(4) Probar:

a) Si $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ es inconsistente entonces que $\Gamma \vdash \varphi$

b) Si $\Gamma \cup \{\varphi\}$ es inconsistente entonces que $\Gamma \vdash \neg\varphi$

a)

$\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ inconsistente $\leftarrow$ Hipótesis

Supongamos $\Gamma \nvdash \varphi$

$\Gamma \nvdash \varphi$

$\equiv$ { Corolario 35 }

$\langle \exists f$ asignación : : $[\![\Gamma]\!]_f = 1$ & $[\![\varphi]\!]_f = 0 \rangle$

$\equiv$ { Construcción de f $[\![\varphi]\!]_f = 0$ sii $[\![\neg\varphi]\!]_f = 1$ }

$\langle \exists f$ asignación : : $[\![\Gamma]\!]_f = 1$ & $[\![\neg\varphi]\!]_f = 1 \rangle$

$\equiv$ { f valida $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ criterio de consistencia }

$\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ consistente

$\equiv$ { Hipótesis }

contradicción

Como suponer $\Gamma \nvdash \varphi$ es contradictorio

concluimos $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ inconsistente $\Longrightarrow \Gamma \vdash \varphi$

b) $\Gamma \cup \{\varphi\}$ inconsistente $\leftarrow$ Hipótesis

Supongamos $\Gamma \nvdash \neg\varphi$

$\Gamma \nvdash \neg\varphi$

$\equiv$ { Corolario 35 }

$\langle \exists f$ asignación $: : [\![\Gamma]\!]_f = 1$ & $[\![\neg\varphi]\!]_f = 0 \rangle$

$\equiv$ { Construcción de f $[\![\neg\varphi]\!]_f = 0$ sii $[\![\varphi]\!]_f = 1$ }

$\langle \exists f$ asignación $: : [\![\Gamma]\!]_f = 1$ & $[\![\varphi]\!]_f = 1 \rangle$

$\equiv$ { f valida $\Gamma \cup \{\varphi\}$ criterio de consistencia }

$\Gamma \cup \{\varphi\}$ consistente

$\equiv$ { Hipótesis }

contradicción

Como suponer $\Gamma \nvdash \neg\varphi$ es contradictorio

concluimos $\Gamma \cup \{\varphi\}$ inconsistente $\Longrightarrow \Gamma \vdash \neg\varphi$