Introducción a la Lógica y la Computación - Lógica proposicional
Práctico 4: Más sobre derivación

(1) Complete las siguientes derivaciones agregando la rama que falta, la abreviatura de la regla utilizada en cada paso, y los corchetes en las hipótesis canceladas, suponiendo que en cada paso se cancelan la mayor cantidad de hipótesis posibles. En ambas derivaciones se deben cancelar todas las hipótesis.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\varphi \vee \psi \qquad \dfrac{\varphi \qquad \dfrac{\neg\varphi \wedge \neg\psi}{\neg\varphi}}{\bot} \qquad \qquad \bot}{\dfrac{\bot}{\neg(\varphi \vee \psi)}}}{}}{(\neg\varphi \wedge \neg\psi) \to (\neg(\varphi \vee \psi))}$$

$$\dfrac{\dfrac{\neg\varphi \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg\varphi}{\neg\varphi \vee \varphi} \qquad \neg(\neg\varphi \vee \varphi)}{\bot}}{\varphi}}{\bot}}{\neg\varphi \vee \varphi}$$

(2) Encuentre derivaciones para:
   (a) $\{\neg\varphi \vee \psi\} \vdash \varphi \to \psi$ (Usando eliminación de $\vee$)
   (b) $\{\neg\varphi \vee \neg\psi\} \vdash \neg(\varphi \wedge \psi)$
   (c) $\{\varphi \to \psi\} \vdash \neg\varphi \vee \psi$
   (Sugerencia: la última regla es RAA, no intente con introducción de $\vee$, no funciona como última regla. Aparte está desarrollado en el apunte.)
   (d) $\{\neg(\varphi \wedge \psi)\} \vdash \neg\varphi \vee \neg\psi$ (Copie la idea de la derivación anterior)

(3) En el ejercicio 1 se muestra una derivación (incompleta) de $\varphi \vee \neg\varphi$, llamado principio del tercero excluido. Una estrategia posible para demostrar una proposición γ, es utilizar una eliminación del $\vee$ para subdividir la prueba en dos sub-derivaciones (también de γ), cada una de las cuales tiene una hipótesis más para utilizar:

$$\dfrac{\begin{array}{c} \\ \vdots \\ \neg\varphi \vee \varphi \end{array} \qquad \begin{array}{c} [\varphi] \\ \vdots \\ \gamma \end{array} \qquad \begin{array}{c} [\neg\varphi] \\ \vdots \\ \gamma \end{array}}{\gamma}$$

Obtenga derivaciones para c y d del punto anterior usando esta estrategia.

(4) Encuentre derivaciones para:
   (a) $\vdash (\varphi \to \psi) \vee (\psi \to \varphi)$
   (b) $\vdash (\varphi \to \psi) \wedge (\neg\varphi \to \psi) \to \psi$

(5) Demostrar, transformando derivaciones cuando sea necesario:
   (a) $\vdash \varphi$ implica $\vdash \psi \to \varphi$
   (b) Si $\varphi \vdash \psi$ y $\neg\varphi \vdash \psi$ entonces $\vdash \psi$.
   (c) $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$ implica $\Gamma \setminus \{\varphi\} \vdash (\varphi \to \varphi) \wedge (\varphi \to \psi)$.
   (d) $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$ implica $\Gamma \vdash \varphi \to (\psi \vee \neg\varphi)$.

(6) Demuestra los siguientes casos de la inducción en las derivaciones que prueba el Teorema de Corrección: $(I\vee)$ y $(E\vee)$.