(3) En el ejercicio 1 se muestra una derivación (incompleta) de $\varphi \vee \neg\varphi$, llamado principio del tercero excluido. Una estrategia posible para demostrar una proposición γ, es utilizar una eliminación del $\vee$ para subdividir la prueba en dos sub-derivaciones (también de γ), cada una de las cuales tiene una hipótesis más para utilizar:

$$\dfrac{\begin{array}{c} \vdots \\ \neg\varphi \vee \varphi \end{array} \qquad \begin{array}{c} [\varphi] \\ \vdots \\ \gamma \end{array} \quad \begin{array}{c} [\neg\varphi] \\ \vdots \\ \gamma \end{array}}{\gamma}$$

Obtenga derivaciones para c y d del punto anterior usando esta estrategia.

a) (2c) $\{\varphi \to \psi\} \vdash \neg\varphi \vee \psi$

$\varphi \to \psi$

2. $[\neg\varphi]_2$

1. $[\varphi]_1$

3. $[\neg(\varphi \vee \neg\varphi)]_3$

4. $[\varphi]_4$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg(\varphi \vee \neg\varphi)]_3 \quad \dfrac{[\varphi]_4}{[\varphi]_4 \vee \neg\varphi}\,\vee I}{\bot}\,\to E}{\neg\varphi}\,\to I_4}{\varphi \vee \neg\varphi}\,\vee I \quad [\neg(\varphi \vee \neg\varphi)]_3}{\bot}\,\to E}{\varphi \vee \neg\varphi}\,RAA_3 \qquad \dfrac{\dfrac{[\varphi]_1 \quad \varphi \to \psi}{\psi}\,\to E}{\neg\varphi \vee \psi}\,\vee I \qquad \dfrac{[\neg\varphi]_2}{\neg\varphi \vee \psi}\,\vee I}{\neg\varphi \vee \psi}\,\vee E_{1,2}$$

b) (2d) $\{\neg(\varphi \wedge \psi)\} \vdash \neg\varphi \vee \neg\psi$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg(\varphi \vee \neg\varphi)]_3 \quad \dfrac{[\varphi]_4}{[\varphi]_4 \vee \neg\varphi}\,\vee I}{\bot}\,\to E}{\neg\varphi}\,\to I_4}{\varphi \vee \neg\varphi}\,\vee I \quad [\neg(\varphi \vee \neg\varphi)]_3}{\bot}\,\to E}{\varphi \vee \neg\varphi}\,RAA_3 \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg(\varphi \wedge \psi) \quad \dfrac{[\varphi]_1 \quad [\psi]_4}{[\varphi]_1 \wedge [\psi]_4}\,\wedge I}{\bot}\,\to E}{\neg\psi}\,\to I_4}{\neg\varphi \vee \neg\psi}\,\vee I \qquad \dfrac{[\neg\varphi]_2}{\neg\varphi \vee \neg\psi}\,\vee I}{\neg\varphi \vee \neg\psi}\,\vee E_{1,2}$$

3. $[\neg(\varphi \vee \neg\varphi)]_3$
2. $[\neg\varphi]_2$
1. $[\varphi]_1$
4. $[\psi]_4$