

(6) Pruebe todo Γ consistente maximal realiza la disyunción:
para toda φ, ψ , se tiene $\varphi \vee \psi \in \Gamma$ si y sólo si $[\varphi \in \Gamma \text{ ó } \psi \in \Gamma]$.

(\Rightarrow)

$$\varphi \vee \psi \in \Gamma \implies \varphi \in \Gamma \vee \psi \in \Gamma$$

$\equiv \{ \text{Caracterización de } (\Rightarrow) \}$

$$\varphi \vee \psi \in \Gamma \implies (\varphi \notin \Gamma \implies \psi \in \Gamma)$$

Probemos que $\psi \in \Gamma$ suponiendo $\varphi \vee \psi \in \Gamma$ & $\varphi \notin \Gamma$.

Como Γ es consistente maximal & $\varphi \notin \Gamma$ luego por Lema 33 $\neg\varphi \in \Gamma$

$$\text{Sea } \mathbb{D} \in \mathcal{D} \text{ tal que } \mathbb{D} := \frac{\varphi \vee \psi \quad \frac{\frac{[\varphi]_1 \quad \neg\varphi}{\rightarrow E} \quad \frac{\perp}{\psi} \perp}{\psi} \quad [\psi]_2}{\psi} \vee E_{1,2}$$

$$\text{luego } \text{conc}(\mathbb{D}) = \psi$$

Hip(\mathbb{D})

$= \{ \text{Def de Hip con respecto a } (\vee E) \}$

$\{ \varphi \vee \psi \} \cup (\Gamma \setminus \{ \varphi \})$

$\subseteq \{ \text{Hipotesis} \}$
 Γ

Por definición 23 \mathbb{D} atestigua $\Gamma \vdash \psi$

Como Γ es consistente maximal, por Lema 32 Γ es cerrado por derivaciones

$$\text{i.e. } \Gamma \vdash \psi \implies \psi \in \Gamma$$

(\Leftarrow)

$$\varphi \vee \psi \in \Gamma \iff \varphi \in \Gamma \vee \psi \in \Gamma$$

Probemos que $\varphi \vee \psi \in \Gamma$ suponiendo $\varphi \in \Gamma \vee \psi \in \Gamma$

$$\text{Sea } \mathbb{D} \in \mathcal{D} \text{ tal que } \mathbb{D} := \frac{\psi}{\psi \vee \varphi} I_v$$

$$\text{luego } \text{concl}(\mathbb{D}) = \psi \vee \varphi$$

Hip(\mathbb{D})

$$= \{ \text{Def de Hip con respecto a } (\vee I) \}$$

$$\{ \psi \}$$

$$\subseteq \{ \text{Hipotesis} \}$$

Por definición 23 \mathbb{D} atestigua $\Gamma \vdash \psi \vee \varphi$

Como Γ es consistente maximal, por Lema 32 Γ es cerrado por derivaciones

$$\text{i.e. } \Gamma \vdash \psi \vee \varphi \implies \psi \vee \varphi \in \Gamma$$

Queda probado que todo conjunto consistente maximal realiza la disyunción