(1) Pruebe que $\models \varphi \to \psi$ si y sólo si $\{\varphi\} \models \psi$.

($\Longrightarrow$)

Manipolamos un poco la hipotesis

$\models (\varphi \to \psi)$

$\equiv \{$ Def de tautologia $\}$

$\forall (\delta : \mathcal{V} \to \{0,1\})$ se da $[\![(\varphi \to \psi)]\!]_\delta = 1$

$\equiv \{$ Def de semantica con respecto a $(\to)$ $\}$

$\forall (\delta : \mathcal{V} \to \{0,1\})$ se da $\max\{1 - [\![\varphi]\!]_\delta, [\![\psi]\!]_\delta\} \overset{*}{=} 1$

Iniciamos la prueba saliendo del consecuente

$\{\varphi\} \models \{\psi\}$

$\equiv \{$ Def de consecuencia $\}$

$\forall (\delta : \mathcal{V} \to \{0,1\})$ tal que $[\![\varphi]\!]_\delta = 1 \overset{*}{\Longrightarrow} [\![\psi]\!]_\delta = 1$

Probemos $*$

$[\![\psi]\!]_\delta$

$= \{$ Def de max entre cero y $[\![\psi]\!]_\delta$ $\}$

$\max\{0, [\![\psi]\!]_\delta\}$

$= \{$ Aritmetica $\}$

$\max\{1 - 1, [\![\psi]\!]_\delta\}$

$= \{$ Por Hipotesis $[\![\varphi]\!]_\delta = 1$ $\}$

$\max\{1 - [\![\varphi]\!]_\delta, [\![\psi]\!]_\delta\}$

$= \{$ Por Hipotesis $*$ $\}$

1

($\Leftarrow$)

Manipolamos un poco la hipotesis

$\{\varphi\} \models \{\psi\}$

$\equiv$ { Def de consecuencia }

$\forall (\delta : \mathcal{V} \to \{0,1\})$ tal que $[\![\varphi]\!]_\delta = 1 \implies [\![\psi]\!]_\delta = 1$

Iniciamos la prueba saliendo del consecuente

$\models (\varphi \to \psi)$

$\equiv$ { Def de tautologia }

$\forall (\delta : \mathcal{V} \to \{0,1\})$ se da $[\![(\varphi \to \psi)]\!]_\delta = 1$

$\equiv$ { Por δ ser igual a 1 es equivalente a no ser 0 }

$\forall (\delta : \mathcal{V} \to \{0,1\})$ se da $[\![(\varphi \to \psi)]\!]_\delta \neq 0$

$\equiv$ { Def de semantica con respecto a $(\to)$ }

$\forall (\delta : \mathcal{V} \to \{0,1\})$ se da $[\![\varphi]\!]_\delta \neq 1 \lor [\![\psi]\!]_\delta = 1$

$\equiv$ { Caracterización de implicación }

$\forall (\delta : \mathcal{V} \to \{0,1\})$ se da $[\![\varphi]\!]_\delta = 1 \implies [\![\psi]\!]_\delta = 1$

$\equiv$ { Def de consecuencia }

$\{\varphi\} \models \{\psi\}$

$\equiv$ { Por Hipotesis }

true

Otra forma

$\models (\varphi \to \psi)$

$\equiv \{$ Def de tautologia $\}$

$\langle \forall (\delta : \mathcal{V} \to \{0,1\}) :: [\![(\varphi \to \psi)]\!]_\delta = 1 \rangle$

$\equiv \{$ Def de semantica con respecto a $(\to)$ $\}$

$\langle \forall (\delta : \mathcal{V} \to \{0,1\}) :: [\![\varphi]\!]_\delta \neq 1 \lor [\![\psi]\!]_\delta = 1 \rangle$

$\equiv \{$ Caracterización de implicación $\}$

$\langle \forall (\delta : \mathcal{V} \to \{0,1\}) :: [\![\varphi]\!]_\delta = 1 \Longrightarrow [\![\psi]\!]_\delta = 1 \rangle$

$\equiv \{$ Intercambio entre rango y termino $\}$

$\langle \forall (\delta : \mathcal{V} \to \{0,1\}) : [\![\varphi]\!]_\delta = 1 : [\![\psi]\!]_\delta = 1 \rangle$

$\equiv \{$ Def de consecuencia $\}$

$\{\varphi\} \models \{\psi\}$