(5) Demostrar, transformando derivaciones cuando sea necesario:

(a) $\vdash \varphi$ implica $\vdash \psi \to \varphi$

(b) Si $\varphi \vdash \psi$ y $\neg\varphi \vdash \psi$ entonces $\vdash \psi$.

(c) $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$ implica $\Gamma \setminus \{\varphi\} \vdash (\varphi \to \varphi) \wedge (\varphi \to \psi)$.

(d) $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$ implica $\Gamma \vdash \varphi \to (\psi \vee \neg\varphi)$.

a) $\vdash \varphi \implies \vdash \psi \to \varphi$

Hipotesis: definición $\vdash$

$\vdash \varphi$ sii $\exists\, \mathcal{D} \in \mathcal{D}$ tal que $Hip(\mathcal{D}) = \emptyset$ & $concl(\mathcal{D}) = \varphi$.

Sea $\mathcal{D}' \in \mathcal{D}$ tal que

$$\mathcal{D}' := \cfrac{\begin{pmatrix} \mathcal{D} \\ \vdots \\ \varphi \end{pmatrix}}{\psi \to \varphi} \to I$$

Luego $concl(\mathcal{D}') = \psi \to \varphi$

Determinemos $Hip(\mathcal{D}')$ bajo la Hipotesis $\vdash \varphi$

$Hip(\mathcal{D}')$

$= \{$ Def de $\mathcal{D}' \}$

$$Hip\left(\cfrac{\begin{pmatrix} \mathcal{D} \\ \vdots \\ \varphi \end{pmatrix}}{\psi \to \varphi} \to I\right)$$

$= \{$ Def de Hip con respecto a la regla $(\to I) \}$

$$Hip\begin{pmatrix} \mathcal{D} \\ \vdots \\ \varphi \end{pmatrix} \setminus \{\psi\}$$

$= \{$ Hipotesis y def de $\setminus \}$

$\emptyset$

$= \{$ Def de $\vdash \}$

$\vdash \psi \to \varphi$

Por lo tanto $\vdash \varphi \implies \vdash \psi \to \varphi$.

a) $\vdash \varphi \implies \vdash \psi \to \varphi$

$\vdash \varphi$

$\equiv$ { teorema de Corrección }

$\models \varphi$

$\equiv$ { Def de tautologia }

$\langle \forall f \text{ asignación} :: [\![\varphi]\!]_f := 1 \rangle$ $\longleftarrow$ Hipotesis

Por otro lado

$\vdash \psi \to \varphi$

$\equiv$ { teorema de Corrección }

$\models \psi \to \varphi$

$\equiv$ { Def de tautologia }

$\langle \forall f \text{ asignación} :: [\![(\psi \to \varphi)]\!]_f = 1 \rangle$

$\equiv$ { Def de valuación con respecto a $(\to)$ }

$\langle \forall f \text{ asignación} :: \max\{1 - [\![\psi]\!]_f , [\![\varphi]\!]_f\} = 1 \rangle$

$\equiv$ { Hipotesis $[\![\varphi]\!]_f := 1$ }

$\langle \forall f \text{ asignación} :: \max\{1 - [\![\psi]\!]_f , 1\} = 1 \rangle$

$\equiv$ { Def de max y Aritmetica }

true

Por lo tanto $\vdash \varphi \implies \vdash \psi \to \varphi$.