(7) Sea Γ consistente maximal y suponga $\{p_0, \neg(p_1 \to p_2), p_3 \vee p_2\} \subseteq \Gamma$. Decida si las siguientes proposiciones están en Γ. (Ayuda: usar Completitud, o la caracterización de consistente maximal).
(a) $\neg p_0$
(b) $((\neg p_1) \vee p_2)$
(c) p_3
(d) $p_2 \to p_5$
(e) $p_1 \vee p_6$

$\{p_0, \neg(p_1 \longrightarrow p_2), p_3 \vee p_2\} \subseteq \Gamma$ consistente maximal

a) $p_0 \in \Gamma$
$\equiv\{$ Lema 33 $\}$
$\neg p_0 \notin \Gamma$

b) $(\neg(p_1) \vee p_2) \overset{?}{\in} \Gamma$

Como Γ es consistente, por Lema 28 $\exists f$ asignación tal que f valida Γ.
En particular f valida el subconjunto $\{p_0, \neg(p_1 \longrightarrow p_2), p_3 \vee p_2\} \subseteq \Gamma$
Determinemos los valores de f para que f valide el subconjunto

$[\![p_0]\!]_f = 1$
$\equiv\{$ La afirmación es cierta sii $f(p_0) := 1$ $\}$
true

$[\![\neg(p_1 \longrightarrow p_2)]\!]_f = 1$
$\equiv\{$ Ejercicio 4 del Apunte $\}$
$1 - [\![p_1 \longrightarrow p_2]\!]_f = 1$
$\equiv\{$ Aritmética $\}$
$[\![p_1 \longrightarrow p_2]\!]_f = 0$
$\equiv\{$ Def de semántica con respecto a $(\longrightarrow)$ $\}$
$[\![p_1]\!]_f = 1$ & $[\![p_2]\!]_f = 0$
$\equiv\{$ La afirmación es cierta sii $f(p_1) := 1$ & $f(p_2) := 0$ $\}$
true

$[\![p_3 \vee p_2]\!]_f = 1$

$\equiv$ { Def de semántica con respecto a $(\vee)$ }

$max\{ [\![p_3]\!]_f , [\![p_2]\!]_f \} = 1$

$\equiv$ { Construcción de f, def de max }

$[\![p_3]\!]_f = 1$

$\equiv$ { La afirmación es cierta sii $f(p_3) := 1$ }

true

Luego f valida el subconjunto de Γ sii $f(p_0) = f(p_1) = f(p_3) = 1$ & $f(p_2) = 0$

Supongamos que $(\neg(p_1) \vee p_2) \in \Gamma$

$[\![\neg(p_1) \vee p_2]\!]_f = 1$

$\equiv$ { Def de semántica con respecto a $(\vee)$ }

$max\{ [\![\neg(p_1)]\!]_f , [\![p_2]\!]_f \} = 1$

$\equiv$ { Ejercicio 4 del Apunte }

$max\{ 1 - [\![p_1]\!]_f , [\![p_2]\!]_f \} = 1$

$\equiv$ { Construcción de f, Aritmética, Def de max }

False

Como suponer $(\neg(p_1) \vee p_2) \in \Gamma$ es contradictorio, concluimos $(\neg(p_1) \vee p_2) \notin \Gamma$