Algoritmos em Grafos: Problemas de Emparelhamento (*matching*) e Casamentos Estáveis (*stable marriage*)

R. Rossetti, L. Ferreira, H. L. Cardoso, F. Andrade

FEUP, MIEIC, CAL

Nota prévia

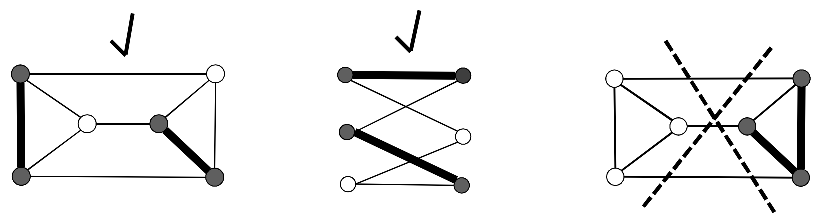
- Em geral, apenas são abordados os slides que descrevem os problemas apresentados, mas não os slides que descrevem os algoritmos que resolvem esses problemas
- Muitos dos slides marcados com asterisco (*) não são abordados nas aulas, mas servem como consulta e referência para aprofundar a matéria pelo estudante

Índice

- Emparelhamentos
  - Emparelhamentos de tamanho máximo em grafos bipartidos
  - Emparelhamentos de peso máximo em grafos bipartidos
  - Emparelhamentos de tamanho máximo em grafos genéricos
  - Emparelhamentos de peso máximo em grafos genéricos
- Casamentos estáveis
  - Com ordem estrita de preferências e listas de preferências completas
  - Com ordem estrita de preferências e listas de preferências incompletas
  - Aplicação à colocação de professores

Conceito de emparelhamento

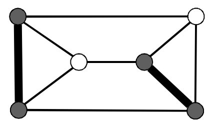
- Seja o grafo não dirigido $G = (V, E)$
- Formalmente, um emparelhamento (*matching*) M em G é um conjunto de arestas que não contém mais do que uma aresta incidente no mesmo vértice
- Também chamado conjunto de arestas independentes



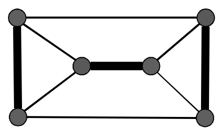
Características de emparelhamentos

- **Emparelhamento maximal:** não pode ser aumentado
- **Emparelhamento máximo:** tem tamanho máximo
  - Não é necessariamente único
  - É necessariamente maximal
  - O número ν(G) é o tamanho do emparelhamento máximo
- **Emparelhamento perfeito**: inclui todos os vértices

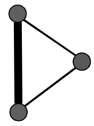
Emparelhamento maximal



Emparelhamento máximo (e perfeito)

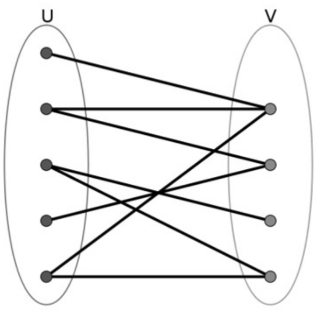


Emparelhamento máximo (mas não perfeito)

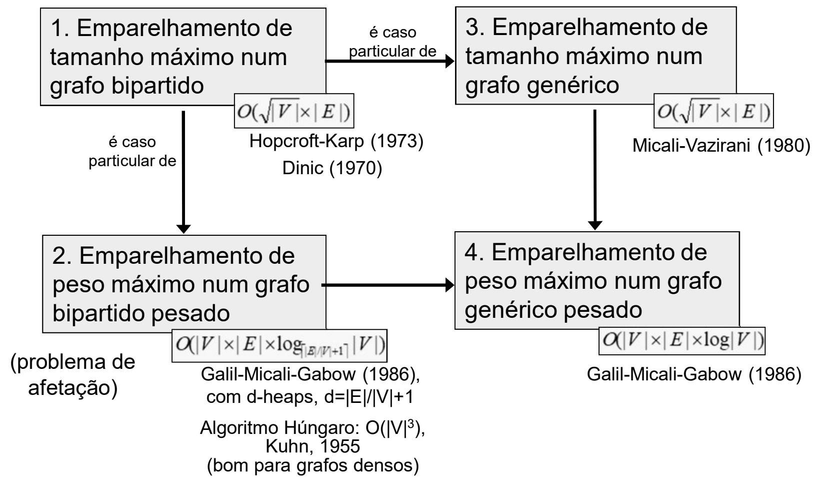


Conceito de grafo bipartido

- **Grafo bipartido** (ou bigrafo): grafo cujos vértices podem ser divididos em dois conjuntos disjuntos ***U*** e ***V***, tal que todas as arestas de *G* ligam um vértice *u* de ***U*** a um vértice *v* de ***V***.



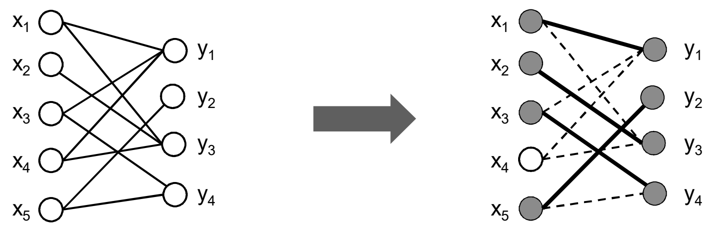
Problemas de emparelhamento



Redução a problemas em redes de transporte

- Problemas de <u>emparelhamento em grafos bipartidos</u> são redutíveis a problemas em redes de transporte (com capacidades unitárias)
  - Emparelhamento de tamanho máximo → fluxo máximo
  - Emparelhamento de peso máximo → fluxo de custo mínimo (custo=-peso)
- Grafos genéricos <u>sem ciclos de tamanho ímpar</u> são redutíveis a grafos bipartidos
  - Basta fazer uma pesquisa em largura, a qual gera uma floresta de pesquisa em largura, e separar depois os vértices de profundidade par dos vértices de profundidade ímpar nessa floresta
- Grafos genéricos com ciclos de tamanho ímpar exigem algoritmos mais elaborados *

1. Emparelhamento de tamanho máximo num grafo bipartido



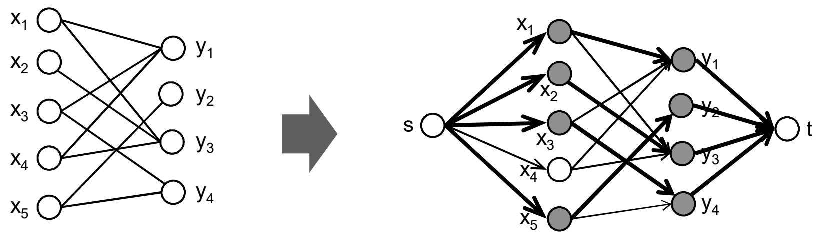
e.g. pessoas candidatam-se a empregos

Quais são as outras soluções?

Formulação como problema de fluxo máximo em redes de transporte

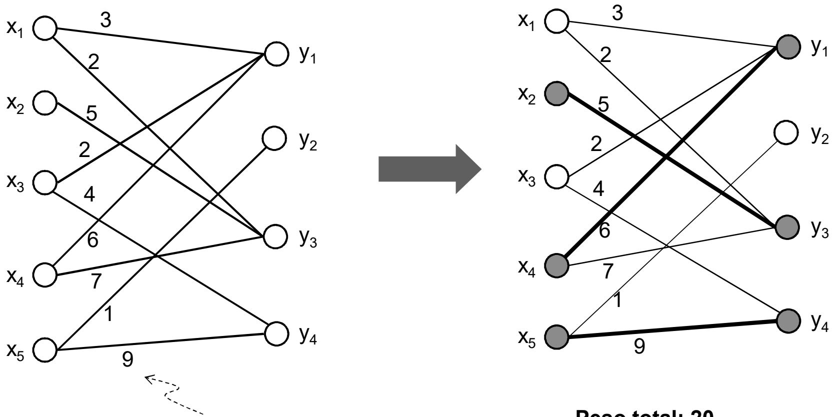
Grafo bipartido

Rede de transporte correspondente (com capacidades unitárias) e fluxo máximo (traço forte)



2. Emparelhamento de peso máximo num grafo bipartido pesado (problema de afetação)

e. g. pessoas candidatam-se a empregos



preferência, aptidão, etc.

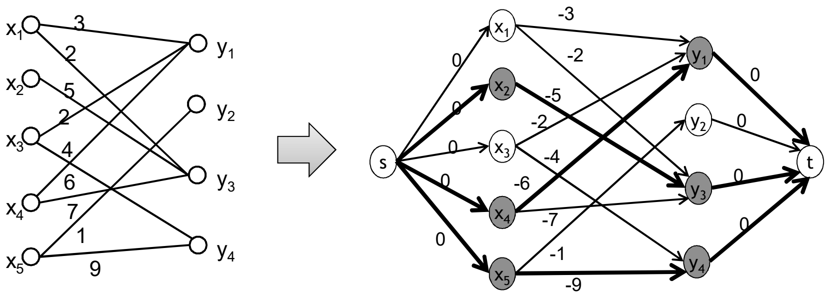
(não ter aresta é o mesmo que ter peso negativo)

Peso total: 20

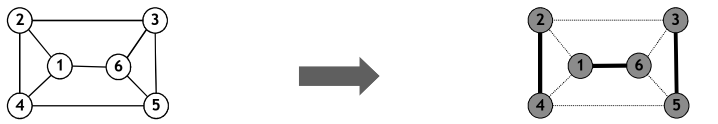
(estratégia gananciosa daria 19)

Resolução como problema de fluxo máximo de custo mínimo

- Capacidades unitárias (logo só se mostram custos e não capacidades)
- Custo do transporte = simétrico do peso do emparelhamento (origina arestas de custo negativo, mas não há ciclos)
- Aplica-se método dos caminhos de aumento de custo mínimo; para-se quando o próximo caminho de aumento tem custo real >= 0



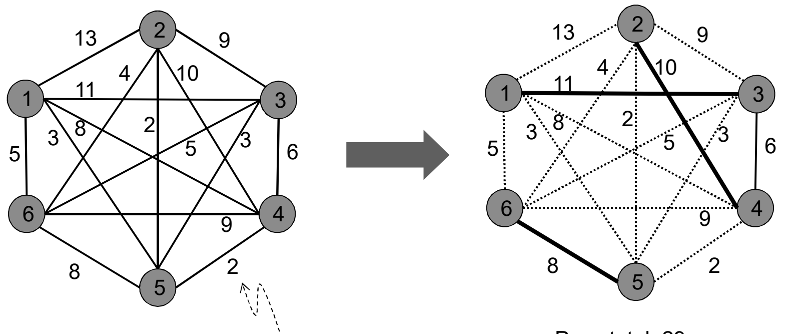
3. Emparelhamento de tamanho máximo num grafo genérico



Quantas soluções há?

(vide referências)

4. Emparelhamento de peso máximo num grafo genérico



preferência dos alunos 4 e 5 para trabalharem juntos

Peso total: 29

(estratégia ganonciosa dava 25)

Neste exemplo o grafo é completo

Neste exemplo o emparelhamento é **perfeito** (envolve todos os vértices)

(vide referências)

Índice

- Emparelhamentos
  - Emparelhamentos de tamanho máximo em grafos bipartidos
  - Emparelhamentos de peso máximo em grafos bipartidos
  - Emparelhamentos de tamanho máximo em grafos genéricos
  - Emparelhamentos de peso máximo em grafos genéricos
- Casamentos estáveis
  - Com ordem estrita de preferências e listas de preferências completas
  - Com ordem estrita de preferências e listas de preferências incompletas
  - Aplicação à colocação de professores

Problema

- Tendo cada elemento dum grupo de *n* homens e *n* mulheres ordenado todos os de sexo oposto por ordem de preferência estrita, pretende-se determinar um emparelhamento estável
- Informalmente, um emparelhamento é, neste caso, um conjunto de *n* casais
- Um emparelhamento *E* diz-se instável se e só se existir um par $(h, m) \notin E$ tal que *h* prefere *m* à sua parceira em *E* e *m* também prefere *h* ao seu parceiro em *E*. Caso contrário, diz-se estável.

Inês —*parceiros*— **José** ---prefere--- **Maria** —*parceiros*— **Rui**

José: h **Maria**: m

Algoritmo de Gale-Shapley (1962)

ALGORITMO DE GALE-SHAPLEY (1962)

Considerar inicialmente que todas as pessoas estão livres.
Enquanto houver algum homem h livre fazer:
    seja m a primeira mulher na lista de h a quem este ainda não se propôs;
    se m estiver livre então
        emparelhar h e m (ficam noivos)
    senão
        se m preferir h ao seu actual noivo h' então
            emparelhar h e m (ficam noivos), voltando h' a estar livre
        senão
            m rejeita h e assim h continua livre.
fim

Tempo de execução: $O(n^2)$

FEUP Universidade do Porto Faculdade de Engenharia

Algoritmos em Grafos: Emparelhamentos e Casamentos Estáveis 18

Exercício

Bruno	César	Dario	Victor
Joana	Joana	Elsa	Lidia
Elsa	Elsa	Joana	Joana
Lidia	Lidia	Carla	Elsa
Carla	Carla	Lidia	Carla

Carla	Elsa	Joana	Lidia
Bruno	Victor	Bruno	Bruno
Dario	Dario	Victor	Victor
César	Bruno	Dario	Dario
Victor	César	César	César

FEUP Universidade do Porto Faculdade de Engenharia

Algoritmos em Grafos: Emparelhamentos e Casamentos Estáveis

Listas de preferências incompletas

- Surgiu na colocação de internos em hospitais
- O critério de estabilidade das soluções é reformulado:
  Um emparelhamento é instável se e só se existir um candidato *r* e um hospital *h* tais que:
  - *h* é aceitável para *r* e *r* é aceitável para *h*, e
  - *r* não ficou colocado ou prefere *h* ao seu atual hospital, e
  - *h* ficou com vagas por preencher ou prefere *r* a pelo menos um dos candidatos com que ficou.
- Caso contrário, diz-se estável.

Algoritmo de Gale-Shapley com listas de preferências incompletas

Algoritmo de Gale-Shapley (orientado por internos)

```
Considerar inicialmente que todos os internos estão livres.
Considerar também que todas as vagas nos hospitais estão livres.
Enquanto existir algum interno r livre cuja lista de preferências é não vazia
    seja h o primeiro hospital na lista de r;
    se h não tiver vagas
        seja r' o pior interno colocado provisoriamente em h;
        r' fica livre (passa a não estar colocado);
    colocar provisoriamente r em h;
    se h ficar sem vagas então
        seja s o pior dos colocados provisoriamente em h;
        para cada sucessor s' de s na lista de h
            remover s' e h das respectivas listas
fim
```

Tempo de execução: O(nº internos x nº hospitais)

* Propriedades do algoritmo de Gale-Shapley

- O emparelhamento obtido por este algoritmo é ótimo para os internos e péssimo para os hospitais: qualquer interno fica com o melhor hospital que pode ter em qualquer emparelhamento estável e cada hospital fica com os piores internos.
- Tempo de execução é de ordem quadrática (nº de internos * nº de hospitais)

Problema da colocação de professores, Portugal, 2004 (1)

- Existem professores que concorrem a vagas
- Professores concorrentes são de dois tipos:
  - professores que tinham colocação, mas que pretendem mudar de posição (se não for possível, ficam na posição anterior)
  - professores que não tinham colocação, e pretendem obter uma colocação
- Cada professor indica uma lista totalmente ordenada de vagas a que concorre
- Vagas a concurso incluem as posições anteriormente ocupadas pelos professores que pretendem mudar de posição
- Os professores já estão totalmente ordenados segundo um ranking
- Neste ranking, podem aparecer intercalados professores dos dois tipos

Problema da colocação de professores, Portugal, 2004 (2)

- O resultado da colocação deve obedecer a 2 restrições:
  - Os professores que tinham colocação anterior têm de ficar colocados, nem que seja na posição anterior
  - Para cada professor e para cada posição por ele preferida em relação àquela em que foi colocado (inclui todas as posições no caso de não ter sido colocado), essa posição tem de estar ocupada por um professor com melhor ranking ou pelo professor que aí estava anteriormente colocado
- Pode ser formulado como problema de casamentos estáveis com listas de preferências incompletas
  - Internos correspondem aos professores
  - Hospitais correspondem às vagas
  - Cada vaga prefere 1º o professor que aí estava colocado anteriormente, e depois todos os outros pela ordem do ranking

Referências e mais informação

- "Emparelhamentos, Casamentos Estáveis e Algoritmos de Colocação de Professores", Ana Paula Tomás, Faculdade de Ciências da Universidade do Porto, Technical Report Series: DCC-05-02, Março de 2005
- "Introduction to Algorithms", Second Edition, Thomas H. Cormen, Charles E. Leiserson, Ronald L. Rivest, Clifford Stein, The MIT Press, 2001
- "The Algorithm Design Manual", Steven S. Skiena, Springer-Verlag, 1998
- "The General Maximum Matching Algorithm of Micali and Vazirani", Paul A. Peterson, Michael C. Loui, Alghoritmica (1988) 3: 511: 533, Springer-Verlag