(d) $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$ implica $\Gamma \vdash \varphi \to (\psi \vee \neg\varphi)$.

$$\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi \Longrightarrow \Gamma \vdash \varphi \longrightarrow (\psi \vee \neg\varphi)$$

$\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$

$\equiv\{$ Def def de $\vdash \}$

$\langle \exists D' \in \mathcal{D} :: Hip(D') \subseteq \Gamma \cup \{\varphi\} \wedge concl(D') = \psi \rangle$, $D' := \begin{pmatrix} \varphi \\ \vdots \quad D' \\ \psi \end{pmatrix}$

Sea $D \in \mathcal{D}$

tal que $concl(D) = \varphi \longrightarrow (\psi \vee \neg\varphi)$

Y supongamos que D es de la forma

$$D := \dfrac{\left(\dfrac{\begin{pmatrix} \varphi \\ \vdots \; D' \\ \psi \end{pmatrix}}{\psi \vee \neg\varphi} \vee I \quad D''\right)}{\varphi \longrightarrow (\psi \vee \neg\varphi)} \to I$$

Determinemos el conjunto $Hip(D)$

$Hip(D)$

$= \{$ Def de Hip con respecto a $(\to I)$ $\}$

$Hip(D'') \setminus \{\varphi\}$

$= \{$ Def de Hip con respecto a $(\vee I)$ $\}$

$Hip(D') \setminus \{\varphi\}$

$= \{$ Por Hipotesis $Hip(D') \subseteq \Gamma \cup \{\varphi\}$ $\}$

$(\Gamma \cup \{\varphi\}) \setminus \{\varphi\}$

$= \{$ Diferencia entre conjuntos $\}$

$\{x \in Hip(D') : x \neq \varphi\} = Hip(D) \subseteq \Gamma$

Por lo tanto

$$\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi \Longrightarrow \Gamma \vdash \varphi \longrightarrow (\psi \vee \neg\varphi)$$