(3) Probar que $\Gamma \cup \{\varphi \wedge \psi\}$ es consistente si y sólo si $\Gamma \cup \{\varphi, \psi\}$ es consistente.

Corollary 1.5.12 *$\Gamma \nvdash \varphi \Leftrightarrow$ there is a valuation such that $[\![\psi]\!] = 1$ for all $\psi \in \Gamma$ and $[\![\varphi]\!] = 0$.*

Usemos el corolario 1.5.12 para probar la equivalencia

$\Gamma \cup \{\varphi \wedge \psi\}$ consistente

$\equiv$ { Def 26 }

$\Gamma \cup \{\varphi \wedge \psi\} \nvdash \bot$

$\equiv$ { Corolario 1.5.12 Van Dalen }

$\langle \exists f$ asignación $: : [\![\Gamma]\!]_f = 1$ & $[\![\varphi \wedge \psi]\!]_f = 1$ & $[\![\bot]\!]_f = 0 \rangle$

$\equiv$ { Def de semántica con respecto a $(\wedge)$ }

$\langle \exists f$ asignación $: : [\![\Gamma]\!]_f = 1$ & $\min\{[\![\varphi]\!]_f, [\![\psi]\!]_f\} = 1$ & $[\![\bot]\!]_f = 0 \rangle$

$\equiv$ { La afirmación es cierta cuando $[\![\varphi]\!]_f = [\![\psi]\!]_f = 1$ tomando min }

$\langle \exists f$ asignación $: : [\![\Gamma]\!]_f = 1$ & $[\![\varphi]\!]_f = 1$ & $[\![\psi]\!]_f = 1$ & $[\![\bot]\!]_f = 0 \rangle$

$\equiv$ { Def de semántica con respecto a $(\bot)$, Aritmetica, Neutro de conjunción }

$\langle \exists f$ asignación $: : [\![\Gamma]\!]_f = 1$ & $[\![\varphi]\!]_f = 1$ & $[\![\psi]\!]_f = 1 \rangle$

$\equiv$ { f valida el conjunto $\Gamma \cup \{\varphi, \psi\}$ (Lema 28 de ida $\Longrightarrow$), (Lema 34 vuelta $\Longleftarrow$) }

$\Gamma \cup \{\varphi, \psi\}$ consistente