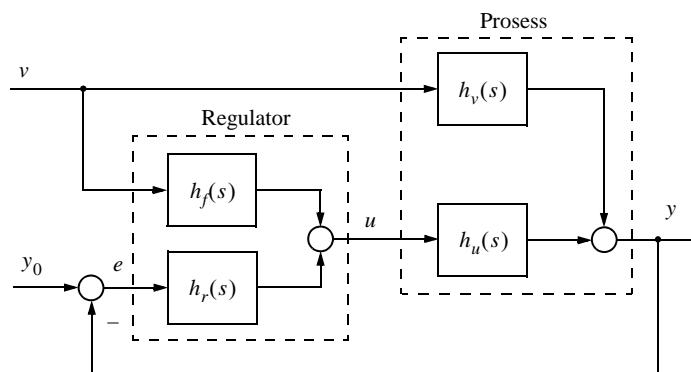
$$\text{Algoritmen som utgjør det diskrete filteret blir } y[k+1] = a_1 y[k] + b_0 x[k+1] + b_1 x[k] \quad (1.1)$$

Finn koeffisienten a_1 . (Tips: Det oppgis til kontroll at $b_0 = b_1 = \frac{T}{2T_1 + T}$.)

Oppgave 2 (11 %)

Gitt strukturen i figur 2.1.

- (4 %) Finn *foroverkoplingsgraden* $L(s)$ i uttrykket $y(s) = N(s)L(s)v(s)$.
- (3 %) Finn den ideelle foroverkoppling $h_{fi}(s)$.
- (2 %) Hva blir $L(s)$ med ideell foroverkoppling?
- (2 %) Hva blir den ideelle *statiske* foroverkoppling?



figur 2.1

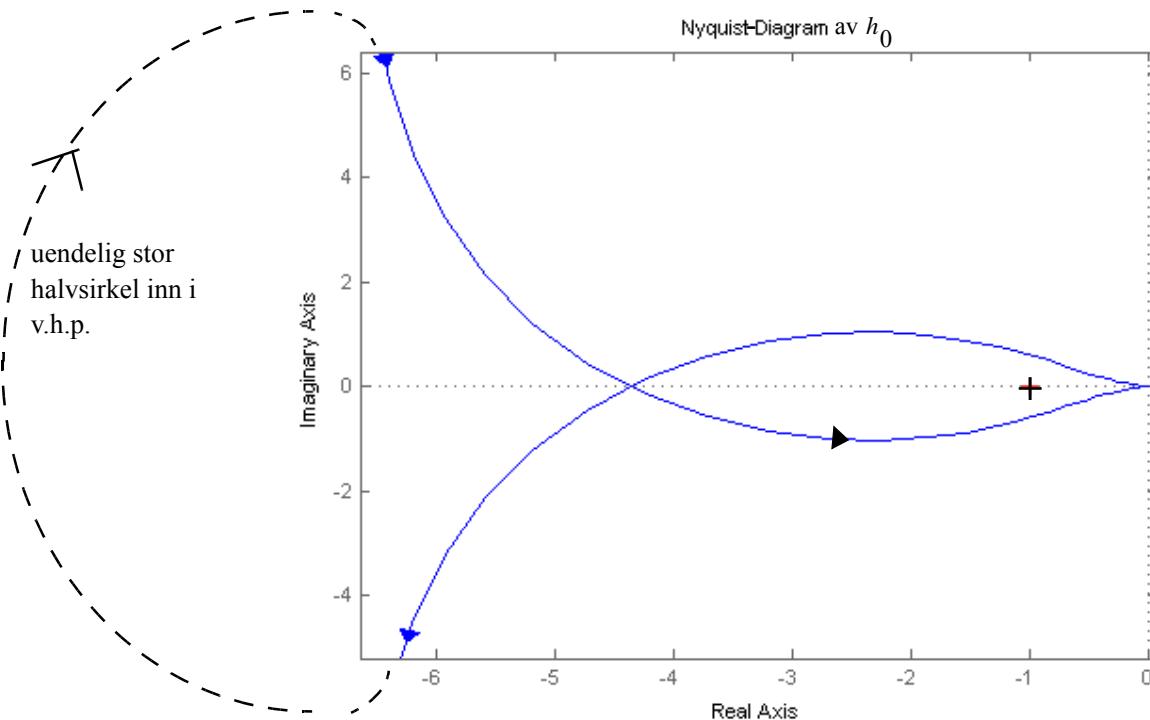
Oppgave 3 (19 %)

Gitt en (for dere etter hvert velkjent!) prosess med proporsjonalregulator,

$$h_0(s) = h_r(s)h_u(s) = K_p \frac{1}{(1+Ts)(s-a)} , \quad a > 0 \quad (3.1)$$

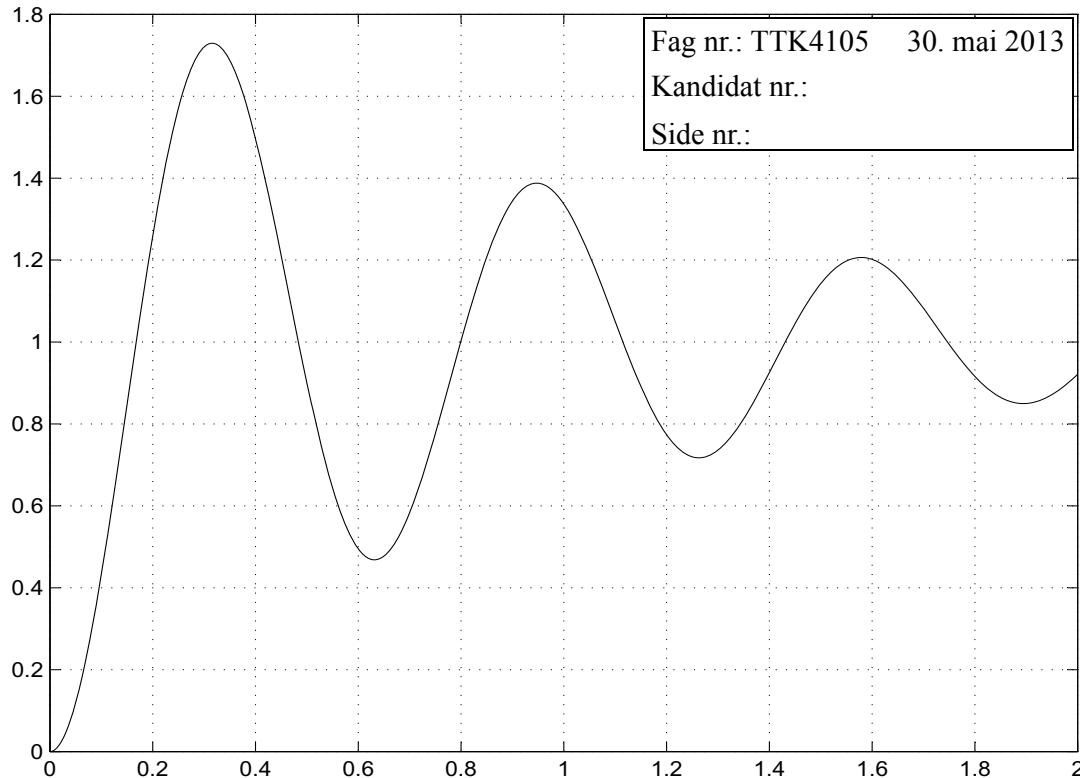
For $T < \frac{1}{a}$ og $K_p > a$ er det lukkede systemet, $\frac{y}{y_0}(s) = \frac{h_0}{1+h_0(s)}$ stabilt.

- a) (4 %) Anta at y_0 endres som et enhetssprang. Finn det stasjonære avviket $e(t \rightarrow \infty)$.
- b) (4 %) Vis at en PI-regulator, under forutsetning av at regulatorparametre er valgt slik at det lukkede system er stabilt (det er mulig, se pkt. d nedenfor), vil gi null stasjonært avvik.
- c) (2 %) For å stille inn PI-regulatoren for dette systemet, kan du *ikke* bruke Ziegler-Nichols' eller Skogestads SIMC-metode. Hvorfor ikke?
- d) (5 %) Gitt prosessparametre $a = 0.1$ og $T = 2$. Da blir det lukkede system stabilt hvis vi for eksempel velger regulatorparametre $K_p = 0.5$ og $T_i = 20$. Figur 3.1 viser polardiagrammet (Nyquist-diagrammet) for h_0 med PI-regulator og de valgte regulatorparametre. Vis ved hjelp av Nyquists kriterium at det lukkede system er stabilt.



figur 3.1

- e) (4 %) Vis hvor mange poler i høyre halvplan vi får i det lukkede system hvis vi reduserer K_p for mye! Hvilken ca. verdi av K_p plasserer systemet på stabilitetsgrensa? (Mål ut i figuren.)

Oppgave 4 (6 %)

Figuren over viser enhetssprangresponsen til $h(s) = \frac{1}{1 + 2\zeta(s/\omega_0) + (s/\omega_0)^2}$. (4.1)

Du skal finne relativ dempningsfaktor ζ og udempet resonansfrekvens ω_0 . Mål med linjal, vis utregning og velg nærmeste verdier blant alternativene under. Levér den påtegnede figur som del av besvarelsen.

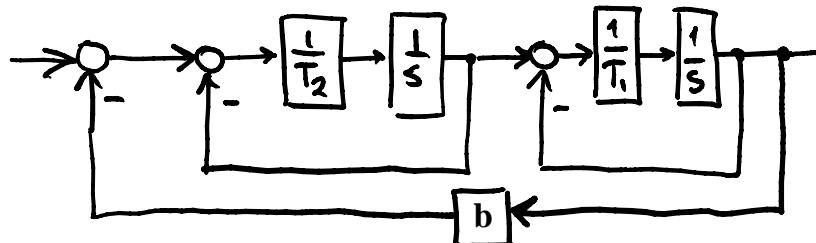
A	$\zeta, \omega_0 = 0.15, 10$	C	0.1, 10	E	0.15, 15
B	0.1, 15	D	0.07, 10	F	0.07, 15

Oppgave 5 (6%)

Gitt en modell som vist i figuren til høyre.

Du skal forenkle modellen til et første ordens system av typen

$$h(s) = \frac{K}{1 + Ts},$$



når det oppgis at T_1 er mye større enn T_2 . Du skal altså finne K og T .

Oppgave 6 (22 %)

En bil beveger seg på en horisontal vei. Anta at skyvekraften fra bilens motor er proporsjonal med gasspådraget g , og at samlede friksjonskrefter (luftmotstand dominerer) er proporsjonale med kvadratet av bilens hastighet w .

- a) (3 %) Vis at en differensialligning for bilens hastighet w er

$$\dot{w} = C_G g - C_W w^2, \quad \text{der } C_W \text{ og } C_G \text{ er konstanter.} \quad (6.1)$$

- b) (2 %) Finn bilens maksimale hastighet w_{\max} når maksimalt gasspådrag er g_{\max} .

Automatisk hastighetsregulering, også kalt "cruise-control", er vanlig i nyere biler. Man har en referansehastighet r som man ønsker bilen skal holde. Anta at det er valgt en reguleringsstrategi som følger ligningen

$$\dot{g} = K_p(r - w) \quad (6.2)$$

- c) (3 %) Hva slags regulator er dette? Hva oppnår man med denne regulatoren? (Verbalt svar tilstrekkelig.)

Vi innfører nå notasjonen $\underline{x} = \begin{bmatrix} w \\ g \end{bmatrix}$, og skriver systemet (6.1), (6.2) på tilstandsromform, med r som pådrag, $\dot{\underline{x}} = f(\underline{x}, r)$.

- d) (5 %) Anta konstant hastighet w_0 og stasjonære forhold. Uttrykk g_0 ved w_0 . Du skal utlede A og \underline{b} i en linearisert modell $\Delta\dot{\underline{x}} = A\Delta\underline{x} + \underline{b}\Delta r$ rundt denne stasjonære tilstanden.

Modellen gjelder for små endringer $\Delta\underline{x}$ og Δr . For den videre regning oppgis svaret:

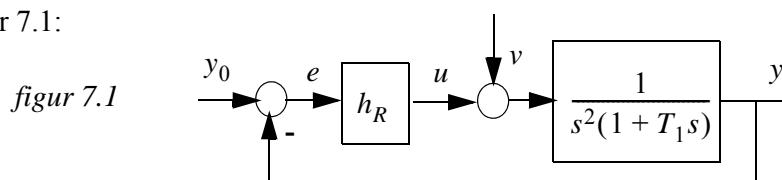
$$A = \begin{bmatrix} -2C_W w_0 & C_G \\ -K_p & 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ K_p \end{bmatrix} \quad (6.3)$$

- e) (5 %) Finn egenverdiene til det lineariserte system. Kommentér forskjellen i stabilitet for reguleringssystemet ved lave kontra høye hastigheter.

- f) (4 %) Anta fra nå av at bilen kjører svært langsomt. Hastighetsresponsen $\Delta w(t)$ fra stillstand når referansen økes som et sprang fra 0 til en liten verdi Δr , er $\Delta w(t) = \Delta r[1 - \cos(\frac{1}{T_1}t)]$. Hva skal stå der spørsmålsteget er?

Oppgave 7 (30 %)

Gitt reguleringssstrukturen i figur 7.1:

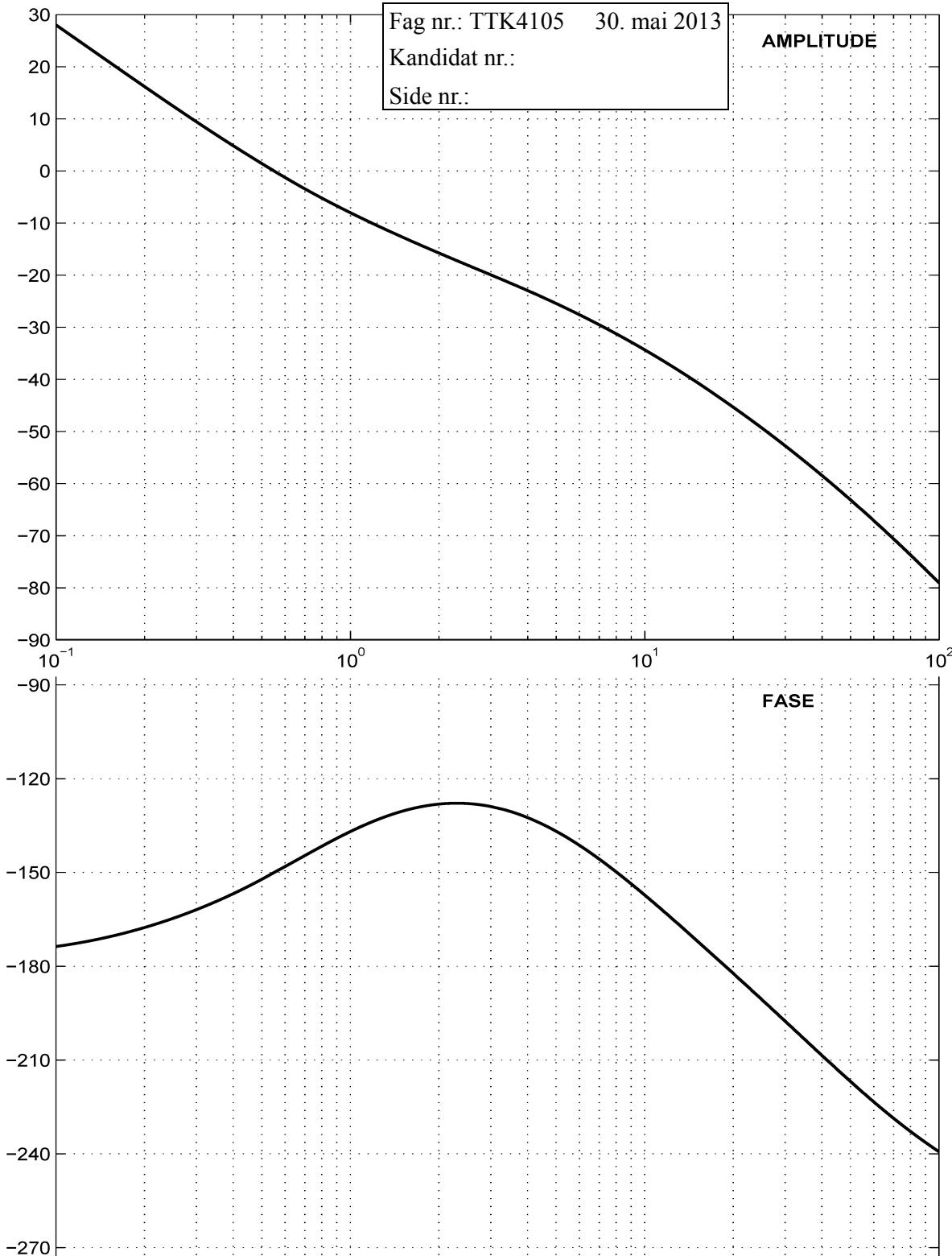


- a) (4 %) Vi velger $h_R(s) = K_p \frac{1 + T_d s}{1 + \alpha T_d s}$, $0 < \alpha < 1$. Hva kalles en slik regulator?

Hvorfor bør vi velge en slik i dette tilfellet?

- b) (8 %) Figur 7.2 viser Bode-diagram for h_0 med $T_1 = 0.02$, $T_d = 1.25$, $\alpha = 0.1$, $K_p = 0.25 = -12.04$ [dB] ≈ -12 [dB].

Tegn inn asymptotene til $h_0(j\omega)$, amplitude og fase. Det skal framgå tydelig, om nødvendig med forklaring i tillegg til tegning, hvordan asymptotene er fastlagt – det er ikke nok å bare "smyge dem inntil" de to oppgitte grafer. Ta arket med figur 7.2 ut av oppgavesettet og lever det som en del av besvarelsen.

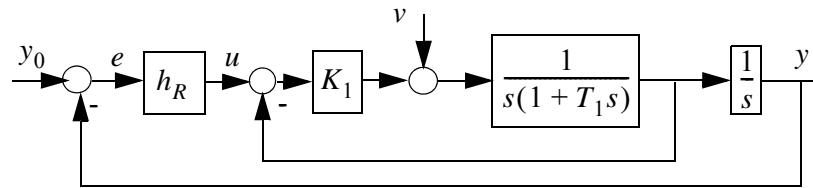


figur 7.2

- c) (8 %) Finn i Bode-diagrammet en ny 0-dB-linje og den tilsvarende nye verdi K_{p1} [dB], som gir størst fasemargin ψ . Videre: Bruk Nichols-diagrammet (gitt i figur 7.4 for h_0 med de samme parameterverdier som i punkt b) til å finne den K_{p2} [dB], som gir resonanstopp 6 dB i avviksforholdet N . Og hvordan finner du K_{p1} [dB] ut fra Nichols-diagrammet? (Tips: $K_{p2} > K_{p1}$.) Tegn inn, og ta arket med figur 7.4 ut av oppgavesettet og lever det som en del av besvarelsen.

Vi modifiserer nå reguleringsstrukturen med intern tilbakekopling, se figur 7.3.

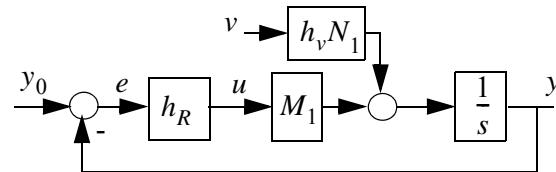
figur 7.3



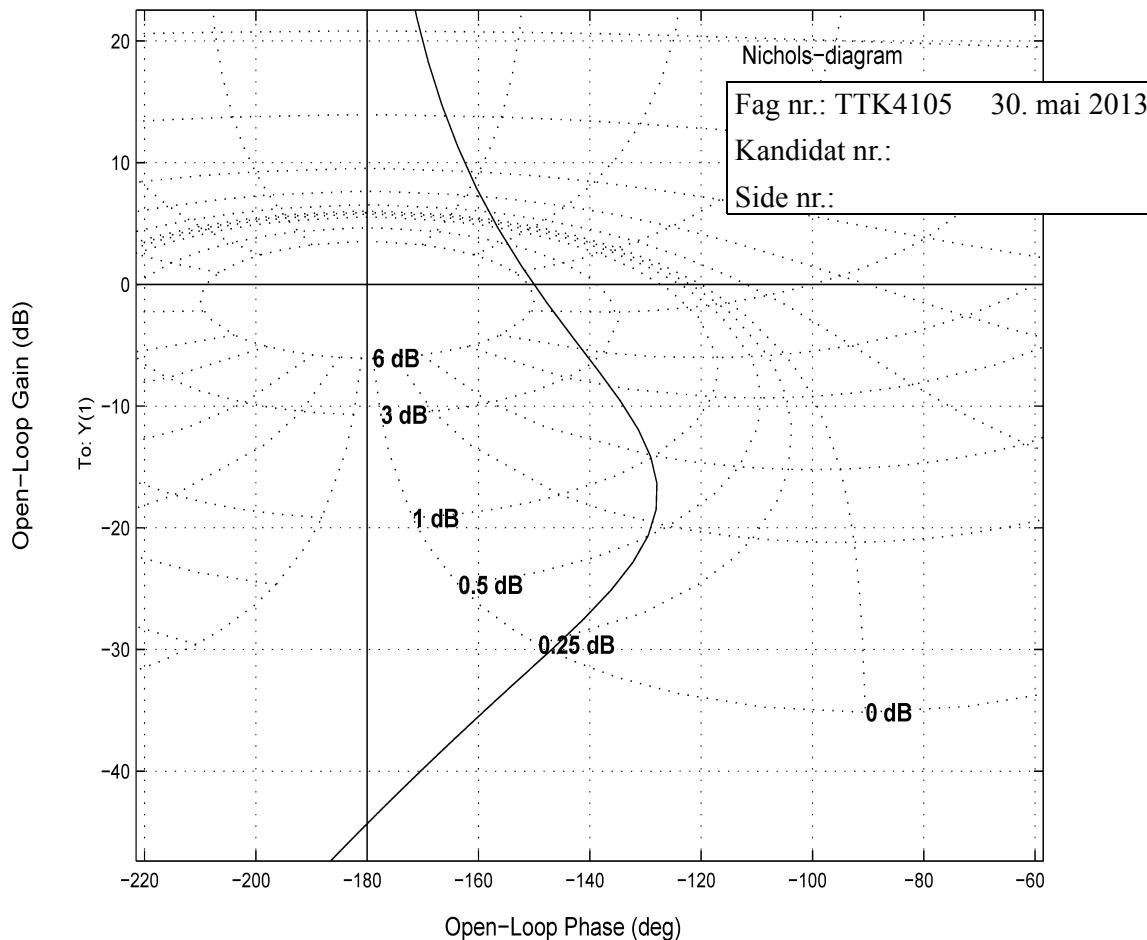
K_1 er nå en "stor" konstant forsterkning.

Diagrammet i figur 7.3 kan bringes på formen som er vist i figuren til høyre.

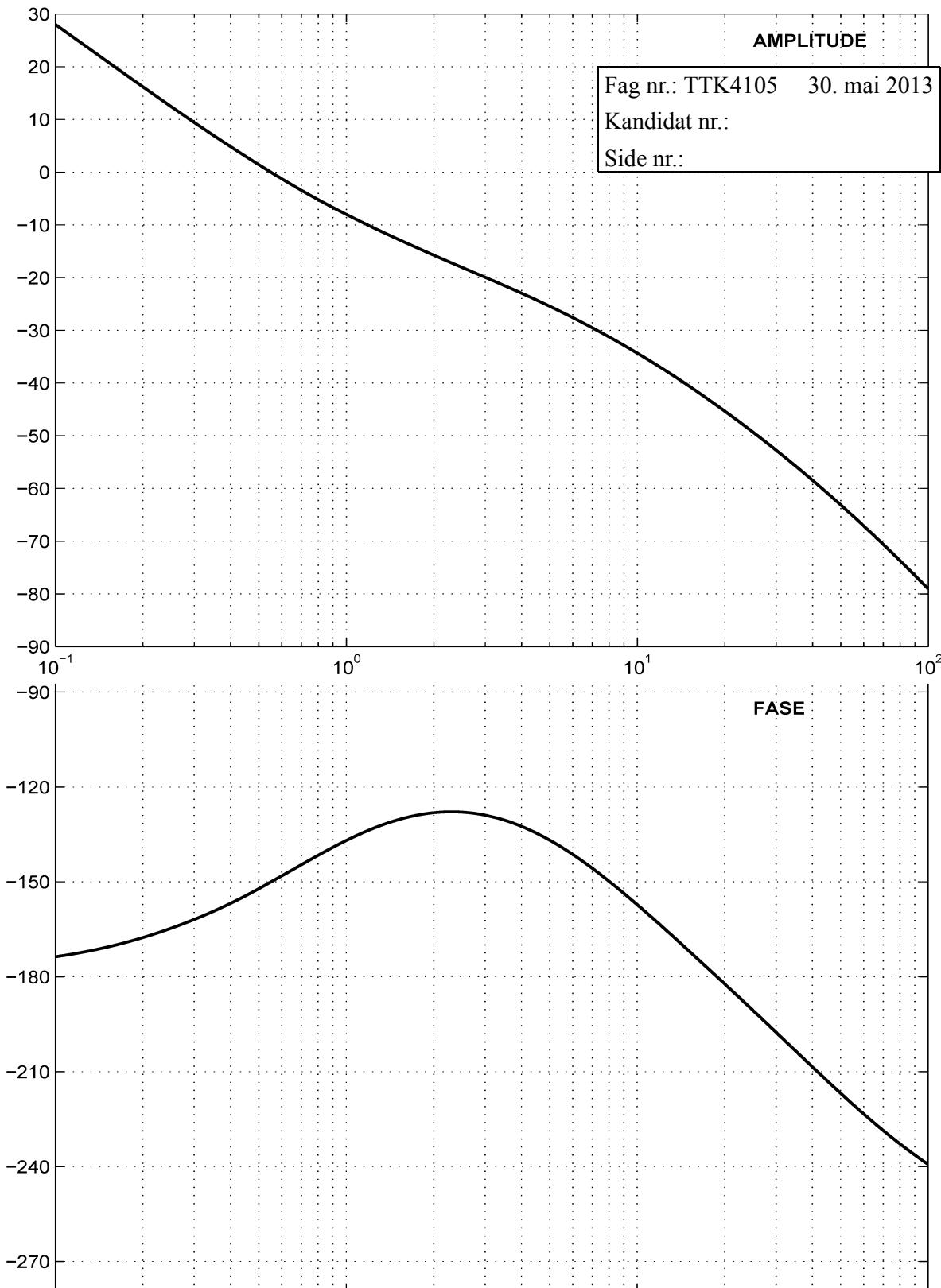
- d) (6 %) Velg $K_1 = 1/T_1$. Finn h_v, N_1 og M_1 .



- e) (4 %) Forklar kort minst to fordeler ved denne løsningen med intern tilbakekopling!



figur 7.4



(Ekstra ark hvis du trenger det.)

Løsningsforslag eksamen TTK 4105
 Reguleringssteknikk 30/5-2013

1

Oppgave 1] Bruker (V.21) $s \rightarrow \frac{z}{T} \frac{z-1}{z+1}$

$$h(z) = \frac{y_k}{u_k}(z) = \frac{1}{1 + T_1 \left[\frac{2}{T} \cdot \frac{z-1}{z+1} \right]} = \frac{T(z+1)}{T(z+1) + 2T_1(z-1)}$$

$$\Rightarrow y_k [T(z+1) + 2T_1(z-1)] = u_k T(z+1)$$

$$\Rightarrow y_k (T + 2T_1) = y_{k-1} (2T_1 - T) + T(u_k + u_{k-1})$$

$$\Rightarrow y_k = \underbrace{\frac{2T_1 - T}{2T_1 + T}}_{a_1} y_{k-1} + \underbrace{\frac{T}{2T_1 + T}}_{b_0} (u_k + u_{k-1})$$

$$b_0 = b_1$$

O2) alle spørsmål, læreboka side 384-385
 Men Obs: Feil i O2a): skulle stått

$y(s) = N(s) L(s) h_v v(s)$. Vil bli hønsyntatt.
 ↑!

O3 a) Sluttverditeoren: $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} (se(s))$

$$= \lim_{s \rightarrow 0} s \left[\frac{1}{1 + h_0} \cdot y_0 \right] = \lim_{s \rightarrow 0} s \left[\frac{n_0}{n_0 + t_0} \cdot y_0 \right] =$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} \cancel{s} \left[\frac{(1+Ts)(s-a)}{(1+Ts)(s-a) + K_p} \cdot \cancel{s} \right] = \frac{-a}{-a + K_p} = \underline{\underline{\frac{a}{K_p - a}}}$$

O3b) Bytter ut K_p med $h_r = K_p \frac{1+T_i s}{T_i s}$

Når $s \rightarrow 0$ går $h_r \rightarrow \infty$. Altså går $e(t) \rightarrow 0$.

O3c) Z-N og Skogestad forutsetter at prosessen er åpent stabilt. Det er ikke tilfelle her, p.g.a pol i $+a$.

$$\textcircled{O} 3 \text{ d) } (V.11) = \text{Nyquist: } \Delta\angle(1+h_0) = -2\pi(N_n - N_p)^2$$

Fra figur 3.1 ser vi at $\Delta\angle(1+h_0) = +2\pi$
 h_0 har én pol i hhp $\Rightarrow N_p = 1$. Vi får
 $+2\pi = -2\pi(N_n - 1) \Leftrightarrow -1 = N_n - 1 \Rightarrow N_n = 0$
 \Rightarrow lukket system er stabilt.

O 3 e) Da blir $\Delta\angle(1+h_0) = -2\pi$ i stedet.
 $\Rightarrow 1 = N_n - 1 \Rightarrow N_n = 2$ poler i hhp

Mølt: $\frac{1.6 \text{ cm}}{6.95} \cdot 0.5 \Rightarrow$ ny $K_p = 0.115 \Leftrightarrow$ stab.-grense

O 4) Avstand en periode T måles, $T \approx 0.63$, $\beta = \frac{2\pi}{T} = 9.97$

Demping måles som $\frac{A_2}{A_1}$, der toppen A_2 ligger T etter toppen A_1 .

$$V_i \text{ har } e^{-\alpha T} = \frac{A_2}{A_1} \Rightarrow -\alpha T = \ln\left(\frac{2.15}{4.05}\right) \Rightarrow \alpha = \frac{1}{0.63} \ln\left(\frac{4.05}{2.15}\right) \approx 1$$

$$\omega_0^2 = \alpha^2 + \beta^2 \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{1^2 + 9.97^2} = 10, \xi = \frac{\alpha}{\omega_0} = \frac{1}{10}$$

\Rightarrow Alternativ C: $\xi = 0.1, \omega_0 = 10$

O 5) $T_2 \ll T_1$. Venstre inde delsystem blir da ≈ 1 i stedet for $\frac{1}{1+T_2 s}$. Redusert resten:

$$\begin{array}{ccc} \xrightarrow{\quad} & \xrightarrow{\quad} & \Rightarrow \frac{\frac{1}{T_1 s}}{1 + (b+1)\frac{1}{T_1 s}} = \\ \xrightarrow{-} & \xrightarrow{\quad} & \\ \frac{1}{T_1 s + b + 1} = \left(\frac{1}{b+1}\right) \cdot \frac{1}{1 + \frac{T_1}{b+1} s} & \Rightarrow K = b+1, T = \frac{T_1}{b+1} \end{array}$$

Annen metode: Redusere diagrammet først, så sett $T_2 \approx 0$:

$$h(s) = \frac{1}{1 + (\frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2})s + \frac{T_1 T_2}{b+1} s^2 + b} \approx \frac{1}{T_1 s + b + 1}, \text{ samme svart! 150}$$

Oppgave 6

a)

Benytter Newtons lov:

$$\sum F = ma = m\dot{w}. \quad (21)$$

I oppgaveteksten er sammenhengen mellom kreftene gitt slik at differensialligningen kan settes opp:

$$\sum F = C_1 g - C_2 w^2 = m\dot{w} \quad (22)$$

$$\Rightarrow \frac{C_1}{m} g - \frac{C_2}{m} w^2 = \dot{w} \quad (23)$$

$$\underline{\dot{w} = C_G g - C_W w^2}, \text{ der } C_G = \frac{C_1}{m} \text{ og } C_W = \frac{C_2}{m}. \quad (24)$$

b)

Den maksimale hastigheten finnes ved stasjonære forhold, dvs $\dot{w} = 0$.

$$\dot{w} = 0 \Rightarrow C_G g_{\max} - C_W w_{\max}^2 \Rightarrow w_{\max} = \sqrt{\frac{C_G g_{\max}}{C_W}}. \quad (25)$$

c)

Vi har $\dot{g} = K_p(r - w)$, som gir $g(t) = K_p \int_0^t (r - w) dt$. Dette er en I-regulator. Etter innsvingningstiden blir $\dot{g} = 0$.

$$\dot{g} = 0 \Rightarrow K_p(r - w) = 0 \Rightarrow r = w, \quad (26)$$

altså, vi oppnår referansen til tross for forstyrrelse fra friksjon og luftmotstand.

d)

Finner g_0 som uttrykk av w_0 vha ligningen fra a):

$$0 = C_G g_0 - C_W w_0^2 \Rightarrow g_0 = \frac{C_W}{C_G} w_0^2. \quad (27)$$

Med $x_1 = w$ og $x_2 = g$ kan vi skrive

$$\dot{x}_1 = C_g x_2 - C_W x_1^2 = f_1(\underline{x}, r) \quad (28)$$

Den lineariserte modellen finnes ved hjelp av formlene fra formelsamlingen in-satt arbeidspunktet (\underline{x}_0, r_0) .

$$\Delta \dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} \Delta \underline{x} + \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial r} \\ \frac{\partial f_2}{\partial r} \end{bmatrix} \Delta r. \quad (30)$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = -2C_W x_1 \quad (31)$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_2} = C_G \quad (32)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_1} = -K_p \quad (33)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_2} = 0 \quad (34)$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial r} = 0 \quad (35)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial r} = K_p. \quad (36)$$

Vi får dermed følgende modell når vi setter inn arbeidspunktet (\underline{x}_0, r_0) :

$$\underline{\underline{\Delta \dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} -2C_W w_0 & C_G \\ -K_p & 0 \end{bmatrix} \Delta \underline{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ K_p \end{bmatrix} \Delta r.}} \quad (37)$$

e)

Egenverdiene finnes fra $|\lambda I - A| = 0$:

$$\lambda(\lambda + 2C_W w_0) + K_p C_G = 0 \Rightarrow \underline{\underline{\lambda_{1,2} = -C_W w_0 \pm \sqrt{C_W^2 w_0^2 - K_p C_G}.}} \quad (38)$$

Ved lave hastigheter (når $C_W w_0^2 < K_p C_G$) blir systemet marginalt stabilt med to poler på imaginæraksen. Ved høye hastigheter er systemet eksponensielt stabilt med to poler i venstre halvplan.

f)

Dersom bilen kjører langsomt har vi $w_0^2 \approx 0$. Da blir modellen (laPlace-transformert)

$$s\Delta w(s) = C_G \Delta g(s) \quad (39)$$

$$s\Delta g(s) = K_p (\Delta r(s) - \Delta w(s)). \quad (40)$$

Substituerer man for $\Delta g(s)$, får man

$$s\Delta w(s) = C_G \left(\frac{K_p}{s} \Delta r(s) - \frac{K_p}{s} \Delta w(s) \right) \quad (41)$$

$$\frac{\Delta w}{\Delta r}(s) = \frac{C_G K_p}{s^2 + C_G K_p}. \quad (42)$$

Dette systemet har (formelsamlingen) sprangrespons $k(t) = K(1 - \cos(\omega_0 t))$, der $K = 1$ og $\omega_0 = \sqrt{C_G K_p}$. Altså, dersom spranget er på Δr , blir responsen

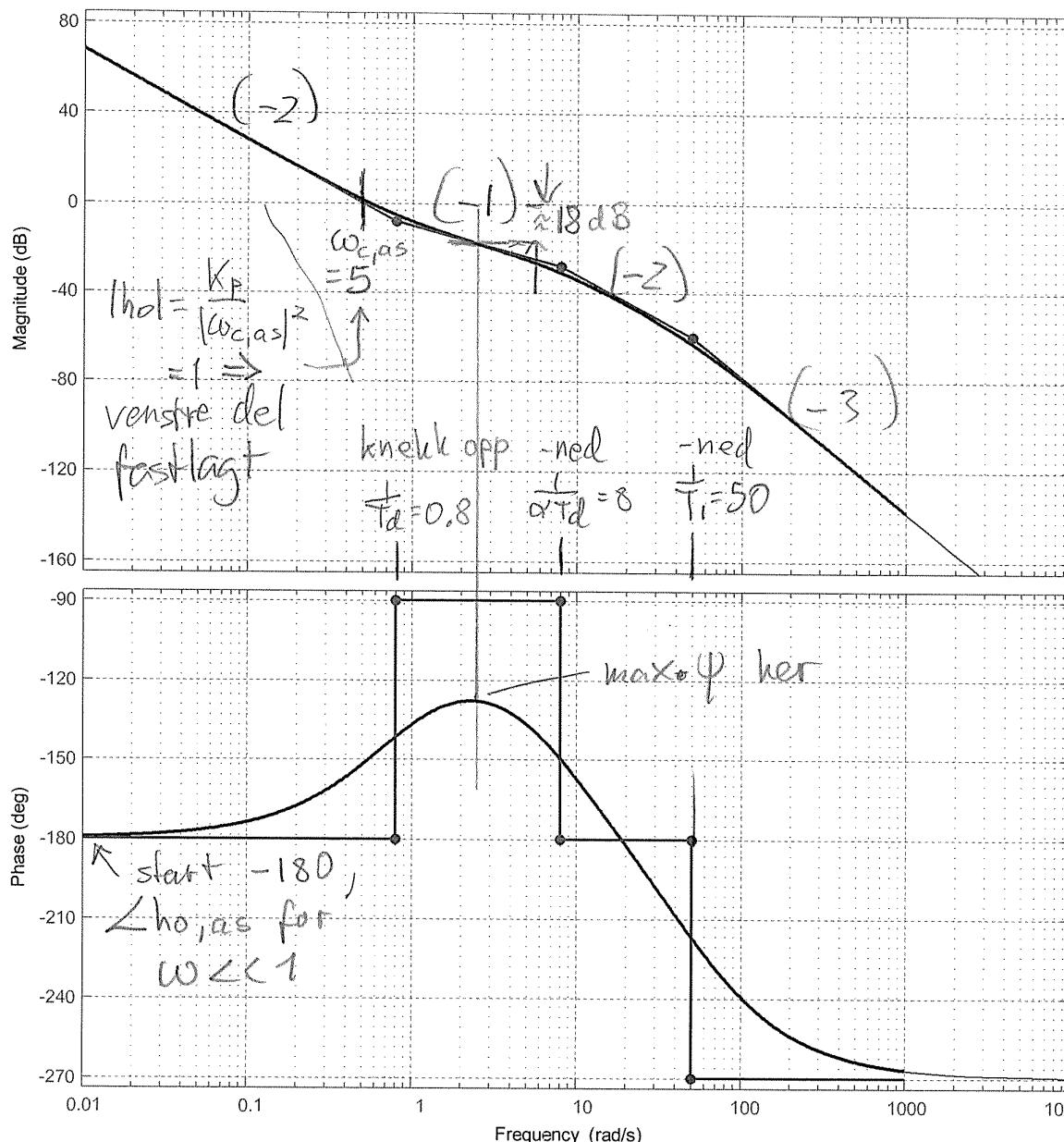
$$\underline{\underline{\Delta w(t) = \Delta r \left(1 - \cos(\sqrt{C_G K_p} t) \right)}}. \quad (43) \quad 152$$

Oppgave 7

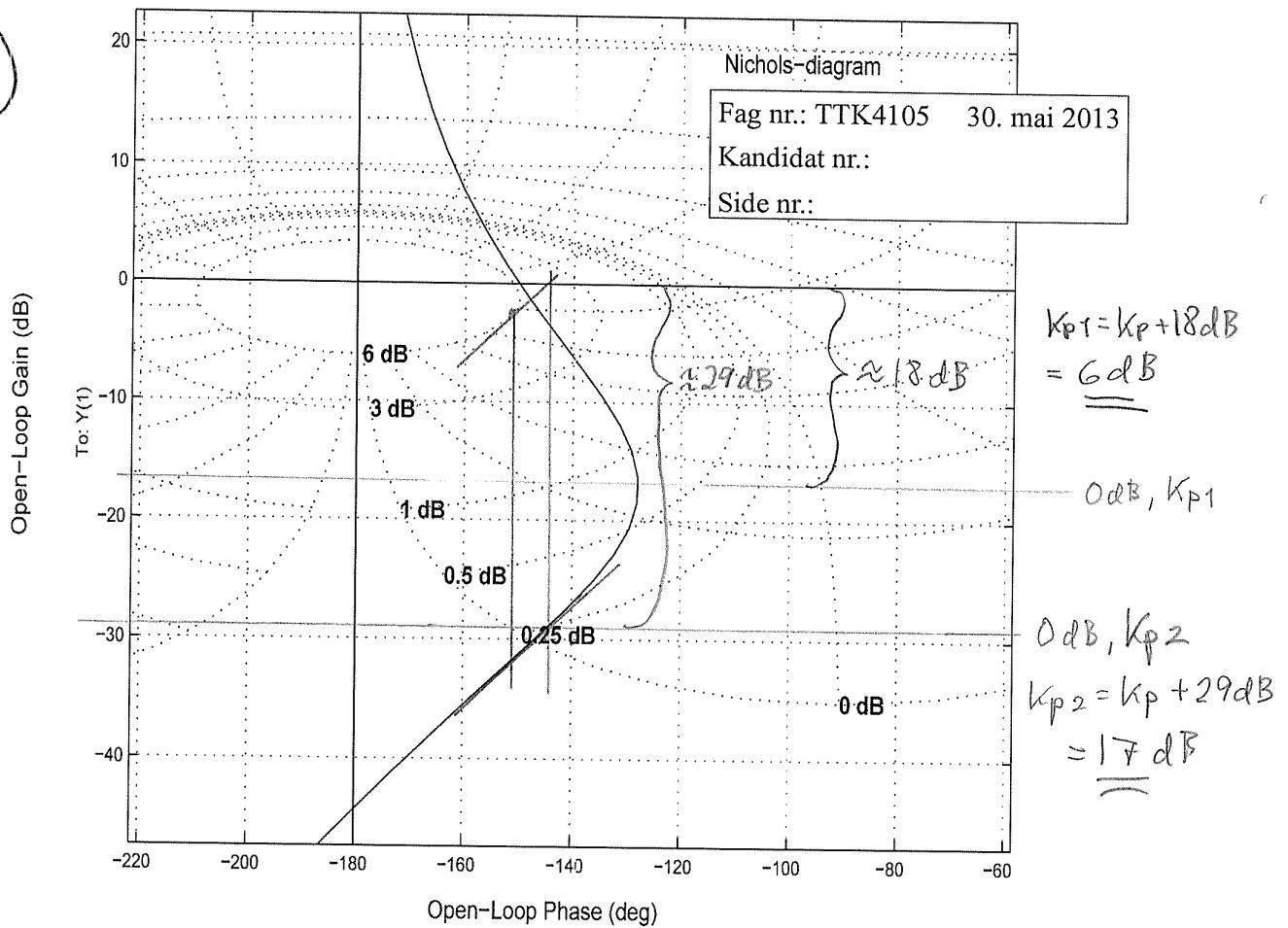
a)

Dette er en begrenset PD-regulator. Denne er nødvendig her da prosessen $h_u(s)$ har to rene integratorer i seg. Dermed blir faseresponsen -180° fra starten av, og vi trenger et tidlig nullpunkt for å løfte den opp.

- b) Se påtegnet diagram under
- c) $K_p, [dB] = K_p [dB] + 18 = -12 + 18 = 6 dB$



7c)



figur 7.4

7d)

avvike-

Den interne sløyfen har åpen-sløyfetransferfunksjon $h_{01} = \frac{K_1}{s(1+T_1s)}$. Vi har at feilforholdet $N_1(s) = \frac{1}{1+h_{01}(s)}$. Altså er

$$N_1(s) = \frac{1}{1 + \frac{K_1}{s(1+T_1s)}} = \frac{s(1+T_1s)}{s(1+T_1s) + K_1}. \quad (51)$$

Av figuren ser vi at $h_v(s) = \frac{1}{s(1+T_1s)}$.

$$M_1(s) = \frac{h_{01}(s)}{1 + h_{01}(s)} = \frac{\frac{K_1}{s(1+T_1s)}}{1 + \frac{K_1}{s(1+T_1s)}} = \frac{K_1}{s(1+T_1s) + K_1}. \quad (52)$$

Fe) Flere fordeler kan hevnes, noe med to for full pott:

- Vi kan nå ha integralvirking i hr, for den indre sløyfa har fjernet en integrator og dermed beholdt faseforlopet til den ytre sløyfetransferfunksjonen.
- K_1 kan økes kraftig, dette gir hurtigere respons fra y_0 til y
- virkningen av v blir mindre på y , P-g-a. N, liten for K_1 , stor

Formelsamling

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sf(s), \quad \text{og} \quad \lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sf(s) \quad (\text{V.1})$$

$$\mathcal{L} [\dot{f}(t)] = sf(s) - f(t)|_{t=0}, \quad \mathcal{L} [\ddot{f}(t)] = s^2 f(s) - sf(t)|_{t=0} - \dot{f}(t)|_{t=0} \quad (\text{V.2})$$

$$\text{Residuregning: } f(t) = \sum_{a_i} \frac{1}{(m-1)!} \left[\frac{\partial^{m-1}}{\partial s^{m-1}} \{(s-a_i)^m f(s) e^{st}\} \right]_{s=a_i} \quad (\text{V.3})$$

$$\text{Tidsforsinkelse: } \mathcal{L} [f(t-\tau)] = e^{-\tau s} f(s) \quad (\text{V.4})$$

$$|\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}| = 0 \quad (\text{V.5})$$

Rettlinja bevegelse: $f = ma$, Rotasjon: $d = J\dot{\omega}$; med masse på vektløs stang har vi $J = ml^2$ (V.6)

Folding (konvolusjon):

$$y(t) = h(t)*u(t) = \int_0^t h(t-\tau)u(\tau)d\tau, \quad \mathcal{L} [h(t)*u(t)] = h(s)u(s) \quad (\text{V.7})$$

$$\Delta \mathbf{x} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{\mathbf{x}^p, \mathbf{u}^p} \Delta \mathbf{x} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} \Big|_{\mathbf{x}^p, \mathbf{u}^p} \Delta \mathbf{u}$$

Linearisering: $\Delta \mathbf{x} = \mathbf{A} \Delta \mathbf{x} + \mathbf{B} \Delta \mathbf{u}$

$$\mathbf{A} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{\mathbf{x}^p, \mathbf{u}^p} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}_{\mathbf{x}^p, \mathbf{u}^p} \quad (\text{V.8})$$

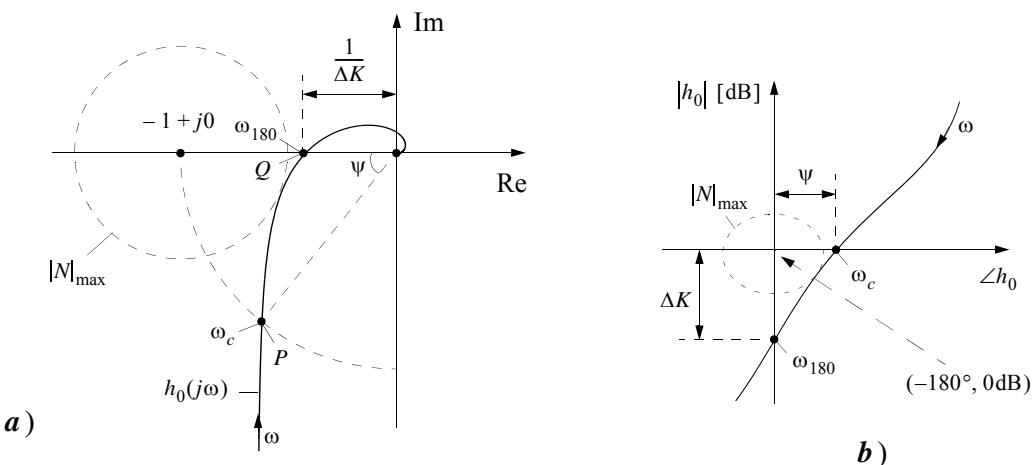
$$x[\text{dB}] = 20 \cdot \log_{10}(x), \quad x = 10^{(x[\text{dB}])/20} \quad (\text{V.9})$$

$$N(s) = \frac{1}{1+h_0(s)}, \quad M(s) = \frac{h_0}{1+h_0(s)}, \quad M(s)+N(s) = 1, \quad \frac{e}{v}(s) = -h_v(s)N(s) \quad (\text{V.10})$$

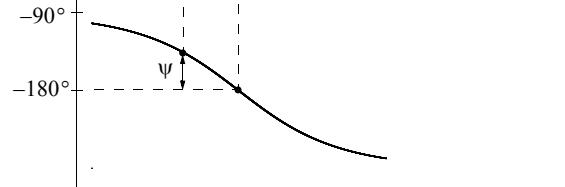
Nyquists stabilitetskriterium: Gitt en åpen prosess $h_0(s)$ med N_p poler i høyre halvplan. Vektoren $1 + h_0(j\omega)$ får en netto vinkeldreining lik

$$\Delta\angle(1 + h_0) = -2\pi(N_n - N_p) \quad \text{når } \omega \text{ går fra } -\infty \text{ til } \infty \quad (\text{V.11})$$

N_n blir da antall poler i h.h.p. for det lukkede (tilbakekoplede) system. Merk: Dreieretning er definert positiv mot urviseren.



(V.12)



$$\psi = \angle h_0(j\omega_c) - (-180^\circ), \quad \frac{1}{\Delta K} = |h_0(j\omega_{180})|, \quad \Delta K = \frac{1}{|h_0(j\omega_{180})|} \quad (\text{V.13})$$

$$e^{-\tau s} \approx \frac{1 - \frac{\tau s}{2}}{1 + \frac{\tau s}{2}} \quad (\text{V.14})$$

Ziegler-Nichols' lukket-sløyfe-regler:

Regulator	K_p	T_i	T_d
P	$0.5K_{pk}$	∞	0
PI	$0.45K_{pk}$	$0.85T_k$	0
PID	$0.6K_{pk}$	$0.5T_k$	$0.12T_k$

$$, \text{ her er } T_k = \frac{2\pi}{\omega_{180}} \quad (\text{V.15})$$

Skogestads "SIMC" åpen-sløyfe-regel for PI-innstilling (bruker notasjonen fra notatet om dette):

Sett på et sprang. Anta at prosessen $\approx h_u = \frac{Ke^{-\theta s}}{1 + T_1 s}$. Mål (anslå) T_1 , K og θ ut fra responsen.

$$\text{Vælg så } K_p = \frac{T_1}{K(\theta + \tau_c)} \quad \text{og} \quad T_i = \min(T_1, 4(\theta + \tau_c)), \text{ hvor } \tau_c \text{ er} \quad (\text{V.16})$$

Ønsket tidskonstant i responsen til det lukkede systemet, bør velges som $\tau_c > 0.3\theta$, f. eks. $\tau_c = \theta$.

$$\text{PI-regulator: } h_r = K_p \frac{1 + T_i s}{T_i s} \quad (\text{V.17})$$

$$\text{begrenset PD-regulator: } h_r = K_p \frac{1 + T_d s}{1 + \alpha T_d s} \quad (\text{V.18})$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \cdots & -\alpha_{n-2} & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\text{V.19})$$

$$\mathbf{c}^T = [\rho_0 \ \rho_1 \ \rho_2 \ \cdots \ \rho_{n-1}]$$

$$\text{gir } \frac{y}{u}(s) = h(s) = \frac{\rho_{n-1}s^{n-1} + \dots + \rho_1 s + \rho_0}{s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \dots + \alpha_1 s + \alpha_0} \quad (\text{V.20})$$

Diskret regulator *eller filter*: Alle s erstattes med $\frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1}$, der z er en tidsforskyvingsoperator. (V.21)

Diskret regulator brukt på kontinuerlig prosess medfører tilnærma en ekstra tidsforsinkelse $= T/2$ i sløyfetransferfunksjonen. (V.22)

Sammenhenger mellom tilstandsrombeskrivelse og Laplace, og mellom 1. ordens og høyere ordens lineære systemer

		1. orden (eks.: RC-krets)	Høyere orden
1.	Differensiallikning	$\dot{x} = ax + bu \quad (\dot{x} = -\frac{1}{T}x + \frac{1}{T}u)$	$\dot{x} = Ax + Bu$
2.	Laplace	$x(s) = \frac{1}{s-a}x(t=0) + \frac{b}{s-a}u(s)$	$\mathbf{x}(s) = (sI - A)^{-1}\mathbf{x}(t=0) + (sI - A)^{-1}Bu(s)$
3.	Løsning	$x(t) = e^{at}x(0) + \int_0^t e^{a(t-\tau)}bu(\tau)d\tau$	$\mathbf{x}(t) = e^{At}\mathbf{x}(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$
4.	Dekopling	(Triviert:) $A = a = \lambda$ = skalar	$A = M\Lambda M^{-1}, \quad e^{At} = Me^{\Lambda t}M^{-1}, \quad \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$
5.	Rekkeutvikling	$e^{at} = 1 + at + \frac{a^2 t^2}{2!} + \frac{a^3 t^3}{3!} + \dots$	$e^{At} = \Phi(t) = I + At + A^2 \frac{t^2}{2!} + A^3 \frac{t^3}{3!} + \dots$
6.	$(t) \xleftarrow{\mathcal{L}} (s)$	$e^{at} \xleftarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s-a} \quad \left(\frac{1}{T}e^{-t/T} \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{1+Ts} \right)$	$e^{At} = \Phi(t) \xleftarrow{\mathcal{L}} (sI - A)^{-1}$
7.	Fra $u(s)$ til $y(s)$	$y = cx \quad y(s) = c \frac{b}{s-a}u(s) \quad h(s) = \frac{cb}{s-a}$	$\mathbf{y} = C\mathbf{x} \quad y(s) = C(sI - A)^{-1}Bu(s) \quad H(s) = C(sI - A)^{-1}B$
8.	Impulsrespons	$h(t) \xleftarrow{\mathcal{L}} h(s) \quad h(t) = cb e^{at}$	${}^3) h(t) = \mathbf{c}^T e^{At} \mathbf{b} \xrightarrow{\mathcal{L}} h(s) = \mathbf{c}^T (sI - A)^{-1} \mathbf{b}$

1) $\int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau = e^{At}B*u(t) \xleftarrow{\mathcal{L}} (sI - A)^{-1}B \cdot u(s)$

2) NB: $e^{At} \neq \{e^{a_{ij}t}\}$, bortsett fra når $A = \Lambda$ er diagonal.

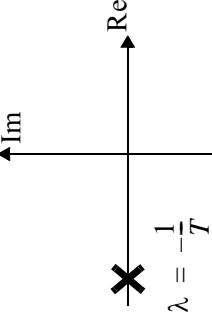
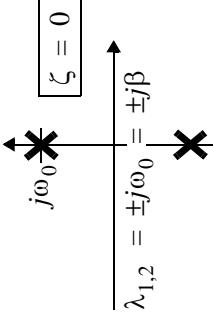
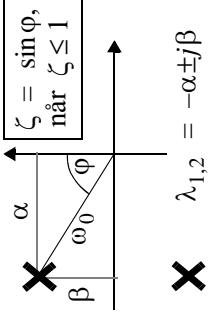
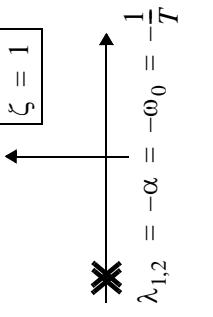
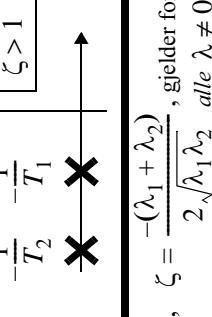
3) Antar nå at u og y er skalare.

4) Hvis y og u er skalare og $\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$ så har vi fra 3. linje at $y(t) = \int_0^t h(t-\tau)u(\tau)d\tau = h(t)*u(t)$

Tilstandsrom: $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + Bu$.

Laplace: $H(s) = C(sI - A)^{-1}B = C^{\text{adj}(sI - A)} \frac{1}{|sI - A|} B \Rightarrow$ Polene gitt av nevneren: $|sI - A| = 0$.
 \Rightarrow poler = egenverdier

Eigenverdier følger av: $|\lambda I - A| = 0$

Ordens	Transferfunksjon $h(s)$	Poler	Impuls- og sprangresponser
1. orden	$h(s) = \frac{K}{1+Ts} = \frac{K}{s+\frac{1}{T}} = \frac{-K\lambda}{s-\lambda}$ $\lambda = -\frac{1}{T}$		impulstrespons: $h(t) = L^{-1}[h(s)] = \frac{K}{T} e^{-t/T}$ sprangrespons: $k(t) = L^{-1}\left[\frac{1}{s}h(s)\right] = \int_0^t h(\tau)d\tau = K(1 - e^{-t/T})$
2. orden, $\zeta = 0$	$\frac{K}{\left(\frac{s}{\omega_0}\right)^2 + 1} = \frac{K\omega_0^2}{s^2 + \omega_0^2} = \frac{K\lambda_1\lambda_2}{(s - \lambda_1)(s - \lambda_2)}$		$h(t) = K\omega_0 \sin \omega_0 t$ $k(t) = K(1 - \cos \omega_0 t)$
2. orden, $\zeta < 1$	$\frac{K}{\left(\frac{s}{\omega_0}\right)^2 + 2\zeta\left(\frac{s}{\omega_0}\right) + 1} = \frac{K\omega_0^2}{s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2} = \frac{K\lambda_1\lambda_2}{(s - \lambda_1)(s - \lambda_2)}$ $= \frac{K(\alpha^2 + \beta^2)}{s^2 + 2\alpha s + (\alpha^2 + \beta^2)}$, $\omega_0 = \frac{\beta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$		$h(t) = K \frac{\omega_0^2}{\beta} e^{-\alpha t} \sin \beta t$ $k(t) = K \left(1 - \frac{\omega_0}{\beta} e^{-\alpha t} \cos(\beta t - \phi) \right)$
2. orden, $\zeta = 1$	$\frac{K}{\left(\frac{s}{\omega_0}\right)^2 + 2\left(\frac{s}{\omega_0}\right) + 1} = \frac{K\omega_0^2}{(s + \omega_0)^2} = \frac{K\lambda^2}{(s - \lambda)^2} = \frac{\frac{K}{T^2}}{\left(s + \frac{1}{T}\right)^2}$		$h(t) = \frac{K}{T^2} t e^{-t/T}$ $k(t) = K \left(1 - \left[1 + \frac{t}{T} \right] e^{-t/T} \right)$
2. orden, $\zeta > 1$	$\frac{K}{(1+T_1s)(1+T_2s)} = \frac{\frac{K}{T_1T_2}}{\left(s + \frac{1}{T_1}\right)\left(s + \frac{1}{T_2}\right)} = \frac{K\lambda_1\lambda_2}{(s - \lambda_1)(s - \lambda_2)}$ $\omega_0 = \sqrt{\lambda_1\lambda_2}, \quad \zeta = \frac{-(\lambda_1 + \lambda_2)}{2\sqrt{\lambda_1\lambda_2}}, \text{ gielder for alle } \lambda \neq 0$		$h(t) = \frac{K}{T_1 - T_2} \left(e^{-\frac{t}{T_1}} - e^{-\frac{t}{T_2}} \right)$ $k(t) = K \left(1 + \frac{T_2}{T_1 - T_2} e^{-\frac{t}{T_2}} - \frac{T_1}{T_1 - T_2} e^{-\frac{t}{T_1}} \right)$

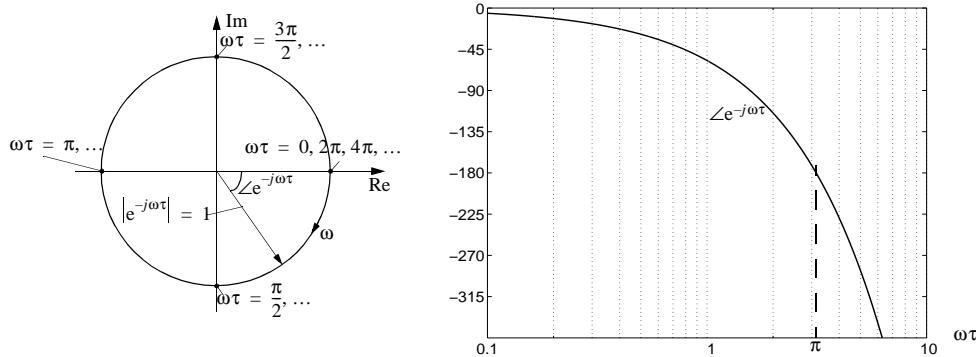
6.4.1. Prosedyre for tegning av asymptotisk AFF-diagram

209

13 av 15

FIGUR 6.17

Nyquist-diagram og faseforløp i Bode-diagram for $e^{-j\omega\tau}$



6.4.1 Prosedyre for tegning av asymptotisk AFF-diagram

Her følger en generell prosedyre som alltid kan brukes:

1. Transferfunksjonen bringes over på formen (6.18). Dersom vi har transferfunksjonen

$$h(s) = \frac{K(\dots)}{(\dots)(a+s)}$$

må den omformes til

$$h(s) = \frac{K'(\dots)}{(\dots)(1+T's)}$$

der $K' = K/a$ og $T' = 1/a$. Dette må gjentas like mange ganger som vi har 1.ordens ledd i $h(s)$. Dersom vi har resonansledd

$$h(s) = \frac{K(\dots)}{(\dots)(c+bs+as^2)}$$

må vi først omforme dette til

$$h(s) = \frac{K'(\dots)}{(\dots)\left(1+2\zeta\frac{s}{\omega_0}+\left(\frac{s}{\omega_0}\right)^2\right)}$$

der $K' = K/c$ og $\omega_0 = \sqrt{c/a}$. Poenget er altså at alle ledd i nevner (og i teller!) må ha konstantledd lik 1, det vil si at hvert ledd er lik 1 for $s = j0$. Forsterkning i alle ledd "samles" da i en felles K' , fra nå av bare kalt K .

2. Begynn alltid til venstre i diagrammet, ved de laveste frekvensene ($\omega \ll 1$). (Vi symboliserer "liten ω " med å skrive $\omega \ll 1$.) Ved slike frekvenser kan vi se bort fra virkningen av nullpunkts-, tidskonstant- og resonansledd. Videre prosedyre blir:

Tilfelle a): Hvis vi har q integrasjoner i $h(s)$, $q > 0$, har vi

$$h(j\omega)_{\omega \ll 1} \approx \frac{K}{(j\omega)^q}, \quad |h(j\omega)|_{\omega \ll 1} \approx \frac{K}{\omega^q}, \quad \angle h(j\omega)_{\omega \ll 1} \approx (-q) \cdot 90^\circ$$

q kan selvsagt være lik 0, da er vi over i Tilfelle b) nedenfor.

Amplitudeforløp

Asymptoten vil ved lave frekvenser ha helning $-q$ og skjære 0-dB-linen i $\omega = K^{\frac{1}{q}}$. Dermed kan vi fastlegge venstre del av $|h(j\omega)|_{as}$ og 0-dB-linen (subskript as betyr "asymptotisk verdi av". Se forøvrig figur 6.18).

Faseforløp

Dette er enklere. Asymptoten er horisontal og starter til venstre i $(-q) \cdot 90^\circ$.

Tilfelle b): Ingen rene integrasjoner i $h(s)$

Amplitudeforløp: Da har vi $|h(j\omega)|_{\omega \ll 1} = K$, dvs. horisontal asymptote ved lave frekvenser, i K [dB] over 0-dB-linja.

Faseforløpet starter nå til venstre med en horisontal asymptote i 0° .

3. Videre amplitudeforløp

Asymptotene skal utgjøre en sammenhengende serie av linjestykker. Ta utgangspunkt i den venstre asymptoten som allerede er tegnet, og finn den minste **knekkfrekvensen**.

Knekkfrekvensene er der den asymptotiske kurven for et ledd i en transferfunksjon knekker. De er som vist ovenfor den inverse av tidskonstanten i nullpunkts- og tidskonstantledd, og frekvensen ω_0 i et resonansledd.

Finn helningen p på asymptoten til leddet du betrakter. $p = 1$ for nullpunktsledd, -1 for tidskonstantledd og -2 for resonansledd. Tegn et nytt linjestykke fra den minste knekkfrekvensen fram til den *etterfølgende* knekkfrekvensen med en helning som er lik forrige asymptotes helning $+ p$.

Sett "minste knekkfrekvens" = etterfølgende knekkfrekvens og gjenta prosedyren for neste ledd, osv.

Videre faseforløp

Asymptotene er ikke sammenhengende, men er horisontale, og springer opp eller ned ved knekkfrekvensen, med $p \cdot 90^\circ$ målt fra forrige asymptote.

For faseforløpet gjelder unntaksregelen at et nullpunktsledd av typen $1 - T_i s$ gir 90° knekk ned, ikke opp.

EKSEMPEL 6.6 Asymptotisk Bodediagram for en transferfunksjon med flere ledd

Vi ønsker å tegne et asymptotisk amplitudediagram og asymptotisk fasediagram for frekvensresponsen til transferfunksjonen

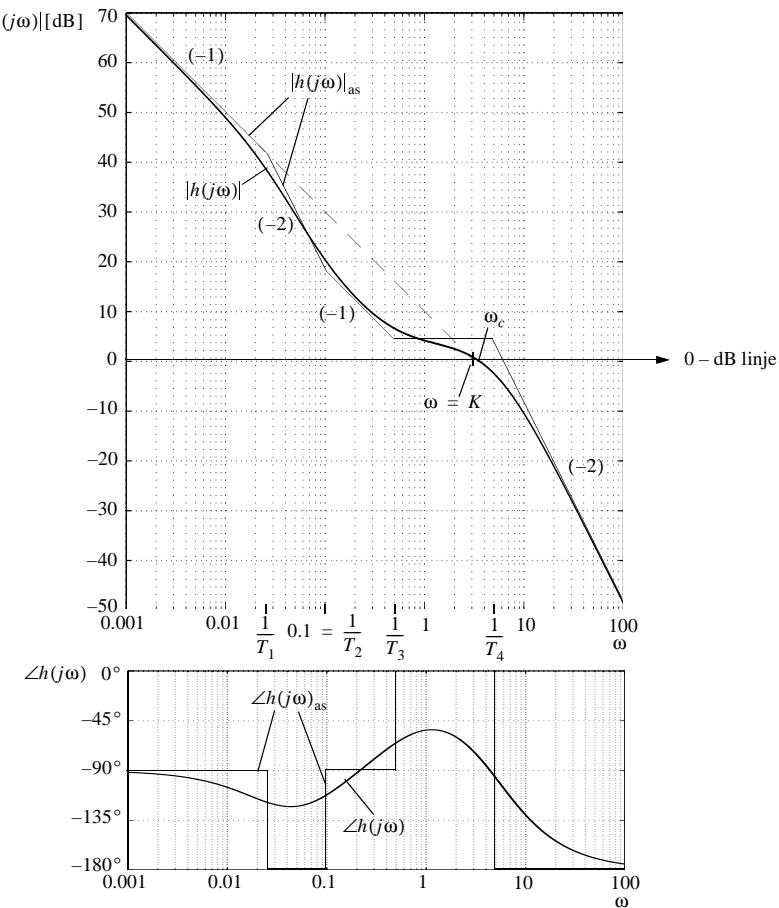
$$h(s) = \frac{K(1 + T_2 s)(1 + T_3 s)}{s(1 + T_1 s)(1 + T_4 s)^2} \quad (6.29)$$

der $K = 3$, $T_1 = 40$, $T_2 = 10$, $T_3 = 2$, $T_4 = 0.2$

Vi finner

$$\begin{aligned} \lg|h(j\omega)| &= \lg K + \lg|1 + j\omega T_2| + \lg|1 + j\omega T_3| \\ &\quad - \lg\omega - \lg|1 + j\omega T_1| - 2\lg|1 + j\omega T_4| \end{aligned} \quad (6.30)$$

FIGUR 6.18
Bodediagram for $h(s)$, eksakt diagram, og asymptotisk diagram





Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet (NTNU)

Faglig kontakt under eksamen: Trond Andresen, mobil **9189 7045**
Han går to veiledningsrunder, ca. kl. 0940 - 1010 og ca. kl. 1115 - 1145.

Eksamens i TTK4105 reguleringsteknikk

torsdag 22. mai 2014

Tid: 0900 - 1300

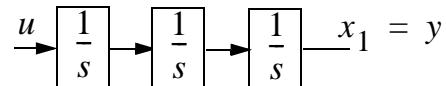
Sensur vil foreligge innen tre uker. Den blir også lagt ut på its learning når den er klar.

Prosentallene angir den relative vekt oppgavene tillegges ved bedømmelsen. Denne besvarelsen teller 100% på karakteren.

Flere spørsmål kan besvares meget enkelt ved å bruke formelsamlinga bakerst i oppgavesettet. Se kjapt gjennom den før du begynner. Sjekk alltid den før du gir opp! Men du må forklare hvordan du bruker noe, når du henter det fra formelsamlinga. Noen spørsmål skal besvares ved å lese av verdier på grafer i oppgavesettet – i slike tilfeller godtas en viss "måleunøyaktighet". Det inkluderes et ekstra ark her i tilfelle du roter deg bort ved tegning. Tips: bruk blyant!

Oppgave 1 (17 %)

Gitt et enkelt system som består av tre integratorer i serie:



a) (5 %) Uttrykk systemet som som en tilstandsrommodell ved å finne matrisene/vektorene A , b , c^T .

b) (5 %) Vis at transisjonsmatrisa blir:

(Tips: Den kan i dette tilfellet finnes ved potensrekke, fordi alle ledd blir null fra og med tredjepotens-leddet i rekka. Men andre framgangsmåter er også tillatt.)

$$e^{At} = \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

c) (3 %) Finn impulsresponsen $h(t)$ ved residuregning på systemets transferfunksjon $h(s) = \frac{y(s)}{u}$.

d) (2 %) Finn den samme impulsresponsen ved en annen metode, som du kan velge sjøl.

e) (2 %) Er dette systemet stabilt, marginalt stabilt eller ustabilt? Begrunn svaret, både ut fra en inngang/utgangs-betraktnign, og ut fra egenverdiene plassering.

Oppgave 2 (4 %)

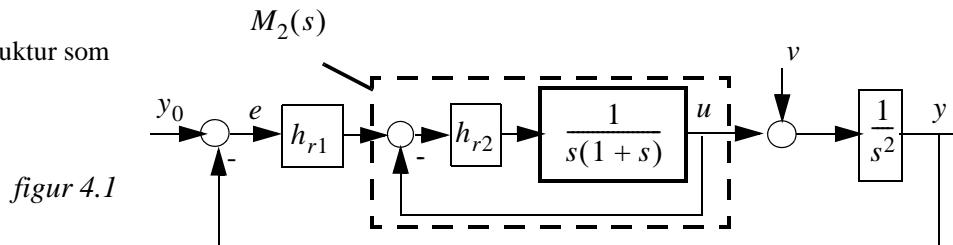
Finn transferfunksjonen $h(s)$ for et 2. ordens Butterworth lavpassfilter med knekkfrekvens 100[rad/s].

Oppgave 3 (3 %)

Med hensyn på sikkerhet ved eksperimentell innstilling av regulator i et industrielt reguleringssystem, er Skogestads SIMC-metode bedre enn Ziegler-Nichols' metode. Forklar kort hvorfor.

Oppgave 4 (53 %) (stor oppgave, men du kan komme videre her sjøl om du ikke greier alle deloppgaver)

Gitt en reguleringsstruktur som vist i figur 4.1.



Blokken med tjukk strek er en servo for roret til et fartøy, y er kurs og forstyrrelsen v er et konstant uønsket dreiemoment som påvirker kurset. For enkelhets skyld har vi satt fartøyets treghetsmoment = 1, og ignorert dempinga p.g.a. friksjon fra vannet når fartøyet endrer kurs.

- a) (3 %) Anta at din intensjon først er å ikke ha intern tilbakekopling, men bare ha én regulator h_{r1} , med derivatvirkning. Går det? Begrunn svaret!
- b) (4 %) Du velger fra nå av å ha intern tilbakekopling, slik som vist i figur 4.1. *Vi betrakter nå inntil videre bare den indre sløyfa, indikert med stiplet linje.* Se også inntil videre bort fra forstyrrelsen. Regulatoren $h_{r2} = K_{p2}$. Finn følgeforholdet $M_2(s)$ og bring det

$$\text{på formen } M_2(s) = \frac{1}{1 + 2\zeta \frac{s}{\omega_0} + \left(\frac{s}{\omega_0}\right)^2} \quad (4.1)$$

Uttrykk ω_0 som funksjon av K_{p2} .

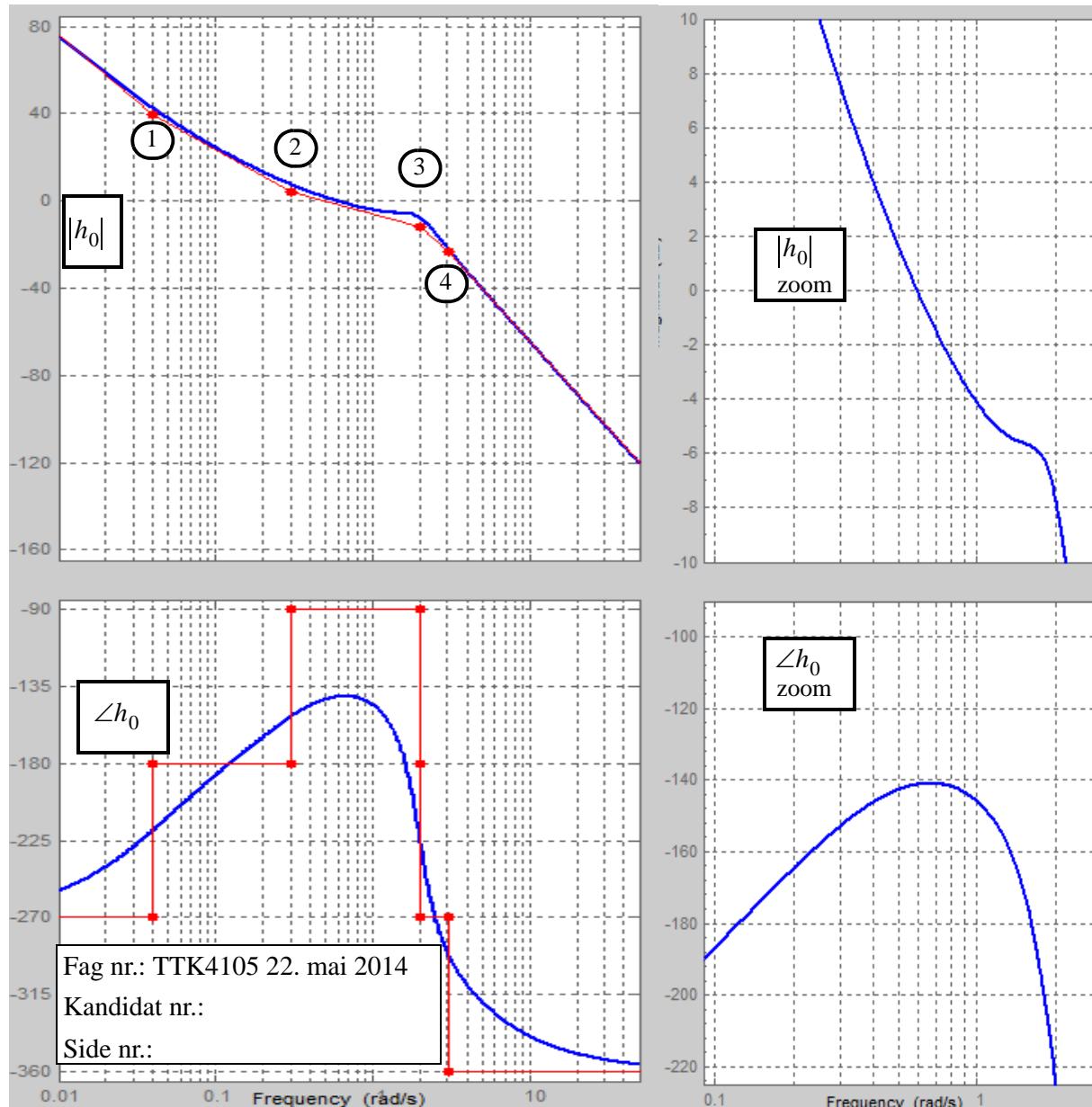
- c) (4 %) Vi ønsker stor K_{p2} i den indre sløyfen. Hvorfor?
Vi velger $K_{p2} = 4$. Finn ζ .
Hva blir faseforskyvningen φ i sprangresponsen til M_2 ?
- d) (3 %) Kommentér hvilke tre prinsipielt forskjellige typer sprangrespons vi får for M_2 ; med liten, middels eller stor K_{p2} .

- e) (4 %) Den indre sløyfen er nå fastlagt. **Fra nå av har vi også med den ytre sløyfen.**
Du velger en PID-regulator

$$h_{r1} = K_p \frac{(1 + T_i s)(1 + T_d s)}{T_i s(1 + a T_d s)} \quad (4.2)$$

Finn sløyfetransferfunksjonen h_0 for den ytre sløyfen. Hvor mange poler N_p (jfr. Nyquists stabilitetskriterium) i høyre halvplan har det åpne systemet?

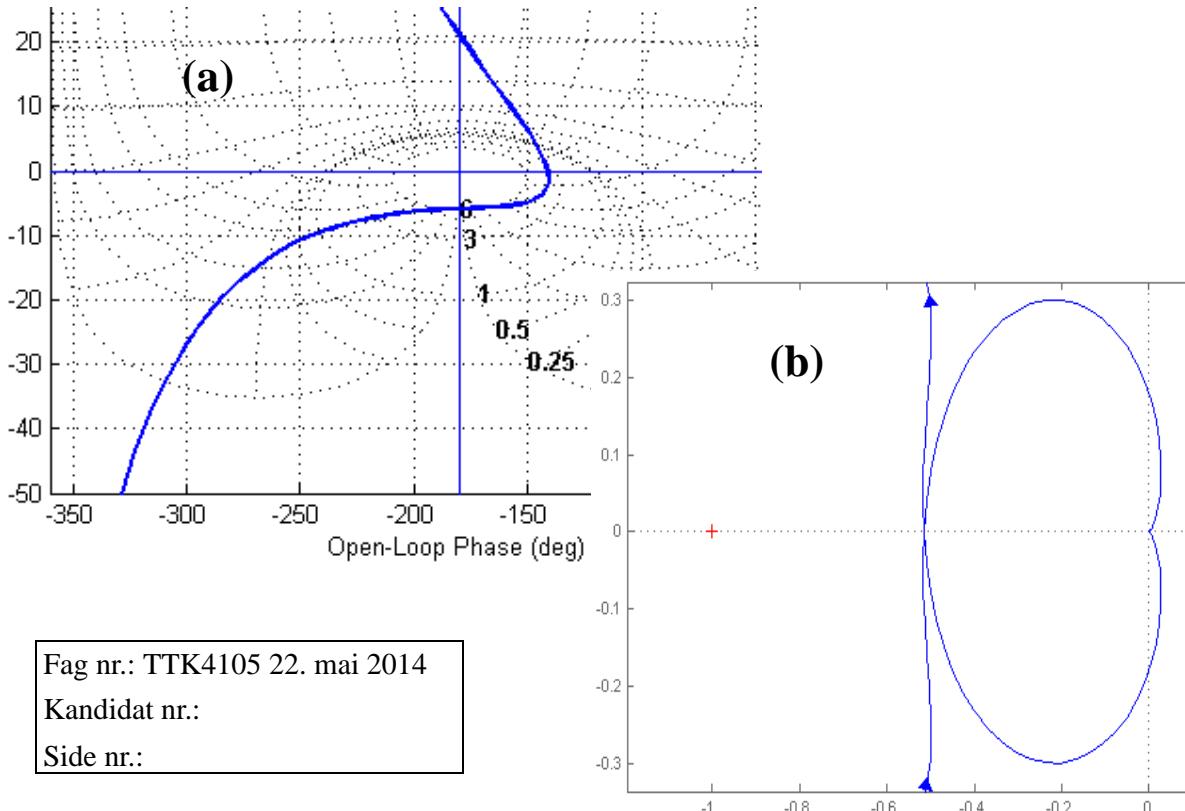
- f) (5 %) Figur 4.2 viser et Bodediagram for h_0 med asymptoter. Regulatorparametre er her fornuftig valgt. Hvordan kan du se det av diagrammet? Dette systemet er *betinget* stabilt. Hva menes med det? Les av forsterkningsmargin og fasemargin. Tegn i Bode-diagrammet. Kommentér! Ta arket med figur 4.3 ut av oppgavesettet og lever det som en del av besvarelsen.
- g) (6 %) Les av fra diagrammet og finn de valgte parameterne T_i , T_d , a . Vis ved avlesing og v.h.a. den T_i du fant at $K_p \approx 0.15$ (her tillates ganske stort slingringsmonn, bare det framgår at du har tenkt riktig). Indikér også hvordan de øvrige knekkpunkter i asymptotene framkommer. Dette kan du gjøre i din øvrige tekst ved å referere til de innsirklede nummer, slik at du ikke trenger å skrive om dette i bodediagrammet.



figur 4.2

- h) (3 %) Figur 4.3(b) viser et utsnitt av Nyquistkurven for h_0 med de valgte regulatorparametre. Finn forsterkningsmarginen v.h.a. denne grafen. Sammenlign med svaret fra deloppgave f).
- i) (4 %) Finn ved hjelp av Nichols-diagrammet i figur 4.3(a) resonanstoppen i avviksforholdet. Omrent ved hvilken frekvens inntreffer den? Tegn i diagrammet.
- j) (3 %) Nå til forstyrrelsen v i figur 4.1. Hva blir transferfunksjonen h_v for den ytre sløyfa?
- k) (6 %) Forstyrrelsen v er konstant. Finn det stasjonære avviket $e(\infty)$ med regulatoren (4.2). Finn også $e(\infty)$ med PD-regulering (arbeidsbesparende tips: det svarer til å sette $T_i = \infty$). Kommentér.
- l) (3%) Anta PD-regulator. Sett $v = 0$. Referansen y_0 endrer seg nå som et sprang. Blir det stasjonært avvik? Kort begrunnet verbalt svar tilstrekkelig.

- m) (5 %) PID-regulatoren (4.2) skal realiseres diskret. Det betyr at holdelementets virkning må tas med i betrakting. Finn en tastetid (samplingstid) T som er akkurat så liten at den ikke forverrer fasemarginen med mer enn 2 grader (Tips: husk skaling mellom radianer og grader her!) Hva er det *første* trinn i det du må gjøre med regulatortransfertfunksjonen (4.2) for gjennom noen flere trinn å regne deg fram til den diskrete regulatoralgoritmen?



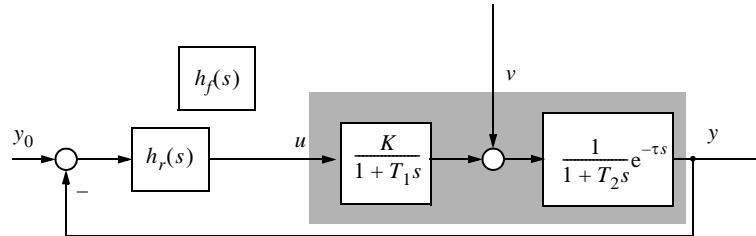
figur 4.3

Oppgave 5 (7 %)

Vi skal betrakte en befolkning på N personer, hvor en smittsom sjukdom brer seg, etter hvert til alle. Dette er en sjukdom hvor man ikke blir frisk, men hvor ingen dør. Kall antall sjuke x . En mye brukt modell for slikt er:

$$\dot{x} = cx\left(1 - \frac{x}{N}\right), \text{ der } c \text{ er en positiv konstant.} \quad (5.1)$$

- a) (1 %) Hvorfor er denne modellen ulineær?
- b) (1 %) Dette er et *autonomt* system. Hva menes med det?
- c) (3 %) Finn en lineær modell som gjelder når få personer er smittet. Kall antall personer ved starttidspunktet $t_0 = 0$ for x_0 . Hva blir den tilnærmede formelen for $x(t)$ når det fortsatt er få smittede personer?
- d) (2 %) Vis at $x(t)$ i modellen (5.1) ikke kan øke ut over et "tak" på N personer (heldigvis, ellers ville vi ha måttet forkaste den ...).

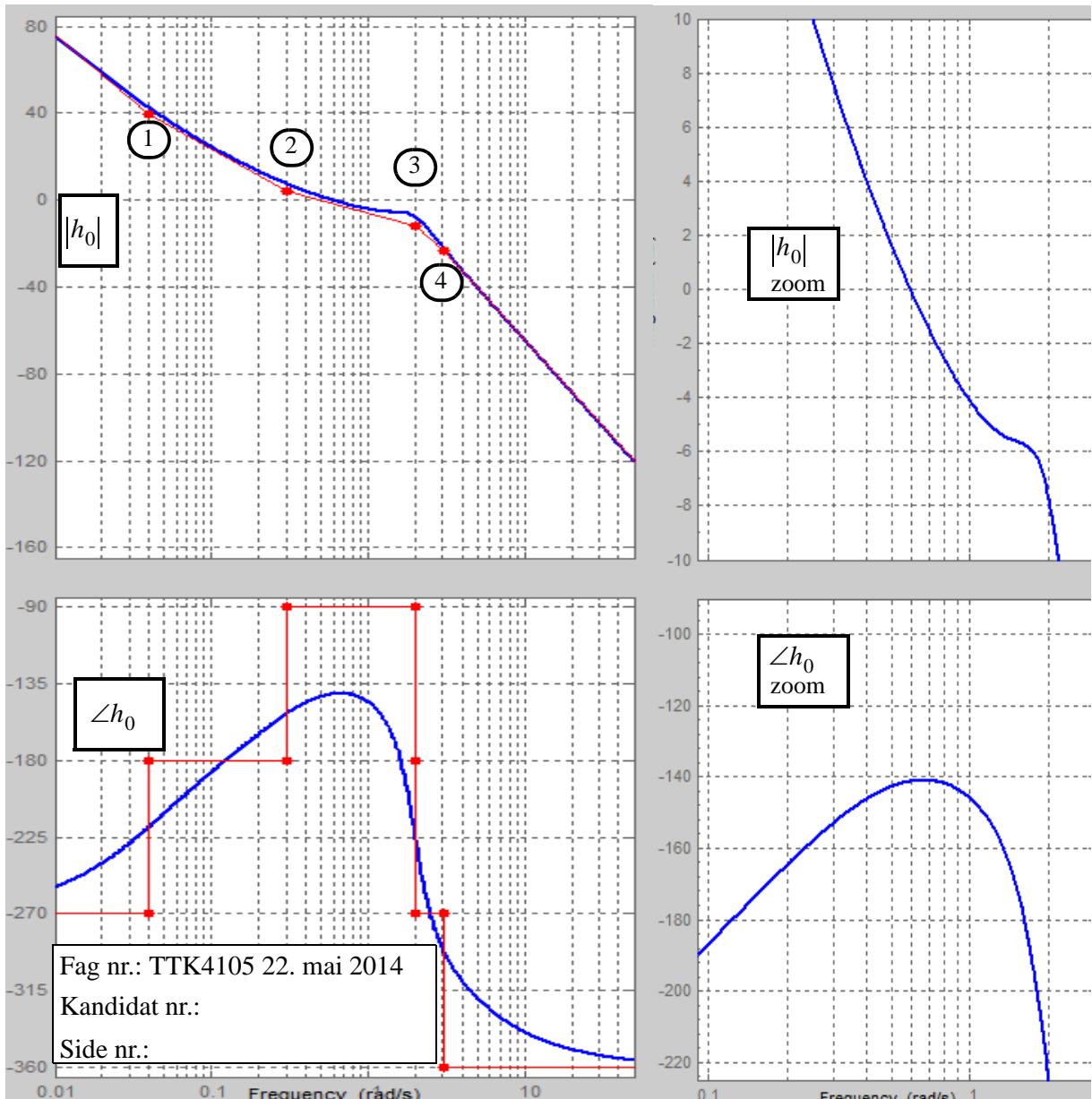
Oppgave 6 (16 %)

figur 6.1

Figur 6.1 viser et tilbakekoplet reguleringssystem hvor man også skal installere en foroverkopling. Prosessen som skal styres er indikert med skravert felt.

- a) (1 %) Når er foroverkopling fra forstyrrelse mulig? Kort verbalt svar.
- b) (2 %) Tegn tilstrekkelig mye av blokdiagrammet i figur 6.1 for å vise foroverkoplingsblokka h_f riktig forbundet med den øvrige strukturen.
- c) (3 %) Finn den ideelle forkopling h_{fi} for systemet. Modifisér den til en mer realistisk foroverkopling.
- d) (2.5 %) For $T_2 \gg T_1$ og/eller $\tau \gg T_1$ er foroverkoplinga særskilt nyttig. Forklar hvorfor verbalt!
- e) (1.5 %) Hva blir den *statiske* foroverkoplinga, og hva slags forstyrrelse v er den i stand til å eliminere virkningen av?
- f) (1 %) Du tenker først å la regulatoren være av type PI. Men så slår det deg at kanskje du heller skal lage en Otto Smith-regulator, med PI-regulatoren som komponent i denne. Hvorfor det?
- g) (2 %) En kollega innvender at det ikke bare er å skifte til en annen regulator, for det vil påvirke valget av foroverkoppling. Hva svarer du?
- h) (3 %) Vis at transferfunksjonen h_r , når denne er en Otto-Smith-regulator med PI-regulator som komponent, kan skrives som

$$h_r = K_p \frac{(1 + T_i s)(1 + T_1 s)(1 + T_2 s)}{T_i s(1 + T_1 s)(1 + T_2 s) + K_p K(1 + T_i s)(1 - e^{-\tau s})} \quad (6.1)$$



(Ekstra ark, hvis du trenger det.)

Løsningsforslag TTK 4105 regulerings teknikk 22/5 - 14

1a) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, c^T = [1 \ 0 \ 0]$

1b) $e^{At} = I + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}t + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{2}t^2 =$
 $\begin{bmatrix} 1 & t & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & t \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & t^2/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & t & t^2/2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

1c) Formel (V.3) gir $h(t) = \frac{1}{2!} \left[\frac{d^2}{ds^2} \left\{ \frac{s^2}{s^3} e^{st} \right\} \right]_{s=0} =$
 $\frac{1}{2} \left[t^2 e^{st} \right]_{s=0} = \frac{1}{2} t^2$

1d) Hvis $u(t) = \delta(t)$ er $x_1 = \mu_1(t) = 1$, $x_2 = \int_0^t x_1(\alpha) d\alpha = \mu_2(t) = A^1$, og $x_3 = \int_0^t x_2(\alpha) d\alpha = \mu_3(t) = \frac{1}{2}t^2 = K$
 Kan også finnes som $c^T e^{At} b$.

1e) Tre egenverdier/poler oppå hverandre \Rightarrow ustabilt
 eller ganske enkelt $|h(t)| \rightarrow \infty$ når $t \rightarrow \infty$

n=2 \Rightarrow kvarat

2) Polene:

*	$-\frac{1}{2}j$
$-\frac{1}{2}j$	*

$$\lambda_1 = 100 \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + j \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

$$\lambda_2 = 100 \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - j \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

$$\} \Rightarrow (\text{V.16}) \text{ gir}$$

$$h(s) = \frac{K}{(s-\lambda_1)(s-\lambda_2)} = \frac{K}{s^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)s + \lambda_1 \lambda_2} = \frac{10^4}{s^2 + 100\sqrt{2}s + 10^4}$$

K blir 10^4 fordi vi krever $|h(j\omega)|_{\omega=0} = 1$

③ Z-N formsetter at man øker forsterknings i regulatoren til systemet oscillerer på stabilitetsgrensa. Det kan være risikabelt eller skadelig. SIMC krever ikke dette, bare et sprangresponsforsøk med åpen sløyfe.

④a) Utan indre sløyfe blir det 3 integratorer i serie. Sjøl med derivatvirkning i h_{r1} blir det ikke mulig å løfte fasen over $-180^\circ \Rightarrow$ Systemet kan ikke gjøres stabilt.

$$④b) M_2 = \frac{K_{p2} \frac{1}{s(1+s)}}{1 + K_{p2} \frac{1}{s(1+s)}} = \frac{K_{p2}}{s^2 + s + K_{p2}} = \frac{1}{\frac{s^2}{K_{p2}} + \frac{1}{K_{p2}}s + 1}$$

$$(4.1) \text{ gir da } \omega_0^2 = K_{p2} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{K_{p2}}$$

④c) Stor K_{p2} gir stor båndbredde for M_2 , noe som øker stabiliteten for den ytre sløyfen, p.g.a bedre fareforløp opp til høyere frekvens.

$$K_{p2} = 4 \text{ gir } \omega_0 = 2. (4.1) \text{ gir } \frac{2\xi}{\omega_0} = \frac{1}{4} \Rightarrow \xi = \frac{1}{4}$$

$$\varphi = \arcsin(0.25) = 0.253 \text{ rad} = 14.5^\circ$$

4d overdempet, kritisk damped, underdamped
(oscillatory)

$$4e h_o = h_{r_1} M_2 \frac{1}{s^2} = k_p \frac{(1+T_{is})(1+T_{ds})}{T_{is}(1+0.1T_{ds})} \cdot \frac{1}{\left(\frac{s^2}{4} + \frac{1}{4}s + 1\right)} \cdot \frac{1}{s^2}$$

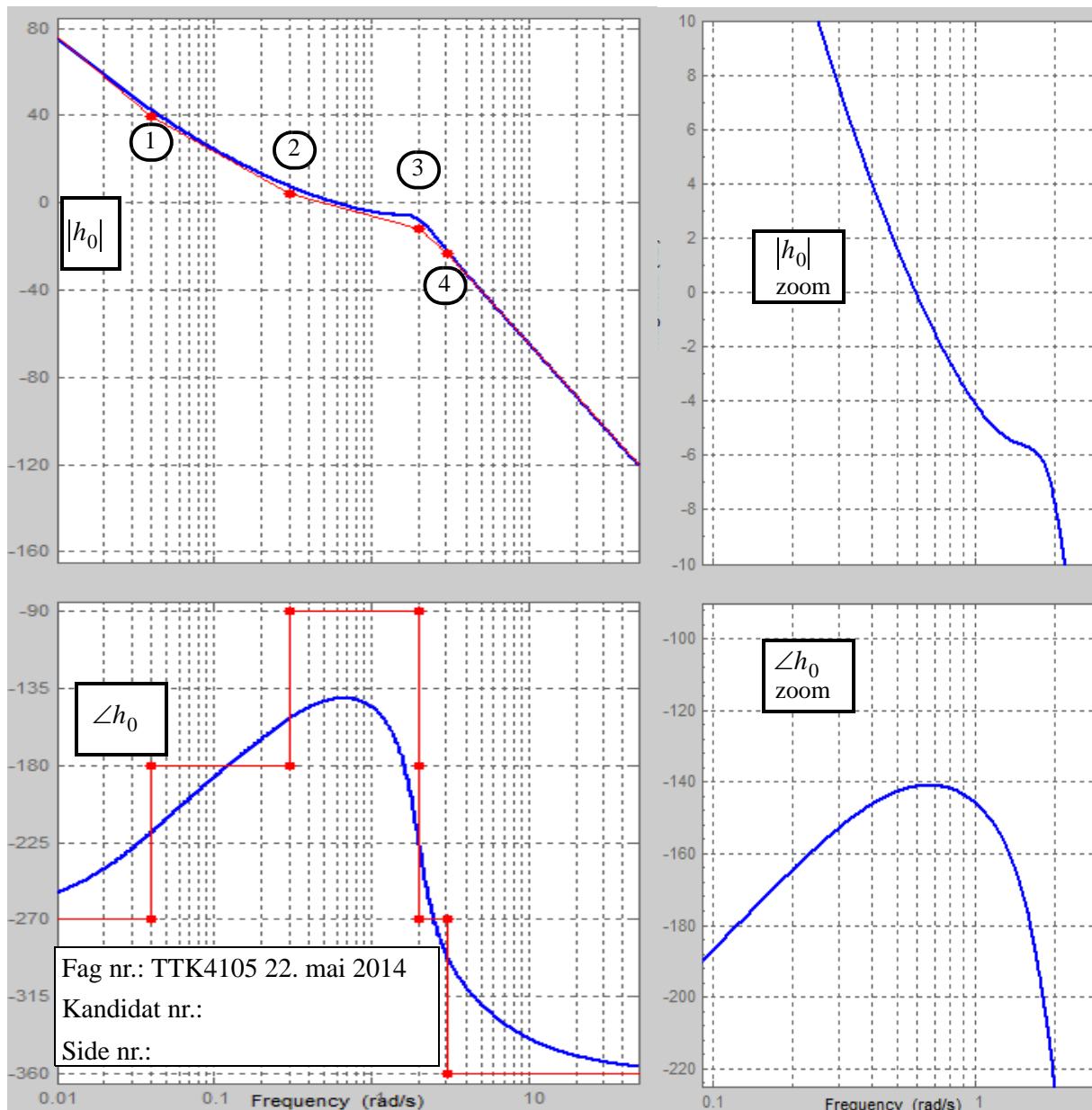
Pdene ligger enten i vhp eller på den imaginære akse $\Rightarrow N_p = 0$.

4f God fasemargin på trots av ellers vanskelig fareforløp. Betinget stabilt fordi det også blir instabilt ved lav k_p , ikke bare ved stor k_p . Se ellers bodediagrammet neste side med ΔK og Ψ , som blir 5.7 dB og 36.8°

4g knekkpunkt ① svarer til $\frac{1}{T_i} = 0.04 \Rightarrow T_i = 25$
Knekkpunkt ② svarer til $\frac{1}{T_d} = 0.3 \Rightarrow T_d = 3.3$
Knekkpunkt ③ svarer til $\omega_o = 2$.
Det siste, ④, svarer til $\frac{1}{\alpha T_d} = 3 \Rightarrow \alpha = 0.1$
Se ellers bodediagrammet neste side for hvordan finne k_p .

4h Målt med linjal, og basert på (V-12)(a):
 $\frac{1}{\Delta K} \approx \frac{3.1}{5.87} \approx 1.9$, stemmer bra med $10^{\frac{5.7}{20}} = 1.92$

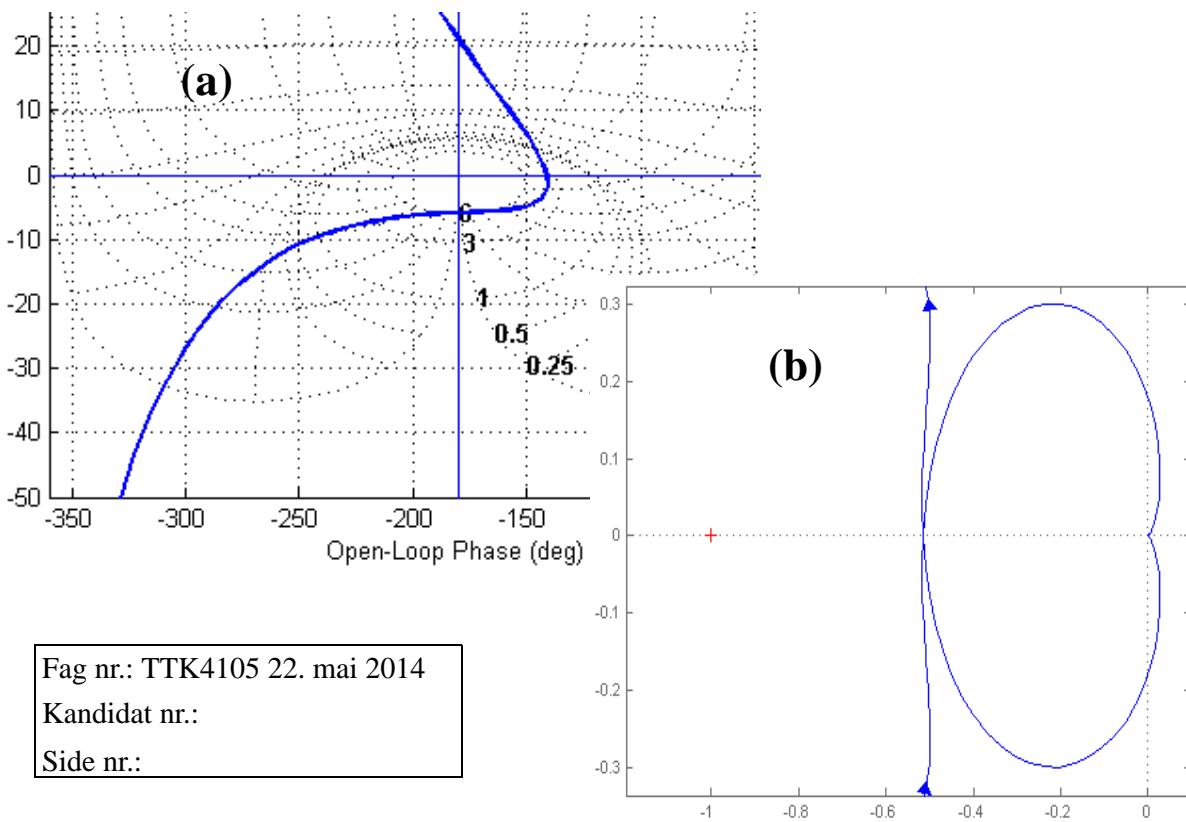
4i Se påtegnet Nichols-diagram lengre bak.
 $|N|_{max} \approx 7$ dB, vanskelig å avlese $\angle h_o$ der, men $\angle h_o \approx -170^\circ$, og i bodediagrammet svarer det til ca. $\omega = 1.5$



figur 4.2

- h) (3 %) Figur 4.3(b) viser et utsnitt av Nyquistkurven for h_0 med de valgte regulatorparametre. Finn forsterkningsmarginen v.h.a. denne grafen. Sammenlign med svaret fra deloppgave f).
- i) (4 %) Finn ved hjelp av Nichols-diagrammet i figur 4.3(a) resonanstoppen i avviksforholdet. Omrent ved hvilken frekvens inntreffer den? Tegn i diagrammet.
- j) (3 %) Nå til forstyrrelsen v i figur 4.1. Hva blir transferfunksjonen h_v for den ytre sløyfa?
- k) (6 %) Forstyrrelsen v er konstant. Finn det stasjonære avviket $e(\infty)$ med regulatoren (4.2). Finn også $e(\infty)$ med PD-regulering (arbeidsbesparende tips: det svarer til å sette $T_p = \infty$). Kommentér

- m) (5 %) PID-regulatoren (4.2) skal realiseres diskret. Det betyr at holdeelementets virkning må tas med i betrakting. Finn en tastetid (samplingstid) T som er akkurat så liten at den ikke forverrer fasemarginen med mer enn 2 grader (Tips: husk skalering mellom radianer og grader her!) Hva er det *første* trinn i det du må gjøre med regulatortransferfunksjonen (4.2) for gjennom noen flere trinn å regne deg fram til den diskrete regulatoralgoritmen?



figur 4.3

Oppgave 5 (7 %)

Vi skal betrakte en befolkning på N personer, hvor en smittsom sjukdom brer seg, etter hvert til alle. Dette er en sjukdom hvor man ikke blir frisk, men hvor ingen dør. Kall antall sjuke x . En mye brukt modell for slikt er:

$$\dot{x} = cx\left(1 - \frac{x}{N}\right), \text{ der } c \text{ er en positiv konstant.} \quad (5.1)$$

- a) (1 %) Hvorfor er denne modellen ulineær?
- b) (1 %) Dette er et *autonomt* system. Hva menes med det?
- c) (3 %) Finn en lineær modell som gjelder når få personer er smittet. Kall antall personer ved starttidspunktet $t_0 = 0$ for x_0 . Hva blir den tilnærmede formelen for $x(t)$ når det fortsatt er få smittede personer? 174

4j $h_v = \frac{1}{s^2}$

4k $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} e(s) \cdot \frac{1}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} (-h_v N) \cdot s \cdot \cancel{\frac{1}{s}} =$
 $= \lim_{s \rightarrow 0} (-h_v \left(\frac{1}{1+h_0} \right)) = \lim_{s \rightarrow 0} \left(\frac{-1}{s^2} \left(\frac{h_0}{h_0 + t_0} \right) \right) =$
 $- \lim_{s \rightarrow 0} \left(\frac{\frac{1}{s^2} \left(T_i s (1+\dots)(1+\dots)s^2 \right)}{T_i s (1+\dots)(1+\dots)s^2 + k_p(1+T_i s)(1+\dots)} \right) = 0$

(her betyr "1+..." ledd $\rightarrow 1$ når $s \rightarrow 0$)

PD: $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} \left(\frac{T_i s}{k_p T_i s} \right) = \frac{1}{k_p} \Rightarrow$ stasjonert arbekk
 og $T_i \rightarrow \infty$

4l Nei. For det er mer enn null integratorer i h_o .

4m Bruker (V.24).

Den ekstra negative fasekomponenten ved krysfrekvensen $\omega_c \frac{1}{2} = \frac{\pi}{180} \cdot 2 \Rightarrow T = \frac{2}{\omega_c} \cdot \frac{\pi}{180} \cdot 2$

$$\approx \frac{\pi}{0.5945} = 0.12$$

Første trinn er å erstatte alle s i (4.2) med $\frac{2}{T} \left(\frac{z-1}{z+1} \right)$, jfr. (V.23)

5a

$$\ddot{x} = cx \left(\dots - \frac{x}{N} \right) = -\frac{cx^2}{N} + \dots$$

x^2 på høyre side gjør den ikke lineær

5b

Det er ingen ytre påvirkninger (ingen u eller v)

5c

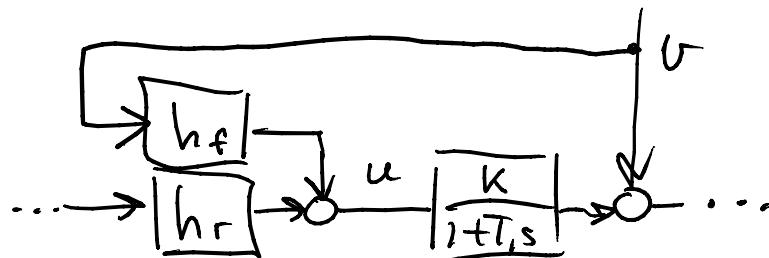
$$\text{Da får vi } \ddot{x} = cx \Rightarrow x(t) = e^{ct} x_0$$

5d

$$\text{Når } x(t) \rightarrow N \text{ vil } \dot{x}(t) \rightarrow 0 \Rightarrow \\ x(t) < N$$

6a

Når v kan måles.



6b

$$h_{fi} \cdot \frac{K}{1+T_s} - 1 = 0 \Rightarrow h_{fi} = -\frac{1+T_s}{K}$$

Mer realistisk: $h_f = -\frac{1+T_{is}}{1+\alpha T_s} \cdot \frac{1}{K}$, med $0 < \alpha \ll 1$

6c

Fordi da vil tilbakekopplinga virke mye seinere enn foroverkopplinga.

6d

$h_{fs} = -\frac{1}{K}$. Eliminerer virkningen av konstant v.

6f

Fordi det er en tidsforsinkelse τ
i prosessen

6g

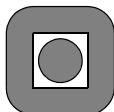
Tullprat. Valg av h_f og h_r kan gjøres
helt uavhengig av hverandre.

6h

Bruker (V.25):

$$h_r' = \frac{k_p \frac{1+T_{is}}{T_{is}}}{1 + k_p \frac{1+T_{is}}{T_{is}} \frac{k}{(1+T_{1s})(1+T_{2s})} (1 - e^{-Cs})}$$

$$= k_p \frac{(1+T_{is})(1+T_{1s})(1+T_{2s})}{T_{is}(1+T_{1s})(1+T_{2s}) + k_p k (1+T_{is})(1 - e^{-Cs})}$$



Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet (NTNU)

Faglig kontakt under eksamen: Trond Andresen, mobil **9189 7045**
Han går to veiledningsrunder, ca. kl. 0940 - 1010 og ca. kl. 1115 - 1145.

Eksamens i TTK4105 reguleringssteknikk

lørdag 30. mai 2015

Tid: 0900 - 1300

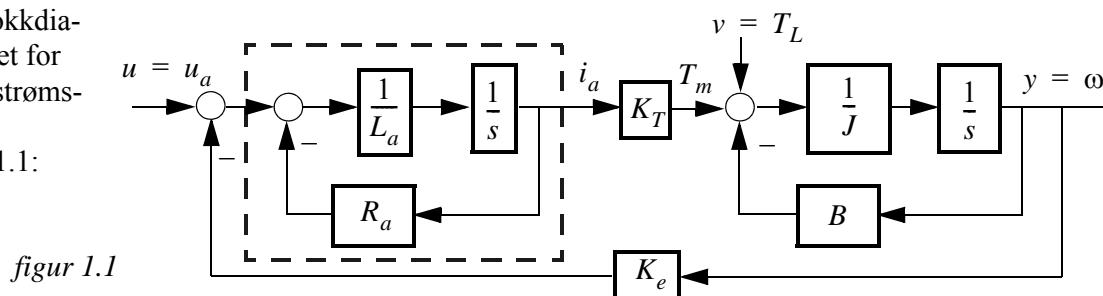
Sensur vil foreligge innen tre uker. Den blir også lagt ut på its learning når den er klar.

Prosentallene angir den relative vekt oppgavene tillegges ved bedømmelsen. Denne besvarelsen teller 100% på karakteren.

Flere spørsmål kan besvares meget enkelt ved å bruke formelsamlinga bakerst i oppgavesettet. Se kjapt gjennom den før du begynner. Sjekk alltid den før du gir opp! Men du må forklare hvordan du bruker noe, når du henter det fra formelsamlinga. Noen spørsmål skal besvares ved å lese av verdier på grafer i oppgavesettet – i slike tilfeller godtas en viss "måleunøyaktighet". Tips: bruk blyant!

Oppgave 1 (22 %)

Gitt blokkdiagrammet for en likestrømsmotor i figur 1.1:



a) (6 %) Sett først $v = T_L = 0$.

Finn matrisene A , b , c^T i en tilstandsrommodell med $\dot{x} = Ax + bu$, $y = c^T x$.

b) (6 %) Vis at transferfunksjonen fra det eksternt påsatte belastningsmomentet T_L til ankerstrøm i_a

$$\text{er } \frac{i_a}{T_L}(s) = h_{iT}(s) = \frac{-K_e}{JL_a s^2 + (JR_a + BL_a)s + K_T K_e + BR_a} \quad (1.1)$$

(Merk notasjon: T_L er ikke en tidskonstant; T brukes ofte for "Torque" = dreiemoment.)

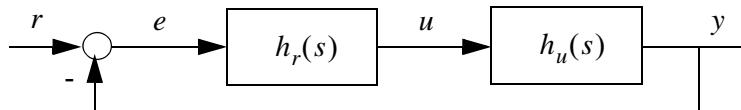
c) (4 %) Du antar at tidskonstanten i motorens elektriske del (innrammet) er så liten at den kan ignoreres. Hva blir da den forenklede utgave av ligning (1.1)?

d) (4 %) Vi tar igjen utgangspunkt i den opprinnelige ligning (1.1). Finn utrykk for likestrømsmotorens udempede resonansfrekvens ω_0 og relative dempningskonstant ζ .

e) (2 %) Hvis motoren skulle vært helt tapsfri, måtte to parametre vært = 0. Hvilke? Hvordan ville da motoren da ha oppført seg ved et sprang i u_a ? Kort, kvalitativt og verbalt svar.

Oppgave 2 (32 %)

En prosess beskrevet ved transferfunksjonen $h_u(s)$ skal reguleres som vist i figuren til høyre.



$$\text{Vi har } h_u(s) = \frac{2(1 - 0.5s)}{(1 + 2s)(1 + 0.1s)} \quad (2.1)$$

- a) (6 %) Hva kaller vi en prosess med en teller av denne typen i transferfunksjonen? Hva er problematisk med en slik prosess? Hva er karakteristisk for dens sprangrespons? Er prosessen åpent stabil?

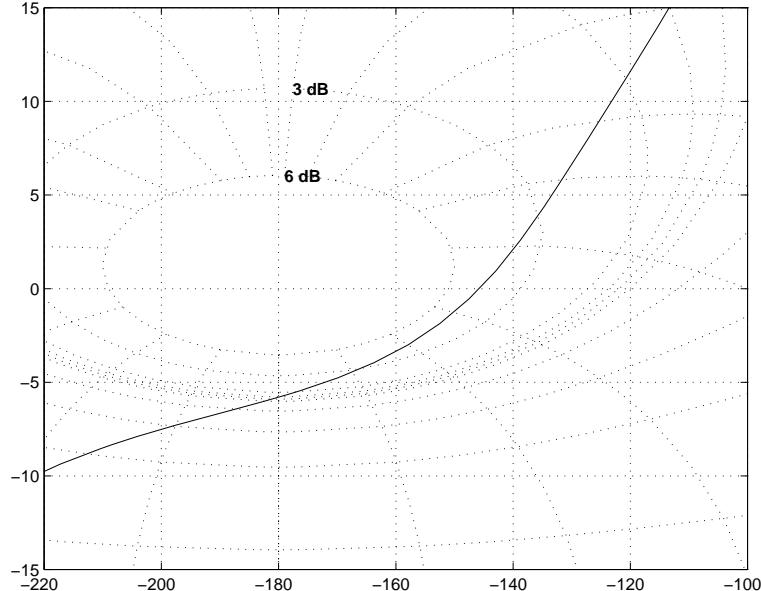
I figur 2.1 neste side (+ en ekstra kopi bakerst hvis du trenger den) er vist Bode-diagram for $h_u(s)$.

- b) (7 %) Tegn inn asymptoter for $|h_u|$ og $\angle h_u$ i Bode-diagrammet og legg arket ved besvarelsen. Det skal framgå av det påtegnede arket hvordan du har fastlagt asymptotene, det er ikke tilstrekkelig å bare "smyge dem inntil" de oppgitte kurver.

- c) (7 %) Regulatortransferfunksjonen er $h_r(s) = K_p \frac{1 + T_i s}{T_i s}$.

Bestem regulatorparametrerne ved hjelp av Bode-diagrammet og Ziegler-Nichols' metode.

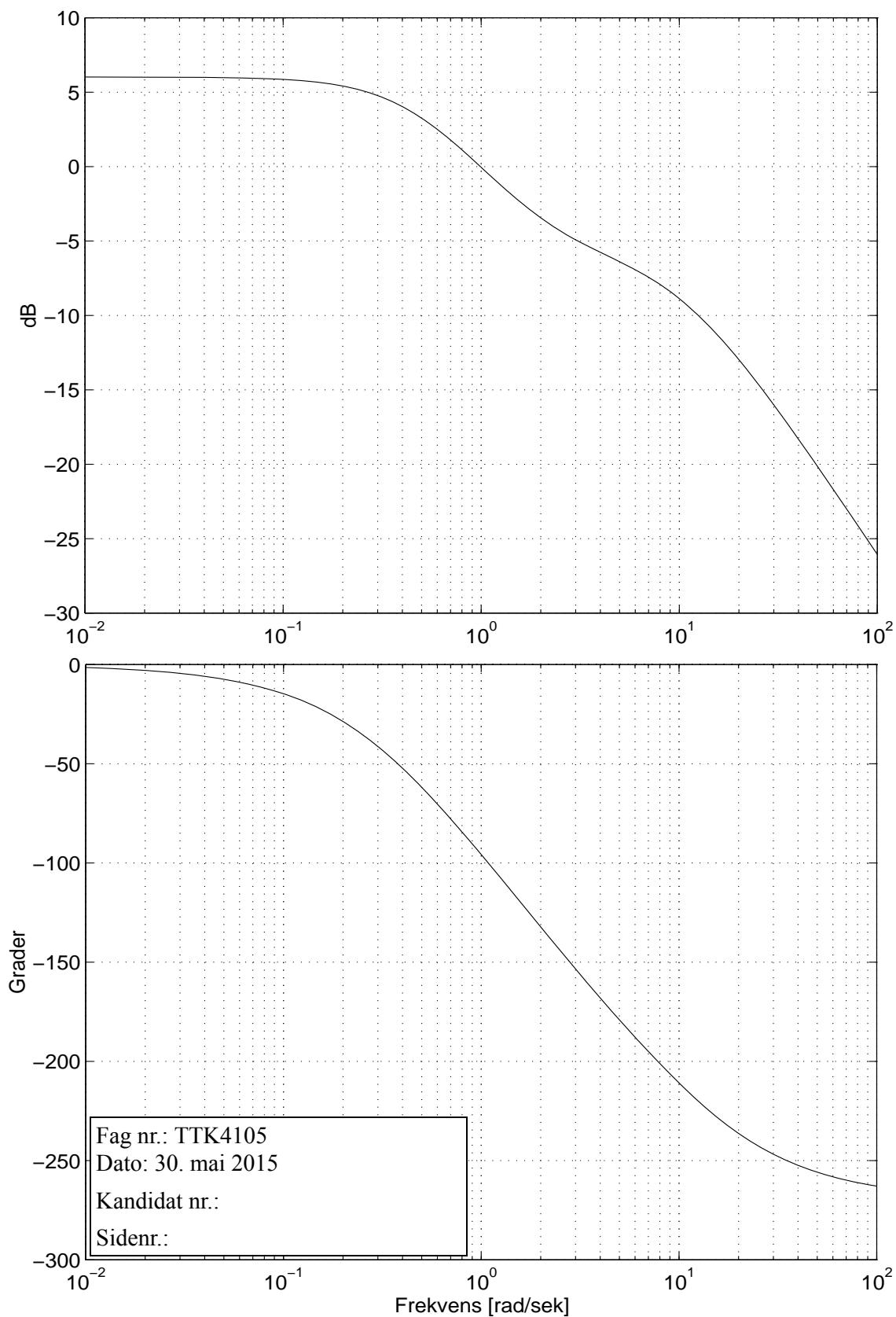
- d) (5 %) Gitt Nichols-diagrammet for prosessen med ferdig innstilt regulator, se figur til høyre. Les av fase- og forsterkningsmargin, og finn $|N(j\omega)|_{\max}$. Hvis vi i stedet godtar en $|N(j\omega)|_{\max} = 6\text{dB}$, hvor mye kan vi da øke forsterkninga K_p ? Les av og tegn i det vedlagte diagram og innlevér som en del av besvarelsen.



- e) (5 %) Referansen $r(t)$ er nå en rampefunksjon med Laplacetransform $y_0(s) = 1/s^2$. Finn det stasjonære avviket $e(t = \infty)$.

Fag nr.: TTK4105
Dato: 30. mai 2015
Kandidat nr.:
Sidenr.:

- f) (2 %) h_r skal realiseres som en diskret regulator. Det oppgis at kryssfrekvensen til $h_r h_u$ ligger fast, $\omega_c = 1.3$. Finn en tastetid T som gir 2° mindre fasemargin. Er 2° akseptabelt?



figur 2.1

Oppgave 3 (9 %)

En konstant befolkning av N individer utsettes for en smittsom sjukdom. Ingen dør av den, men ingen blir friske når de først har fått den. De som er sjuke (antallet kaller vi x), forblir smittsomme. En modell for sjukdomsutvikling i et slikt system er den såkalte *logistiske ligninga*,

$$\dot{x} = c(N - x)x \quad , \text{ hvor } c \text{ er en konstant} \quad (3.1)$$

- a) (2 %) Hvorfor er dette et ulineært system? Er det et autonomt system? Begrunn svarene.
- b) (3%) Anta at x er liten, dvs. svært få personer er smittet. Linearisér systemet for det tilfellet. Hva slags tidsforløp får du for små x ?
- c) (4 %) Hva skjer med $x(t)$ når $t \rightarrow \infty$?
Benytt dette og svaret fra b) til å tegne en grov skisse av tidsforløpet (du skal *ikke* løse (3.1)). Sett begynnelseverdien ved $t = 0$ til en x_0 som forutsettes « N », altså bare noen få sjuke individer.

Oppgave 4 (16%)

Et fartøy med masse m utsettes for et press fra vinden, en forstyrrelse $v[\text{N}]$. Vi betrakter bare bevegelse i én dimensjon. Fartøyet skal holdes fast på posisjonen $y = y_0$ tross vinden. Det brukes et sett med propeller, som gir en motkraft $u[\text{N}]$. Vi forutsetter så lave hastigheter at vi kan se bort fra friksjon i vannet. Vi skal regulere med både tilbakekopling (seriekompensasjon) og foroverkoppling.

- a) (4 %) Du skal tegne et blokkdiagram for reguleringssystemet. I dette inngår blokkene h_f, h_r, h_v, h_u .
- b) (4 %) Det er en viss treghet i pådragsorganet. Det må da inkorporeres i prosessmodellen h_u .
Pådragsorganet modelleres som en 1. ordens prosess med forsterkning K og tidskonstant T .
Hva blir h_u ? (Tips: det er blant annet to integratorer i nevner.) Hva blir h_v ?
- c) (5 %) Finn den ideelle foroverkoppling $h_{fi}(s)$. Hva blir en mer realistisk $h_f(s)$? Hva blir den *statiske* (og enda enklere) foroverkoppling, og hva slags forstyrrelse v kan den motvirke?
- d) (3 %) Seriekompensatoren h_u i tilbakekopplinga kan verken være en proporsjonalregulator eller en PI-regulator. Hvorfor ikke? Hva må til?

Oppgave 5 (21 %)

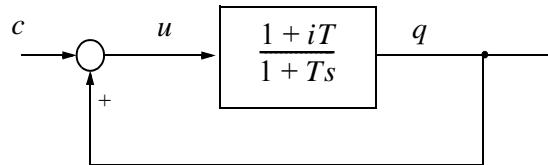
Betrakt et lån x [+] med rentesats i [1/år] (dvs. 5% rente uttrykkes her som 0.05) og tilbakebetalingstid T [år]. Låntaker betaler da en kontinuerlig pengestrøm q [\$/år], *gjeldsbetjeninga*:

$$q(t) = \left(i + \frac{1}{T} \right) x(t) \quad (5.1)$$

$$\text{Lånet avtar gjennom nedbetaling i følge ligninga } \dot{x} = -\frac{1}{T}x \quad (5.2)$$

Vi skal anvende disse enkle sammenhengene til å lage en modell av et finansielt pyramidespill. En skurk låner kontinuerlig en pengestrøm $u(t)$ [\$/år] for å finansiere sitt eget forbruk $c(t)$ [\$/år] pluss gjeldsbetjening på sine allerede eksisterende lån $x(t)$. Vi har $u = c + q$.

- a) (4 %) Vis at da får vi følgende blokkdiagram:



- b) (4 %) Nyquistkurven for dette systemet blir enkel: en sirkel. Tegn den riktig plassert i det komplekse plan. Angi skjæringspunkt med Re-aksen og dreieretning for økende ω . (Tips: Nyquist forutsetter negativ tilbakekopling, så her må blokkdiagrammet omformes noe, ved å bytte fortegn på den åpne sløyfes transferfunksjon.)

- c) (3 %) Er systemet åpent stabilt?

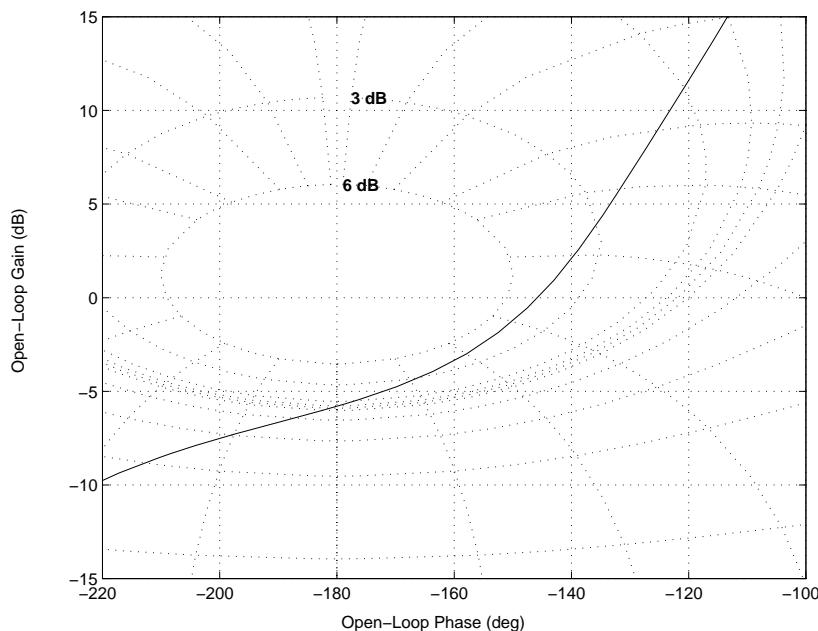
Vis ved hjelp av grafen og Nyquists stabilitetskriterium at det lukkede systemet er ustabil for alle $i > 0$. Hva betyr dreieretninga (for økende ω) i dette tilfellet?

- d) (3 %) Vis at transferfunksjonen

$$\frac{x}{c}(s) = h(s) = \frac{1}{s-i} \quad (5.3)$$

- e) (3.5 %) Anta at skurken har et voksende personlig forbruk $c(t) = e^{\alpha t}$, der $0 < \alpha < i$. Finn $x(t)$ når det oppgis at $x(0) = 0$, altså ingen gjeld ved start.

- f) (3.5 %) Finn den samme $x(t)$ når $\alpha = i$.



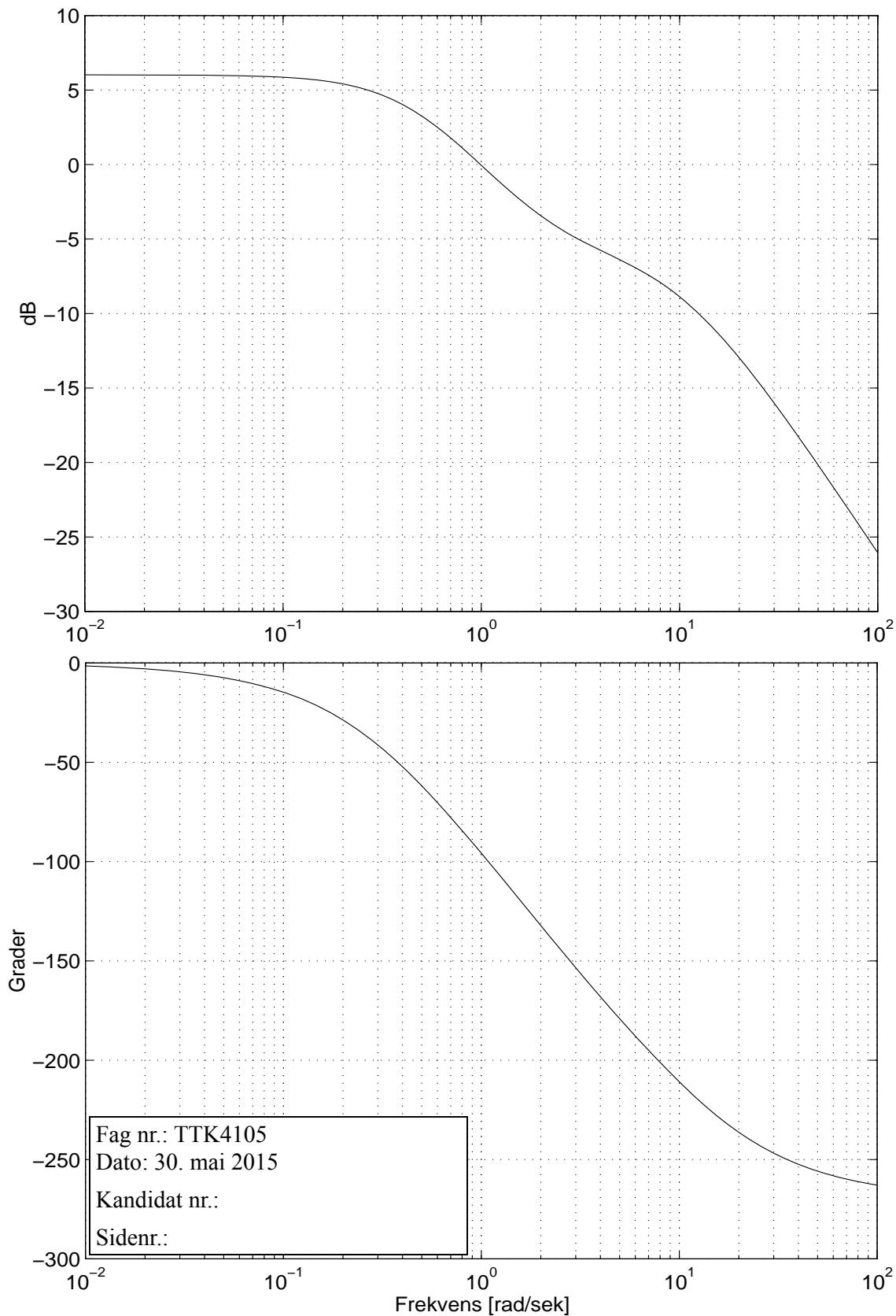
(Ekstra Nicholsdiagram til oppgave 2)

Fag nr.: TTK4105

Dato: 30. mai 2015

Kandidat nr.:

Sidenr.:



(Ekstra Bode-diagram til oppgave 2)

Formelsamling

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sf(s), \text{ og } \lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sf(s) \quad (\text{V.1})$$

$$\mathcal{L} [\dot{f}(t)] = sf(s) - f(t)|_{t=0}, \quad \mathcal{L} [\ddot{f}(t)] = s^2 f(s) - sf(t)|_{t=0} - \dot{f}(t)|_{t=0} \quad (\text{V.2})$$

$$\text{Residuregning: } f(t) = \sum_{a_i} \frac{1}{(m-1)!} \left[\frac{\partial^{m-1}}{\partial s^{m-1}} \{(s-a_i)^m f(s) e^{st}\} \right]_{s=a_i} \quad (\text{V.3})$$

$$\text{Tidsforsinkelse: } \mathcal{L} [f(t-\tau)] = e^{-\tau s} f(s) \quad (\text{V.4})$$

$$|\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}| = 0 \quad (\text{V.5})$$

$$\text{Rettlinja bevegelse: } f = ma, \text{ Rotasjon: } d = J \dot{\omega}; \text{ med masse på vektløs stang har vi } J = ml^2 \quad (\text{V.6})$$

Folding (konvolusjon):

$$y(t) = h(t)*u(t) = \int_0^t h(t-\tau)u(\tau)d\tau, \quad \mathcal{L} [h(t)*u(t)] = h(s)u(s) \quad (\text{V.7})$$

$$\Delta \dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{\mathbf{x}^p, \mathbf{u}^p} \Delta \mathbf{x} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} \Big|_{\mathbf{x}^p, \mathbf{u}^p} \Delta \mathbf{u}$$

Linearisering:

$$\Delta \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \Delta \mathbf{x} + \mathbf{B} \Delta \mathbf{u}, \quad \mathbf{A} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{\mathbf{x}^p, \mathbf{u}^p} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}_{\mathbf{x}^p, \mathbf{u}^p} \quad (\text{V.8})$$

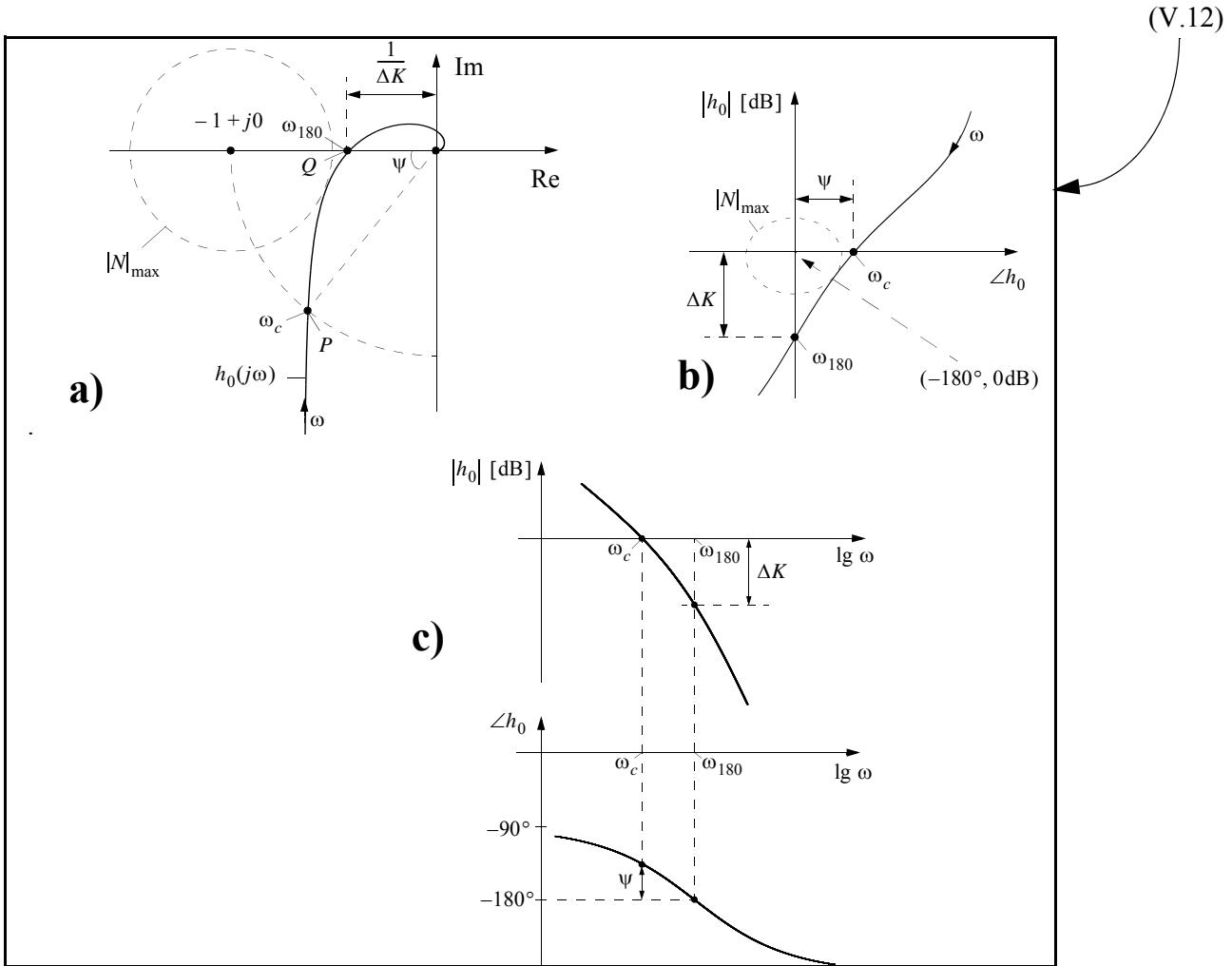
$$x[\text{dB}] = 20 \cdot \log_{10}(x), \quad x = 10^{(x[\text{dB}])/20} \quad (\text{V.9})$$

$$N(s) = \frac{1}{1+h_0(s)}, \quad M(s) = \frac{h_0}{1+h_0(s)}, \quad M(s) + N(s) = 1, \quad \frac{e}{v}(s) = -h_v(s)N(s) \quad (\text{V.10})$$

Nyquists stabilitetskriterium: Gitt en åpen prosess $h_0(s)$ med N_p poler i høyre halvplan. Vektoren $1 + h_0(j\omega)$ får en netto vinkeldreining (dreieretning er definert positiv mot urviseren) lik

$$\Delta \angle(1 + h_0) = -2\pi(N_n - N_p) \quad \text{når } \omega \text{ går fra } -\infty \text{ til } \infty \quad (\text{V.11})$$

N_n er antall poler i h.h.p. for det lukkede (tilbakekoppled) system. $N_n = 0$ kreves for stabilt system.

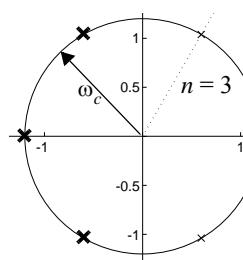


$$\psi = \angle h_0(j\omega_c) - (-180^\circ), \quad \frac{1}{\Delta K} = |h_0(j\omega_{180})|, \quad \Delta K = \frac{1}{|h_0(j\omega_{180})|} \quad (\text{V.13})$$

$$e^{-\tau s} \approx \frac{1 - \tau s / 2}{1 + \tau s / 2} \quad (\text{V.14})$$

Ziegler-Nichols' lukket-sløyfe-regler:

Regulator	K_p	T_i	T_d	
P	$0.5K_{pk}$	∞	0	
PI	$0.45K_{pk}$	$0.85T_k$	0	, $T_k = \frac{2\pi}{\omega_{180}}$
PID	$0.6K_{pk}$	$0.5T_k$	$0.12T_k$	



Butterworth lavpassfilter av orden n: De n polene i $h(s)$ ligger på hjørnene i venstre halvdel av en regulær mangekant med $2n$ sider, der mangekanten er plassert slik at den ligger symmetrisk om Im-aksen, og hvor avstanden fra origo og ut til hvert hjørne (= pol) er filterets knekkfrekvens ω_c . (V.16)

Høypassfilter med knekkfrekvens ω_c : Lag først lavpassfilter med ω_c . Erstatt så alle s i transferfunksjonen med ω_c^2/s . (V.17)

Røtter bare i v.h.p. for polynom $\alpha_2 s^2 + \alpha_1 s + \alpha_0$: hvis og bare hvis alle koeffisienter har samme fortegn.

For 3. ordens polynom $\alpha_3 s^3 + \alpha_2 s^2 + \alpha_1 s + \alpha_0$ kreves i tillegg $\alpha_1 \alpha_2 > \alpha_0 \alpha_3$ (V.18)

Skogestads "SIMC" åpen-sløyfe-regel for PI-innstilling (bruker notasjonen fra notatet om dette):

Sett på et sprang. Anta at prosessen $\approx h_u = \frac{K e^{-\theta s}}{1 + T_1 s}$. Mål (dvs. anslå) T_1 , K og θ ut fra responsen.

Velg så $K_p = \frac{T_1}{K(\theta + \tau_c)}$ og $T_i = \min(T_1, 4(\theta + \tau_c))$, hvor τ_c er (V.19)

ønsket tidskonstant i responsen til det lukkede systemet. τ_c bør velges som $\tau_c > 0.3\theta$, f. eks. $\tau_c = \theta$.

$$\text{PI-regulator: } h_r = K_p \frac{1 + T_i s}{T_i s} \quad (\text{V.20})$$

$$\text{begrenset PD-regulator: } h_r = K_p \frac{1 + T_d s}{1 + \alpha T_d s} \quad (\text{V.21})$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \ddots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \ddots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \cdots & -\alpha_{n-2} & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\text{V.22})$$

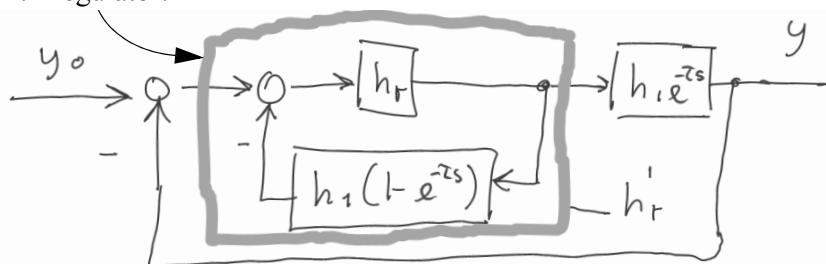
$$\mathbf{c}^T = [\rho_0 \ \rho_1 \ \rho_2 \ \cdots \ \rho_{n-1}]$$

$$\text{gir } \frac{y(s)}{u} = h(s) = \frac{\rho_{n-1} s^{n-1} + \dots + \rho_1 s + \rho_0}{s^n + \alpha_{n-1} s^{n-1} + \dots + \alpha_1 s + \alpha_0} \quad (\text{V.23})$$

Diskret regulator eller filter: Alle s erstattes med $\frac{z-1}{T z+1}$, der z er en tidsforskyvingsoperator. (V.24)

Diskret regulator brukt på kontinuerlig prosess medfører tilnærma en ekstra tidsforsinkelse = $T/2$ i sløyfetransferfunksjonen. (V.25)

Otto Smith-regulator: (V.26)



Sammenhenger mellom tilstandsrombeskrivelse og Laplace, og mellom 1. ordens og høyere ordens lineære systemer

		1. orden (eks.: RC-krets)	Høyere orden
1.	Differensiallikning	$\dot{x} = ax + bu \quad (\dot{x} = -\frac{1}{T}x + \frac{1}{T}u)$	$\dot{x} = Ax + Bu$
2.	Laplace	$x(s) = \frac{1}{s-a}x(t=0) + \frac{b}{s-a}u(s)$	$\mathbf{x}(s) = (sI - A)^{-1}\mathbf{x}(t=0) + (sI - A)^{-1}Bu(s)$
3.	Løsning	$x(t) = e^{at}x(0) + \int_0^t e^{a(t-\tau)}bu(\tau)d\tau$	$\mathbf{x}(t) = e^{At}\mathbf{x}(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$
4.	Dekopling	(Triviert:) $A = a = \lambda$ = skalar	$A = M\Lambda M^{-1}, \quad e^{At} = Me^{\Lambda t}M^{-1}, \quad \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$
5.	Rekkentvikling	$e^{at} = 1 + at + \frac{a^2t^2}{2!} + \frac{a^3t^3}{3!} + \dots$	$e^{At} = \Phi(t) = I + At + A\frac{2t^2}{2!} + A\frac{3t^3}{3!} + \dots$
6.	$(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} (s)$	$e^{at} \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s-a} \quad \left(\frac{1}{T}e^{-t/T} \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{1+Ts} \right)$	$e^{At} = \Phi(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} (sI - A)^{-1}$
7.	Fra $u(s)$ til $y(s)$	$y = cx \quad y(s) = c\frac{b}{s-a}u(s) \quad h(s) = \frac{cb}{s-a}$	$\mathbf{y} = C\mathbf{x} \quad y(s) = C(sI - A)^{-1}Bu(s) \quad H(s) = C(sI - A)^{-1}B$
8.	Impulsrespons	$h(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} h(s) \quad h(t) = cb e^{at}$	³⁾ $h(t) = \mathbf{c}^T e^{At} \mathbf{b}$ ⁴⁾ $\xleftrightarrow{\mathcal{L}} h(s) = \mathbf{c}^T (sI - A)^{-1} \mathbf{b}$

1) $\int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau = e^{At}B*u(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} (sI - A)^{-1}B \cdot u(s)$

2) NB: $e^{At} \neq \{e^{a_{ij}t}\}$, bortsett fra når $A = \Lambda$ er diagonal.

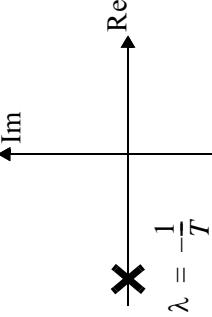
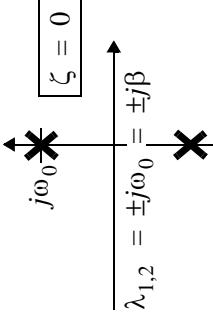
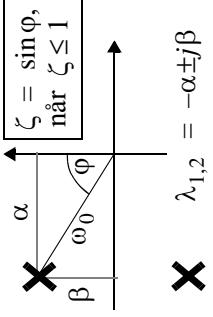
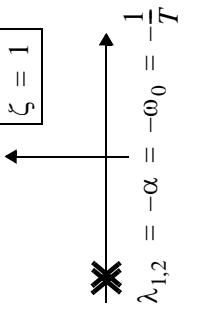
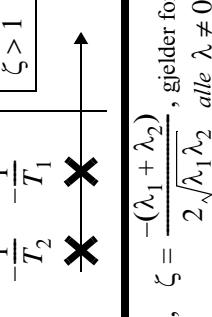
3) Antar nå at u og y er skalare.

4) Hvis y og u er skalare og $\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$ så har vi fra 3. linje at $y(t) = \int_0^t h(t-\tau)u(\tau)d\tau = h(t) * u(t)$

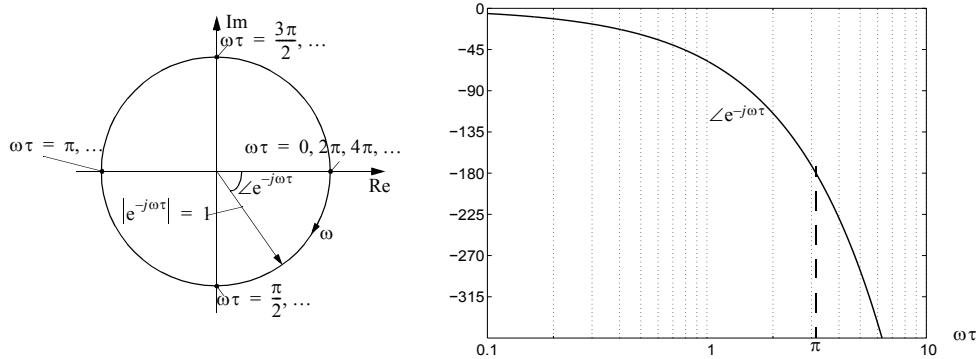
Tilstandsrom: $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + Bu$.

Laplace: $H(s) = C(sI - A)^{-1}B = C^{\text{adj}(sI - A)} \frac{1}{|sI - A|} B \Rightarrow$ Polene gitt av nevneren: $|sI - A| = 0$.
 \Rightarrow poler = egenverdier

Eigenverdier følger av: $|\lambda I - A| = 0$

Ordens	Transferfunksjon $h(s)$	Poler	Impuls- og sprangresponser
1. orden	$h(s) = \frac{K}{1+Ts} = \frac{K}{s+\frac{1}{T}} = \frac{-K\lambda}{s-\lambda}$ $\lambda = -\frac{1}{T}$		impulserpons: $h(t) = L^{-1}[h(s)] = \frac{K}{T} e^{-t/T}$ sprangrespons: $k(t) = L^{-1}\left[\frac{1}{s}h(s)\right] = \int_0^t h(\tau)d\tau = K(1 - e^{-t/T})$
2. orden, $\zeta = 0$	$\frac{K}{\left(\frac{s}{\omega_0}\right)^2 + 1} = \frac{K\omega_0^2}{s^2 + \omega_0^2} = \frac{K\lambda_1\lambda_2}{(s - \lambda_1)(s - \lambda_2)}$		$h(t) = K\omega_0 \sin \omega_0 t$ $k(t) = K(1 - \cos \omega_0 t)$
2. orden, $\zeta < 1$	$\frac{K}{\left(\frac{s}{\omega_0}\right)^2 + 2\zeta\left(\frac{s}{\omega_0}\right) + 1} = \frac{K\omega_0^2}{s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2} = \frac{K\lambda_1\lambda_2}{(s - \lambda_1)(s - \lambda_2)}$ $= \frac{K(\alpha^2 + \beta^2)}{s^2 + 2\alpha s + (\alpha^2 + \beta^2)}, \quad \omega_0 = \frac{\beta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$		$h(t) = K \left(1 - \frac{\omega_0}{\beta} e^{-\alpha t} \sin(\beta t - \phi) \right)$ $k(t) = K \left(1 - \left[1 + \frac{t}{T} \right] e^{-\alpha t/T} \right)$
2. orden, $\zeta = 1$	$\frac{K}{\left(\frac{s}{\omega_0}\right)^2 + 2\left(\frac{s}{\omega_0}\right) + 1} = \frac{K\omega_0^2}{(s + \omega_0)^2} = \frac{K\lambda^2}{(s - \lambda)^2} = \frac{\frac{K}{T^2}}{\left(s + \frac{1}{T}\right)^2}$		$h(t) = \frac{K}{T^2} t e^{-t/T}$ $k(t) = K \left(1 - \left[1 + \frac{t}{T} \right] e^{-t/T} \right)$
2. orden, $\zeta > 1$	$\frac{K}{(1+T_1s)(1+T_2s)} = \frac{\frac{K}{T_1 T_2}}{\left(s + \frac{1}{T_1}\right)\left(s + \frac{1}{T_2}\right)} = \frac{K\lambda_1\lambda_2}{(s - \lambda_1)(s - \lambda_2)}$ $\omega_0 = \sqrt{\lambda_1\lambda_2}, \quad \zeta = \frac{-(\lambda_1 + \lambda_2)}{2\sqrt{\lambda_1\lambda_2}}, \text{ gjelder for alle } \lambda \neq 0$		$h(t) = \frac{K}{T_1 - T_2} \left(e^{-\frac{t}{T_1}} - e^{-\frac{t}{T_2}} \right)$ $k(t) = K \left(1 + \frac{T_2}{T_1 - T_2} e^{-\frac{t}{T_2}} - \frac{T_1}{T_1 - T_2} e^{-\frac{t}{T_1}} \right)$

FIGUR 6.17
Nyquist-diagram
og faseforløp i
Bode-diagram
for $e^{-j\omega\tau}$



6.4.1 Prosedyre for tegning av asymptotisk AFF-diagram

Her følger en generell prosedyre som alltid kan brukes:

1. Transferfunksjonen bringes over på formen (6.18). Dersom vi har transferfunksjonen

$$h(s) = \frac{K(\dots)}{(\dots)(a+s)}$$

må den omformes til

$$h(s) = \frac{K'(\dots)}{(\dots)(1+T's)}$$

der $K' = K/a$ og $T' = 1/a$. Dette må gjentas like mange ganger som vi har 1.ordens ledd i $h(s)$. Dersom vi har resonansledd

$$h(s) = \frac{K(\dots)}{(\dots)(c+bs+as^2)}$$

må vi først omforme dette til

$$h(s) = \frac{K'(\dots)}{(\dots)\left(1+2\zeta\frac{s}{\omega_0}+\left(\frac{s}{\omega_0}\right)^2\right)}$$

der $K' = K/c$ og $\omega_0 = \sqrt{c/a}$. Poenget er altså at alle ledd i nevner (og i teller!) må ha konstantledd lik 1, det vil si at hvert ledd er lik 1 for $s = j0$. Forsterkning i alle ledd "samles" da i en felles K' , fra nå av bare kalt K .

2. Begynn alltid til venstre i diagrammet, ved de laveste frekvensene ($\omega \ll 1$). (Vi symboliserer "liten ω " med å skrive $\omega \ll 1$.) Ved slike frekvenser kan vi se bort fra virkningen av nullpunkts-, tidskonstant- og resonansledd. Videre prosedyre blir:

Tilfelle a): Hvis vi har q integrasjoner i $h(s)$, $q > 0$, har vi

$$h(j\omega)_{\omega \ll 1} \approx \frac{K}{(j\omega)^q}, \quad |h(j\omega)|_{\omega \ll 1} \approx \frac{K}{\omega^q}, \quad \angle h(j\omega)_{\omega \ll 1} \approx (-q) \cdot 90^\circ$$

q kan selvsagt være lik 0, da er vi over i Tilfelle b) nedenfor.

Amplitudeforløp

Asymptoten vil ved lave frekvenser ha helning $-q$ og skjære 0-dB-linen i $\omega = K^{\frac{1}{q}}$. Dermed kan vi fastlegge venstre del av $|h(j\omega)|_{as}$ og 0-dB-linen (subskript as betyr "asymptotisk verdi av". Se førvrig figur 6.18).

Faseforløp

Dette er enklere. Asymptoten er horisontal og starter til venstre i $(-q) \cdot 90^\circ$.

Tilfelle b): Ingen rene integrasjoner i $h(s)$

Amplitudeforløp: Da har vi $|h(j\omega)|_{\omega \ll 1} = K$, dvs. horisontal asymptote ved lave frekvenser, i K [dB] over 0-dB-linja.

Faseforløpet starter nå til venstre med en horisontal asymptote i 0° .

3. Videre amplitudeforløp

Asymptotene skal utgjøre en sammenhengende serie av linjestykker. Ta utgangspunkt i den venstre asymptoten som allerede er tegnet, og finn den minste **knekkfrekvensen**.

Knekkfrekvensene er der den asymptotiske kurven for et ledd i en transferfunksjon knekker. De er som vist ovenfor den inverse av tidskonstanten i nullpunkts- og tidskonstantledd, og frekvensen ω_0 i et resonansledd.

Finn helningen p på asymptoten til leddet du betrakter. $p = 1$ for nullpunktsledd, -1 for tidskonstantledd og -2 for resonansledd. Tegn et nytt linjestykke fra den minste knekkfrekvensen fram til den *etterfølgende* knekkfrekvensen med en helning som er lik forrige asymptotes helning $+ p$.

Sett "minste knekkfrekvens" = etterfølgende knekkfrekvens og gjenta prosedyren for neste ledd, osv.

Videre faseforløp

Asymptotene er ikke sammenhengende, men er horisontale, og springer opp eller ned ved knekkfrekvensen, med $p \cdot 90^\circ$ målt fra forrige asymptote.

For faseforløpet gjelder unntaksregelen at et nullpunktsledd av typen $1 - T_s s$ gir 90° knekk ned, ikke opp.

EKSEMPEL 6.6 Asymptotisk Bodediagram for en transferfunksjon med flere ledd

Vi ønsker å tegne et asymptotisk amplitudediagram og asymptotisk fasediagram for frekvensresponsen til transferfunksjonen

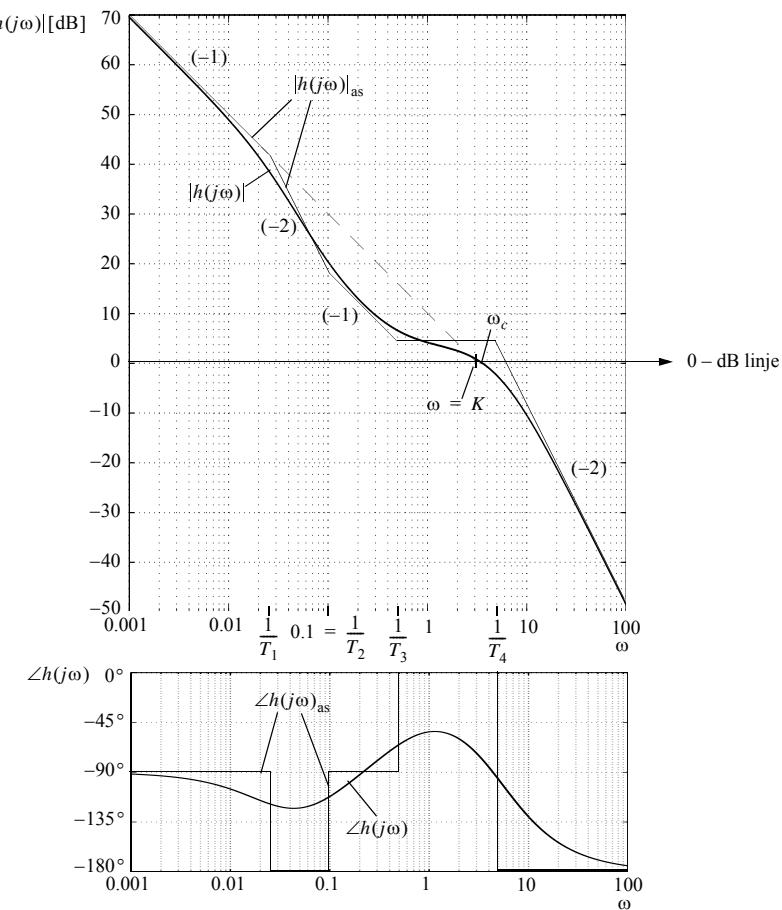
$$h(s) = \frac{K(1 + T_2 s)(1 + T_3 s)}{s(1 + T_1 s)(1 + T_4 s)^2} \quad (6.29)$$

der $K = 3$, $T_1 = 40$, $T_2 = 10$, $T_3 = 2$, $T_4 = 0.2$

Vi finner

$$\begin{aligned} \lg|h(j\omega)| &= \lg K + \lg|1 + j\omega T_2| + \lg|1 + j\omega T_3| \\ &\quad - \lg\omega - \lg|1 + j\omega T_1| - 2\lg|1 + j\omega T_4| \end{aligned} \quad (6.30)$$

FIGUR 6.18
Bodediagram for $h(s)$, eksakt diagram, og asymptotisk diagram



Dette er et uoffisielt LF og det vil kunne bli revidert ved en senere anledning.

Oppgave 1

- a) Vi velger $x_1 = \omega$ og $x_2 = i_a$, ved hjelp av blokkdiagrammet får vi: $\dot{x}_2 = \frac{1}{J}(K_T x_1 - B x_2)$ og $\dot{x}_1 = \frac{1}{L_a}(u_a - R_a x_1 - K_e x_2)$. Dette gir følgende tilstandsrommodell:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -\frac{B}{J} & \frac{K_T}{J} \\ -\frac{K_e}{L_a} & -\frac{R_a}{L_a} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L_a} \end{bmatrix} u \quad (1)$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x \quad (2)$$

- b) Vi deler opp oppgaven ved å sette opp uttrykket fra i_a og T_L til ω først:

$$\omega = \frac{1}{J_s}(T_L + K_T i_a - B \omega) \quad (3)$$

$$\omega(1 + \frac{B}{J_s}) = \frac{1}{J_s}(T_L + K_T i_a) \quad (4)$$

$$\omega = \frac{1}{J_s + B}(T_L + K_T i_a) \quad (5)$$

Vi finner nå uttrykket fra ω til i_a (husk å sette den andre inngangen u_a til 0):

$$i_a = \frac{1}{L_a s}(-R_a i_a - K_e \omega) \quad (6)$$

$$i_a(1 + \frac{R_a}{L_a s}) = -\frac{K_e}{L_a s} \omega \quad (7)$$

$$i_a = -\frac{K_e}{L_a s + R_a} \omega \quad (8)$$

Vi kan nå sette inn uttrykket for ω :

$$i_a = -\frac{K_e}{(L_a s + R_a)} \frac{1}{(J_s + B)} (T_L + K_T i_a) \quad (9)$$

$$i_a(1 + \frac{K_e K_T}{J L_a s^2 + (J R_a + B L_a)s + B R_a}) = \frac{-K_e}{J L_a s^2 + (J R_a + B L_a)s + B R_a} T_L \quad (10)$$

$$i_a = \frac{-K_e}{J L_a s^2 + (J R_a + B L_a)s + K_T K_e + B R_a} T_L \quad (11)$$

Denne oppgaven kan også løses ved manipulring av blokk-diagrammet.

- c) Hvis vi ser på den elektriske delen av systemet (setter $\omega = 0$) får vi:

$$i_a = \frac{1}{L_a s + R_a} u_a = \frac{\frac{1}{R_a}}{\frac{L_a}{R_a} s + 1} u_a = \frac{K_a}{T_a s + 1} \quad (12)$$

ved å la tidkonstanten gå mot null får vi $T_a = \frac{L_a}{R_a} \rightarrow 0$, hvilket vil si $L_a \ll R_a \Rightarrow \frac{1}{L_a s + R_a} \approx \frac{1}{R_a}$. Den nye forenkede utgaven av ligning (1.1) blir da:

$$i_a = \frac{-K_e}{JR_a s + K_T K_e + BR_a} T_L \quad (13)$$

- d) Vi skriver om ligning (1.1) til:

$$\frac{i_a}{T_L}(s) = \frac{\frac{-K_e}{JL_a}}{s^2 + \frac{(JR_a + BL_a)}{JL_a} s + \frac{(K_T K_e + BR_a)}{JL_a}} \quad (14)$$

Hvis vi sammenlikner denne likningen for et resonansledd i formelsamlingen ser vi at nevneren er $s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2$. Den udempede resonansfrekvensen blir dermed:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{K_T K_e + BR_a}{JL_a}} \quad (15)$$

og den relative dempningskonstanten blir:

$$2\zeta\omega_0 = \frac{(JR_a + BL_a)}{JL_a} \quad (16)$$

$$\zeta = \frac{1}{2\omega_0} \frac{JR_a + BL_a}{JL_a} \quad (17)$$

$$\zeta = \frac{1}{2} \frac{JR_a + BL_a}{\sqrt{JL_a(K_T K_e + BR_a)}} \quad (18)$$

- e) En tapsfri motor vil ha ingen viskøs demping ($B=0$) og ingen ohmske tap ($R=0$) $\Leftrightarrow \zeta = 0$. Motoren vil være på stabilitetsgrensa, så den vil oscillere med konstant utslag. Vi kan regne ut responsen ved å se på formelen for sprangrespons for et system av 2. orden med $\zeta = 0$:

$$i_a = K(1 - \cos(\omega_0 t)) \quad (19)$$

hvor $K = \frac{1}{K_T}$ og $\omega_0 = \sqrt{\frac{K_T K_e}{JL_a}}$. Denne siste utregningen i ligning (19) er ikke et krav for å få alle poengene på denne oppgaven.

Oppgave 2

- a) Vi har et nullpunkt i høyre halvplan, dvs. at vi har et *ikke-minimum-fase(IMF)-system*. Den økte negative fasen gjør det vanskelig å oppnå rask og nøyaktig regulering samtidig som kravene til stabilitetsmarginer er tilfredsstilt.

Det som kjennetegner sprangresponsen for dette systemet er at vi få et utslag i motsatt retning før det svinger inn mot referansen.

Prosesssen er åpent stabil ettersom begge polene er i venstre halvplan.

- b) Vi har transferfunksjonen:

$$h_u(s) = 2 \frac{1 - 0.5s}{(1 + 2s)(1 + 0.1s)} = K \frac{1 - T_z s}{(1 + T_1 s)(1 + T_2 s)} \quad (20)$$

siden vi ikke har noen rene integrasjoner får vi:

$$|h_u(j\omega)|_{\omega < < 1} = K = 2 = 6\text{dB} \quad (21)$$

$$\omega_1 = \frac{1}{T_1} = 0.5(\text{negativ pol, } -90^\circ \text{ og } -1) \quad (22)$$

$$\omega_z = \frac{1}{T_z} = 2(\text{positivt nullpunkt, } -90^\circ \text{ og } +1) \quad (23)$$

$$\omega_2 = \frac{1}{T_2} = 10(\text{negativ pol, } -90^\circ \text{ og } -1) \quad (24)$$

(25)

Se figur 1 for asymptotene.

- c) Vi må bestemme kritisk forsterkning og ω_{180} for å bruke Ziegler-Nichols' metode. I figur 1 er både kritisk forsterkning $\Delta K_{pk} \approx 6,5\text{dB} = 2,11$ og $\omega_{180} \approx 5$ rad merket. Fra tabellen for Ziegler-Nichols' får vi da:

$$K_p = 0,45 \cdot K_{pk} = 0,95 \quad (26)$$

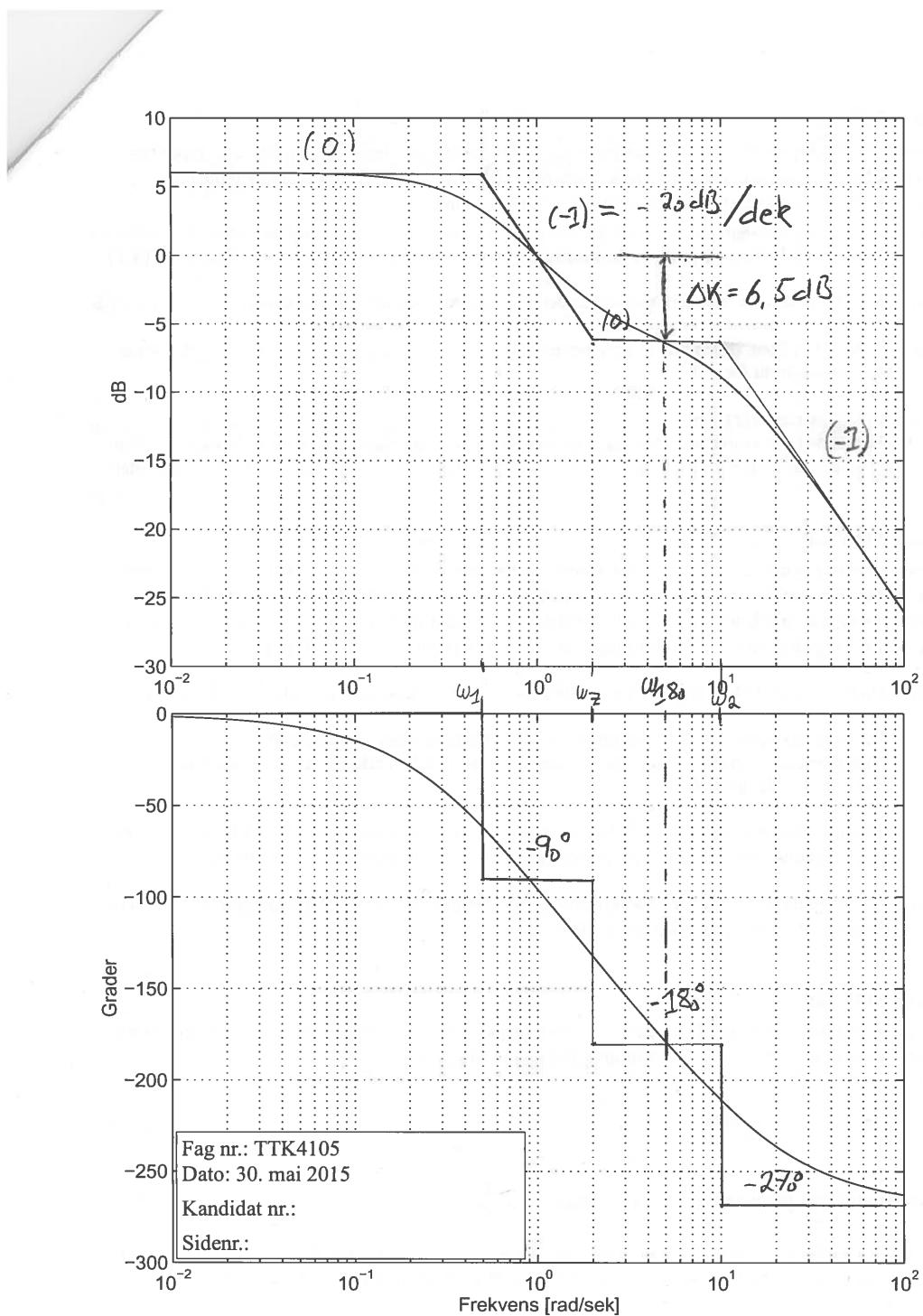
$$T_i = 0,85 \cdot T_k = 0,85 \cdot \frac{2\pi}{\omega_{180}} = 1,07 \quad (27)$$

- d) Fra figur 2:

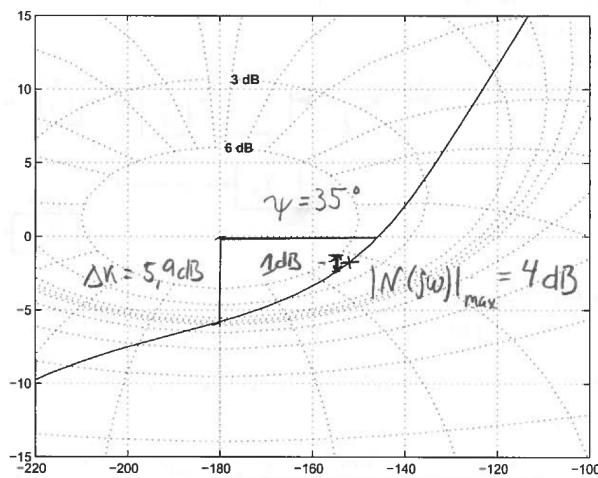
$$\psi = 35^\circ \quad (28)$$

$$\Delta K = 5,9\text{dB} \quad (29)$$

Vi legger merket til at å øke forsterkningen tilsvarer å parallelforskyve Nichols diagrammet i amplitude-retning. I figur 2 ser vi at vi kan øke forsterkningen med 1 dB. Vi kan da



figur 2.1



Figur 2: Oppgave 2d Nichols

regne ut $K_{p,ny}$ som følger (dette kreves ikke for maks poeng): Først regner vi ut forsterkingen i prosess med opprinnelig regulator $h_0(s=0) = h_r \cdot h_u(s=0) = \frac{K_p K}{T_i} = 4,99 \text{ dB}$. Vi lurer på hvor mye vi kan øke K_p med for å få en forsterkning på 1 dB mer, vi kaller økningen før K':

$$20 \cdot \log(K' \frac{K_p K}{T_i}) = (4,99 + 1) \text{ dB} \quad (30)$$

$$K' = \frac{T_i \cdot 10^{\frac{5,99}{20}}}{K_p K} = 1.12 \quad (31)$$

$$K_{p,ny} = K' \cdot K_p = 1,07 \quad (32)$$

Kommentar: I denne oppgaven er det en feil i oppgavesettet. Høydekurvene i Nichols-diagrammet viser følgeforholdet $M(j\omega)$ og ikke avviksforholdet $N(j\omega)$ (denne delen av diagrammet er opp ned). Studenter som påpekte dette på eksamen ble belønnet med et halvt poeng ekstra. På tross av denne feilen er oppgaven like meningsfylt.

- e) Først setter vi opp transferfunksjonen fra $r(t)$ til $e(t)$:

$$e = r - h_0 e \quad (33)$$

$$e = \frac{1}{1 + h_0} r = \frac{1}{1 + \frac{t_0}{n_0}} r = \frac{n_0}{n_0 + t_0} r \quad (34)$$

Innsatt for $h_0 = h_r h_u$:

$$e(s) = \frac{T_i s(1+2s)(1+0.1s)}{T_i s(1+2s)(1+0.1s) + 2K_p(1-0.5s)(1+T_i s)} r(s) \quad (35)$$

Vi kan nå bruke sluttverdi teoremet for å regne ut det stasjonære avviket for $e(t)$ når $t \rightarrow \infty$:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s e(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{T_i s(1+2s)(1+0.1s)}{T_i s(1+2s)(1+0.1s) + 2K_p(1-0.5s)(1+T_i s)} \frac{1}{s^2} = \frac{T_i}{2K_p}$$

- f) En diskret regulator med tastetid T tilsvarer å legge til en ekstra tidsforsinkle på $T/2$. Tastetiden skal gi kun 2° mindre fasemargin:

$$\omega_c \frac{T}{2} < 2 \cdot \frac{\pi}{180} \quad (36)$$

$$T < 2 \cdot 2 \frac{\pi}{180} \frac{1}{\omega_c} = 0,05 \quad (37)$$

Dette er akseptabelt.

Oppgave 3

- a) Dette systemet er ulinær pga. det kvadratiske leddet $-cx^2$. Systemet er også autonomt fordi det ikke har noen eksterne pådrag.
- b) Vi lineariserer systemet, $\dot{x} = f(x)$, rundt punktet $x^* = 0$:

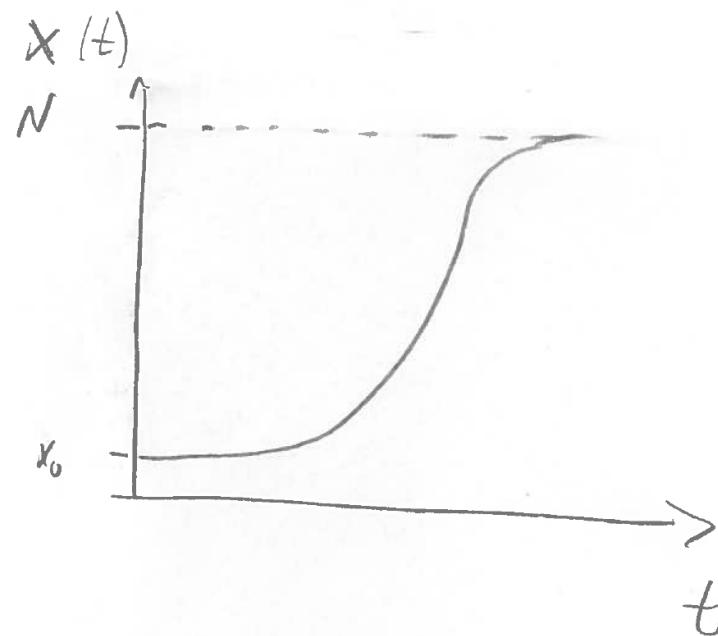
$$\dot{x} = \frac{df}{dx}|_{x=x^*} x = [cN - 2cx|_{x=x^*}]x = cNx \quad (38)$$

Dette gir tidforløpet $x(t) = e^{cNt}$ for små x .

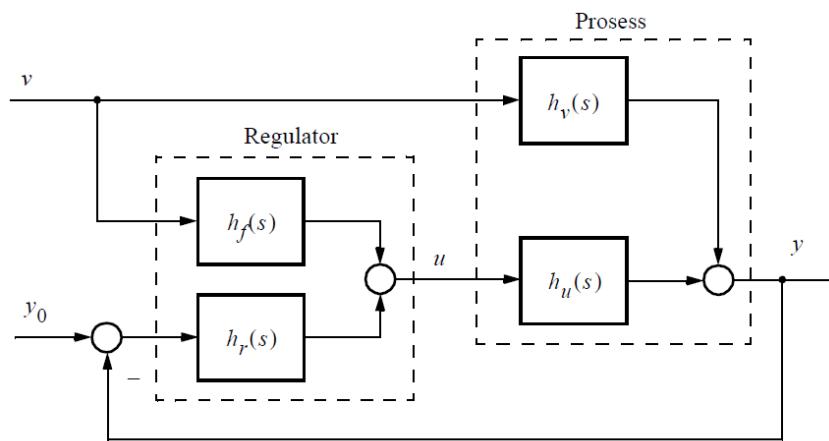
- c) Vi regner ut likevektspunkter for systemet:

$$\dot{x} = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \quad x_2 = N \quad (39)$$

Vi ser at i starten vil systemet ha tidforløpet vi fant i under forrige punkt. Etter en stund vil det ulinære leddet bli dominerende og systemet vil svinge seg inn mot verdien $x(t) = N$, vist i figur 3.



Figur 3: Oppgave 3c Skisse av foreløp for smittet befolkning



Figur 4: Oppgave 4a blokkdiagram for fartøy

Oppgave 4

- a) Se figur 4
- b) Vi har Newtons 2. lov $F = ma$. I denne prosessen har vi posisjonsmåling y dette gir følgende modell:

$$h_u = \frac{K}{Ts + 1} \frac{1}{ms^2} \quad (40)$$

$$h_v = \frac{1}{ms^2} \quad (41)$$

- c) Den ideelle forevkoppling fjerner forstyrrelsen:

$$h_{fi}(s) = -\frac{h_v}{h_u} = -\frac{Ts + 1}{K} \quad (42)$$

En mer realistisk foroverkoppling vil være:

$$h_f(s) = -\frac{Ts + 1}{K(T\alpha s + 1)} \quad (43)$$

En statisk foroverkoppling tilsvarer når frekvensen går mot 0 ($s \rightarrow 0$):

$$h_{fs}(s) = -\frac{1}{K} \quad (44)$$

Denne foroverkopplingen kan motvirke konstante forstyrrelser.

- d) Vi har to integratorer i prosessen ($\frac{1}{s^2}$), dette gjør at fasen vil starte under -180 grader. Dersom vi inkluderer en integrator i regulatoren også vil fasen starte på -270 grader. Vi trenger en regulator med derivativirkning for å få hevet fasen opp fra -180 grader.

Oppgave 5

- a) Når skurken låner ut penger med pengestrøm $u(t)$ får vi lånet stige i tillegg til å avta:

$$\dot{x} = -\frac{1}{T}x + u(t) \quad (45)$$

Dersom vi kombinerer denne likningen med (5.1) kan vi finne en transferfunksjon fra $u(t)$ til $q(t)$:

$$x\left(s + \frac{1}{T}\right) = u \quad (46)$$

$$x = \frac{T}{Ts + 1}u \quad (47)$$

Dersom vi setter inn dette uttrykket for x i likningen for q får vi transerfunksjonen:

$$q = \left(i + \frac{1}{T}\right) \frac{T}{Ts+1} u = \frac{1+Ti}{1+Ts} u = -h_0 u \quad (48)$$

Vi vet at pengestrømmen består av forbruk og gjeldsbetjening ($u = c + q$), det gir blokkdiagrammet i oppgaven.

b) Vi regner ut $h(j\omega)$:

$$h(j\omega) = -\frac{1+Ti}{1+Tj\omega} \cdot \frac{1-Tj\omega}{1-Tj\omega} = \frac{1+Ti}{1+T^2\omega^2} (-1+T\omega j) \quad (49)$$

Legg merke til at vi får et negativt fortegn foran transferfunksjonen fra $u(t)$ til $q(t)$. Dette er fordi h_0 i et nyquist diagram antar en negativ tilbakekobling. Ved hjelp av dette uttrykket kan vi regne ut amplituden til $h(j\omega)$ og vinkelen. Grunnen til at vi må legge til π på vinkelen er at $Re(h(j\omega)) < 0$:

$$|h(j\omega)| = \frac{1+Ti}{1+T^2\omega^2} \sqrt{1+T^2\omega^2} = \frac{1+Ti}{\sqrt{1+T^2\omega^2}} \quad (50)$$

$$\angle h(j\omega) = \arctan(T\omega) + \pi \quad (51)$$

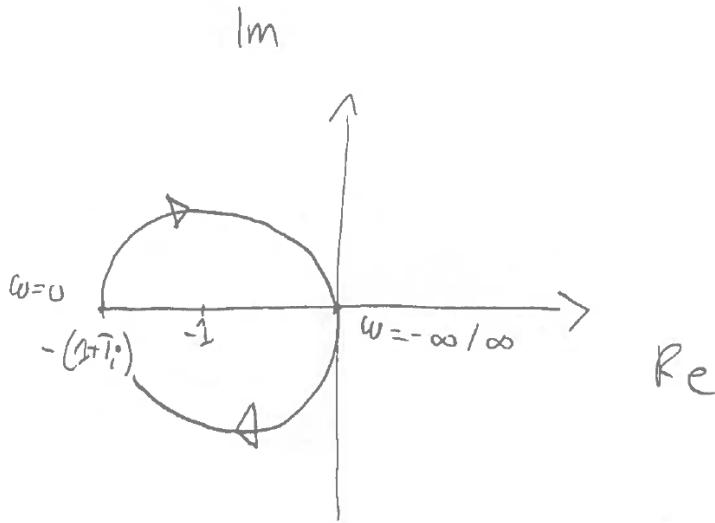
Av disse likningene er det lett å se at ved $\omega = 0$ så starter vi med amplitude ($Ti+1$) i rettning π . Når $\omega \rightarrow \infty$ går amplituden mot 0. Vinkelen øker fra π til 2π . Vi får dermed nyquist kurven vi ser i figure 5

- c) Vektoren $(1+h_0)$ har en negativ dreieretning rundt punktet $(-1+0j)$, $\Delta\angle(1+h_0) = -2\pi$. Transferfunksjonen h_0 har ingen poler i høyre halvplan (så lenge $T>0$), $N_p = 0$. Vi kan ved hjelp av formel (V.11) regne ut antall poler i høyre halvplan for det lukkede systemet: $N_n = N_p - \frac{1}{2\pi}\Delta\angle(1+h_0) = 1$. Vi har dermed en pol i høyre halvplan, hvilket vil si at systemet er ustabilt. Dersom $i = 0$ vil vektoren $(1+h_0)$ få en negativ omdreining rundt punktet $(-1+0j)$ og systemet vil være (marginalt) stabilt.
- d) Fra oppgave a) har vi $x = \frac{T}{Ts+1}u$ og $u = c+q = c+(i+\frac{1}{T})x$. Setter vi disse to likningene sammen får vi:

$$x = \frac{T}{Ts+1} \left(c + \left(i + \frac{1}{T}\right)x \right) \quad (52)$$

$$x(Ts+1 - Ti - 1) = Tc \quad (53)$$

$$x = \frac{T}{Ts - Ti} c = \frac{1}{s - i} c \quad (54)$$



Figur 5: Oppgave 5b Nicholsdiagram for pyramidespill

- e) Denne oppgaven kan både løses på flere måter blant annet konvolusjon og residueregning:
Alternativ 1 konvolusjon: Fra formelsamlingen kan vi finne at $h(t) = e^{it}$, dette gir:

$$x(t) = h(t) * c(t) = \int_0^t e^{i\tau} e^{\alpha(t-\tau)} d\tau = e^{\alpha t} \int_0^t e^{(i-\alpha)\tau} d\tau \quad (55)$$

$$= e^{\alpha t} \frac{e^{(i-\alpha)t} - 1}{i - \alpha} = \frac{e^{it} - e^{\alpha t}}{i - \alpha} \quad (56)$$

Alternativ 2 residuregning: Vi har $c(s) = \frac{1}{s-\alpha}$. Dermed får vi $x(s) = \frac{1}{(s-i)(s-\alpha)}$, som vi kan bruke til å regne ut $x(t)$ ved hjelp av residuregning:

$$x(t) = (s - i) \frac{1}{(s - i)(s - \alpha)} e^{st} \Big|_{s=i} + (s - \alpha) \frac{1}{(s - i)(s - \alpha)} e^{st} \Big|_{s=\alpha} \quad (57)$$

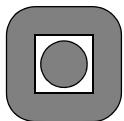
$$= \frac{e^{it}}{i - \alpha} + \frac{e^{\alpha t}}{\alpha - i} = \frac{e^{it} - e^{\alpha t}}{i - \alpha} \quad (58)$$

- f) Denne oppgaven kan vi også løse på flere måter. Vi kan gjenta utregningene fra forrige

oppgave med $\alpha = i$ eller vi kan bruke L'Hôpital:

$$x(t) = \lim_{\alpha \rightarrow i} x(\alpha) = \lim_{\alpha \rightarrow i} \frac{e^{it} - e^{\alpha t}}{i - \alpha} \text{ L'Hôpital} \rightarrow \quad (59)$$

$$= \lim_{\alpha \rightarrow i} \frac{-te^{\alpha t}}{-1} = te^{it} \quad (60)$$



Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet (NTNU)

Faglig kontakt under eksamen: Trond Andresen, mobil **9189 7045**
Han går to veiledningsrunder, ca. kl. 0940 - 1010 og ca. kl. 1115 - 1150.

Eksamens i TTK4105 reguleringsteknikk

mandag 23. mai 2016

Tid: 0900 - 1300

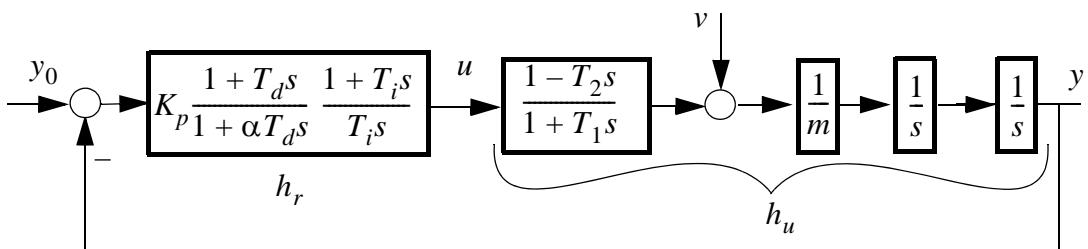
Sensur vil foreligge innen tre uker. Den blir også lagt ut på its learning når den er klar.

Prosentallene angir den relative vekt oppgavene tillegges ved bedømmelsen. Denne besvarelsen teller 100% på karakteren.

Flere spørsmål kan besvares meget enkelt og raskt ved å bruke formelsamlinga bakerst i oppgavesettet. Se kjapt gjennom den før du begynner. Sjekk alltid den før du gir opp! Men du må forklare hvordan du bruker noe, når du henter det fra formelsamlinga. Noen spørsmål skal besvares ved å lese av verdier på grafer i oppgavesettet – i slike tilfeller godtas en viss "måleunøyaktighet". Tips: bruk blyant!

Oppg 1 (59 %)

Gitt blokk-diagrammet for et regulerings-system i figur 1.1:



figur 1.1

(Dette er en stor oppgave. Men den er laget slik at du kan svare fullt ut på seinere spørsmål sjøl om du ikke greier ett eller flere av de tidligere.)

- a) (5 %) Hva slags regulator er h_r ? Hva kaller vi de to delene av den? Hvilken hensikt har henholdsvis den venstre delen, og den høyre delen, av h_r ?

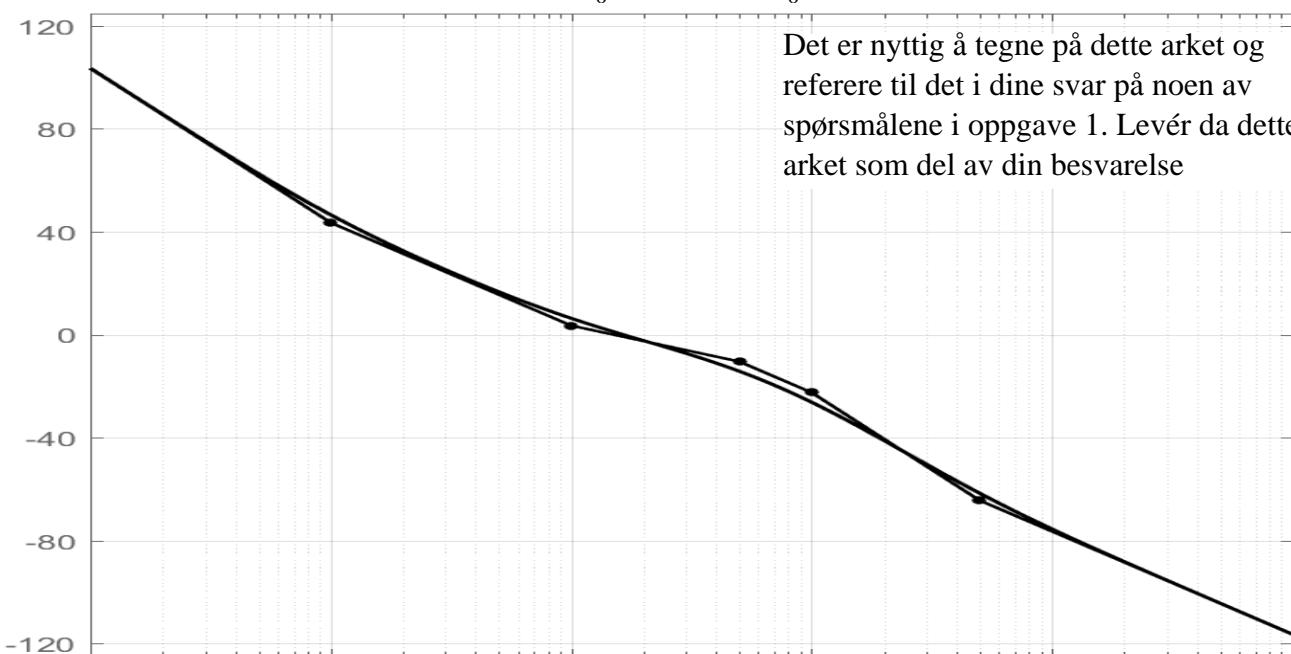
Prosesssen som skal følge eller holdes på en referanseposisjon y_0 , er en gjenstand med masse $m = 1[\text{kg}]$ som glir tilnærmet friksjonsløst på et horisontalt underlag. Pådragsorganet med tidskonstanter T_1 og T_2 har en dynamikk vi må ta hensyn til, og som vi derfor inkluderer i prosessmodellen. Tidsenheten i denne oppgaven er sekunder.

- b) (2 %) Hva slags orden har det lukkede system, dvs. transferfunksjonen $M(s) = \frac{y}{y_0}(s)$?
(Tips: dette er raskt å svare på, du trenger ikke finne $M(s)$.)

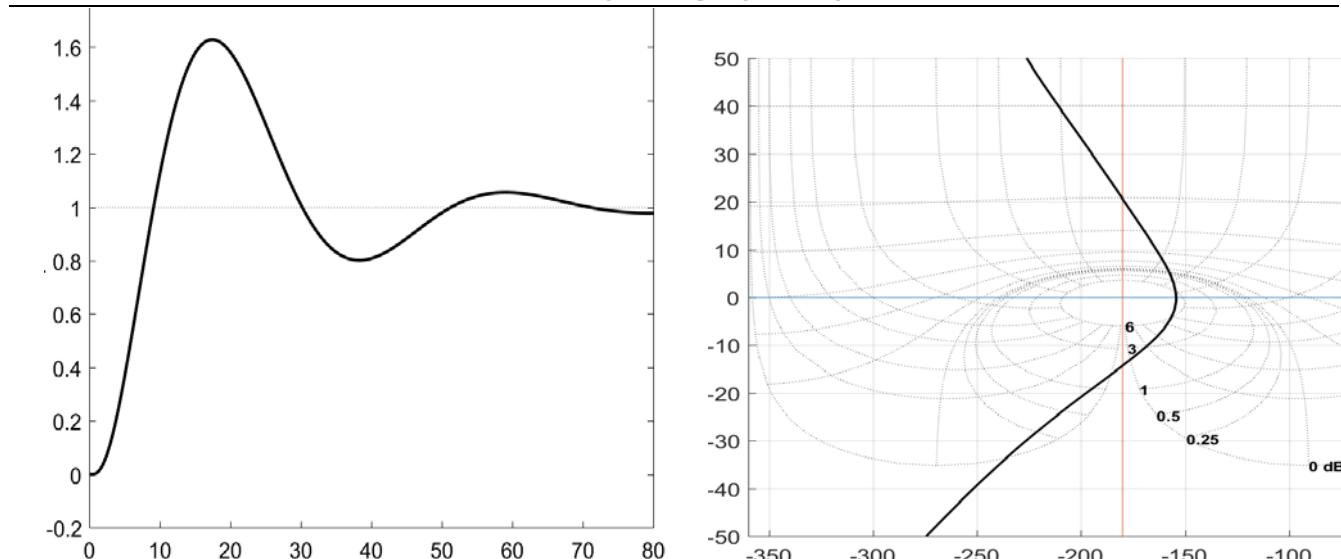
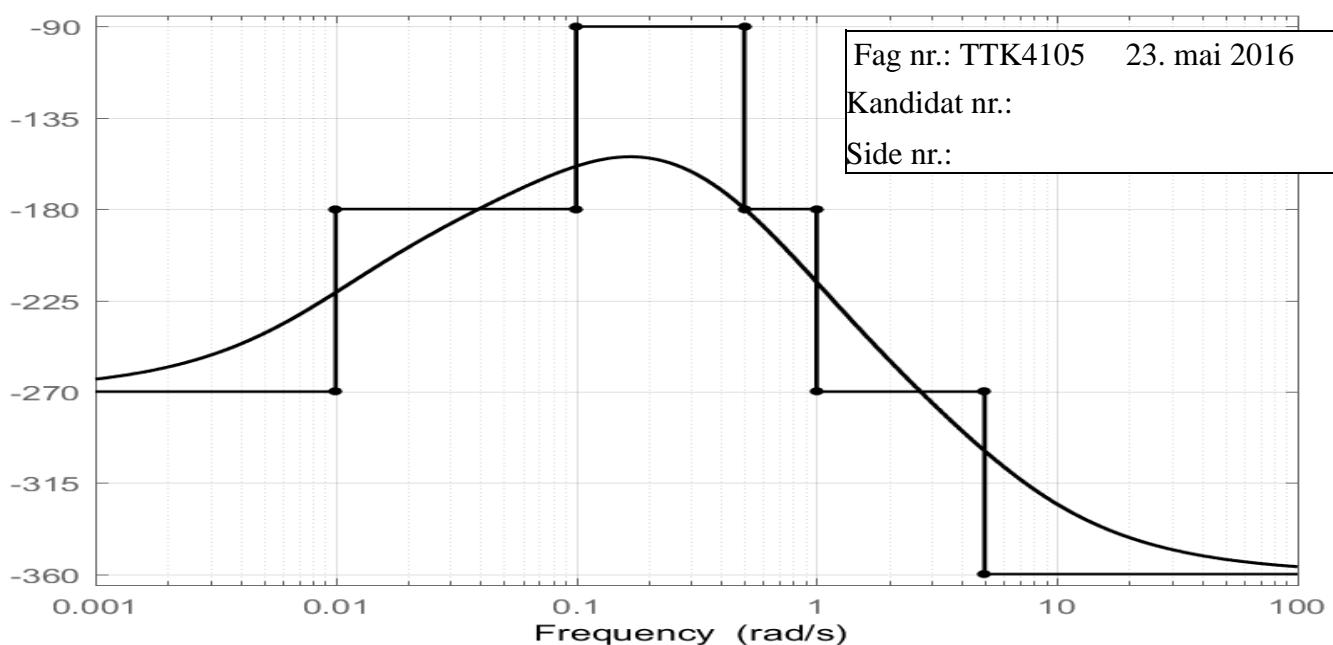
- c) (4 %) Du kan ikke bruke Ziegler-Nichols' eller SIMC-metoden for å stille inn regulator her. Hvorfor ikke?

- d) (3 %) T_i må velges svært stor for dette systemet. Hvorfor?
Hva er ulempen med å ha en stor T_i ?

Vi har nå etter beste evne forsøkt å stille inn regulatorparametre, og resultatet er vist i tre diagrammer nedenfor; bode av h_0 , nichols av h_0 , og sprangrespons lukket system:



Det er nyttig å tegne på dette arket og referere til det i dine svar på noen av spørsmålene i oppgave 1. Levér da dette arket som del av din besvarelse



- e) (7 %) Det oppgis at $m = 1$, $\alpha = 0.2$ og $T_2 = 0.2$. Ut fra bode-diagrammet for h_0 med asymptoter: Finn T_i , T_d , T_1 og K_p . (Tips: alle størrelser er noenlunde runde tall.) Tegn i diagrammet og lever det med besvarelsen.
- f) (4 %) Oppgi stigningstallet på asymptotene for $|h_0|$ fra venstre mot høyre. Bruk notasjonen (-1), (-2) osv. Forklar siste knekk for amplitude og fase, til høyre.
- g) (5 %) Betrakt responsen ved sprang i y_0 . Kommentér den, og se den i sammenheng med fase- og forsterkningsmarginer.
- h) (3 %) Dette systemet er *betinget stabilt*. Hvordan ser du det og hva betyr det?
- i) (5 %) Hva slags inngangssignal (sprang, rampe, parabel) vil utgangen kunne følge uten stasjonært avvik? Du kan regne her, men kan også begrunne svaret kort og verbalt.
- j) (5 %) Hva slags forstyrrelse v (sprang, rampe, parabel) kan elimineres helt på utgangen uten stasjonært avvik? Du kan regne her, men kan også begrunne svaret kort og verbalt.
- k) (4 %) Regulatoren skal realiseres diskret (men du skal ikke finne den her). Vi aksepterer 1° dårligere fasemargin, og skal velge taste(samplings-)tida T basert på dette. Finn T .
- l) (4 %) Vi vil nå også ha en foroverkopling fra forstyrrelsen, med en blokk h_f . Tegn denne inn i et modifisert blokkskjema basert på figur 1.1. Kall bare regulatoren i figur 1.1 for h_r . Finn den *statiske* foroverkoppling fra v , altså en konstant forsterkning $h_f = K_f$ (tips: den blir ekstremt enkel). Hva slags v kan denne motvirke?
- m) (6 %) Vi er ikke fornøyd med seriekompensasjon i dette tilfellet, og innfører derfor en intern tilbakkopling. Tegn en slik i blokkskjemaet fra forrige punkt, eller tegn et separat diagram. Nevn to fordeler med denne løsningen.
- n) (2 %) Kan vi beholde den valgte foroverkopplingen sjøl om vi innfører intern tilbakekopling? Kort begrunnelse.

Oppg 2 (7 %)

Finn transferfunksjonen $h(s)$ for et 2. ordens Butterworth lavpassfilter, med knekkfrekvens 100 rad/s. Nevn en anvendelse av lavpassfilter i et reguleringssystem.

Oppg 3 (5 %)

Forklart verbalt når det er aktuelt å anvende en Otto-Smith-regulator, og hva som er den store fordelen med en slik regulator.

Dette er en *modellbasert regulator*. Hva mener vi med det?

Oppg 4 (19 %)

En sinussvingning $y = \sin(\omega_0 t)$, $t > 0$, og 0 for $t < 0$, kan oppfattes som utgangen på en transferfunksjon $h(s)$ som utsettes for en impulsfunksjon $\delta(t)$.

- a) (2 %) Finn $h(s)$.

- b) (4 %) Finn A , \underline{b} , \underline{c}^T i en tilstandsrommodell for $h(s)$, $\dot{\underline{x}} = A\underline{x} + \underline{b}u$, $y = \underline{c}^T \underline{x}$.
- c) (7 %) Den autonome (dvs. uten pådrag) versjonen av denne modellen er gyldig for en friksjonsløs pendel nær likevektspunktet. Du skal lage en linearisert modell med likevektspunktet som arbeidspunkt. Pendelen har lengde L og masse m . Du trenger også tyngdens akselerasjon g . Tilstandene er pendelens utslagsvinkel x_1 fra likevektspunktet, og dennes deriverte x_2 . (Tips: Bruk Newtons 2. lov for rotasjon, ikke rettlinja bevegelse.)
- d) (6 %) Finn $x_1(t)$ med linearisert modell når pendelen starter i likevektsposisjonen $x_1 = 0$, men med en initiell vinkelhastighet x_{20} .
 (Tips: En måte å løse dette på er å bruke $(sI - A)^{-1}$, og det oppgis da at øvre høyre element i denne er $\frac{1}{s^2 + g/L}$.
 Men hvis du ikke har greidd oppgave b) og c) over, kan du faktisk, og raskt, finne svaret bare med utgangspunkt i opplysninger gitt i a) og c) og her i d).

Oppg 5 (10 %)

Vi har et åpent system med proporsjonalregulator

$$h_0 = h_r h_u = K_p \frac{1}{(1 + 0.1s + 0.02s^2)(s - 2)} \quad (5.1)$$

- a) (2 %) Hvor mange poler N_p har h_u i høyre halvplan? Inkludér begge ledd i nevneren i din forklaring.

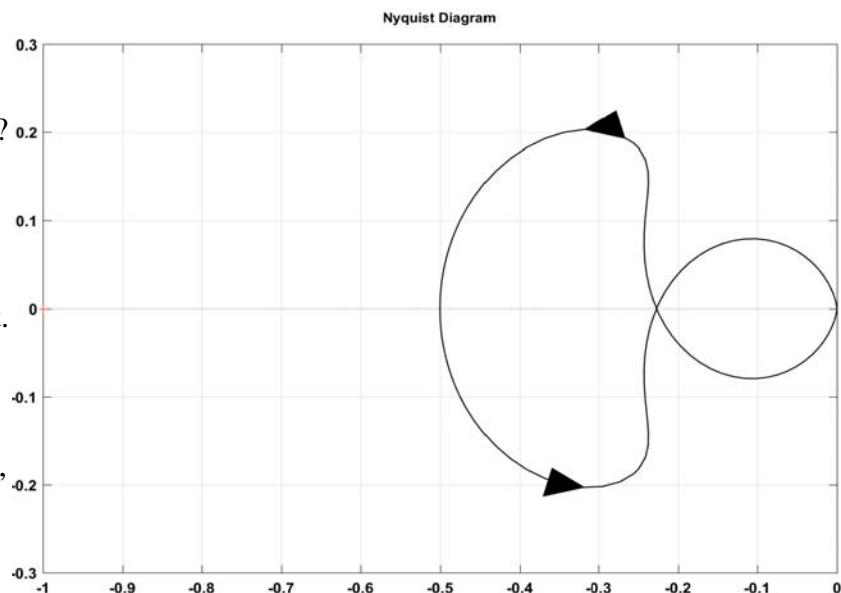
- b) (4 %) Figur 5.1 viser

Nyquistkurven for h_0 med $K_p = 1$. Er det lukkede system stabilt?
 Begrunn svaret!

- c) (4 %) Finn det området for

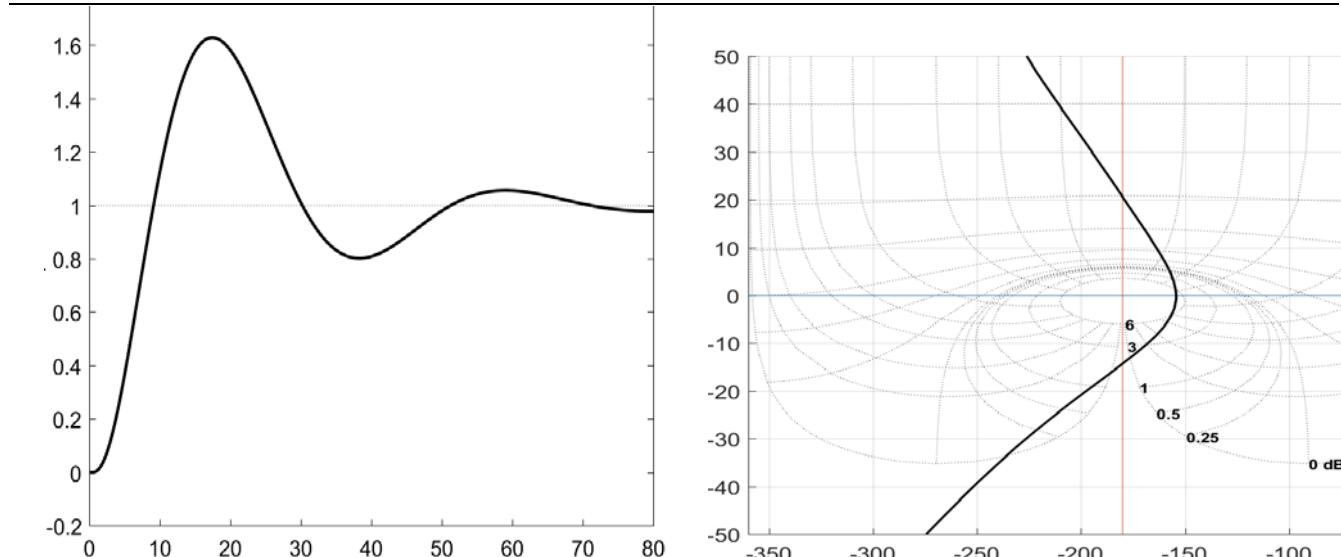
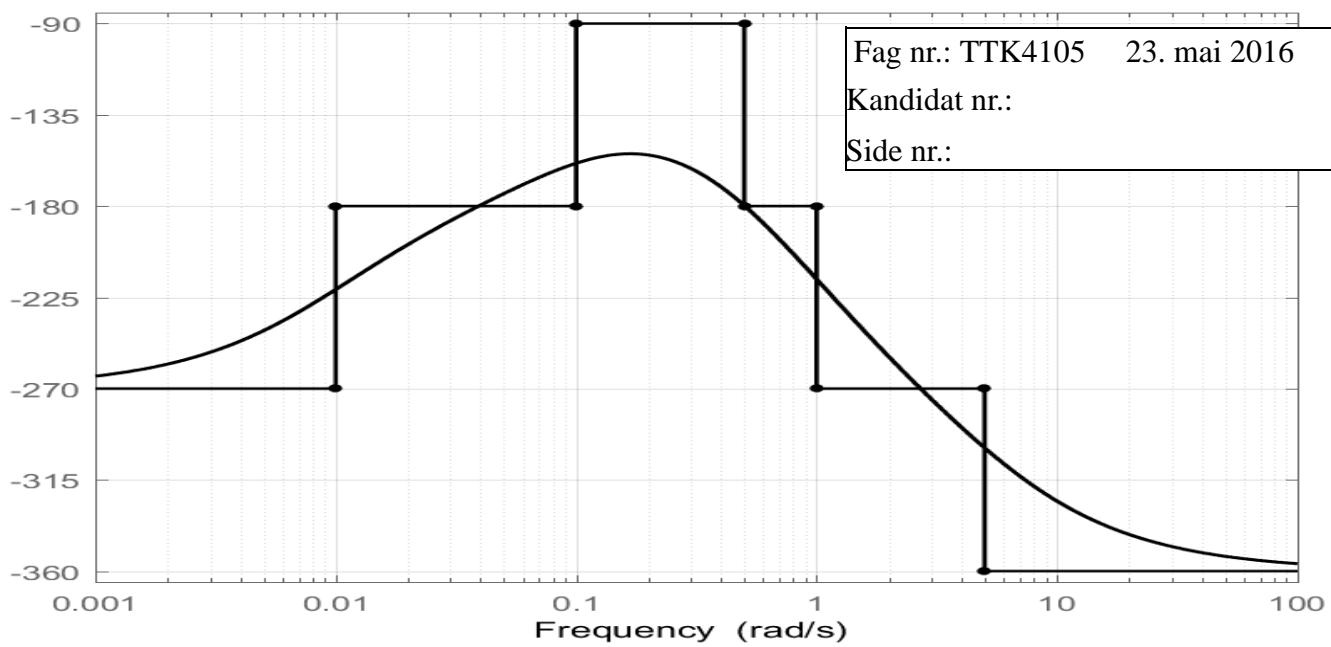
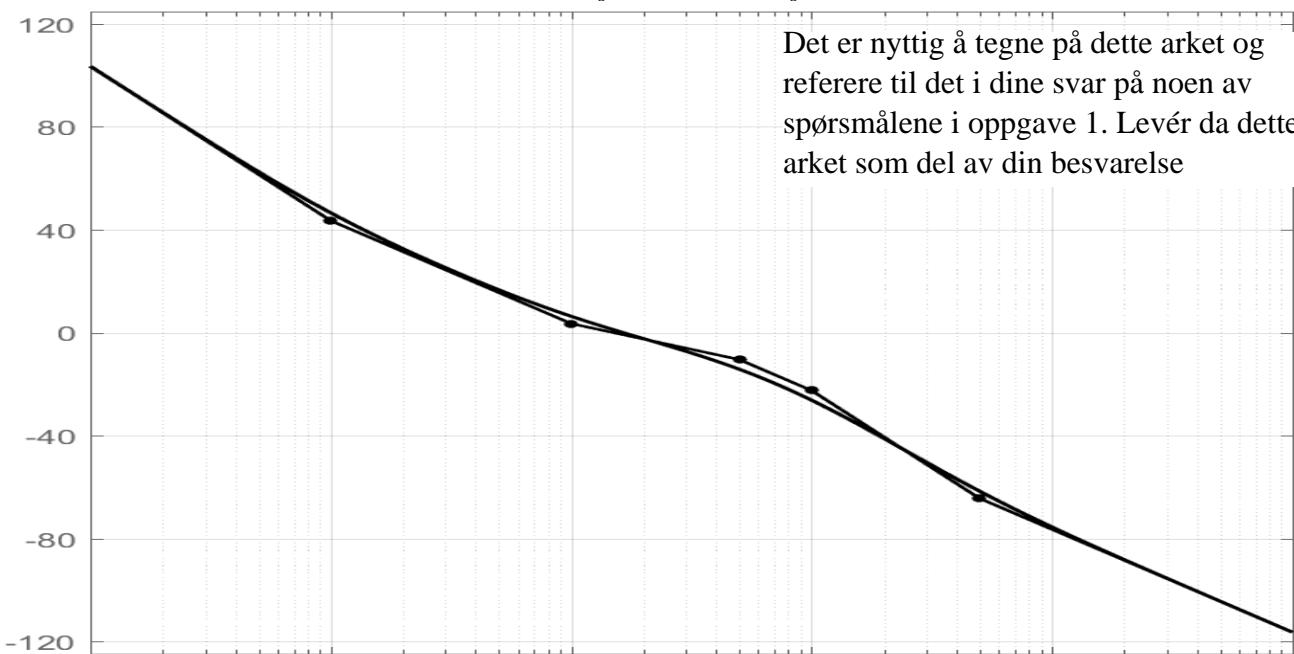
K_p som gjør det lukkede system stabilt.

(Tips til denne oppgaven: Du kan måle ut mm med linjal, du trenger ikke regne om til skalaen langs aksen.)



figur 5.1

Vi har nå etter beste evne forsøkt å stille inn regulatorparametre, og resultatet er vist i tre diagrammer nedenfor; bode av h_0 , nichols av h_0 , og sprangrespons lukket system:



(Ekstra ark oppgave 1)

Formelsamling

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sf(s), \text{ og } \lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sf(s) \quad (\text{V.1})$$

$$\mathcal{L} [\dot{f}(t)] = sf(s) - f(0) \quad , \quad \mathcal{L} [\ddot{f}(t)] = s^2 f(s) - sf(0) - \dot{f}(0) \quad (\text{V.2})$$

$$\text{Residuregning: } f(t) = \sum_{a_i} \frac{1}{(m-1)!} \left[\frac{\partial^{m-1}}{\partial s^{m-1}} \{(s-a_i)^m f(s) e^{st}\} \right] \Big|_{s=a_i} \quad (\text{V.3})$$

$$\text{Tidsforsinkelse: } \mathcal{L} [f(t-\tau)] = e^{-\tau s} f(s) \quad (\text{V.4})$$

$$|\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}| = 0 \quad (\text{V.5})$$

$$\text{Rettlinja bevegelse: } f = ma, \text{ Rotasjon: } d = J\dot{\omega}; \text{ med masse på vektløs stang har vi } J = ml^2 \quad (\text{V.6})$$

$$\text{Ohms lov: } u = Ri, \quad \text{kondensator (kapasitans): } i = C \frac{du}{dt}; \quad \text{induktans: } u = L \frac{di}{dt} \quad (\text{V.7})$$

$$\text{Folding (konvolusjon): } y(t) = h(t)*u(t) = \int_0^t h(t-\tau)u(\tau)d\tau, \quad \mathcal{L} [h(t)*u(t)] = h(s)u(s) \quad (\text{V.8})$$

$$\begin{aligned} \Delta \dot{\mathbf{x}} &= \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{\mathbf{x}^p, \mathbf{u}^p} \Delta \mathbf{x} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} \Big|_{\mathbf{x}^p, \mathbf{u}^p} \Delta \mathbf{u} \\ \text{Linearisering: } \Delta \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A} \Delta \mathbf{x} + \mathbf{B} \Delta \mathbf{u}, \quad \mathbf{A} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{\mathbf{x}^p, \mathbf{u}^p} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}_{\mathbf{x}^p, \mathbf{u}^p} \quad (\text{V.9}) \end{aligned}$$

$$x[\text{dB}] = 20 \cdot \log_{10}(x), \quad x = 10^{(x[\text{dB}])/20} \quad (\text{V.10})$$

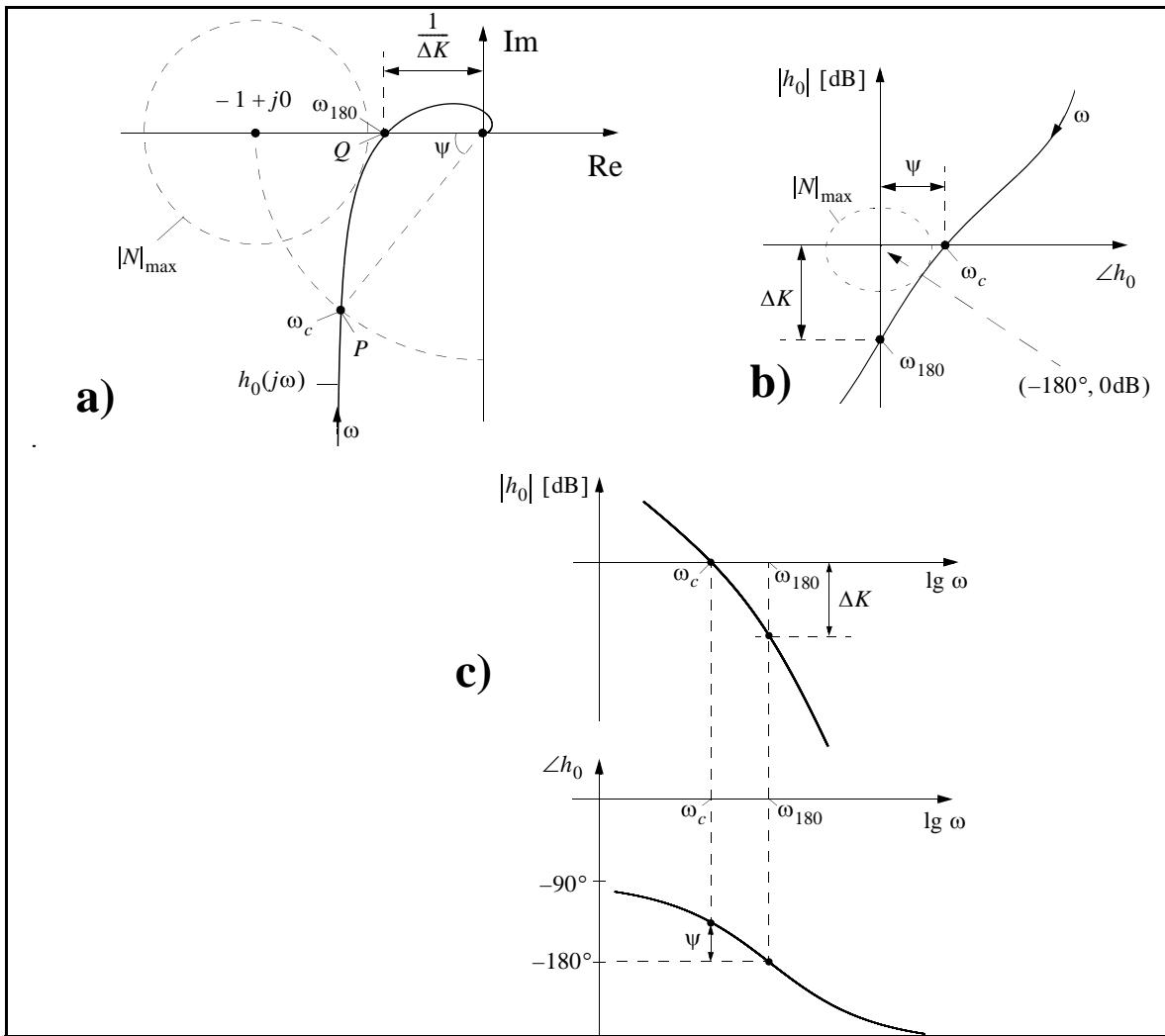
$$N(s) = \frac{1}{1+h_0(s)}, M(s) = \frac{h_0}{1+h_0(s)}, M(s)+N(s) = 1, \frac{e}{v}(s) = -h_v(s)N(s) \quad (\text{V.11})$$

Nyquists stabilitetskriterium: Gitt en åpen prosess $h_0(s)$ med N_p poler i høyre halvplan. Vektoren $1 + h_0(j\omega)$ får en netto vinkeldreining (dreieretning er definert positiv mot urviseren) lik

$$\Delta\angle(1 + h_0) = -2\pi(N_n - N_p) \quad \text{når } \omega \text{ går fra } -\infty \text{ til } \infty \quad (\text{V.12})$$

N_n er antall poler i h.h.p. for det lukkede (tilbakekoplede) system. $N_n = 0$ kreves for stabilt system.

(V.13)

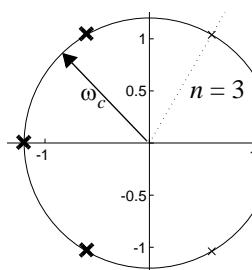


$$\psi = \angle h_0(j\omega_c) - (-180^\circ), \quad \frac{1}{\Delta K} = |h_0(j\omega_{180})|, \quad \Delta K = \frac{1}{|h_0(j\omega_{180})|} \quad (\text{V.14})$$

$$e^{-\tau s} \approx \frac{1 - \tau s/2}{1 + \tau s/2} \quad (\text{V.15})$$

Ziegler-Nichols' lukket-sløyfe-regler:

Regulator	K_p	T_i	T_d	
P	$0.5K_{pk}$	∞	0	$, T_k = \frac{2\pi}{\omega_{180}}$ (V.16)
PI	$0.45K_{pk}$	$0.85T_k$	0	
PID	$0.6K_{pk}$	$0.5T_k$	$0.12T_k$	



Butterworth lavpassfilter av orden n : De n polene i $h(s)$ ligger på hjørnene i venstre halvdel av en regulær mangekant med $2n$ sider, der mangekanten er plassert slik at den ligger symmetrisk om Im-aksen, og hvor avstanden fra origo og ut til hvert hjørne (= pol) er filterets knekkfrekvens ω_c . (V.17)

Høypassfilter med knekkfrekvens ω_c : Lag først lavpassfilter med ω_c . Erstatt så alle s i transferfunksjonen med ω_c^2/s . (V.18)

Røtter bare i v.h.p. for polynom $\alpha_2 s^2 + \alpha_1 s + \alpha_0$: hvis og bare hvis alle koeffisienter har samme fortegn.

For 3. ordens polynom $\alpha_3 s^3 + \alpha_2 s^2 + \alpha_1 s + \alpha_0$ kreves i tillegg $\alpha_1 \alpha_2 > \alpha_0 \alpha_3$ (V.19)

Skogestads "SIMC" åpen-sløyfe-regel for PI-innstilling (bruker notasjonen fra notatet om dette):

Sett på et sprang. Anta at prosessen $\approx h_u = \frac{Ke^{-\theta s}}{1 + T_1 s}$. Mål (dvs. anslå) T_1 , K og θ ut fra responsen.

Velg så $K_p = \frac{T_1}{K(\theta + \tau_c)}$ og $T_i = \min(T_1, 4(\theta + \tau_c))$, hvor τ_c er (V.20)

ønsket tidskonstant i responsen til det lukkede systemet. τ_c bør velges som $\tau_c > 0.3\theta$, f. eks. $\tau_c = \theta$.

$$\text{PI-regulator: } h_r = K_p \frac{1 + T_i s}{T_i s} \quad (\text{V.21})$$

$$\text{begrenset PD-regulator: } h_r = K_p \frac{1 + T_d s}{1 + \alpha T_d s} \quad (\text{V.22})$$

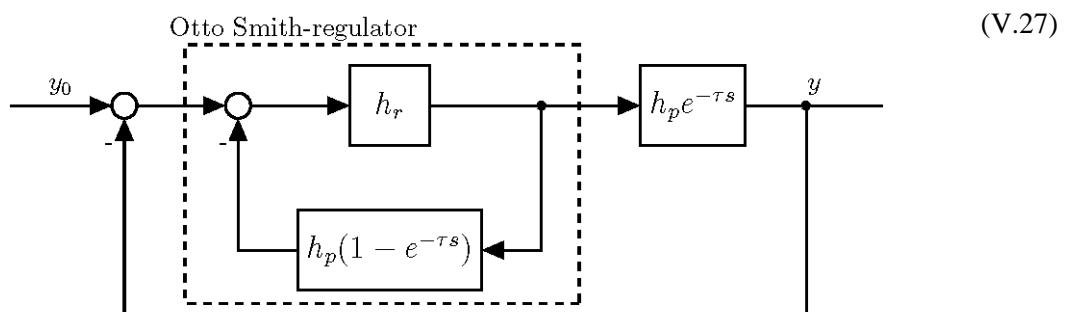
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \ddots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \ddots & \ddots & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & \ddots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \ddots & -\alpha_{n-2} & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\text{V.23})$$

$$\mathbf{c}^T = [\rho_0 \ \rho_1 \ \rho_2 \ \dots \ \rho_{n-1}]$$

gir $\frac{y}{u}(s) = h(s) = \frac{\rho_{n-1} s^{n-1} + \dots + \rho_1 s + \rho_0}{s^n + \alpha_{n-1} s^{n-1} + \dots + \alpha_1 s + \alpha_0}$ (V.24)

Diskret regulator: Alle s erstattes med $\frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1}$, der z er en tidsforskyvingsoperator. (V.25)

Diskret regulator brukt på kontinuerlig prosess medfører tilnærma en ekstra tidsforsinkelse = $T/2$ i sløyfetransferfunksjonen. (V.26)



Sammenshenger mellom tilstandsrombeskrivelse og Laplace, og mellom 1. ordens og høyere ordens lineære systemer

	1. orden (eks.: RC-krets)	Høyere orden
1. Differensiellikning	$\dot{x} = ax + bu \quad (\dot{x} = -\frac{1}{T}x + \frac{1}{T}u)$	$\dot{x} = Ax + Bu$
2. Laplace	$x(s) = \frac{1}{s-a}x(t=0) + \frac{b}{s-a}u(s)$	$\mathbf{x}(s) = (sI - A)^{-1}\mathbf{x}(t=0) + (sI - A)^{-1}Bu(s)$
3. Løsning	$x(t) = e^{at}x(0) + \int_0^t e^{a(t-\tau)}bu(\tau)d\tau$	$x(t) = e^{At}\mathbf{x}(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$
4. Dekopling	(Triviert): $A = a = \lambda$ = skalar	$A = M\Lambda M^{-1}, \quad e^{At} = M e^{\Lambda t} M^{-1}, \quad \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$
5. Rekkeutvikling	$e^{at} = 1 + at + \frac{a^2 t^2}{2!} + \frac{a^3 t^3}{3!} + \dots$	$e^{At} = \Phi(t) = I + At + \mathbf{A}^2 \frac{t^2}{2!} + \mathbf{A}^3 \frac{t^3}{3!} + \dots$
6. $(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} (s)$	$e^{at} \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s-a} \quad (\frac{1}{T}e^{-t/T} \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{1+Ts})$	$e^{At} \xrightarrow{\mathcal{L}} \Phi(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} (sI - A)^{-1}$
7. Fra $u(s)$ til $y(s)$	$y = cx \quad y(s) = c \frac{b}{s-a}u(s) \quad h(s) = \frac{cb}{s-a}$	$\mathbf{y} = Cx \quad \mathbf{y}(s) = C(sI - A)^{-1}Bu(s) \quad H(s) = C(sI - A)^{-1}B$
8. Impulsrespons	$h(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} h(s)$	$3) \quad h(t) = \mathbf{c}^T e^{At} \mathbf{b} \quad 4) \quad \xrightarrow{\mathcal{L}} \quad h(s) = \mathbf{c}^T (sI - A)^{-1} \mathbf{b}$

1) $\int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau = e^{At}B * u(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} (sI - A)^{-1}B \cdot u(s)$

2) NB: $e^{At} \neq \{e^{a_{ij}t}\}$, bortsett fra når $A = \Lambda$ er diagonal.

3) Antar nå at u og y er skalare.

4) Hvis y og u er skalare og $\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$ så har vi fra 3. linje at $y(t) = \int_0^t h(t-\tau)u(\tau)d\tau = h(t) * u(t)$

Tilstandsrom:

$$\dot{\mathbf{x}} = Ax + Bu.$$

Laplace:

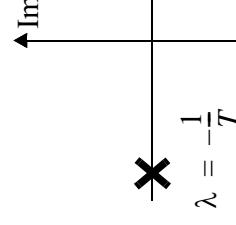
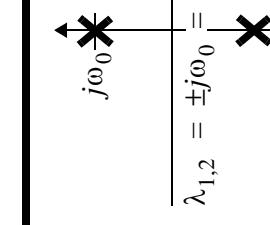
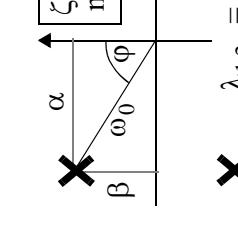
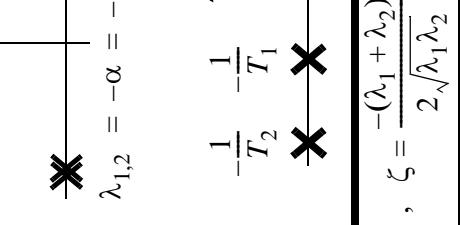
$$H(s) = C(sI - A)^{-1}B = C \frac{\text{adj}(sI - A)}{|sI - A|} B \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} \text{Egenverdier følger av: } |\lambda I - A| = 0 \\ \text{Polene gitt av nevneren: } |sI - A| = 0. \\ \Rightarrow \text{poler = egenverdier} \end{array}$$

Impuls- og sprangresponsen

Polar

Transferfunksjon $h(s)$

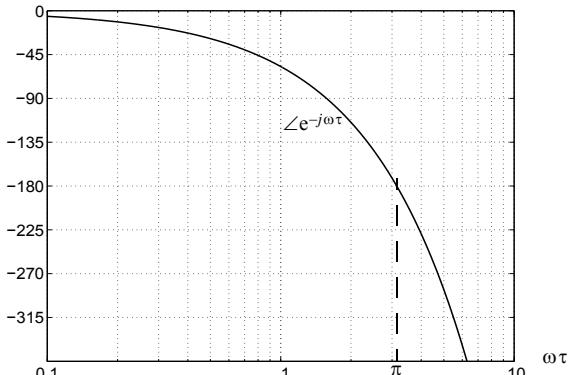
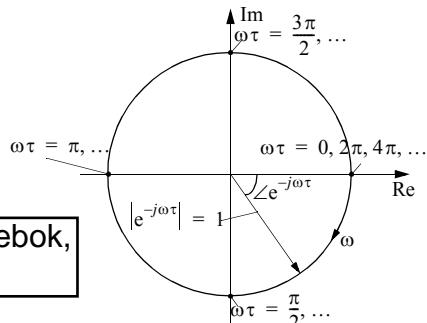
Orden

1. orden $\zeta = 0$	2. orden, $\zeta < 1$	2. orden, $\zeta < 1$	2. orden, $\zeta = 1$	2. orden, $\zeta > 1$
$h(s) = \frac{K}{1+Ts} = \frac{\frac{K}{T}}{s + \frac{1}{T}} = \frac{-K\gamma}{s - \lambda}$ 	$\frac{K}{\left(\frac{s}{\omega_0}\right)^2 + 1} = \frac{K\omega_0^2}{s^2 + \omega_0^2} = \frac{K\lambda_1\lambda_2}{(s - \lambda_1)(s - \lambda_2)}$ 	$\frac{K}{\left(\frac{s}{\omega_0}\right)^2 + 2\zeta\left(\frac{s}{\omega_0}\right) + 1} = \frac{K\omega_0^2}{s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2} = \frac{K\lambda_1\lambda_2}{(s - \lambda_1)(s - \lambda_2)}$ $\omega_0 = \frac{\beta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ $= \frac{K(\alpha^2 + \beta^2)}{s^2 + 2\alpha s + (\alpha^2 + \beta^2)}, \quad \lambda_{1,2} = -\alpha \pm j\beta$ 	$\frac{K}{\left(\frac{s}{\omega_0}\right)^2 + 2\zeta\left(\frac{s}{\omega_0}\right) + 1} = \frac{K\omega_0^2}{s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2} = \frac{K\lambda^2}{(s - \lambda)^2} = \frac{\frac{K}{T^2}}{\left(s + \frac{1}{T}\right)^2} = \frac{K\lambda^2}{(s - \lambda)^2} = \frac{\frac{K}{T^2}}{\left(s + \frac{1}{T}\right)^2}$ $\lambda_{1,2} = -\alpha = -\omega_0 = -\frac{1}{T}$ 	$\frac{K}{\left(\frac{s}{\omega_0}\right)^2 + 2\left(\frac{s}{\omega_0}\right) + 1} = \frac{K\omega_0^2}{\left(s + \frac{1}{\omega_0}\right)^2} = \frac{K\lambda^2}{(s - \lambda)^2} = \frac{\frac{K}{T^2}}{\left(s + \frac{1}{T}\right)^2} = \frac{K\lambda^2}{(s - \lambda)^2} = \frac{\frac{K}{T^2}}{\left(s + \frac{1}{T}\right)^2}$ $\lambda_{1,2} = \sqrt{\lambda_1\lambda_2}, \quad \zeta = \frac{-(\lambda_1 + \lambda_2)}{2\sqrt{\lambda_1\lambda_2}}, \text{ gielder for alle } \lambda \neq 0$ 
<p>impulsrespons:</p> $h(t) = L^{-1}[h(s)] = \frac{K}{T}e^{-t/T}$	<p>sprangrespons:</p> $k(t) = L^{-1}\left[\frac{1}{s}h(s)\right] = \int_0^t h(\tau)d\tau$ $= K(1 - e^{-t/T})$	$h(t) = K\omega_0 \sin\omega_0 t$	$h(t) = K(1 - \cos\omega_0 t)$	$h(t) = \frac{\omega_0}{\beta}e^{-\alpha t} \sin\beta t$
				$h(t) = K\left(1 - \frac{\omega_0}{\beta}e^{-\alpha t} \cos(\beta t - \Phi)\right)$
				$h(t) = K\left(1 - \left[1 + \frac{t}{T}\right]e^{-t/T}\right)$
				$h(t) = \frac{K}{T^2}te^{-t/T}$
				$h(t) = \frac{K}{T_1 - T_2} \left(e^{-\frac{t}{T_1}} - e^{-\frac{t}{T_2}} \right)$
				$h(t) = K\left(1 + \frac{T_2}{T_1 - T_2}e^{-\frac{t}{T_2}} - \frac{T_1}{T_1 - T_2}e^{-\frac{t}{T_1}}\right)$

FIGUR 6.17

Nyquist-diagram
og faseforløp i
Bode-diagram
for $e^{-j\omega\tau}$

Utdrag fra lærebok,
tre sider



6.4.1 Prosedyre for tegning av asymptotisk AFF-diagram

Her følger en generell prosedyre som alltid kan brukes:

1. Transferfunksjonen bringes over på formen (6.18). Dersom vi har transferfunksjonen

$$h(s) = \frac{K(\dots)}{(\dots)(a + s)}$$

må den omformes til

$$h(s) = \frac{K'(\dots)}{(\dots)(1 + T's)}$$

der $K' = K/a$ og $T' = 1/a$. Dette må gjentas like mange ganger som vi har 1.ordens ledd i $h(s)$. Dersom vi har resonansledd

$$h(s) = \frac{K(\dots)}{(\dots)(c + bs + as^2)}$$

må vi først omforme dette til

$$h(s) = \frac{K'(\dots)}{(\dots)\left(1 + 2\zeta\frac{s}{\omega_0} + \left(\frac{s}{\omega_0}\right)^2\right)}$$

der $K' = K/c$ og $\omega_0 = \sqrt{c/a}$. Poenget er altså at alle ledd i nevner (og i teller!) må ha konstantledd lik 1, det vil si at hvert ledd er lik 1 for $s = j0$. Forsterkning i alle ledd "samles" da i en felles K' , fra nå av bare kalt K .

2. Begynn alltid til venstre i diagrammet, ved de laveste frekvensene ($\omega \ll 1$). (Vi symboliserer "liten ω " med å skrive $\omega \ll 1$.) Ved slike frekvenser kan vi se bort fra virkningen av nullpunkts-, tidskonstant- og resonansledd. Videre prosedyre blir:

Tilfelle a): Hvis vi har q integrasjoner i $h(s)$, $q > 0$, har vi

$$h(j\omega)_{\omega \ll 1} \approx \frac{K}{(j\omega)^q}, \quad |h(j\omega)|_{\omega \ll 1} \approx \frac{K}{\omega^q}, \quad \angle h(j\omega)_{\omega \ll 1} \approx (-q) \cdot 90^\circ$$

q kan selvsagt være lik 0, da er vi over i Tilfelle b) nedenfor.

Amplitudeforløp

Asymptoten vil ved lave frekvenser ha helning $-q$ og skjære 0-dB-linen i $\omega = K^{\frac{1}{q}}$. Dermed kan vi fastlegge venstre del av $|h(j\omega)|_{as}$ og 0-dB-linen (subskript as betyr “asymptotisk verdi av”. Se forøvrig figur 6.18).

Faseforløp

Dette er enklere. Asymptoten er horisontal og starter til venstre i $(-q) \cdot 90^\circ$.

Tilfelle b): Ingen rene integrasjoner i $h(s)$

Amplitudeforløp: Da har vi $|h(j\omega)|_{\omega \ll 1} = K$, dvs. horisontal asymptote ved lave frekvenser, i K [dB] over 0-dB-linja.

Faseforløpet starter nå til venstre med en horisontal asymptote i 0° .

3. Videre amplitudeforløp

Asymptotene skal utgjøre en sammenhengende serie av linjestykker. Ta utgangspunkt i den venstre asymptoten som allerede er tegnet, og finn den minste **knekkfrekvensen**.

Knekkfrekvensene er der den asymptotiske kurven for et ledd i en transferfunksjon knekker. De er som vist ovenfor den inverse av tidskonstanten i nullpunkts- og tidskonstantledd, og frekvensen ω_0 i et resonansledd.

Finn helningen p på asymptoten til leddet du betrakter. $p = 1$ for nullpunktsledd, -1 for tidskonstantledd og -2 for resonansledd. Tegn et nytt linjestykke fra den minste knekkfrekvensen fram til den *etterfølgende* knekkfrekvensen med en helning som er lik forrige asymptotes helning $+ p$.

Sett “minste knekkfrekvens” = etterfølgende knekkfrekvens og gjenta prosedyren for neste ledd, osv.

Videre faseforløp

Asymptotene er ikke sammenhengende, men er horisontale, og springer opp eller ned ved knekkfrekvensen, med $p \cdot 90^\circ$ målt fra forrige asymptote.

For faseforløpet gjelder unntaksregelen at et nullpunktsledd av typen $1 - T_i s$ gir 90° knekk ned, ikke opp.

EKSEMPEL 6.6 Asymptotisk Bodediagram for en transferfunksjon med flere ledd

Vi ønsker å tegne et asymptotisk amplitudediagram og asymptotisk fasediagram for frekvensresponsen til transferfunksjonen

$$h(s) = \frac{K(1 + T_2 s)(1 + T_3 s)}{s(1 + T_1 s)(1 + T_4 s)^2} \quad (6.29)$$

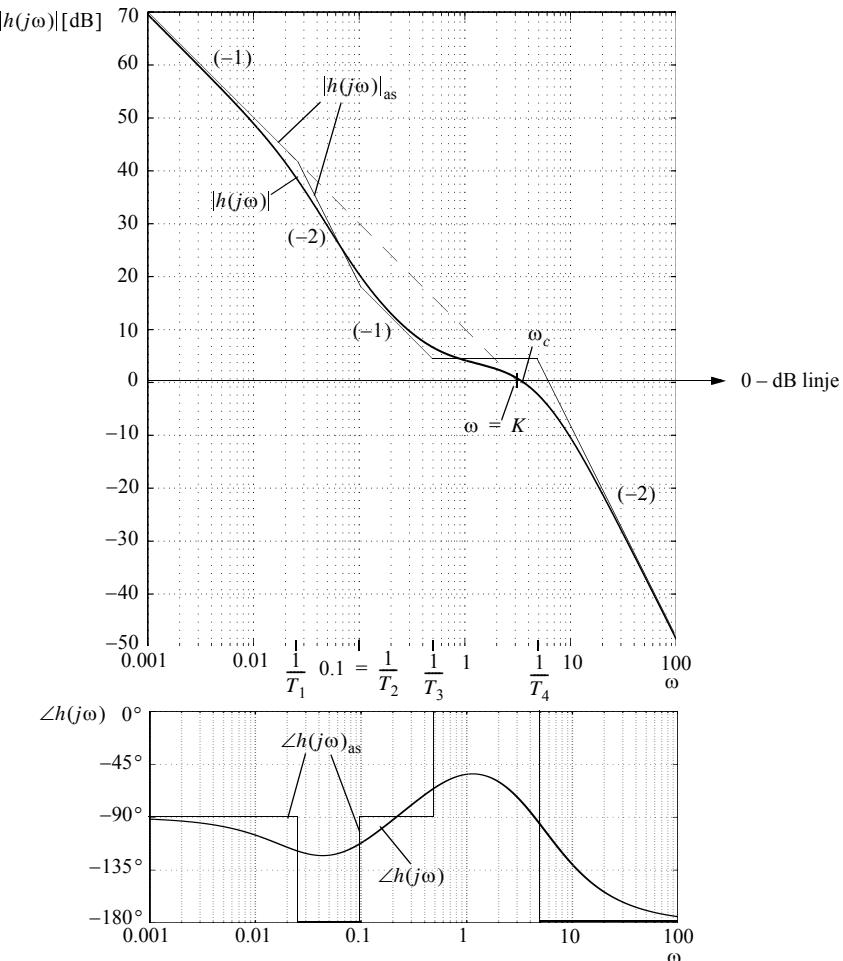
der $K = 3$, $T_1 = 40$, $T_2 = 10$, $T_3 = 2$, $T_4 = 0.2$

Vi finner

$$\begin{aligned} \lg|h(j\omega)| &= \lg K + \lg|1 + j\omega T_2| + \lg|1 + j\omega T_3| \\ &\quad - \lg\omega - \lg|1 + j\omega T_1| - 2\lg|1 + j\omega T_4| \end{aligned} \quad (6.30)$$

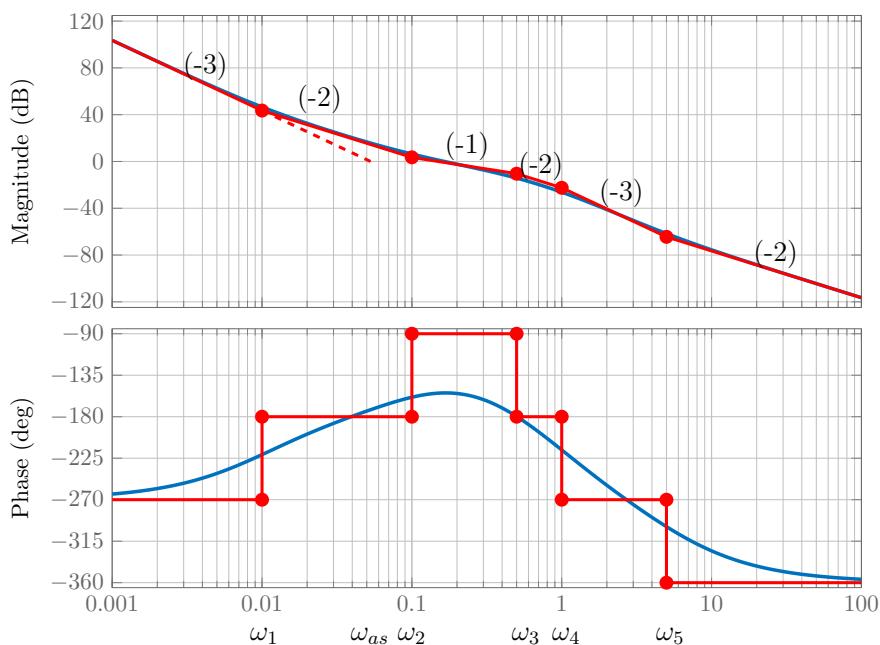
FIGUR 6.18

Bodediagram for $h(s)$, eksakt diagram, og asymptotisk diagram



Oppgave 1

- a) Dette er en *PID*-regulator med begrenset derivat virkning. Den høyre delen ($\frac{1+T_{ds}}{1+\alpha T_{ds}}$) er en begrenset derivat regulator, *PD*, denne skal stabilisere systemet. Den venstre delen ($\frac{1+T_{is}}{T_{is}}$) er en integral regulator, *PI*, denne skal fjerne stasjonært avvik.
- b) Vi har $h_0 = \frac{t_0}{n_0}$, vi får dermed $M(s) = \frac{t_0}{n_0 + t_0}$. $\text{Grad}(n_0) = 5$. $\text{Grad}(t_0) = 3$. $\text{Grad}(n_0 + t_0) = \max(5,3) = 5$.
- c) Prosessen, h_u , har to poler i origo. Ved Z-N skal man øke K_p i lukket sløyfe med proporsjonal regulator til man når stabilitetsgrensa. Men dette lukkede systemet er på stabilitetsgrensa for alle $K_p \Rightarrow$ Z-N kan ikke brukes.
 SIMC-metoden forutsetter åpent stabil prosess, h_u , slik at vi kan få en sprang respons på den. Men prosessen h_u er ustabil (to poler i origo) \Rightarrow SIMC kan ikke brukes.
- d) Prosessen, h_u , har meget negativt faseforløp. Integral-virkningen gir et ekstra bidrag på -90° i gal retning. Ved å sette T_i svært stor, kan man begrense dette bidraget til bare lave frekvenser. Ulempen er at det tar lang tid før stasjonært avvik blir fjerna.



Figur 1: Oppgave 1e Bode-diagram

- e) Vi har merket de forskjellige knekkfrekvensene i figur 1, med målingene er oppgitt her

Merkelapp	Frekvens	Periode	Parameter
ω_1	0.01	100	T_i
ω_{as}	0.053	-	-
ω_2	0.1	10	T_d
ω_3	0.5	2	αT_d
ω_4	1	1	T_1
ω_5	5	0.2	T_2

Vi har kommet frem til parameterne som følger. Først så har vi oppgitt at $T_2 = 0.2$. Videre så vet vi at vi skal ha to perioder der den ene skal være lik den andre multiplisert med $\alpha = 0.2$. Vi ser at dette tilsvarer frekvensene ω_3 og ω_4 , hvilket gir $T_d = 10$. Da gjenstår det to perioder $\frac{1}{\omega_1} = 100$ og $\frac{1}{\omega_4} = 1$ som tilsvarer T_i og T_1 . Vi vet at T_i må være stor, og vi får dermed $T_i = 100$ og $T_1 = 1$.

Til slutt skal vi finne K_p . Vi vet at asymptoten ved lave frekvenser skjærer 0-db linjen i $\omega_{as} = K^{\frac{1}{q}}$, der q er antall integrasjoner og vi har $K = \frac{K_p}{T_i}$. Dermed får vi $K_p = T_i \omega_{as}^3 = 100 \times 0.053^3 = 0.15$. (Her godtar vi måleunøyaktigheter på $\omega_{as} \in [0.045, 0.06]$ hvilket tilsvarer $K_p \in [0.009, 0.021]$.)

- f) Se figur 1. Legg merke til siste knekk: $|h_0|$ opp, $\angle h_0$ ned. Dette skyldes ledet $(1 - T_2 s)$ i teller, hvilket gjør at vi har et ikke-minimum fase system, “negativt nullpunkt”.
- g) Den er for oscillatorisk. ψ er under 30° , skulle gjerne vært over 45° . $|N|_{\max}$ er godt over 6 dB, burde vært max 6 dB. Det vil si vi er for nært stabilitetsgrensa, noe den oscillatoriske responsen også indikerer.
- h) Av bode og nichols-diagrammet ser vi at systemet kan bli ustabilt ikke bare for en stor K_p , men også en liten K_p .
- i) Det er 3 integratorer i $h_0 \Rightarrow y$ får null stasjonært avvik for sprang, rampe og parabel.
- j) Det er bare en integrator foran angrepspunktet til v , dermed får vi kun null stasjonært-avvik ved sprang. Ikke for rampe og parabel. (Oppgave i) og j) kan også løses ved bruk av sluttverditeoremet)
- k) Leser av $\omega_c \approx 0.15$. Vi har da kravet $\omega_c \frac{T}{2} < 1^\circ \times \frac{\pi}{180^\circ}$. Dermed får vi tastetid

$$T < \frac{2}{\omega_c} \times \frac{\pi}{180} = \frac{2}{0.15} \times \frac{\pi}{180} = 0.23. \quad (1)$$

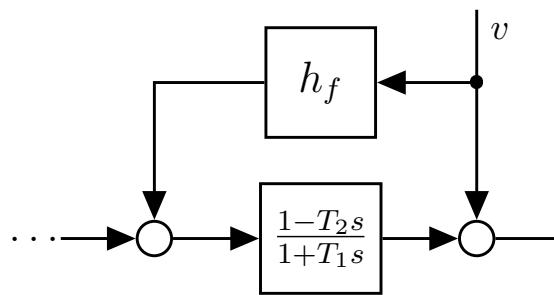
- l) Se figur 2 for plassering av foroverkoblingen. En ideell foroverkobling krever

$$h_{f,i} \frac{1 - T_2 s}{1 + T_1 s} + 1 = 0 \quad (2)$$

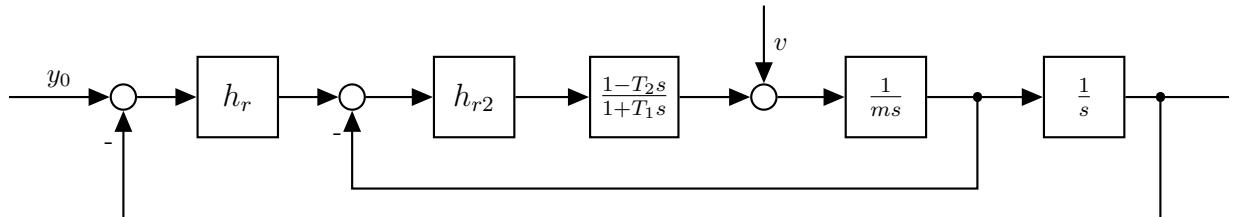
siden vi kun er ute etter en statisk foroverkobling kan vi sett $s = 0$ i uttrykket over, og vi får dermed en konstant foroverkobling

$$h_{f,i} = K_{f,i} = -1. \quad (3)$$

Denne foroverkoblingen kan kun motvirke konstante forstyrrelser.



Figur 2: Oppgave 1 l, foroverkobling



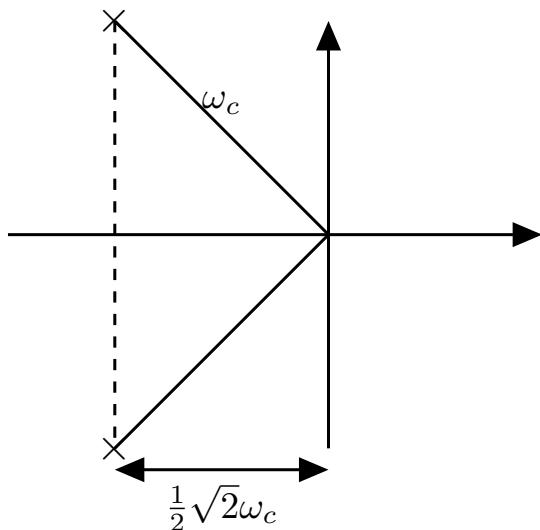
Figur 3: Oppgave 1 m, tilbakekobling

- m) Se figur 3 for plassering av tilbakekoblingen. Fordeler med en slik løsning

- Raskere motvirkning av forstyrrelsen
- Raskere regulering \Rightarrow høyere båndbredde
- Økt stabilitetsmargin.

- n) Ja. Foroverkobling kan velges uavhengig av tilbakekobblings-valg.

Oppgave 2



Polene i filteret ligger med avstand ω_c fra origo, plassert som en regulær mangekant med 4 sider symmetrisk om den imaginære aksen. Vi har $\omega_c = 100$ og $\xi = \sin \varphi = \sin 45^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

$$\begin{aligned}
 h(s) &= \frac{1}{(\frac{s}{\omega_c})^2 + 2\xi\frac{s}{\omega_c} + 1} \\
 &= \frac{1}{(\frac{s}{100})^2 + \sqrt{2}\frac{s}{100} + 1} \\
 &= \frac{100^2}{s^2 + 100\sqrt{2}s + 100^2} \quad (4)
 \end{aligned}$$

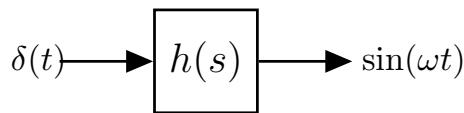
En anvendelse av lavpassfilteret er støyfiltrering i reguleringssystem.

Figur 4: Plassering av polene i Butterworth lavpassfilter med orden 2

Oppgave 3 Otto Smith-regulator er gunstig når vi har en tidsforsinkelse, $e^{-\tau s}$, inne i lukket sløyfe. Den store fordelen er at Otto Smith-regulatoren gjør om dette til et reguleringsproblem hvor tidforsinkelsen, $e^{-\tau s}$, flyttes ut av lukket sløyfe (v.27).

Vi ser at prosessmodellen inngår i Otto Smith-regulatoren, hvilket er det vi mener med modellbasert regulator.

Oppgave 4



Figur 5: Oppgave 4a

- a) Fra formelsamlingen har vi at impulsresponsen til $\frac{K\omega_0^2}{s^2+\omega_0^2}$ er $h(t) = K\omega_0 \sin(\omega_0 t)$. Dersom vi sammenlikner uttrykket $h(t)$ med $\sin \omega t$ får vi at $\omega_0 = \omega$ og $K = \frac{1}{\omega_0} = \frac{1}{\omega}$. Det gir transferfunksjonen

$$h(s) = \frac{\frac{1}{\omega}\omega^2}{s^2 + \omega^2} = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \quad (5)$$

- b) Her finnes det flere løsninger. Dersom vi bruker (V2.23) får:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \text{ og } c = \begin{bmatrix} \omega & 0 \end{bmatrix} \quad (6)$$

Løsning 2:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ \omega \end{bmatrix}, \text{ og } c = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (7)$$

Løsning 3:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -\omega^2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ og } c = \begin{bmatrix} 0 & \omega \end{bmatrix} \quad (8)$$

Løsning 4:

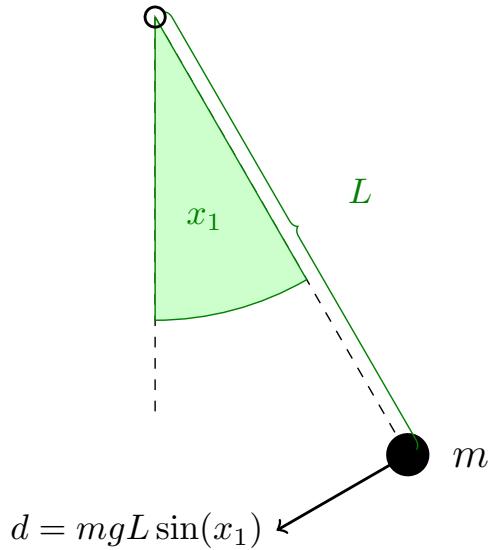
$$A = \begin{bmatrix} 0 & -\omega^2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} \omega \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ og } c = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (9)$$

- c) Først, må vi finne en modell for pendelen. Vi starter med Netwons lov for rotasjon $d = J\dot{\omega}$, der d er dreiemoment (kraft til å forandre et legemes rotasjon om sin egen akse), J er tregheten til massen og $\dot{\omega}$ er den deriverte av vinkelhastigheten. Videre har vi oppgitt i formelsamlingen at tregheten til en masse på en vektløs stang er $J = mL^2$ (V.6). Til slutt vet vi at dreiemomentet om pendelen er gitt som kraft multiplisert med arm, hvilket gir $d = mg \sin(x_1) \times L$, se figur 6. Setter vi sammen disse likningene får vi

$$\begin{aligned} d &= J\ddot{x}_1 \\ -mgL \sin(x_1) &= mL^2 \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_1 &= -\frac{g}{L} \sin(x_1) \end{aligned} \quad (10)$$

Utvider vi denne modellen med en ekstra tilsdand $x_2 = \dot{x}_1$ får vi

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -\frac{g}{L} \sin(x_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{bmatrix} = f(x) \quad (11)$$



Figur 6: Oppgave 4c, pendel

Likevektspunktet til dette systemet kan vi finne ved å sette $\dot{x} = 0$. Vi ser da at vi får $x_2 = 0$ og $\sin(x_1) = 0$ hvilket gir $x_1 = 0$ eller $x_1 = \pi$. Likevektspunktet $(\pi, 0)$ er ustabilt og vi velger derfor likevektspunktet $(0, 0)$ som arbeidspunkt.

Vi kan nå linearisere modellen rundt arbeidspunktet $(0, 0)$.

$$A = \begin{bmatrix} \frac{df_1}{dx_1} & \frac{df_1}{dx_2} \\ \frac{df_2}{dx_1} & \frac{df_2}{dx_2} \end{bmatrix}_{x^*=(0,0)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{L} \cos(x_1) & 0 \end{bmatrix}_{x^*=(0,0)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{L} & 0 \end{bmatrix} \quad (12)$$

Det lineariserte autonome modellen blir dermed:

$$\Delta \dot{x} = A \Delta x \quad (13)$$

med A gitt i likning (12), og Δx er x linearisert om arbeidspunktet x^* .

- d) Vi finner først $x(s)$ og bruker invers laplace for å finne $x_1(t)$.

$$\begin{aligned} x(s) &= (sI - A)^{-1} x_0 = \begin{bmatrix} s & -1 \\ \frac{g}{L} & s \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ x_{20} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{s^2 + \frac{g}{L}} \begin{bmatrix} s & 1 \\ -\frac{g}{L} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ x_{20} \end{bmatrix} = \frac{1}{s^2 + \frac{g}{L}} \begin{bmatrix} x_{20} \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (14)$$

Vi har dermed at $x_1(s) = \frac{x_{20}}{s^2 + \frac{g}{L}}$, sammenlikner vi dette med impulsresponsen til $K\omega \sin(\omega t)$ (fra formelsamlingen) ser vi at $\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$ og $K = x_{20} \frac{L}{g}$. Vi får dermed

$$x_1(t) = x_{20} \sqrt{\frac{L}{g}} \sin\left(\sqrt{\frac{g}{L}}t\right). \quad (15)$$

Alternativ løsning (uten bruk av svaret fra forrige oppgave):

Vi vet har $x_2(t)$ har sitt maksimum ved $x_1(t) = 0$. Videre har vi at $x_1(t)$ er sinusformet. Da må $x_2(t)$ være en cosinus funksjon, siden $x_2(t) = \dot{x}_1(t)$. Vi antar at pendelen svinger med frekvens ω . Dermed kan vi sette opp likningen:

$$x_2(t) = x_{20} \cos(\omega t) \quad (16)$$

Vi kan finne funksjonen for $x_1(t)$ ved å integrere dette uttrykket:

$$x_1(t) = \int x_2(t) dt = \frac{x_{20}}{\omega} \sin(\omega t) \quad (17)$$

Dette stemmer svaret fra likning (15) når vi vet at frekvensen pendelen svinger med er $\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$.

Oppgave 5

- a) I 2. ordens leddet har alle koeffisienter samme fortegn (fra Rouths kriterium i formelsamlingen) hvilket vil si at alle røtter er i v.h.p. Dermed gjenstår kun 1. ordens leddet som har en pol i høyre halvplan. Systemet har dermed totalt en pol i høyre halvplan, $N_p = 1$.
- b) Nei, systemet er ustabilt. Vektoren $1 + h_0(j\omega)$ har en netto vinkeldreining lik null, $\Delta\angle(1 + h_0) = 0$. Fra Nyquist stabilitetskriterium får vi da at antall poler i det lukkede systemet blir

$$N_n = N_p - \frac{\Delta\angle(1 + h_0)}{2\pi} = 1. \quad (18)$$

Siden det lukkede systemet har en pol i høyre halvplan så er systemet ustabilt.

- c) For at det lukkede systemet skal bli stabilt trenger vektoren $1 + h_0(j\omega)$ en positiv om-dreining. Det får vi hvis den venstre løkken i figur 5.1 omslutter punktet $(-1,0)$. Minimum forsterkning vi trenger for å omslutte $(-1,0)$ med venstre løkke er $K_{p,\min} = K_p \frac{1}{0.5} = 2$. Maksimum blir $K_{p,\max} = K_p \frac{1}{0.227} = 4.4$. Stabilitetsgrensene for K_p blir dermed

$$2 < K_p < 4.4 \quad (19)$$

Formelsamling til eksamen 10/6-17

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sf(s), \text{ og } \lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sf(s) \quad (\text{V.1})$$

$$\mathcal{L} [\dot{f}(t)] = sf(s) - f(0) \quad , \quad \mathcal{L} [\ddot{f}(t)] = s^2 f(s) - sf(0) - \dot{f}(0) \quad (\text{V.2})$$

$$\text{Residuregning: } f(t) = \sum_{a_i} \frac{1}{(m-1)!} \left[\frac{\partial^{m-1}}{\partial s^{m-1}} \{(s-a_i)^m f(s) e^{st}\} \right] \Big|_{s=a_i} \quad (\text{V.3})$$

$$\text{Tidsforsinkelse: } \mathcal{L} [f(t-\tau)] = e^{-\tau s} f(s) \quad (\text{V.4})$$

$$|\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}| = 0 \quad (\text{V.5})$$

$$\text{Rettlinja bevegelse: } f = ma, \text{ Rotasjon: } d = J\dot{\omega}; \text{ med masse på vektløs stang har vi } J = ml^2 \quad (\text{V.6})$$

$$\text{Ohms lov: } u = Ri, \quad \text{kondensator (kapasitans): } i = C \frac{du}{dt}; \quad \text{induktans: } u = L \frac{di}{dt} \quad (\text{V.7})$$

$$\text{Folding (konvolusjon): } y(t) = h(t) * u(t) = \int_0^t h(t-\tau)u(\tau)d\tau, \quad \mathcal{L} [h(t) * u(t)] = h(s)u(s) \quad (\text{V.8})$$

$$\text{Linearisering: } \Delta \dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{\mathbf{x}^p, \mathbf{u}^p} \Delta \mathbf{x} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} \Big|_{\mathbf{x}^p, \mathbf{u}^p} \Delta \mathbf{u}, \quad \mathbf{A} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{\mathbf{x}^p, \mathbf{u}^p} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \Big|_{\mathbf{x}^p, \mathbf{u}^p} \quad (\text{V.9})$$

$\Delta \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \Delta \mathbf{x} + \mathbf{B} \Delta \mathbf{u}$

$$x[\text{dB}] = 20 \cdot \log_{10}(x), \quad x = 10^{(x[\text{dB}])/20} \quad (\text{V.10})$$

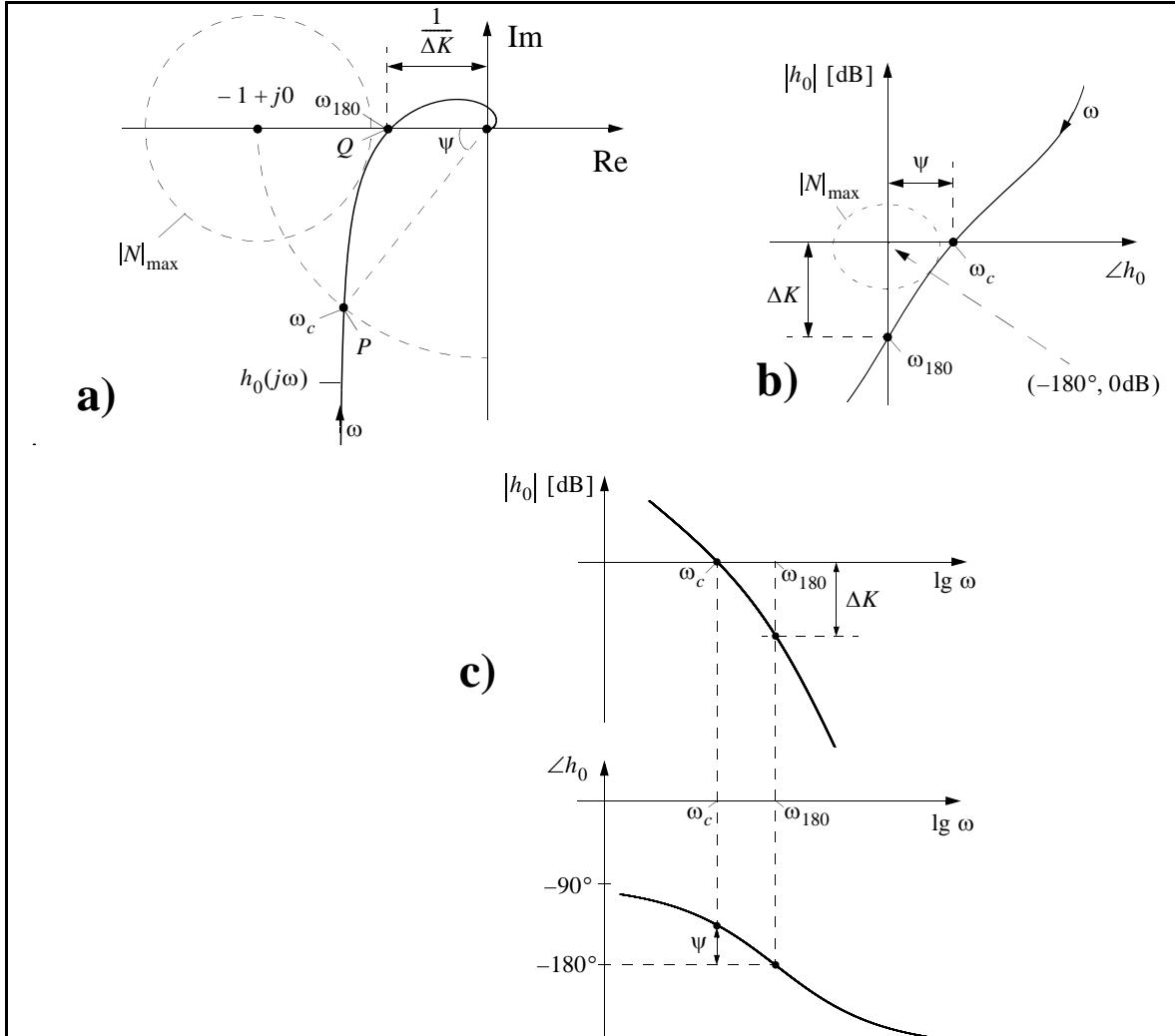
$$N(s) = \frac{1}{1 + h_0(s)}, \quad M(s) = \frac{h_0}{1 + h_0(s)}, \quad M(s) + N(s) = 1, \quad \frac{e}{v}(s) = -h_v(s)N(s) \quad (\text{V.11})$$

Nyquists stabilitetskriterium: Gitt en åpen prosess $h_0(s)$ med N_p poler i høyre halvplan. Vektoren $1 + h_0(j\omega)$ får en netto vinkeldreining (dreieretning er definert positiv mot urviseren) lik

$$\Delta\angle(1 + h_0) = -2\pi(N_n - N_p) \quad \text{når } \omega \text{ går fra } -\infty \text{ til } \infty \quad (\text{V.12})$$

N_n er antall poler i h.h.p. for det lukkede (tilbakekoplede) system. $N_n = 0$ kreves for stabilt system.

(V.13)

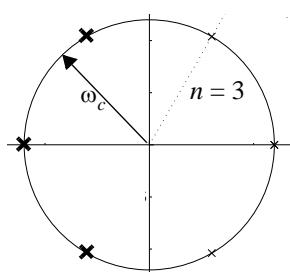


$$\psi = \angle h_0(j\omega_c) - (-180^\circ), \quad \frac{1}{\Delta K} = |h_0(j\omega_{180})|, \quad \Delta K = \frac{1}{|h_0(j\omega_{180})|} \quad (\text{V.14})$$

$$e^{-\tau s} \approx \frac{1 - \tau s/2}{1 + \tau s/2} \quad (\text{V.15})$$

Ziegler-Nichols' lukket-sløyfe-regler:

Regulator	K_p	T_i	T_d	
P	$0.5K_{pk}$	∞	0	, $T_k = \frac{2\pi}{\omega_{180}}$ (V.16)
PI	$0.45K_{pk}$	$0.85T_k$	0	
PID	$0.6K_{pk}$	$0.5T_k$	$0.12T_k$	



Butterworth lavpassfilter av orden n : De n polene i $h(s)$ ligger på hjørnene i venstre halvdel av en regulær mangekant med $2n$ sider, der mangekanten er plassert slik at den ligger symmetrisk om Im-aksen, og hvor avstanden fra origo og ut til hvert hjørne (= pol) er filterets knekkfrekvens ω_c . (V.17)

Høypassfilter med knekkfrekvens ω_c : Lag først lavpassfilter med ω_c . Erstatt så alle s i transferfunksjonen med ω_c^2/s . (V.18)

Røtter er bare i v.h.p. for polynom $\alpha_2 s^2 + \alpha_1 s + \alpha_0$, hvis og bare hvis alle koeffisienter har samme fortegn.
 For 3. ordens polynom $\alpha_3 s^3 + \alpha_2 s^2 + \alpha_1 s + \alpha_0$ kreves i tillegg $\alpha_1 \alpha_2 > \alpha_0 \alpha_3$

Skogestads "SIMC" åpen-sløyfe-metode for PI-innstilling:

Sett på et sprang. Anta at prosessen $\approx h_u = \frac{Ke^{-\tau s}}{1 + T_1 s}$. Mål (dvs. anslå) T_1 , K og τ ut fra responsen.

Velg så $K_p = \frac{T_1}{K(\tau + T_L)}$ og $T_i = \min(T_1, 4(T_L + \tau))$, hvor T_L er ønsket tidskonstant i responsen til det lukkede systemet. T_L bør velges som $T_L > 0.3\tau$, f. eks. $T_L = \tau$.

$$\text{PI-regulator: } h_r = K_p \frac{1 + T_i s}{T_i s} \quad (\text{V.21})$$

$$\text{begrenset PD-regulator: } h_r = K_p \frac{1 + T_d s}{1 + \alpha T_d s} \quad (\text{V.22})$$

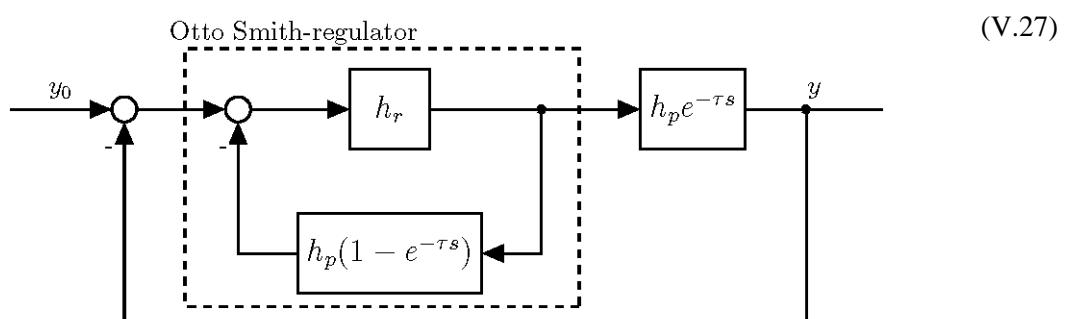
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \vdots & \ddots & & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \dots & -\alpha_{n-2} & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\text{V.23})$$

$$\mathbf{c}^T = [\rho_0 \ \rho_1 \ \rho_2 \ \dots \ \rho_{n-1}]$$

gir $\frac{y}{u}(s) = h(s) = \frac{\rho_{n-1} s^{n-1} + \dots + \rho_1 s + \rho_0}{s^n + \alpha_{n-1} s^{n-1} + \dots + \alpha_1 s + \alpha_0}$

Diskret regulator: Alle s erstattes med $\frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1}$, der z er en tidsforskyvingsoperator.

Diskret regulator brukt på kontinuerlig prosess medfører tilnærma en ekstra tidsforsinkelse = $T/2$ i sløyfetransferfunksjonen.



Sammenshenger mellom tilstandsrombeskrivelse og Laplace, og mellom 1. ordens og høyere ordens lineære systemer

	1. orden (eks.: RC-krets)	Høyere orden
1. Differensiellikning	$\dot{x} = ax + bu \quad (\dot{x} = -\frac{1}{T}x + \frac{1}{T}u)$	$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + Bu$
2. Laplace	$x(s) = \frac{1}{s-a}x(t=0) + \frac{b}{s-a}u(s)$	$\mathbf{x}(s) = (sI - A)^{-1}\mathbf{x}(t=0) + (sI - A)^{-1}Bu(s)$
3. Løsning	$x(t) = e^{at}x(0) + \int_0^t e^{a(t-\tau)}bu(\tau)d\tau$	$\mathbf{x}(t) = e^{At}\mathbf{x}(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$
4. Dekopling	(Triviert): $A = a = \lambda$ = skalar	$A = M\Lambda M^{-1}, \quad e^{At} = M e^{\Lambda t} M^{-1}, \quad \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$
5. Rekkeutvikling	$e^{at} = 1 + at + \frac{a^2 t^2}{2!} + \frac{a^3 t^3}{3!} + \dots$	$e^{At} = \Phi(t) = I + At + \mathbf{A}^2 \frac{t^2}{2!} + \mathbf{A}^3 \frac{t^3}{3!} + \dots$
6. $(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} (s)$	$e^{at} \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s-a} \quad (\frac{1}{T}e^{-t/T} \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{1+Ts})$	$e^{At} \xrightarrow{\mathcal{L}} \Phi(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} (sI - A)^{-1}$
7. Fra $u(s)$ til $y(s)$	$y = cx \quad y(s) = c \frac{b}{s-a} u(s) \quad h(s) = \frac{cb}{s-a}$	$\mathbf{y} = C\mathbf{x} \quad \mathbf{y}(s) = C(sI - A)^{-1}Bu(s) \quad H(s) = C(sI - A)^{-1}\mathbf{B}$
8. Impulsrespons	$h(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} h(s) \quad h(t) = cb e^{at}$	$3) \quad h(t) = \mathbf{c}^T e^{At} \mathbf{b} \xrightarrow{\mathcal{L}} h(s) = \mathbf{c}^T (sI - A)^{-1} \mathbf{b}$

1) $\int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau = e^{At}B * u(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} (sI - A)^{-1}B \cdot u(s)$

2) NB: $e^{At} \neq \{e^{a_{ij}t}\}$, bortsett fra når $A = \Lambda$ er diagonal.

3) Antar nå at u og y er skalare.

4) Hvis y og u er skalare og $\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$ så har vi fra 3. linje at $y(t) = \int_0^t h(t-\tau)u(\tau)d\tau = h(t) * u(t)$

Tilstandsrom:

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + Bu.$$

Egenverdier følger av: $|\lambda I - A| = 0$

Laplace:

$$H(s) = C(sI - A)^{-1}\mathbf{B} = C \frac{\text{adj}(sI - A)}{|sI - A|} \mathbf{B} \Rightarrow \text{Polene gitt av nevneren: } |sI - A| = 0.$$

\Rightarrow poler = egenverdier

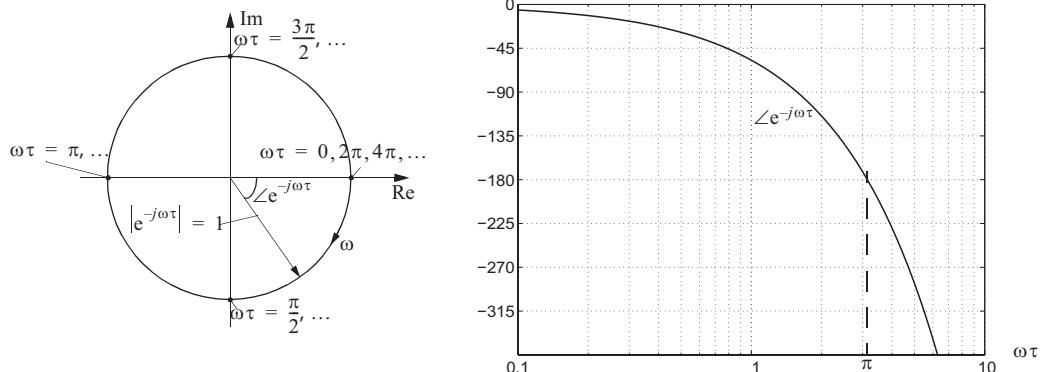
Ordens Transferfunksjon $h(s)$

Polar Impuls- og sprangrespons

Ordens	Transferfunksjon $h(s)$	Polar	Impuls- og sprangrespons
1. orden	$h(s) = \frac{K}{1+Ts} = \frac{\frac{K}{T}}{s + \frac{1}{T}} = \frac{-K\lambda}{s - \lambda}$		impulsrespons: $h(t) = L^{-1}[h(s)] = \frac{K}{T}e^{-t/T}$ sprangrespons: $k(t) = L^{-1}\left[\frac{1}{s}h(s)\right] = \int_0^t h(\tau)d\tau = K(1 - e^{-t/T})$
2. orden, $\zeta = 0$	$\frac{K}{\left(\frac{s}{\omega_0}\right)^2 + 1} = \frac{K\omega_0^2}{s^2 + \omega_0^2} = \frac{K\lambda_1\lambda_2}{(s - \lambda_1)(s - \lambda_2)}$		$h(t) = K\omega_0 \sin \omega_0 t$ $k(t) = K(1 - \cos \omega_0 t)$
2. orden, $\zeta < 1$	$\frac{K}{\left(\frac{s}{\omega_0}\right)^2 + 2\zeta\left(\frac{s}{\omega_0}\right) + 1} = \frac{K\omega_0^2}{s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2} = \frac{K\lambda_1\lambda_2}{(s - \lambda_1)(s - \lambda_2)}$ $= \frac{K(\alpha^2 + \beta^2)}{s^2 + 2\alpha s + (\alpha^2 + \beta^2)}, \quad \omega_0 = \frac{\beta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$		$h(t) = K\left(1 - \frac{\omega_0}{\beta} e^{-\alpha t} \sin(\beta t - \phi)\right)$ $k(t) = K\left(1 - \left[1 + \frac{t}{T}\right] e^{-t/T}\right)$
2. orden, $\zeta = 1$	$\frac{K}{\left(\frac{s}{\omega_0}\right)^2 + 2\left(\frac{s}{\omega_0}\right) + 1} = \frac{K\omega_0^2}{(s + \omega_0)^2} = \frac{K\lambda^2}{(s - \lambda)^2} = \frac{\frac{K}{T^2}}{\left(s + \frac{1}{T}\right)^2}$		$h(t) = \frac{K}{T^2} t e^{-t/T}$ $k(t) = K\left(1 - \left[1 + \frac{t}{T}\right] e^{-t/T}\right)$
2. orden, $\zeta > 1$	$\frac{K}{(1+T_1s)(1+T_2s)} = \frac{\frac{K}{T_1T_2}}{\left(s + \frac{1}{T_1}\right)\left(s + \frac{1}{T_2}\right)} = \frac{K\lambda_1\lambda_2}{(s - \lambda_1)(s - \lambda_2)}$ $\omega_0 = \sqrt{\lambda_1\lambda_2}, \quad \zeta = \frac{-(\lambda_1 + \lambda_2)}{2\sqrt{\lambda_1\lambda_2}}, \text{ gielder for alle } \lambda \neq 0$		$h(t) = \frac{K}{T_1 - T_2} \left(e^{-\frac{t}{T_1}} - e^{-\frac{t}{T_2}} \right)$ $k(t) = K\left(1 + \frac{T_2}{T_1 - T_2} e^{-\frac{t}{T_2}} - \frac{T_1}{T_1 - T_2} e^{-\frac{t}{T_1}}\right)$

Figur 6.17

Nyquist-diagram
og faseforløp i
Bodediagram
for $e^{-j\omega\tau}$



6.4.1 Prosedyre for tegning av asymptotisk AFF-diagram (= bode-diagram)

Her følger en generell prosedyre som alltid kan brukes:

1. Transferfunksjonen bringes over på formen (6.18). Dersom vi har transferfunksjonen

$$h(s) = \frac{K(\dots)}{(\dots)(a+s)}$$

må den omformes til

$$h(s) = \frac{K'(\dots)}{(\dots)(1+T's)}$$

der $K' = K/a$ og $T' = 1/a$. Dette må gjentas like mange ganger som vi har 1.ordens ledd i $h(s)$. Dersom vi har resonansledd

$$h(s) = \frac{K(\dots)}{(\dots)(c+bs+as^2)}$$

må vi først omforme dette til

$$h(s) = \frac{K'(\dots)}{(\dots) \left(1 + 2\zeta \frac{s}{\omega_0} + \left(\frac{s}{\omega_0} \right)^2 \right)}$$

der $K' = K/c$ og $\omega_0 = \sqrt{c/a}$. Poenget er altså at alle ledd i nevner (og i teller!) må ha konstantledd lik 1, det vil si at hvert ledd er lik 1 for $s = j0$. Forsterkning i alle ledd "samles" da i en felles K' , fra nå av bare kalt K .

2. Begynn alltid til venstre i diagrammet, ved de laveste frekvensene ($\omega \ll 1$). (Vi symboliserer "liten ω " med å skrive $\omega \ll 1$.) Ved slike frekvenser kan vi se bort fra virkningen av nullpunkts-, tidskonstant- og resonansledd. Videre prosedyre blir:

Tilfelle a): Hvis vi har q integrasjoner i $h(s)$, $q > 0$, har vi

$$h(j\omega)_{\omega \ll 1} \approx \frac{K}{(j\omega)^q}, \quad |h(j\omega)|_{\omega \ll 1} \approx \frac{K}{\omega^q}, \quad \angle h(j\omega)_{\omega \ll 1} \approx (-q) \cdot 90^\circ$$

q kan selvsagt være lik 0, da er vi over i *Tilfelle b)* nedenfor.

Amplitudeforløp

Asymptoten vil ved lave frekvenser ha helning $-q$ og skjære 0-dB-linjen i $\omega = K^{1/q}$. Dermed kan vi fastlegge venstre del av $|h(j\omega)|_{as}$ og 0-dB-linjen (subskript as betyr “asymptotisk verdi av”. Se forøvrig figur 6.18).

Faseforløp

Dette er enklere. Asymptoten er horisontal og starter til venstre i $(-q) \cdot 90^\circ$.

Tilfelle b): Ingen reine integrasjoner i $h(s)$

Amplitudeforløp: Da har vi $|h(j\omega)|_{\omega \ll 1} = K$, dvs. horisontal asymptote ved lave frekvenser, i K [dB] over 0-dB-linja.

Faseforløpet starter nå til venstre med en horisontal asymptote i 0° .

3. Videre amplitudeforløp

Asymptotene skal utgjøre en sammenhengende serie av linjestykker. Ta utgangspunkt i den venstre asymptoten som allerede er tegnet, og finn den minste **knekkfrekvensen**.

Knekkfrekvensene er der den asymptotiske kurven for et ledd i en transferfunksjon knekker. De er som vist ovenfor den inverse av tidskonstanten i nullpunkts- og tidskonstantledd, og frekvensen ω_0 i et resonansledd.

Finn helningen p på asymptoten til leddet du betrakter. $p = 1$ for nullpunktsledd, -1 for tidskonstantledd og -2 for resonansledd. Tegn et nytt linjestykke fra den minste knekkfrekvensen fram til den *etterfølgende* knekkfrekvensen med en helning som er lik forrige asymptotes helning $+ p$.

Sett “minste knekkfrekvens” = etterfølgende knekkfrekvens og gjenta prosedyren for neste ledd, osv.

Videre faseforløp

Asymptotene er ikke sammenhengende, men er horisontale, og springer opp eller ned ved knekkfrekvensen, med $p \cdot 90^\circ$ målt fra forrige asymptote.

For faseforløpet gjelder unntaksregelen at et nullpunktsledd av typen $1 - T_i s$ gir 90° knekk ned, ikke opp.

EKSEMPEL 6.6: Asymptotisk Bodediagram for en transferfunksjon med flere ledd

Vi ønsker å tegne et asymptotisk amplitudediagram og asymptotisk fasediagram for frekvensresponsen til transferfunksjonen

$$h(s) = \frac{K(1+T_2s)(1+T_3s)}{s(1+T_1s)(1+T_4s)^2} \quad (6.29)$$

der $K = 3$, $T_1 = 40$, $T_2 = 10$, $T_3 = 2$, $T_4 = 0.2$

Vi finner

$$\begin{aligned} \lg |h(j\omega)| &= \lg K + \lg |1 + j\omega T_2| + \lg |1 + j\omega T_3| \\ &\quad - \lg \omega - \lg |1 + j\omega T_1| - 2\lg |1 + j\omega T_4| \end{aligned} \quad (6.30)$$

Figur 6.18

Bodediagram for $h(s)$, eksakt diagram, og asymptotisk diagram

