

(8) Dar al menos dos conjuntos Γ diferentes que sean consistentes maximales y contengan al conjunto $\{p_0, \neg(p_1 \rightarrow p_2), p_3 \vee p_2\}$

Sean Γ y Γ^+ conjuntos tal que

$$\Gamma := \{p_0, \neg(p_1 \rightarrow p_2), p_3 \vee p_2, p_4\} \quad \& \quad \Gamma^+ := \{p_0, \neg(p_1 \rightarrow p_2), p_3 \vee p_2, \neg p_4\}$$

δ y γ asignaciones de simbolos proposicionales en $\{0, 1\}$ tales que

$$\begin{array}{|l} \gamma: \mathcal{V} \rightarrow \{0, 1\} \\ \hline \gamma(p_i) := 1 \quad \text{si} \quad i \neq 2 \quad \& \quad i \neq 4 \end{array}$$

$$\begin{array}{|l} \delta: \mathcal{V} \rightarrow \{0, 1\} \\ \hline \delta(p_i) := 1 \quad \text{si} \quad i \neq 2 \end{array}$$

Por lo demostrado en BSE7b, δ y γ validan $\{p_0, \neg(p_1 \rightarrow p_2), p_3 \vee p_2\}$.
Ademas δ valida Γ y γ valida Γ^+ entonces por lema 28 sabemos que tanto Γ como Γ^+ son ambos consistentes.

Por Lema 30 (De Lindenbaum): si A es consistente entonces existe un conjunto consistente maximal que lo incluye.

Los conjuntos

$$\text{th}(\delta) := \{\varphi \in \mathcal{P}_{\text{prop}} : \llbracket \varphi \rrbracket_{\delta} = 1\} \quad \& \quad \text{th}(\gamma) := \{\varphi \in \mathcal{P}_{\text{prop}} : \llbracket \varphi \rrbracket_{\gamma} = 1\}$$

son ambos maximales (justificación en ejemplo 13 del apunte)

$$\text{luego} \quad \Gamma \subseteq \text{th}(\delta) \quad \& \quad \Gamma^+ \subseteq \text{th}(\gamma)$$

Pero $\text{th}(\delta) \neq \text{th}(\gamma)$, veamos esto

Corollary 1.5.10 If Γ is maximally consistent, then $\varphi \in \Gamma \Leftrightarrow \neg\varphi \notin \Gamma$, and $\neg\varphi \in \Gamma \Leftrightarrow \varphi \notin \Gamma$.

Supongamos que $th(\delta) = th(\gamma)$

$$p_i \in \Gamma$$

$$\subseteq \{ \Gamma \subseteq th(\delta) \}$$

$$p_i \in th(\delta)$$

$$\equiv \{ \text{Hipotesis} \}$$

$$p_i \in th(\gamma)$$

$$\equiv \{ \text{Corollary 1.5.10 Van Dalen} \}$$

$$\neg p_i \notin th(\gamma)$$

$$\equiv \{ \neg p_i \in \Gamma^+ \subseteq th(\gamma) \}$$

Contradicción

Como suponer $th(\delta) = th(\gamma)$ es contradictorio

Concluimos $th(\delta) \neq th(\gamma)$