

(4) Encuentre derivaciones para:

$$(a) \vdash (\varphi \rightarrow \psi) \vee (\psi \rightarrow \varphi)$$
$$(b) \vdash (\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\neg\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \psi$$
$$a) \vdash (\varphi \rightarrow \psi) \vee (\psi \rightarrow \varphi)$$

[illegible]

4. $[\psi]_4$ 1. $[\varphi]_1$

2. $[\neg\varphi]_2$ 3. $[\varphi]_3$

5. $[\neg(\varphi \vee \neg\varphi)]_5$ 6. $[\varphi]_6$

$$b) \vdash (\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\neg\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \psi$$

$$\begin{array}{c}
 \frac{\frac{\frac{\perp}{\neg\varphi} \rightarrow I_s}{\neg\varphi} \vee I \quad \frac{[\neg(\varphi \vee \neg\varphi)]_4}{\varphi \vee \neg\varphi} \rightarrow E}{\frac{\perp}{\varphi \vee \neg\varphi} RAA_4} \quad \frac{\frac{[\varphi]_s}{[\varphi]_s \vee \neg\varphi} \vee I \quad \frac{[\neg(\varphi \vee \neg\varphi)]_4}{[\varphi]_s \vee \neg\varphi} \rightarrow E}{\frac{\perp}{\varphi \vee \neg\varphi} RAA_4} \quad \frac{\frac{[(\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\neg\varphi \rightarrow \psi)]_1 \wedge E}{[(\varphi \rightarrow \psi)]_1} \quad \frac{[\varphi]_2}{\psi} \rightarrow E \quad \frac{[\neg\varphi]_3}{\psi} \rightarrow E}{\frac{[(\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\neg\varphi \rightarrow \psi)]_1 \wedge E}{\psi} \rightarrow E} \vee E_{2,3} \\
 \frac{\psi}{(\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\neg\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \psi} \rightarrow I_1
 \end{array}$$

$$1. [(\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\neg\varphi \rightarrow \psi)]_1$$

$$4. [\neg(\varphi \vee \neg\varphi)]_4$$

$$5. [\varphi]_s$$

$$2. [\varphi]_2$$

$$3. [\neg\varphi]_3$$