(c) $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$ implica $\Gamma \setminus \{\varphi\} \vdash (\varphi \to \varphi) \wedge (\varphi \to \psi)$

$$\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi \Longrightarrow \Gamma \setminus \{\varphi\} \vdash (\varphi \longrightarrow \varphi) \wedge (\varphi \longrightarrow \psi)$$

$\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$

$\equiv \{$ Def def de $\vdash \}$

$\langle \exists D' \in \mathcal{D} :: Hip(D') \subseteq \Gamma \cup \{\varphi\} \wedge concl(D') = \psi \rangle$, $D' := \left(\begin{array}{c} \varphi \\ \vdots \quad D' \\ \psi \end{array} \right)$

Sea $D \in \mathcal{D}$ tal que $D :=$

$$\dfrac{\left(\dfrac{[\varphi]_1}{(\varphi \longrightarrow \varphi)} \to I_1 \right)^{D''} \left(\dfrac{D'}{(\varphi \longrightarrow \psi)} \to I_2 \right)^{D'''}}{(\varphi \longrightarrow \varphi) \wedge (\varphi \longrightarrow \psi)} \wedge I$$

Luego $concl(D) = (\varphi \longrightarrow \varphi) \wedge (\varphi \longrightarrow \psi)$

Determinemos el conjunto $Hip(D)$

$Hip(D)$

$= \{$ Def de Hip con respecto a $(\wedge I)$ $\}$

$Hip(D'') \cup Hip(D''')$

$= \{$ Def de Hip con respecto a $(\to I)$ $\}$

$(\varphi \setminus \{\varphi\}) \cup (Hip(D') \setminus \{\varphi\})$

$= \{$ Def de diferencia de conjuntos, Por Hipotesis $Hip(D') \subseteq \Gamma \cup \{\varphi\}$ $\}$

$\emptyset \cup \{x \in Hip(D') : x \neq \varphi\} \subseteq \Gamma$

i.e. $Hip(D) \subseteq \Gamma$

Por lo tanto

$$\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi \Longrightarrow \Gamma \setminus \{\varphi\} \vdash (\varphi \longrightarrow \varphi) \wedge (\varphi \longrightarrow \psi)$$