Diego Alberto Rodríguez Ramírez
DNI: 95.869.907

Nota: 9

Ej 1: 7
Ej 2: 10
Ej 3.a): 10
Ej 3.b): 10

Examen

1. Derivar una definición recursiva para la función especificada como

$$f.xs = \langle \sum i, j \ : 0 \le i \le j < \#xs : \ xs.i * xs.j \rangle$$

1) Caso base para $xs = [\,]$

$$
\begin{aligned}
& f.[\,] \\
\equiv & \{ \text{Especificación} \} \\
& \langle \sum i,j : 0 \le i \le j < \#[\,] : xs.i * xs.j \rangle \\
\equiv & \{ \text{Def de } \# \} \\
& \langle \sum i,j : 0 \le i \le j < 0 : xs.i * xs.j \rangle \\
\equiv & \{ \text{Aritmetica} \} \\
& \langle \sum i,j : False : xs.i * xs.j \rangle \\
\equiv & \{ \text{Idempotencia de conjunción} \} \\
& \langle \sum i,j : False \wedge False : xs.i * xs.j \rangle \\
\equiv & \{ \text{Anidado} \} \\
& \langle \sum i : False : \langle \sum j : False : xs.i * xs.j \rangle \rangle \\
\equiv & \{ \text{Rango vacio} \} \\
& 0
\end{aligned}
$$

? en el libro no piden que el rango sea no vacio para aplicar Anidado. Axioma 6.11 Pag 100

Por lo tanto $f.[\,] \doteq 0$

2)

$$f.xs \overset{H.I}{=} \langle \sum i,j : 0 \le i \le j < \#xs : xs.i * xs.j \rangle$$

$$\Longrightarrow f.(x \triangleright xs) = \langle \sum i,j : 0 \le i \le j < \#(x \triangleright xs) : (x \triangleright xs).i * (x \triangleright xs).j \rangle$$

Proof:

$$
\begin{aligned}
& f.(x \triangleright xs) \\
\equiv & \{ \text{Especificación} \} \\
& \langle \sum i,j : 0 \le i \le j < \#(x \triangleright xs) : (x \triangleright xs).i * (x \triangleright xs).j \rangle
\end{aligned}
$$

Diego Alberto Rodríguez Ramírez
DNI : 95.869.907
Dam.

$\equiv \{ \text{Def de } \# \}$

$\langle \sum i,j : 0 \leq i \leq j < \#.xs + 1 : (x \triangleright xs).i * (x \triangleright xs).j \rangle$

$\equiv \{ \text{Aritmetica} \}$

$\langle \sum i,j : 0 \leq i \wedge i \leq j < \#.xs + 1 : (x \triangleright xs).i * (x \triangleright xs).j \rangle$

$\equiv \{ \text{Anidado} \}$

$\langle \sum i : 0 \leq i : \langle \sum j : i \leq j < \#.xs + 1 : (x \triangleright xs).i * (x \triangleright xs).j \rangle \rangle$

$\equiv \{ \text{Aritmetica} \}$

$\langle \sum i : i = 0 \vee 1 \leq i : \langle \sum j : i \leq j < \#.xs + 1 : (x \triangleright xs).i * (x \triangleright xs).j \rangle \rangle$

$\equiv \{ \text{Partición de rango (Rango no vacío)} \}$

$\langle \sum i : i = 0 : \langle \sum j : i \leq j < \#.xs + 1 : (x \triangleright xs).i * (x \triangleright xs).j \rangle \rangle +$
$\langle \sum i : 1 \leq i : \langle \sum j : i \leq j < \#.xs + 1 : (x \triangleright xs).i * (x \triangleright xs).j \rangle \rangle$

$\equiv \{ \text{Rango unitario ; Cambio de variable } i+1 \leftarrow i \}$

$\langle \sum j : 0 \leq j < \#.xs + 1 : (x \triangleright xs).0 * (x \triangleright xs).j \rangle +$
$\langle \sum i : 1 \leq i+1 : \langle \sum j : i+1 \leq j < \#.xs + 1 : (x \triangleright xs).(i+1) * (x \triangleright xs).j \rangle \rangle$

$\equiv \{ \text{Cambio de variable } j+1 \leftarrow j \}$

$\langle \sum j : 0 \leq j < \#.xs + 1 : (x \triangleright xs).0 * (x \triangleright xs).j \rangle +$
$\langle \sum i : 1 \leq i+1 : \langle \sum j : i+1 \leq j+1 < \#.xs + 1 : (x \triangleright xs).(i+1) * (x \triangleright xs).(j+1) \rangle \rangle$

$\equiv \{ \text{Anidado} \}$

$\langle \sum j : 0 \leq j < \#.xs + 1 : (x \triangleright xs).0 * (x \triangleright xs).j \rangle +$
$\langle \sum i,j : 1 \leq i+1 \leq j+1 < \#.xs + 1 : (x \triangleright xs).(i+1) * (x \triangleright xs).(j+1) \rangle$

$\equiv \{ \text{Aritmetica ; Def de indexar} \}$

$\langle \sum j : 0 \leq j < \#.xs + 1 : x * (x \triangleright xs).j \rangle +$
$\langle \sum i,j : 0 \leq i \leq j < \#.xs : xs.i * xs.j \rangle$

$\equiv \{ \text{Hipotesis inductiva} \}$

(*) $\underline{\langle \sum j : 0 \leq j < \#.xs + 1 : x * (x \triangleright xs).j \rangle} + f.xs$

debo modularizar esta expresión → se podría haber aplicado distributividad

Sea $h.xs \doteq \langle \sum j : 0 \leq j < \#.xs : x * xs.j \rangle$

con $h : [Num] \rightarrow Num$

Diego Alberto Rodríguez Ramírez
DNI : 95.869.907
Diego R.

1) Caso base para h con xs = [ ]

$$h.[\,]$$
$$\equiv \{ \text{Especificación} \}$$
$$\langle \Sigma j : 0 \leq j < \#.[\,] : x * [\,].j \rangle$$
$$= \{ \text{Def de } \# \}$$
$$\langle \Sigma j : 0 \leq j < 0 : x * [\,].j \rangle$$
$$\equiv \{ \text{Aritmetica y Rango vacio} \}$$
$$0$$

Por lo tanto
$$h.[\,] \doteq 0$$

mal
2 variables distintas pero con el mismo nombre

2) $h.xs \overset{H.I}{=} \langle \Sigma j : 0 \leq j < \#.xs : x * xs.j \rangle$

$\Longrightarrow h.(x \triangleright xs) = \langle \Sigma j : 0 \leq j < \#.(x \triangleright xs) : x * (x \triangleright xs).j \rangle$

Proof:
$$h.(x \triangleright xs)$$
$$\equiv \{ \text{Especificación} \}$$
$$\langle \Sigma j : 0 \leq j < \#.(x \triangleright xs) : x * (x \triangleright xs).j \rangle$$
$$\equiv \{ \text{Def de } \# \text{ ; Aritmetica} \}$$
$$\langle \Sigma j : j = 0 \vee 1 \leq j < \#.xs + 1 : x * (x \triangleright xs).j \rangle$$
$$= \{ \text{Partición de rango (Rango no vacio)} \}$$
$$\langle \Sigma j : j = 0 : x * (x \triangleright xs).j \rangle +$$
$$\langle \Sigma j : 1 \leq j < \#.xs + 1 : x * (x \triangleright xs).j \rangle$$
$$\equiv \{ \text{Rango unitario ; Cambio de variable } j+1 \leftarrow j \}$$
$$x * (x \triangleright xs).0 + \langle \Sigma j : 1 \leq j+1 < \#.xs + 1 : x * (x \triangleright xs).(j+1) \rangle$$
$$\equiv \{ \text{Aritmetica ; Def de indexar} \}$$
$$x * x + \langle \Sigma j : 0 \leq j < \#.xs : x * xs.j \rangle$$
$$= \{ \text{Hipotesis inductiva de h} \}$$
$$x * x + h.xs$$

Diego Alberto Rodríguez Ramírez
DNI : 95.869.907

Por lo tanto

$$\begin{array}{|l} h : [Num] \longrightarrow Num \\ \hline h.[\,] \doteq 0 \\ h.(x \triangleright xs) \doteq x * x \;+\; h.xs \end{array}$$

mal programa

Vuelvo a (✱)

$$\langle \sum j : 0 \leq j < \#.xs+1 : x * (x \triangleright xs).j \rangle \;+\; f.xs$$

$$\equiv \{ \text{modularización de } h \}$$

$$h.(x \triangleright xs) + f.xs$$

□

Por lo tanto la definición recursiva de f es :

$$\begin{array}{|l} f : [Num] \longrightarrow Num \\ \hline f.[\,] \doteq 0 \\ f.(x \triangleright xs) \doteq h.(x \triangleright xs) \;+\; f.xs \end{array}$$

con

$$\begin{array}{|l} h : [Num] \longrightarrow Num \\ \hline h.[\,] \doteq 0 \\ h.(x \triangleright xs) \doteq x * x \;+\; h.xs \end{array}$$

Diego Alberto Rodríguez Ramírez

DNI : 95.869.907

Hoja nro 5 de 17

2. a) Derivar el siguiente programa

Const $M : Int$;

Var $a : array\ [0, M)\ of\ Int$;

$r : Bool$;

R: $\{M \geq 0\}$

S

Q : $\{r = \langle \forall i : 0 \leq i \leq M : \langle \sum j : 0 \leq j < i : a.j \rangle \leq \langle N j : 0 \leq j < i : a.j \geq 0 \rangle \rangle\}$

donde el arreglo a no cambia

Paso 1 Para derivar un bucle

Determinar invariante.

Aplico tecnica de reemplazo de constante por variable

Sea

$\{Q' : r = \langle \forall i : 0 \leq i \leq n : \langle \sum j : 0 \leq j < i : a.j \rangle \leq \langle N j : 0 \leq j < i : a.j \geq 0 \rangle \rangle \wedge n = M\}$

probemos que $Q' \Rightarrow Q$

tomo como hipotesis Q', queremos ver si se cumple Q

$Q : r = \langle \forall i : 0 \leq i \leq M : \langle \sum j : 0 \leq j < i : a.j \rangle \leq \langle N j : 0 \leq j < i : a.j \geq 0 \rangle \rangle$

$\equiv \{$ Por hipotesis $M = n \}$

$r = \langle \forall i : 0 \leq i \leq n : \langle \sum j : 0 \leq j < i : a.j \rangle \leq \langle N j : 0 \leq j < i : a.j \geq 0 \rangle \rangle$

$\equiv \{$ Por hipotesis $\}$

$r = r$

$\equiv \{$ Reflexivilidad $\}$

true

Por lo tanto Q' es mas fuerte que Q

Aplico la tecnica de tomar terminos de una conjunción, tenemos como invariante y guarda a:

$\{P_0 : r = \langle \forall i : 0 \leq i \leq n : \langle \sum j : 0 \leq j < i : a.j \rangle \leq \langle N j : 0 \leq j < i : a.j \geq 0 \rangle \rangle\}$

$\{B : n \neq M\}$ ← guarda ← invariante

Diego Alberto Rodríguez Ramírez
DNI: 95.869.907

Es necesario fortalecer el invariante agregando que $0 \leq n \leq M$ con el fin de evitar indefiniciones.

Sea $\{P : P_0 \wedge 0 \leq n \leq M\}$

Probemos que $P \Rightarrow P_0$

tomo como hipotesis P, y hago cumplir P_0

$P_0 : r = \langle \forall i : 0 \leq i \leq n : \langle \sum j : 0 \leq j < i : a.j \rangle \leq \langle N j : 0 \leq j < i : a.j > 0 \rangle \rangle$

$\equiv \{$ Por hipotesis $\}$

$r = r$

$\equiv \{$ Reflexividad $\}$

true $\square$

luego $[P \Rightarrow P_0]$ i.e. tenemos un invariante mas fuerte P es el nuevo invariante.

4) Salto al paso 4

tomo como cota la cota usual $t.n : M - n$

5) Postulo a cuerpo del bucle $r, n := E, n+1;$ Para hacer decrecer la cota.

$\{P \wedge B\}\ r, n := E, n+1\ \{P\}$

$\equiv \{$ verificación con precondición mas debil $\}$

$P \wedge B \Rightarrow wp.(r, n := E, n+1).P$

tomo como hipotesis $\{P \wedge B\}$, quiero hallar E tal que se cumpla la wp

$wp.(r, n := E, n+1).P$

$\equiv \{$ Def de wp $\}$

Diego Alberto Rodríguez Ramírez
DNI: 95.869.907

$$P.(r,n := E, n+1)$$

$\equiv$ { Sustitución }

$E = \langle \forall i : 0 \leq i \leq n+1 : \langle \sum j : 0 \leq j < i : a.j \rangle \leq \langle N j : 0 \leq j < i : a.j > 0 \rangle \rangle \wedge \underline{0 \leq n+1 \leq M}$

$\equiv$ { Aritmetica y hipotesis }

$E = \langle \forall i : 0 \leq i \leq n+1 : \langle \sum j : 0 \leq j < i : a.j \rangle \leq \langle N j : 0 \leq j < i : a.j > 0 \rangle \rangle \wedge true$

$\equiv$ { Aritmetica }

$E = \langle \forall i : 0 \leq i \leq n \vee i = n+1 : \langle \sum j : 0 \leq j < i : a.j \rangle \leq \langle N j : 0 \leq j < i : a.j > 0 \rangle \rangle \wedge true$

$\equiv$ { Partición de rango (Rango no vacio) ; Neutro de $\wedge$ }

$E = \langle \forall i : 0 \leq i \leq n : \langle \sum j : 0 \leq j < i : a.j \rangle \leq \langle N j : 0 \leq j < i : a.j > 0 \rangle \rangle \wedge$
$\langle \forall i : i = n+1 : \langle \sum j : 0 \leq j < i : a.j \rangle \leq \langle N j : 0 \leq j < i : a.j > 0 \rangle \rangle$

$\equiv$ { Por hipotesis }

$E = r \wedge \langle \forall i : i = n+1 : \langle \sum j : 0 \leq j < i : a.j \rangle \leq \langle N j : 0 \leq j < i : a.j > 0 \rangle \rangle$

$\equiv$ { Rango unitario }

$E = r \wedge \langle \sum j : 0 \leq j < n+1 : a.j \rangle \leq \langle N j : 0 \leq j < n+1 : a.j > 0 \rangle$

$\equiv$ { Aritmetica }

$E = r \wedge \langle \sum j : 0 \leq j < n \vee j = n : a.j \rangle \leq \langle N j : 0 \leq j < n \vee j = n : a.j > 0 \rangle$

$\equiv$ { Partición de rango x2 }

$E = r \wedge \langle \sum j : 0 \leq j < n : a.j \rangle + \underline{\langle \sum j : j = n : a.j \rangle} \leq \langle N j : 0 \leq j < n : a.j > 0 \rangle$
$+ \langle N j : j = n : a.j > 0 \rangle$

$\equiv$ { Rango unitario }

$E = r \wedge \langle \sum j : 0 \leq j < n : a.j \rangle + a.n \leq \langle N j : 0 \leq j < n : a.j > 0 \rangle$
$+ \langle N j : j = n : a.j > 0 \rangle$

$\equiv$ { Introduzco var u, w : Int con $u = \langle \sum j : 0 \leq j < n : a.j \rangle$
y $w = \langle N j : 0 \leq j < n : a.j > 0 \rangle$ }

$E = r \wedge u + a.n \leq w + \langle N j : j = n : a.j > 0 \rangle$

$|[u = \langle \sum j : 0 \leq j < n : a.j \rangle , w = \langle N j : 0 \leq j < n : a.j > 0 \rangle]|$

Debemos reforzar el invariante agregando que
$u = \langle \sum j : 0 \leq j < n : a.j \rangle \wedge w = \langle N j : 0 \leq j < n : a.j > 0 \rangle$

Diego Alberto Rodríguez Ramírez
DNI : 95.869.907

Sea $\{ P_1 : P \wedge u = \langle \sum j : 0 \leq j < n : a.j \rangle \wedge w = \langle N j : 0 \leq j < n : a.j > 0 \rangle \}$

Probemos que $P_1 \Rightarrow P$

$P \wedge u = \langle \sum j : 0 \leq j < n : a.j \rangle \wedge w = \langle N j : 0 \leq j < n : a.j > 0 \rangle \Rightarrow P$

$\equiv$ { Debilitamiento para conjunción, t26 del digesto de introducción a los algoritmos }

true $\square$

Luego P es mas debil que P_1 o equivalentemente P_1 es mas fuerte que P

hagamos de nuevo el paso 5, esta vez con P_1 como invariante

$\{ P_1 \wedge B \} \; r, u, w, n := E, F, L, n+1 \; \{ P_1 \}$

$\equiv$ { verificación con precondición mas debil }

$P_1 \wedge B \Rightarrow wp.(r, u, w, n := E, F, L, n+1).P_1$

tomo como hipotesis $\{P_1 \wedge B\}$, quiero hallar E, F, L tal que se cumpla la wp

$wp.(r, u, w, n := E, F, L, n+1).P_1$

$\equiv$ { Def de wp }

$P_1.(r, u, w, n := E, F, L, n+1)$

$\equiv$ { Sustitución }

$E = \langle \forall i : 0 \leq i \leq n+1 : \langle \sum j : 0 \leq j < i : a.j \rangle \leq \langle N j : 0 \leq j < i : a.j > 0 \rangle \rangle \wedge \underline{0 \leq n+1 \leq M}$

$\wedge \; F = \langle \sum j : 0 \leq j < n+1 : a.j \rangle \wedge L = \langle N j : 0 \leq j < n+1 : a.j > 0 \rangle$

$\equiv$ { Aritmetica, Sup }

Diego Alberto Rodríguez Ramírez
DNI : 95.869.907

$E = \langle \forall i : 0 \leq i \leq n+1 : \langle \sum j : 0 \leq j < i : a.j \rangle \leq \langle N j : 0 \leq j < i : a.j > 0 \rangle \rangle \wedge true$
$\wedge\ F = \langle \sum j : 0 \leq j < n+1 : a.j \rangle \wedge L = \langle N j : 0 \leq j < n+1 : a.j > 0 \rangle$

$\equiv$ { Aritmetica ; Neutro de conjunción }

$E = \langle \forall i : 0 \leq i \leq n \vee i = n : \langle \sum j : 0 \leq j < i : a.j \rangle \leq \langle N j : 0 \leq j < i : a.j > 0 \rangle \rangle$
$\wedge\ F = \langle \sum j : 0 \leq j < n+1 : a.j \rangle \wedge L = \langle N j : 0 \leq j < n+1 : a.j > 0 \rangle$

$\equiv$ { Partición de rango ; Rango unitario }

$E = \underline{\langle \forall i : 0 \leq i \leq n : \langle \sum j : 0 \leq j < i : a.j \rangle \leq \langle N j : 0 \leq j < i : a.j > 0 \rangle \rangle} \wedge$
$\langle \sum j : 0 \leq j < n+1 : a.j \rangle \leq \langle N j : 0 \leq j < n+1 : a.j > 0 \rangle \wedge$
$F = \langle \sum j : 0 \leq j < n+1 : a.j \rangle \wedge L = \langle N j : 0 \leq j < n+1 : a.j > 0 \rangle$

$\equiv$ { Por hipotesis }

$E = r \wedge \langle \sum j : 0 \leq j < n+1 : a.j \rangle \leq \langle N j : 0 \leq j < n+1 : a.j > 0 \rangle$
$F = \langle \sum j : 0 \leq j < n+1 : a.j \rangle \wedge L = \langle N j : 0 \leq j < n+1 : a.j > 0 \rangle$

$\equiv$ { Aritmetica en todos los rangos }

$E = r \wedge \langle \sum j : 0 \leq j < n \vee j = n : a.j \rangle \leq \langle N j : 0 \leq j < n \vee j = n : a.j > 0 \rangle$
$\wedge\ F = \langle \sum j : 0 \leq j < n \vee j = n : a.j \rangle \wedge L = \langle N j : 0 \leq j < n \vee j = n : a.j > 0 \rangle$

$\equiv$ { Partición de rango en todos los rangos }

$E = r \wedge \langle \sum j : 0 \leq j < n : a.j \rangle + \langle \sum j : j = n : a.j \rangle \leq \langle N j : 0 \leq j < n : a.j > 0 \rangle +$
$\langle N j : j = n : a.j > 0 \rangle$
$\wedge\ F = \langle \sum j : 0 \leq j < n : a.j \rangle + \langle \sum j : j = n : a.j \rangle \wedge$
$L = \langle N j : 0 \leq j < n : a.j > 0 \rangle + \langle N j : j = n\ a.j > 0 \rangle$

$\equiv$ { Por hipotesis de u y w ; Rango unitario }

$E = r \wedge u + a.n \leq w + \langle N j : j = n : a.j > 0 \rangle \wedge$
$F = u + a.n \wedge L = w + \langle N j : j = n : a.j > 0 \rangle$

$\equiv$ { Definición de conteo }

$E = r \wedge u + a.n \leq w + \langle \sum j : j = n \wedge a.j > 0 : 1 \rangle \wedge$
$F = u + a.n \wedge L = w + \langle \sum j : j = n \wedge a.j > 0 : 1 \rangle$

$\equiv$ { Leibniz 2 }

$E = r \wedge u + a.n \leq w + \langle \sum j : j = n \wedge a.n > 0 : 1 \rangle \wedge$
$F = u + a.n \wedge L = w + \langle \sum j : j = n \wedge a.n > 0 : 1 \rangle$

Diego Alberto Rodríguez Ramírez
DNI : 95.869.907

Se introduce if

$\equiv$ { Regla de analisis por casos }

Caso $a.n > 0$ ← Sup

$E = r \wedge u + a.n \leq w + \langle \Sigma j : j = n \wedge a.n > 0 : 1 \rangle \wedge$
$F = u + a.n \wedge L = w + \langle \Sigma j : j = n \wedge a.n > 0 : 1 \rangle$

$\equiv$ { Por Sup }

$E = r \wedge u + a.n \leq w + \langle \Sigma j : j = n \wedge true : 1 \rangle \wedge$
$F = u + a.n \wedge L = w + \langle \Sigma j : j = n \wedge true : 1 \rangle$

$\equiv$ { Neutro de conjunción y Rango unitario }

$E = r \wedge u + a.n \leq w + 1 \wedge F = u + a.n \wedge L = w + 1$

$\equiv$ { $E \leftarrow r \wedge u + a.n \leq w+1$; $F \leftarrow u + a.n$; $L \leftarrow w + 1$ }

$r \wedge u + a.n \leq w+1 \equiv r \wedge u + a.n \leq w+1 \wedge$
$u + a.n = u + a.n \wedge w+1 = w+1$

$\equiv$ { Netro de equivalencia ; Aritmetica }

$true \wedge true \wedge true$

$\equiv$ { Neutro de conjunción }

$True$

Por lo tanto si $a.n > 0$
entonces la asignación sera
$r, u, w, n := r \wedge u + a.n \leq w+1, u + a.n, w+1, n+1$;

Caso $\neg(a.n > 0)$ ← Sup

$E = r \wedge u + a.n \leq w + \langle \Sigma j : j = n \wedge a.n > 0 : 1 \rangle \wedge$
$F = u + a.n \wedge L = w + \langle \Sigma j : j = n \wedge a.n > 0 : 1 \rangle$

$\equiv$ { Doble negación }

Diego Alberto Rodríguez Ramírez
DNI : 95.869.907

$E = r \wedge u + a.n \leq w + \langle \Sigma j : j = n \wedge \neg\neg(a.n > 0) : 1 \rangle \quad \wedge$
$F = u + a.n \wedge L = w + \langle \Sigma j : j = n \wedge \neg\neg(a.n > 0) : 1 \rangle$
$\equiv$ { Por sup }
$E = r \wedge u + a.n \leq w + \langle \Sigma j : j = n \wedge \neg true : 1 \rangle \quad \wedge$
$F = u + a.n \wedge L = w + \langle \Sigma j : j = n \wedge \neg true : 1 \rangle$
$\equiv$ { Definición de False }
$E = r \wedge u + a.n \leq w + \langle \Sigma j : j = n \wedge False : 1 \rangle \quad \wedge$
$F = u + a.n \wedge L = w + \langle \Sigma j : j = n \wedge False : 1 \rangle$
$\equiv$ { Absorbente y rango vacio }
$E = r \wedge u + a.n \leq w \wedge F = u + a.n \wedge L = w$
$\equiv$ { $E \leftarrow r \wedge u + a.n \leq w$; $F \leftarrow u + a.n$; $L \leftarrow w$ }
$r \wedge u + a.n \leq w \equiv r \wedge u + a.n \leq w \wedge u + a.n = u + a.n \wedge w = w$
$\equiv$ { Neutro de equivalencia y Aritmetica }
$true \wedge true \wedge true$
$\equiv$ { Neutro de conjunción }
$true$

Por lo tanto si $\neg(a.n > 0)$
Entonces la asignación sera
$r, u, w, n := r \wedge u + a.n \leq w, u + a.n, w, n+1$;

y en ambos casos se mantiene el invariante.

Ahora hagamos la inicialización para r, u, w, n
i.e.
$\{R: M \geq 0\}\ r, u, w, n := E, F, L, A\ \{P_1\}$
$\equiv$ { Verificación con wp }
$M \geq 0 \Rightarrow wp.(r, u, w, n := E, F, L, A).P_1$
tomo como hipotesis $M \geq 0$, busco E, F, L, A tal que se cumpla la wp

Diego Alberto Rodríguez Ramírez
DNI : 95.869.907

$$wp.(r,u,w,n := E,F,L,A).P_1$$
$\equiv$ { Def de wp }
$$P_1.(r,u,w,n := E,F,L,A)$$
$\equiv$ { sustitución }
$$E = \langle \forall i : 0 \leq i \leq A : \langle \sum j : 0 \leq j < i : a.j \rangle \leq \langle N j : 0 \leq j < i : a.j > 0 \rangle \rangle \wedge 0 \leq A \leq M$$
$$\wedge\ F = \langle \sum j : 0 \leq j < A : a.j \rangle \wedge L = \langle N j : 0 \leq j < A : a.j > 0 \rangle$$
$\equiv$ { $A \leftarrow 0$ }
$$E = \langle \forall i : 0 \leq i \leq 0 : \langle \sum j : 0 \leq j < i : a.j \rangle \leq \langle N j : 0 \leq j < i : a.j > 0 \rangle \rangle \wedge 0 \leq 0 \leq M$$
$$\wedge\ F = \langle \sum j : 0 \leq j < 0 : a.j \rangle \wedge L = \langle N j : 0 \leq j < 0 : a.j > 0 \rangle$$
$\equiv$ { Aritmetica , Por sup $M \geq 0$ }
$$E = \langle \forall i : i = 0 : \langle \sum j : 0 \leq j < i : a.j \rangle \leq \langle N j : 0 \leq j < i : a.j > 0 \rangle \rangle \wedge true$$
$$\wedge\ F = \langle \sum j : False : a.j \rangle \wedge L = \langle N j : False : a.j > 0 \rangle$$
$\equiv$ { Rango unitario ; Rango vacio }
$$E = \langle \sum j : 0 \leq j < 0 : a.j \rangle \leq \langle N j : 0 \leq j < 0 : a.j > 0 \rangle \wedge true$$
$$\wedge\ F = 0 \wedge L = 0$$
$\equiv$ { Aritmetica y Rango vacio }
$$E = 0 \leq 0 \wedge true \wedge F = 0 \wedge L = 0$$
$\equiv$ { Aritmetica }
$$E = true \wedge true \wedge F = 0 \wedge L = 0$$
$\Leftarrow$ { $E \leftarrow true$; $F \leftarrow 0$; $L = 0$ }
$$true = true \wedge true \wedge 0 = 0 \wedge 0 = 0$$
$\equiv$ { Aritmetica }
$$true = true \wedge true \wedge true \wedge true$$
$\equiv$ { Neutro de conjunción y Neutro de equivalencia }
$$true$$

Por lo tanto inicializar en $r,u,w,n := true, 0, 0, 0;$ mantiene P_1

Diego Alberto Rodríguez Ramírez
DNI: 95.869.907

hasta ahora tenemos

$[\![$ Cons M : Int
Var a : array$[0, M)$ of Int;
r : Bool;
u : Int;
w : Int;
$\{R: M \geq 0\}$
$r, u, w, n := true, 0, 0, 0;$
do $n \neq M \longrightarrow$
if $a.n > 0 \longrightarrow$
$r, u, w, n := r \wedge u + a.n \leq w+1, u + a.n, w+1, n+1;$
$\square$ $a.n \leq 0 \longrightarrow$
$r, u, w, n := r \wedge u + a.n \leq w, u + a.n, w, n+1;$
fi
od
$\{Q: r = \langle \forall i : 0 \leq i \leq M : \langle \sum j : 0 \leq j < i : a.j \rangle \leq \langle N j : 0 \leq j < i : a.j > 0 \rangle \rangle \}$
$]\!]$

Ahora Probemos el Paso 3.- finalización

$$P_1 \wedge \neg B \Longrightarrow Q$$

tomamos como hipotesis $\{P_1 \wedge \neg B\}$, veamos si se cumple Q

$Q: \; r = \langle \forall i : 0 \leq i \leq M : \langle \sum j : 0 \leq j < i : a.j \rangle \leq \langle N j : 0 \leq j < i : a.j > 0 \rangle \rangle$
$\equiv \{$ Por hipotesis $\neg B : n = M \}$
$r = \langle \forall i : 0 \leq i \leq n : \langle \sum j : 0 \leq j < i : a.j \rangle \leq \langle N j : 0 \leq j < i : a.j > 0 \rangle \rangle$
$\equiv \{$ Por hipotesis $P_1 \}$
$r = r$

Diego Alberto Rodríguez Ramírez
DNI : 95.869.907

$\equiv$ { Neutro de equivalencia }
true □

Por lo tanto el programa termina.

Ahora probemos que la cota esta acotada inferiormente

$$P_1 \wedge B \implies M - n \geq 0$$

tomamos como hipotesis $\{P_1 \wedge B\}$, veamos si es cierto que $M - n \geq 0$.

$M - n \geq 0$
$\equiv$ { Aritmetica }
$M \geq n$
$\equiv$ { Por hipotesis }
true □

Por lo tanto la cota es positiva

Ahora probemos que la cota disminuye

$\{ P_1 \wedge B \wedge M - n = T \}$
  if $a.n > 0 \longrightarrow$
    $r, u, w, n := r \wedge u + a.n \leq w + 1,\ u + a.n,\ w + 1,\ n + 1;$
  $\square$ $\neg(a.n > 0) \longrightarrow$
    $r, u, w, n := r \wedge u + a.n \leq w,\ u + a.n,\ w,\ n + 1;$
  fi
$\{ M - n < T \}$

Diego Alberto Rodríguez Ramírez
DNI: 95.869.907

Verificación con wp

$$P_1 \wedge B \wedge M-n=t \quad \Rightarrow wp.(if \ldots fi).(M-n<t)$$

tomamos como hipotesis $\{P_1 \wedge B \wedge M-n=t\}$,
veamos si se cumple la $wp.(if \ldots fi).(M-n<t)$

$$wp.(if \ldots fi).(M-n<t)$$
$$\equiv \{\text{Definición de wp del condicional}\}$$
$$(a.n>0 \vee \neg(a.n>0)) \wedge$$
$$(a.n>0 \Rightarrow wp.(r,u,w,n := r \wedge u+a.n \leq w+1, u+a.n, w+1, n+1).(M-n<t))$$
$$\wedge(\neg(a.n>0) \Rightarrow wp.(r,u,w,n := r \wedge u+a.n \leq w, u+a.n, w, n+1).(M-n<t))$$
$$\equiv \{\text{tercero excluido y Neutro de conjunción}\}$$
$$(a.n>0 \Rightarrow wp.(r,u,w,n := r \wedge u+a.n \leq w+1, u+a.n, w+1, n+1).(M-n<t))$$
$$\wedge(\neg(a.n>0) \Rightarrow wp.(r,u,w,n := r \wedge u+a.n \leq w, u+a.n, w, n+1).(M-n<t))$$
$$\equiv \{\text{Def de wp } x2\}$$
$$(a.n>0 \Rightarrow M-(n+1)<t) \wedge (\neg(a.n>0) \Rightarrow M-(n+1)<t)$$
$$\equiv \{\text{Aritmetica}\}$$
$$(a.n>0 \Rightarrow M-n-1<t) \wedge (\neg(a.n>0) \Rightarrow M-n-1<t)$$
$$\equiv \{\text{Por hipotesis } M-n=t\}$$
$$(a.n>0 \Rightarrow t-1<t \wedge (\neg(a.n>0) \Rightarrow t-1<t)$$
$$\equiv \{\text{Aritmetica}\}$$
$$(a.n>0 \Rightarrow true) \wedge (\neg(a.n>0) \Rightarrow true)$$
$$\equiv \{\text{teorema 3.38 del Libro } [X \Rightarrow true]\}$$
$$true \wedge true$$
$$\equiv \{\text{Neutro de conjunción}\}$$
$$true$$

$\square$

Por lo tanto la cota disminuye. fin $\#$

Diego Alberto Rodríguez Ramírez
DNI : 95.869.907
Hoja nro 16 de 17

3. Especificar con pre y poscondición (terna de Hoare) los siguientes problemas:

   a) Dados dos arreglos a y b determinar si todos los elementos en a son mayores a algún elemento de b.

   b) Dado un arreglo a decir si la suma de los elementos de algún segmento del mismo es mayor a 0.

a) |[Cons M : Int
N : Int
Var a : array[0,N) of Int;
b : array[0,M) of Int
r : Bool ;
$\{ N \geq 0 \wedge M \geq 0 \}$
S
$\{ r \equiv \langle \forall i : 0 \leq i < N : \langle \exists j : 0 \leq j < M : a.i > b.j \rangle \rangle \}$
]|

b) |[Cons N : Int
Var a : array[0,N) of Int;
r : Bool ;
$\{ N \geq 1 \}$
S
$\{ r \equiv \langle \exists p,q : 0 \leq p \leq q \leq N : \langle \sum i : p \leq i < q : a.i \rangle > 0 \rangle \}$
]|

Diego Alberto Rodríguez Ramírez
DNI : 95.869.907

Por la presente declaro que la resolución de este examen es obra de mi exclusiva autoría y respetando las pautas y criterios fijados en los enunciados. Asimismo declaro conocer el régimen de infracción de los estudiantes cuyo texto ordenado se encuentra en el apéndice de la Res. Rec. 1554/2018.

Diego Alberto Rodríguez Ramírez