Introducción a la Lógica y la Computación - Lógica proposicional
Práctico 5: Conjuntos Consistentes

(1) Pruebe lo siguiente. Para demostrar los casos $\nvdash$ enuncie claramente el o los resultados teóricos que permiten justificar la afirmación.

(a) $\Gamma \vdash \neg \bot$

(b) $\{p_0\} \nvdash p_1$

(c) $\{\bot\} \vdash \varphi \wedge \neg\varphi$

(d) $\{\neg p_0,\ \neg(p_1 \wedge (\neg p_2))\} \nvdash p_2 \to p_0$

(2) Decida cuáles de los siguientes conjuntos son consistentes:

(a) $\{\neg p_1 \wedge p_2 \to p_0, p_1 \to (\neg p_1 \to p_2), p_0 \leftrightarrow \neg p_2\}$.

(b) $\{\neg p_1 \vee \neg p_2 \to \neg p_0, p_1 \wedge p_0,\ p_1 \to (\neg p_0 \vee \neg p_2),\ \neg p_0 \leftrightarrow \neg p_2\}$.

(c) $\{p_0 \to p_1, p_1 \to p_2, p_2 \to p_3, p_3 \to \neg p_0\}$.

(d) $\{p_0 \to p_1, p_0 \wedge p_2 \to p_1 \wedge p_3, p_0 \wedge p_2 \wedge p_4 \to p_1 \wedge p_3 \wedge p_5, \dots\}$ (pares implican impares...).

(e) $\{p_{2n} : n \geq 0\} \cup \{\neg p_{3n+1} : n \geq 0\}$.

(f) $\{p_{2n} : n \geq 0\} \cup \{\neg p_{4n+1} : n \geq 0\}$.

(3) Probar que $\Gamma \cup \{\varphi \wedge \psi\}$ es consistente si y sólo si $\Gamma \cup \{\varphi, \psi\}$ es consistente.

(4) Probar:

Si $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ es inconsistente entonces que $\Gamma \vdash \varphi$

Si $\Gamma \cup \{\varphi\}$ es inconsistente entonces que $\Gamma \vdash \neg\varphi$

(5) Demostrar que $\Gamma^+ := \{\varphi \in PROP : \varphi$ no contiene los conectivos "$\neg$" ni "$\bot$"$\}$ es consistente (Ayuda: construir una f tal que $[\![\varphi]\!]_f = 1$ para toda $\varphi \in \Gamma^+$).

(6) Pruebe todo Γ consistente maximal realiza la disyunción: para toda φ, ψ, se tiene $\varphi \vee \psi \in \Gamma$ si y sólo si $[\varphi \in \Gamma$ ó $\psi \in \Gamma]$.

(7) Sea Γ consistente maximal y suponga $\{p_0, \neg(p_1 \to p_2), p_3 \vee p_2\} \subseteq \Gamma$. Decida si las siguientes proposiciones están en Γ. (Ayuda: usar Completitud, o la caracterización de consistente maximal).

(a) $\neg p_0$

(b) $((\neg p_1) \vee p_2)$

(c) p_3

(d) $p_2 \to p_5$

(e) $p_1 \vee p_6$

(8) Dar al menos dos conjuntos Γ diferentes que sean consistentes maximales y contengan al conjunto $\{p_0, \neg(p_1 \to p_2), p_3 \vee p_2\}$

(9) ¿Es el siguiente conjunto consistente maximal?

$$\{\varphi \in PROP : \{p_0, p_1, p_3, ...\} \vdash \varphi\}$$

(10) ¿Es el subconjunto de $PROP$ formado por las tautologías un consistente maximal?