(5) Utilizando como motivación con los ejercicios 2b y 2c, responda:

(a) Sea R una relación irreflexiva y transitiva ("relación de orden parcial estricto") sobre un conjunto A. Probar que $R \cup$ Igualdad$_A$ es una relación de orden parcial sobre A.

(b) ¿Cómo se podrá obtener una relación de orden parcial estricto a partir de una relación de orden parcial?

DEFINICIÓN 5.1. Un *orden parcial* R sobre un conjunto es una relación que es reflexiva, antisimétrica y transitiva.

a) Sea $Q = R \cup =_A$ la relación sobre A

Queremos probar que Q es Antisimetrica y reflexiva

Sea $q \in A \Rightarrow q\,Q\,q$ sii $q =_A q$ sii $(q,q) \in =_A \subseteq Q$

Luego $\forall a \in A,\ a\,Q\,a$ i.e. La relación Q es reflexiva sobre A.

Sean $p,q \in A$, Probemos que si $(p,q) \in Q$ & $(q,p) \in Q \Rightarrow p=q$

Supongamos que $p \neq q$ ya que si $p=q$ entonces no hay nada que probar

Entonces $(p,q) \in Q$ & $(q,p) \in Q$

$=\{$ Definición de $Q \}$

$(p,q) \in R$ & $(q,p) \in R$

$=\{$ transitividad de $R \}$

$(p,p) \in R$

Absurdo !!!

R es irreflexiva i.e. $\forall a\, A\ (a,a) \notin R$

Notar que una relación irreflexiva $\neq$ relación No reflexiva

No reflexiva $\exists a\, A : (a,a) \notin R$

Luego no queda mas opción que tomar $p=q$

con lo cual Q es Antisimetrica y finalmente relación de orden Parcial sobre A.

$\square$