(3) Probar que $\Gamma \cup \{\varphi \wedge \psi\}$ es consistente si y sólo si $\Gamma \cup \{\varphi, \psi\}$ es consistente.

terraf en su libro presenta el corolario 35 como

Corolario 35. $\Gamma \nvdash \varphi$ *implica que hay una valuación* v *tal que* $[\![\psi]\!]_v = 1$ *para todo* $\psi \in \Gamma$ *y* $[\![\varphi]\!]_v = 0$.

Van Dalen lo presenta con doble implicación

Corollary 1.5.12 $\Gamma \nvdash \varphi \Leftrightarrow$ *there is a valuation such that* $[\![\psi]\!] = 1$ *for all* $\psi \in \Gamma$ *and* $[\![\varphi]\!] = 0$.

Usemos el corolario 1.5.12 para probar la equivalencia

$\Gamma \cup \{\varphi \wedge \psi\}$ consistente

$\equiv \{$ Def 26 $\}$

$\Gamma \cup \{\varphi \wedge \psi\} \nvdash \bot$

$\equiv \{$ Corolario 1.5.12 Van Dalen $\}$

$\langle \exists f$ asignación $: : [\![\Gamma]\!]_f = 1 \;\&\; [\![\varphi \wedge \psi]\!]_f = 1 \;\&\; [\![\bot]\!]_f = 0 \rangle$

$\equiv \{$ Def de semántica con respecto a $(\wedge)$ $\}$

$\langle \exists f$ asignación $: : [\![\Gamma]\!]_f = 1 \;\&\; \min\{[\![\varphi]\!]_f, [\![\psi]\!]_f\} = 1 \;\&\; [\![\bot]\!]_f = 0 \rangle$

$\equiv \{$ La afirmación es cierta cuando $[\![\varphi]\!]_f = [\![\psi]\!]_f = 1$ tomando min $\}$

$\langle \exists f$ asignación $: : [\![\Gamma]\!]_f = 1 \;\&\; [\![\varphi]\!]_f = 1 \;\&\; [\![\psi]\!]_f = 1 \;\&\; [\![\bot]\!]_f = 0 \rangle$

$\equiv \{$ Def de semántica con respecto a $(\bot)$, Aritmetica, Neutro de conjunción $\}$

$\langle \exists f$ asignación $: : [\![\Gamma]\!]_f = 1 \;\&\; [\![\varphi]\!]_f = 1 \;\&\; [\![\psi]\!]_f = 1 \rangle$

$\equiv \{$ f valida el conjunto $\Gamma \cup \{\varphi, \psi\}$ criterio de consistencia $\}$

$\Gamma \cup \{\varphi, \psi\}$ consistente