(5) Demostrar que $\Gamma^+ := \{\varphi \in PROP : \varphi$ no contiene los conectivos "$\neg$" ni "$\perp$"$\}$ es consistente (Ayuda: construir una f tal que $[\![\varphi]\!]_f = 1$ para toda $\varphi \in \Gamma^+$).

Sean $H_{At} : At \longrightarrow A$ & $H_{\odot} : A^2 \longrightarrow A$ funciones tales que

$H_{At} : At \longrightarrow A$
$H_{At}(p_i) := \text{true}$
$H_{At}(\perp) := \text{False}$

$H_{\odot} : A^2 \longrightarrow A$
$H_{\odot}(\varphi, \psi) := \varphi \wedge \psi$

Donde $A := \{\text{true}, \text{False}\}$

Por teorema 6 $\exists!$ función $\text{sin\_bottom} : Prop \longrightarrow A$ tal que

$$\begin{cases} \text{sin\_bottom}(\varphi) := H_{At}(\varphi) & \text{si } \varphi \in At \\ \text{sin\_bottom}(\varphi \circ \psi) := H_{\odot}(\text{sin\_bottom}(\varphi), \text{sin\_bottom}(\psi)) & \end{cases}$$

La función sin_bottom es equivalente al predicado que indica que un una proposición no contiene el átomo $\perp$

Luego $\Gamma^+ = \{\varphi \in Prop : \text{sin\_bottom}(\varphi)\}$

Por Lema 34
Γ^+ es consistente $\Longrightarrow$ $\exists \delta$ asignación tal que δ valida Γ^+
Sea δ asignación tal que $\delta(p_i) := 1 \quad \forall i \in \mathbb{N}_0$
Por teorema 9 $\exists [\![\cdot]\!]_\delta$ que extiende a δ sobre Γ^+
Probemos por inducción que $\text{sin\_bottom}(\varphi) \Longrightarrow [\![\varphi]\!]_\delta = 1 \quad \forall \varphi \in \Gamma^+$

$\boxed{\varphi \in At}$

si $\varphi = p_i$

$\text{sin\_bottom}(p_i)$
$= \{\text{Def de sin\_bottom}\}$
true
$\Longrightarrow \{\text{Hipótesis inductiva}\}$
$[\![p_i]\!]\delta = 1$
$= \{\text{Construcción de } \delta\}$
$1 = 1$
$\equiv \{\text{Aritmética}\}$
true

si $\varphi = \bot$

$\text{sin\_bottom}(\bot)$
$= \{\text{Def de sin\_bottom}\}$
False
$\Longrightarrow \{\text{Hipótesis inductiva contrarrecíproca}\}$
$[\![\bot]\!]\delta = 0$
$= \{\text{Def de semántica con respecto a } (\bot)\}$
$0 = 0$
$\equiv \{\text{Aritmética}\}$
true

$\boxed{(\varphi \odot \psi)}$

$$
\begin{aligned}
& \text{sin\_bottom}(\varphi \odot \psi) \\
= \{ & \text{ Def de sin\_bottom } \} \\
& \text{sin\_bottom}(\varphi) \wedge \text{sin\_bottom}(\psi) \\
\Longrightarrow \{ & \text{ Hipótesis inductiva x2 } \} \\
& [\![\varphi]\!]\delta = 1 \wedge [\![\psi]\!]\delta = 1 \\
= \{ & \text{ Construcción de } \delta \ \} \\
& 1 = 1 \wedge 1 = 1 \\
\equiv \{ & \text{ Aritmética \& Def de } \wedge \ \} \\
& \text{true}
\end{aligned}
$$

Por lo tanto se cumple que $\exists \delta$ asignación tal que $[\![\varphi]\!]\delta = 1 \quad \forall \varphi \in \Gamma^+$

Con lo cual se concluye que Γ^+ es consitente