(6) Pruebe todo Γ consistente maximal realiza la disyunción:
para toda φ, ψ, se tiene $\varphi \vee \psi \in \Gamma$ si y sólo si [$\varphi \in \Gamma$ ó $\psi \in \Gamma$].

$(\Longrightarrow)$

$\varphi \vee \psi \in \Gamma \Longrightarrow \varphi \in \Gamma \vee \psi \in \Gamma$

$\equiv$ { Caracarterización de $(\Longrightarrow)$ }

$\varphi \vee \psi \in \Gamma \Longrightarrow (\varphi \notin \Gamma \Longrightarrow \psi \in \Gamma)$

Probemos que $\psi \in \Gamma$ suponiendo $\varphi \vee \psi \in \Gamma$ & $\varphi \notin \Gamma$.

Como Γ es consistente maximal & $\varphi \notin \Gamma$ luego por Lema 33 $\neg\varphi \in \Gamma$

Sea $\mathcal{D} \in \mathbb{D}$ tal que

$$\mathcal{D} := \dfrac{\varphi \vee \psi \qquad \dfrac{\dfrac{[\varphi]_1 \quad \neg\varphi}{\bot}\,{\to}E}{\psi}\,\bot \qquad [\psi]_2}{\psi}\,\vee E_{1,2}$$

Luego $\mathrm{concl}(\mathcal{D}) = \psi$

$\mathrm{Hip}(\mathcal{D})$

$=$ { Def de Hip con respecto a $(\vee_E)$ }

$\{\varphi \vee \psi\} \cup (\Gamma \setminus \{\varphi\})$

$\subseteq$ { Hipótesis }

Γ

Por definición 23 $\mathcal{D}$ atestigua $\Gamma \vdash \psi$

Como Γ es consistente maximal, por Lema 32 Γ es cerrado por derivaciones

i.e. $\Gamma \vdash \psi \Longrightarrow \psi \in \Gamma$

$(\Leftarrow)$

$\varphi \vee \psi \in \Gamma \Longleftarrow \varphi \in \Gamma \vee \psi \in \Gamma$

Probemos que $\varphi \vee \psi \in \Gamma$ suponiendo $\varphi \in \Gamma \vee \psi \in \Gamma$

Sea $\mathcal{D} \in \mathscr{D}$ tal que $\mathcal{D} := \dfrac{\psi}{\psi \vee \varphi} I_\vee$

Luego $\text{concl}(\mathcal{D}) = \psi \vee \varphi$

$\text{Hip}(\mathcal{D})$

$=$ { Def de Hip con respecto a $(\vee I)$ }

$\{\psi\}$

$\subseteq$ { Hipótesis }

Γ

Por definición 23 $\mathcal{D}$ atestigua $\Gamma \vdash \psi \vee \varphi$

Como Γ es consistente maximal, por Lema 32 Γ es cerrado por derivaciones

i.e. $\Gamma \vdash \psi \vee \varphi \Longrightarrow \psi \vee \varphi \in \Gamma$

Queda probado que todo conjunto consistente maximal realiza la disyunción