Análise de Complexidade de Algoritmos

Algoritmos e Estruturas de Dados

2019/2020

FEUP

Introdução

- Algoritmo: conjunto claramente especificado de instruções a seguir para resolver um problema

- <u>Análise de algoritmos</u>:
  - provar que um algoritmo está correto
  - determinar recursos exigidos por um algoritmo (tempo, espaço)
    - comparar os recursos exigidos por diferentes algoritmos que resolvem o mesmo problema (um algoritmo mais eficiente exige menos recursos para resolver o mesmo problema)
    - prever o crescimento dos recursos exigidos por um algoritmo à medida que o tamanho dos dados de entrada cresce

Complexidade espacial e temporal

- Complexidade espacial de um programa ou algoritmo:
  espaço de memória que necessita para executar até ao fim
  S(n) - espaço de memória exigido em função do tamanho (n) da entrada

- Complexidade temporal de um programa ou algoritmo:
  tempo que demora a executar (tempo de execução)
  T(n) - tempo de execução em função do tamanho (n) da entrada

- Complexidade ↑ versus Eficiência ↓

- Por vezes estima-se a complexidade para o *"melhor caso"* (pouco útil), o *"pior caso"* (mais útil) e o *"caso médio"* (igualmente útil)

Crescimento de funções

- Na prática, é difícil (senão impossível) prever com rigor o tempo de execução de um algoritmo ou programa
  - Obter o tempo a menos de:
    - constantes multiplicativas (normalmente estas constantes são tempos de execução de operações atómicas)
    - parcelas menos significativas para valores elevados de *n*

- Comparar crescimento
  - Comparação de funções em pontos particulares: muito dependente dos coeficientes
  - Comparação relevante: taxas de crescimento

- Avaliar taxa de crescimento
  - Em função com vários termos, crescimento é determinado pelo termo de crescimento mais rápido
  - Coeficientes constantes influenciam o andamento inicial

Notação $O(\bullet)$

- Definição:

  $T(n) = O(f(n))$ (ler: $T(n)$ é de ordem $f(n)$)

  se e só se existem constantes positivas c e n_0 tal que $T(n) \leq cf(n)$ para todo o $n > n_0$

- Exemplos:
  - $c_k n^k + c_{k-1} n^{k-1} + \ldots + c_0 = O(n^k)$ (c_i - constantes)
  - $\log_2 n = O(\log n)$

    (não se indica a base porque mudar de base é multiplicar por constante)
  - $4 = O(1)$ (usa-se 1 para ordem constante)

Notação $O(\bullet)$

- Notação para o crescimento relativo de funções
  - $T(n) = O(f(n))$

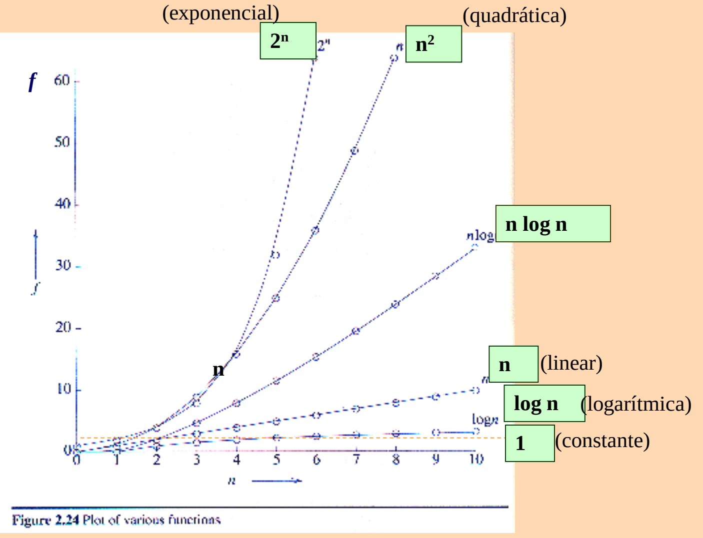
    se existem constantes c e n_0 tais que $T(n) \leq c f(n)$ para $n \geq n_0$
  - $T(n) = \Omega(f(n))$

    se existem constantes c e n_0 tais que $T(n) \geq c f(n)$ para $n \geq n_0$
  - $T(n) = \Theta(f(n))$

    se e só se $T(n) = O(f(n))$ e $T(n) = \Omega(f(n))$
  - $T(n) = o(f(n))$

    se existem constantes c e n_0 tais que $T(n) < c f(n)$ para $n \geq n_0$

Ordens mais comuns



Fonte: Sahni, "Data Structures, Algorithms and Applications in C++"

Termo Dominante

- Suponha que se usa N^3 para estimar $N^3+350N^2 + N$
- Para $N = 10\ 000$
  - valor real = 1 0003 5000 010 000
  - valor estimado = 1 000 000 000 000
  - erro = 0.35% (não é significativo)
- Para valores elevados de N
  - o termo dominante é indicativo do comportamento do algoritmo
- Para valores pequenos de N
  - o termo dominante não é necessariamente indicativo do comportamento, mas geralmente programas executam tão rapidamente que não importa

Estudo de um caso : subsequência máxima

- Problema:
  - Dado um conjunto de valores (positivos e/ou negativos) $A_1, A_2, \ldots, A_n$, determinar a subsequência de maior soma
- A subsequência de maior soma é zero se todos os valores são negativos
- Exemplos:

  -2, <u>11, -4, 13</u>, -4, 2

  1, -3, <u>4, -2, -1, 6</u>

Subsequência máxima - cúbico

```
template <class Comparable>
Comparable maxSubSum1(const vector<Comparable> &a)
{
    Comparable maxSum = 0;
    for (int i = 0 ; i < a.size() ; i++)
       for (int j = i; j < a.size(); j++)
       {
          Comparable thisSum = 0;
          for (int k = i; k <= j; k++)
             thisSum += a[k];
          if (thisSum > maxSum)
             maxSum = thisSum;
       }
    return maxSum;
}
```

Subsequência máxima - cúbico

- Análise
  - Ciclo de *N* iterações no interior de um outro ciclo de *N* iterações no interior de um outro ciclo de *N* iterações ⇒ $O(N^3)$, algoritmo cúbico
  - Valor estimado por excesso, pois alguns ciclos possuem menos de *N* iterações
- Como melhorar
  - Remover um ciclo
  - Ciclo mais interior não é necessário
  - *thisSum* para próximo *j* pode ser calculado facilmente a partir do antigo valor de *thisSum*

Subsequência máxima - quadrático

```
template <class Comparable>
Comparable maxSubSum2(const vector<Comparable> &a)
{
    Comparable maxSum = 0;
    for (int i = 0 ; i < a.size() ; i++)
    {
      Comparable thisSum = 0;
      for (int j = i; j < a.size(); j++)
      {
        thisSum += a[j];
        if (thisSum > maxSum)
            maxSum = thisSum;
      }
    }
    return maxSum;
}
```

Subsequência máxima - quadrático

- Análise
  - Ciclo de *N* iterações no interior de um outro ciclo de *N* iterações ⇒ ***O(N²)*** , algoritmo quadrático
- É possível melhorar?
  - Algoritmo linear é melhor : tempo de execução é proporcional a tamanho de entrada (difícil fazer melhor)
    - Se A_{ij} é uma subsequência com custo negativo, A_{iq} com q>j não é a subsequência máxima

Subsequência máxima - linear

```
template <class Comparable>
Comparable maxSubSum3(const vector<Comparable> &a)
{
    Comparable thisSum = 0; Comparable maxSum = 0;
    for (int j=0 ; j < a.size() ; j++)
     {
       thisSum += a[j];
       if (thisSum > maxSum)
           maxSum = thisSum;
       else if (thisSum < 0)
           thisSum = 0;
     return maxSum;
}
```

Subsequência máxima - recursivo

- Método "divisão e conquista"
  - Divide a sequência a meio
  - A subsequência máxima está:
    a) na primeira metade
    b) na segunda metade
    c) começa na 1ª metade, vai até ao último elemento da 1ª metade, continua no primeiro elemento da 2ª metade, e termina em um elemento da 2ª metade.
  - Calcula as três hipóteses e determina o máximo
  - a) e b) calculados recursivamente
  - c) realizado em dois ciclos:
    - percorrer a 1ª metade da direita para a esquerda, começando no último elemento
    - percorrer a 2ª metade da esquerda para a direita, começando no primeiro elemento

Subsequência máxima - recursivo

```
template <class Comparable>
Comparable maxSubSum(const vector<Comparable> &a, int left, int
   right)
{
   Comparable maxLeftBorderSum = 0, maxRightBorderSum = 0
   Comparable leftBorderSum = 0, rightBorderSum = 0;
   int center = (left + right ) / 2;

   if (left == right)
        return ( a[left] > 0 ? a[left] : 0 )

   Comparable maxLeftSum = maxSubSum (a, left, center);
   Comparable maxRightSum = maxSubSum (a, center + 1, right);
```

Subsequência máxima - recursivo

```
for (int i = center ; i >= left ; i--)
{
   leftBorderSum += a[i];
   if (leftBorderSum > maxLeftBorderSum)
      maxLeftBorderSum = leftBorderSum;
}
for (int j = center +1 ; j <= right ; j++)
{
   rightBorderSum += a[j];
   if (rightBorderSum > maxRightBorderSum)
      maxRightBorderSum = rightBorderSum;
}

return max3( maxleftSum, maxRightSum,
             maxLeftBorderSum + maxRightBorderSum);

}
```


Subsequência máxima - recursivo

- Análise
  - Seja *T(N)* = tempo execução para problema tamanho N
  - *T(1)* = 1 (recorda-se que constantes não interessam)
  - *T(N)* = 2* *T(N/2)* + *N*
    - duas chamadas recursivas, cada uma de tamanho *N/2*. O tempo de execução de cada chamada recursiva é *T(N/2)*
    - tempo de execução de caso c) é *N*

- *E análise espacial?*

Subsequência máxima - recursivo

- Análise

$$\begin{cases} T(N) = 2 * T(N/2) + N \\ T(1) = 1 \end{cases}$$

$T(N/2) = 2 * T(N/4) + N/2$

$T(N/4) = 2 * T(N/8) + N/4$

...

$T(N) = 2*2*T(N/4) + 2*N/2 + N$

$T(N) = 2*2*2*T(N/8) + 2*2*N/4 + 2*N/2 + N$

$T(N) = 2^k * T(N/2^k) + kN$

$T(1) = 1 : \; N/2^k = 1 \; \Rightarrow k = \log_2 N$

$T(N) = N*1 + N*\log_2 N = O(N*logN)$

O problema da Torre de Hanói

Torre de Hanói é um "quebra-cabeça"

- Uma base contém três pinos, num dos quais estão dispostos alguns discos uns sobre os outros, por ordem crescente de diâmetro

- O problema consiste em passar todos os discos de um pino para outro qualquer, de maneira que um disco maior nunca fique em cima de outro menor.

Complexidade temporal ?