(8) Dar al menos dos conjuntos Γ diferentes que sean consistentes maximales y contengan al conjunto $\{p_0, \neg(p_1 \to p_2), p_3 \vee p_2\}$

Sean Γ y Γ^+ conjuntos tal que

$$\Gamma := \{p_0, \neg(p_1 \longrightarrow p_2), p_3 \vee p_2, p_4\} \quad \& \quad \Gamma^+ := \{p_0, \neg(p_1 \longrightarrow p_2), p_3 \vee p_2, \neg p_4\}$$

δ y γ asignaciones de simbolos proposicionales en $\{0,1\}$ tales que

$\gamma : \mathcal{V} \longrightarrow \{0,1\}$

$\gamma(p_i) := 1$ si $i \neq 2$ & $i \neq 4$

$\delta : \mathcal{V} \longrightarrow \{0,1\}$

$\delta(p_i) := 1$ si $i \neq 2$

Por lo demostrado en BSE7b, δ y γ validan $\{p_0, \neg(p_1 \longrightarrow p_2), p_3 \vee p_2\}$, Ademas δ valida Γ y γ valida Γ^+ entonces por lema 28 sabemos que tanto Γ como Γ^+ son ambos consitentes.

Por Lema 30 (De Lindenbaum): si A es consisteate entonces existe un conjunto consistente maximal que lo incluye.

Los conjuntos

$th(\delta) := \{\varphi \in Prop : [\![\varphi]\!]\delta = 1\}$ & $th(\gamma) := \{\varphi \in Prop : [\![\varphi]\!]\gamma = 1\}$

son ambos maximales (justificación en ejemplo 13 del apunte)

Luego $\Gamma \subseteq th(\delta)$ & $\Gamma^+ \subseteq th(\gamma)$

Pero $th(\delta) \overset{?}{\neq} th(\gamma)$, veamos esto

Corollary 1.5.10 *If Γ is maximally consistent, then* $\varphi \in \Gamma \Leftrightarrow \neg\varphi \notin \Gamma$, *and* $\neg\varphi \in \Gamma \Leftrightarrow \varphi \notin \Gamma$.

Supongamos que $th(\delta) = th(\gamma)$

$p_4 \in \Gamma$

$\Longrightarrow \{ \Gamma \subseteq th(\delta) \}$

$p_4 \in th(\delta)$

$\equiv \{$ Hipotesis $\}$

$p_4 \in th(\gamma)$

$\equiv \{$ Corollary 1.5.10 Van Dalen $\}$

$\neg p_4 \notin th(\gamma)$

$\equiv \{ \neg p_4 \in \Gamma^+ \subseteq th(\gamma) \}$

Contradicción

Como suponer $th(\delta) = th(\gamma)$ es contradictorio

Concluimos $th(\delta) \neq th(\gamma)$