c) $\{\bot\} \vdash \varphi \wedge \neg\varphi$

Sea $\mathcal{D} \in \mathfrak{D}$ tal que $\mathcal{D} := \dfrac{\left(\overset{\mathcal{D}'}{\dfrac{\bot}{\varphi}\,\bot}\right) \qquad \left(\overset{\mathcal{D}''}{\dfrac{\bot}{\neg\varphi}\,\bot}\right)}{\varphi \wedge \neg\varphi}\ \wedge I$

Probemos que $\mathcal{D}$ atestigua $\{\bot\} \vdash \varphi \wedge \neg\varphi$

Por un lado $\text{concl}(\mathcal{D}) = \varphi \wedge \neg\varphi$

Por otro lado

$\text{Hip}(\mathcal{D})$

$\equiv \{$ Def de Hip con respecto a $(\wedge I)$ $\}$

$\text{Hip}(\mathcal{D}') \cup \text{Hip}(\mathcal{D}'')$

$\equiv \{$ Def de Hip con respecto a $(\bot)$ $\}$

$\{\bot\} \cup \{\bot\}$

$\subseteq \{$ Idempotencia de unión $\}$

$\{\bot\}$

tenemos que

$\langle \exists \mathcal{D} : \mathcal{D} \in \mathfrak{D} : \text{Hip}(\mathcal{D}) \subseteq \{\bot\}\ \&\ \text{concl}(\mathcal{D}) = \varphi \wedge \neg\varphi \rangle$

$\equiv \{$ Def de $\vdash$ $\}$

$\{\bot\} \vdash \varphi \wedge \neg\varphi$