b) Si $\varphi \vdash \psi$ & $\neg\varphi \vdash \psi \implies \; \vdash \psi$

$\varphi \vdash \psi$ & $\neg\varphi \vdash \psi$

$\equiv \{$ Def def de $\vdash \}$

$\langle \exists D' \in \mathcal{D} :: Hip(D') \subseteq \{\varphi\}$ & $concl(D') = \psi \rangle$

& $\langle \exists D'' \in \mathcal{D} :: Hip(D'') \subseteq \{\neg\varphi\}$ & $concl(D'') = \psi \rangle$

Sea $D \in \mathcal{D}$

tal que

$$D := \dfrac{\begin{pmatrix} \vdots \; D''' \\ \varphi \vee \neg\varphi \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} [\varphi]_3 \\ \vdots \; D' \\ \psi \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} [\neg\varphi]_4 \\ \vdots \; D'' \\ \psi \end{pmatrix}}{\psi} \vee E_{3,4}$$

Donde

$Hip(D''') = \emptyset$

$$D''' := \dfrac{\dfrac{[\neg(\varphi \vee \neg\varphi)]_1 \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg(\varphi \vee \neg\varphi)]_1 \quad \dfrac{[\varphi]_2}{\neg\varphi \vee [\varphi]_2} \vee I}{\perp} \to E}{\neg\varphi} \to I_2}{\varphi \vee \neg\varphi} \vee I}{\perp} \to E}{\varphi \vee \neg\varphi} RAA_1$$

Luego $concl(D) = \psi$

$Hip(D)$

$= \{$ Def 22 con respecto a $(\vee E) \}$

$Hip(D''') \cup (Hip(D') \setminus \{\varphi\}) \cup (Hip(D'') \setminus \{\neg\varphi\})$

$= \{$ Def de $Hip(D''')$; Por Hipotesis $\}$

$\emptyset \cup (\emptyset \setminus \{\varphi\}) \cup (\emptyset \setminus \{\neg\varphi\})$

$= \{$ Def de unión y diferencia entre conjuntos $\}$

$\emptyset$

$= \{$ Def $\vdash \}$

$\vdash \psi$ Por lo tanto $\varphi \vdash \psi$ & $\neg\varphi \vdash \psi \implies \; \vdash \psi$