

FUNÇÕES ESCALARES

Introdução

- Seja D um subconjunto não vazio do plano xOy . A função que associa um número real $f(x,y)$ a cada ponto $(x,y) \in D$ chama-se *função real a duas variáveis*. O conjunto D é designado por *domínio* de f , enquanto o conjunto de todos os valores $f(x,y)$ chama-se *contradomínio* de f .

Exemplo 1: A função

$$f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{1-(x^2+y^2)}}$$

tem como domínio

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$$

e como contradomínio $D' = [1, +\infty)$. O domínio é o conjunto dos pontos interiores à circunferência com a equação $x^2 + y^2 = 1$.

- Seja D um subconjunto não vazio do espaço tridimensional. A função que associa um número real $f(x,y,z)$ a cada ponto $(x,y,z) \in D$ chama-se *função real a três variáveis*. O conjunto D é designado por *domínio* de f , enquanto o conjunto de todos os valores $f(x,y,z)$ chama-se *contradomínio* de f .

Exemplo 2: A função

$$f(x, y, z) = \cos\left(\frac{1}{x + y - z}\right)$$

tem como domínio

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \neq x + y\}$$

e como contradomínio $D' = [-1, 1]$. O domínio é o conjunto dos pontos que não pertencem ao plano com a equação $x + y - z = 0$.

Exemplo 3: A magnitude da força gravitacional exercida por um corpo de massa M situado na origem sobre um corpo de massa m situado no ponto (x, y, z) é dada por

$$F(x, y, z) = \frac{GmM}{x^2 + y^2 + z^2}$$

em que G é a constante gravitacional universal. O seu domínio é

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y, z) \neq (0, 0, 0)\}$$

e o contradomínio é $D' = (0, +\infty)$.

Exemplo 4: A função

$$f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{4x^2 - y^2}}$$

tem como domínio

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -2|x| < y < 2|x|\}$$

e contradomínio $D' = (0, +\infty)$.

- Sempre que o domínio de uma função a várias variáveis não for dado de forma explícita, considera-se que ele será formado pelo conjunto máximo dos pontos onde a função está definida.

Exemplo 5: No caso da função

$$f(x, y) = \frac{1}{x - y}$$

admite-se que o domínio é o conjunto dos pontos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tais que $y \neq x$; trata-se dos pontos do plano que não pertencem à recta com a equação $y = x$. O seu contradomínio é:

$$D' = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$$

Exemplo 6: No caso da função

$$f(x, y, z) = \arcsen(x + y + z)$$

considera-se que o domínio é o conjunto dos pontos $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tais que $-1 \leq x + y + z \leq 1$; trata-se dos pontos do espaço situados na placa que é limitada pelos planos (estritamente paralelos) com as equações

$$x + y + z = -1 \text{ e } x + y + z = 1.$$

O seu contradomínio é:

$$D' = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$$

Superfícies quádricas

- As superfícies do espaço tridimensional definidas por uma equação do segundo grau da forma

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Hx + Iy + Jz + K = 0$$

onde A, B, C, \dots, K são constantes (A, B, C não são todas nulas), chamam-se *superfícies quádricas*.

É possível eliminar os termos xy, xz, yz na equação anterior recorrendo a uma adequada mudança de coordenadas (envolvendo as noções de valores próprios e vectores próprios de uma matriz). Assim, apenas se considerará equações da forma:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dx + Ey + Fz + H = 0$$

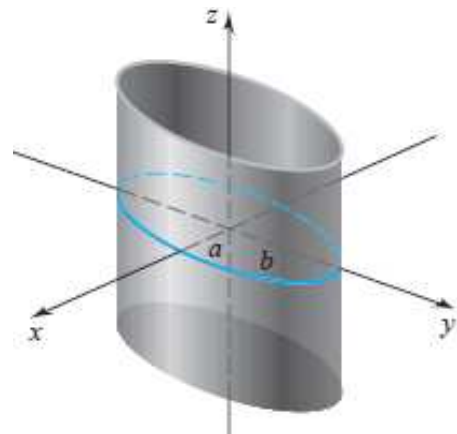
As superfícies quádricas podem ser classificadas em nove tipos distintos:

- i) *Cilindro elíptico*;
- ii) *Cilindro parabólico*;
- iii) *Cilindro hiperbólico*;
- iv) *Elipsoide*;
- v) *Hiperboloide de uma folha*;
- vi) *Hiperboloide de duas folhas*;
- vii) *Cone elíptico*;
- viii) *Paraboloide elíptico*;
- ix) *Paraboloide hiperbólico*.

- A análise das superfícies quádricas insere sobre um conjunto de propriedades que as caracterizam, nomeadamente:
 - i) Os *pontos de intersecção* com os eixos coordenados;
 - ii) Os *traços*, que são as intersecções com os planos coordenados;
 - iii) As *secções*, que são as intersecções com planos em geral;
 - iv) O *centro* (algumas possuem um centro; outras não);
 - v) *Simetria* (em relação a eixos ou a planos);
 - vi) Se são *limitadas* ou *não limitadas*.
- Seja a curva C situada no plano M . O conjunto dos pontos situados nas linhas que passam em C e são perpendiculares a M definem uma superfície que é designada por *superfície cilíndrica recta*; a curva C chama-se *directriz*, enquanto as linhas referidas designam-se por *geratrizes* da superfície. Se as geratrizes não forem perpendiculares ao plano M , a superfície chama-se *superfície cilíndrica oblíqua*.

Exemplo 7: *Cilindro elíptico (recto):*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad z \in \mathbb{R}$$



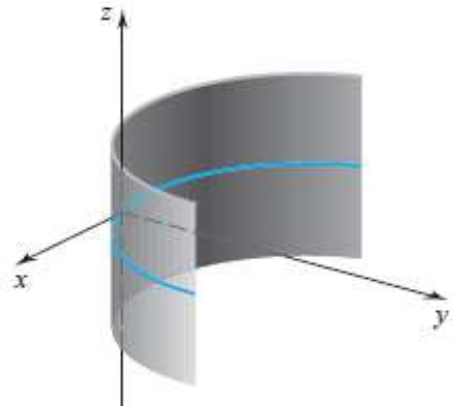
A superfície é formada pelas *geratrizes* que passam na elipse (*directriz*)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

e são perpendiculares ao plano coordenado xOy . Se $a = b$ obtém-se uma *superfície cilíndrica circular (recta)*.

Exemplo 8: Cilindro parabólico (recto):

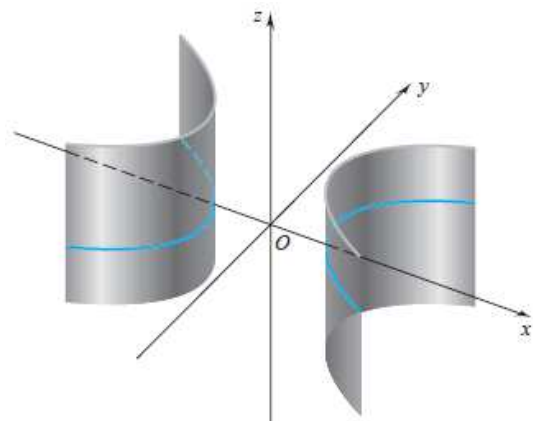
$$x^2 = 4cy, \quad z \in \mathbb{R}$$



Trata-se de uma superfície que é formada pelas *geratrizes* que passam na parábola (*directriz*) $x^2 = 4cy$ e são perpendiculares ao plano coordenado xOy .

Exemplo 9: Cilindro hiperbólico (recto):

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad z \in \mathbb{R}$$



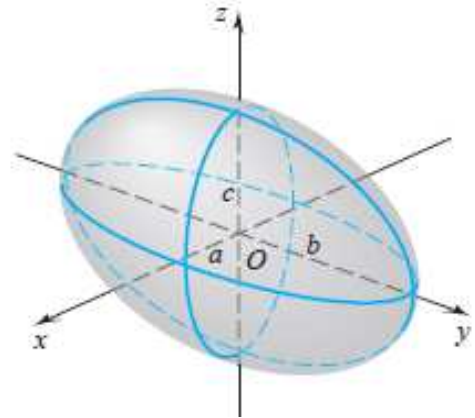
A superfície divide-se em duas regiões, cada uma delas gerada por um dos ramos da hipérbole (*directriz*):

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

As *geratrizes* passam na hipérbole e são perpendiculares ao plano coordenado xOy .

Exemplo 10: *Elipsoide:*

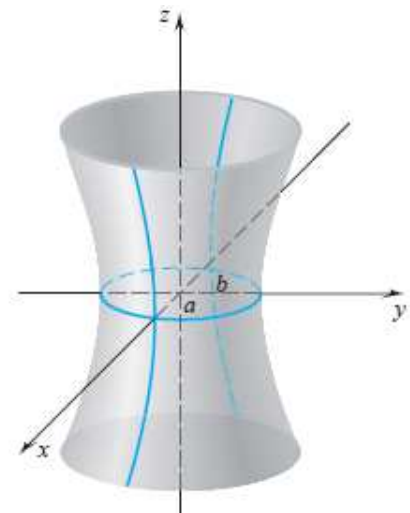
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$



Os pontos onde a superfície intersecta os eixos coordenados são os *vértices* do elipsoide. Os valores a , b e c chamam-se *semieixos*. Se dois dos semieixos forem iguais obtém-se um *elipsoide de revolução*; se $a = b = c$ obtém-se uma *superfície esférica*.

Exemplo 11: *Hiperboloide de uma folha:*

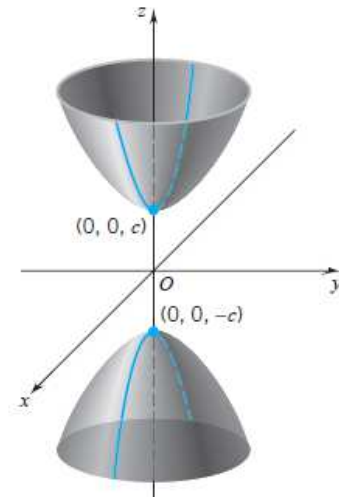
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$



Se $a = b$ obtém-se um *hiperboloide (de uma folha) de revolução*; as secções paralelas ao plano coordenado xOy são círculos.

Exemplo 12: *Hiperboloide de duas folhas:*

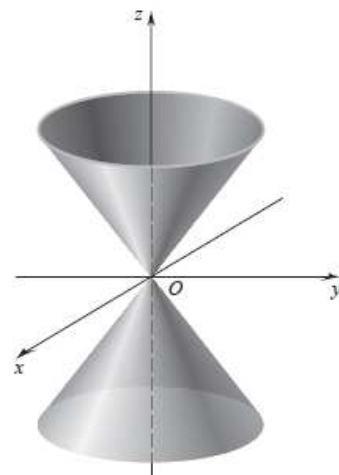
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$



A superfície intersecta os eixos coordenados em dois pontos que são os seus *vértices*. Se $a = b$ obtém-se um *hiperboloide (de duas folhas) de revolução*; as secções paralelas ao plano coordenado xOy são círculos.

Exemplo 13: *Cone elíptico:*

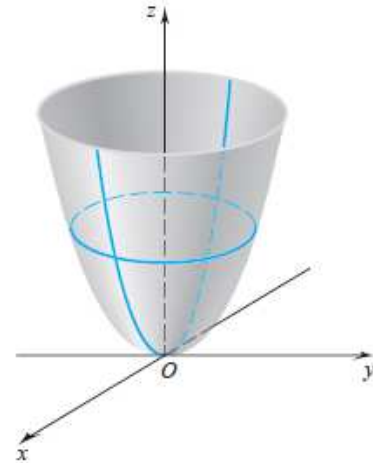
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z^2$$



A superfície intersecta os eixos coordenados na origem. A superfície divide-se em duas regiões que se designam por *folhas do cone*. Se $a = b$ obtém-se um *cone circular (de duas folhas)* ou, simplesmente, um *cone*; as secções paralelas ao plano coordenado xOy são círculos.

Exemplo 14: *Paraboloide elíptico:*

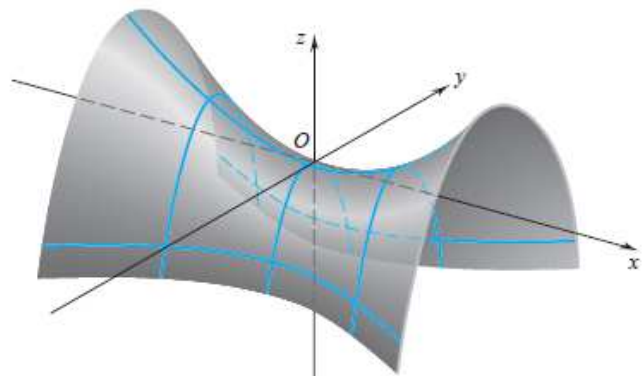
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z$$



A origem é o *vértice* do parabolóide. Se $a = b$ obtém-se um *parabolóide de revolução*; as secções paralelas ao plano coordenado xOy são círculos.

Exemplo 15: *Paraboloide hiperbólico:*

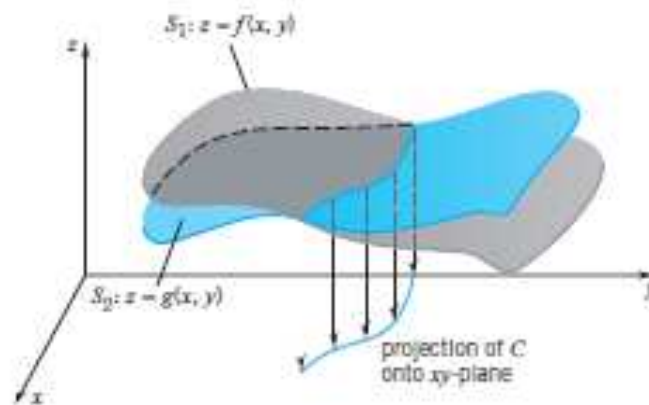
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z$$



A origem é um *mínimo* para o *traço* da superfície no plano xOz e um *máximo* para o *traço* no plano yOz . Como se verá oportunamente um ponto nestas condições é designado por *ponto de sela* da função $z = f(x, y)$.

Projeções

- Seja C a curva do espaço definida pela intersecção das superfícies $S_1 : z = f(x, y)$ e $S_2 : z = g(x, y)$.



- A curva C é o conjunto de todos os pontos (x, y, z) tais que:

$$z = f(x, y) \text{ e } z = g(x, y)$$

- O conjunto de todos os pontos (x, y, z) tais que

$$f(x, y) = g(x, y)$$

é a superfície cilíndrica vertical que passa através da curva C .

- O conjunto de todos os pontos $(x, y, 0)$ tais que

$$f(x, y) = g(x, y)$$

é designada por *projecção de C no plano xOy* ; trata-se da curva no plano xOy que se situa imediatamente abaixo da curva C .

Exemplo 16: Seja a curva C definida pela intersecção do plano $z = 2y + 3$ com o *parabolóide de revolução* $z = x^2 + y^2$; esta superfície pode ser gerada rodando a parábola $z = x^2$ em torno do eixo dos zz . A curva C é o conjunto de todos os pontos (x, y, z) tais que:

$$x^2 + y^2 = 2y + 3$$

A projecção de C no plano xOy é o conjunto de todos os pontos $(x, y, 0)$ tais que

$$x^2 + y^2 = 2y + 3$$

ou seja:

$$x^2 + (y - 1)^2 = 4$$

Trata-se de uma circunferência de raio 2 e com centro no ponto $(0, 1, 0)$.

Curvas de nível

- Seja f uma função real a duas variáveis definida num subconjunto D do plano xOy . Chama-se *gráfico de f* ao conjunto de todos os pontos (x, y, z) tais que:

$$z = f(x, y), (x, y) \in D$$

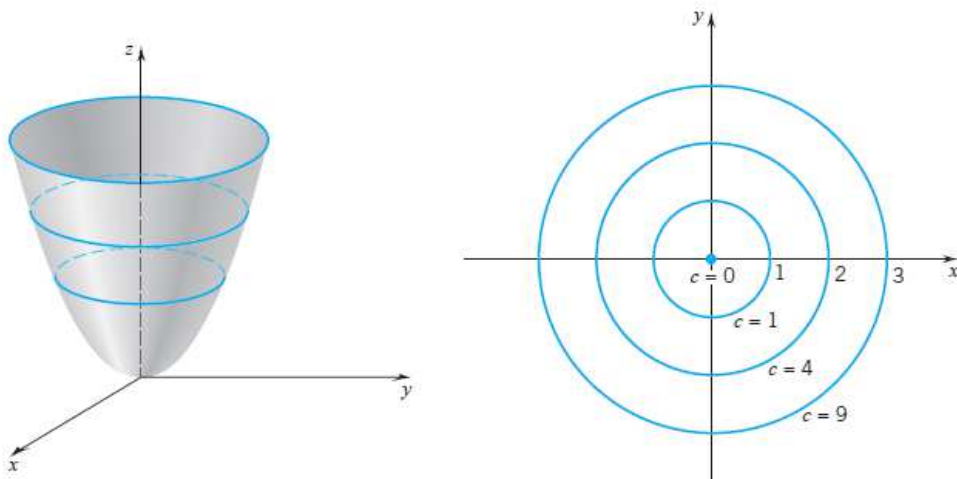
Exemplo 17: O domínio da função $f(x, y) = x^2 + y^2$ é todo o plano xOy . O gráfico de f é o *parabolóide de revolução*:

$$z = x^2 + y^2$$

- Se c pertence ao contradomínio da função $f(x,y)$, $(x,y) \in D$, então é possível traçar a curva $f(x,y) = c$, que é designada por *curva de nível de f* . Esta curva pode ser obtida através da intersecção do gráfico de f com o plano horizontal $z = c$, sendo depois projectada no plano xOy .
- As curvas de nível permitem interpretar gráficos de funções reais a duas variáveis que são, em muitos casos, difíceis de visualizar e de desenhar; mesmo quando desenhados, são difíceis de interpretar.

Exemplo 18: No caso da função $f(x,y) = x^2 + y^2$ do exemplo 17, as suas curvas de nível são as circunferências centradas na origem:

$$x^2 + y^2 = c, \quad c \geq 0$$



A função $f(x,y)$ toma o valor c em todos os pontos do plano xOy situados na circunferência de raio \sqrt{c} e centrada na origem; na origem obtém-se $f(x,y) = 0$.

Superfícies de nível

- Sendo o desenho de funções reais a duas variáveis, muitas vezes, complicado, o desenho de uma função real a três variáveis é impossível. No entanto, é possível visualizar o comportamento de uma função $w = f(x, y, z)$, $(x, y, z) \in D$ analisando as chamadas *superfícies de nível de f* . São subconjuntos do domínio de f com equações da forma $f(x, y, z) = c$, em que c pertence ao contradomínio da função f .

Exemplo 19: As superfícies de nível da função $f(x, y, z) = Ax + By + Cz$ são os planos estritamente paralelos $Ax + By + Cz = c$, $c \in \mathbb{R}$.

Exemplo 20: As superfícies de nível da função $g(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ são as superfícies esféricas centradas na origem:

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2, \quad c \geq 0$$

Derivadas parciais: funções reais a duas variáveis

- Seja f uma função real a duas variáveis x, y . As *derivadas parciais de f em relação a x e em relação a y* são, respectivamente, as funções f_x e f_y , definidas por

$$f_x(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h}$$

$$f_y(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x, y+h) - f(x, y)}{h}$$

desde que estes limites existam.

- Neste caso, $f_x(x_0, y_0)$ define a razão da variação de $f(x, y_0)$ em relação a x em $x = x_0$, e $f_y(x_0, y_0)$ define a razão da variação de $f(x_0, y)$ em relação a y em $y = y_0$.

Exemplo 21: Em relação à função

$$f(x, y) = e^{xy} + \ln(x^2 + y)$$

tem-se:

$$f_x(x, y) = ye^{xy} + \frac{2x}{x^2 + y} \qquad f_y(x, y) = xe^{xy} + \frac{1}{x^2 + y}$$

O número

$$f_x(2, 1) = e^2 + \frac{4}{5}$$

representa a razão da variação em relação a x da função:

$$f(x, 1) = e^x + \ln(x^2 + 1) \text{ em } x = 2$$

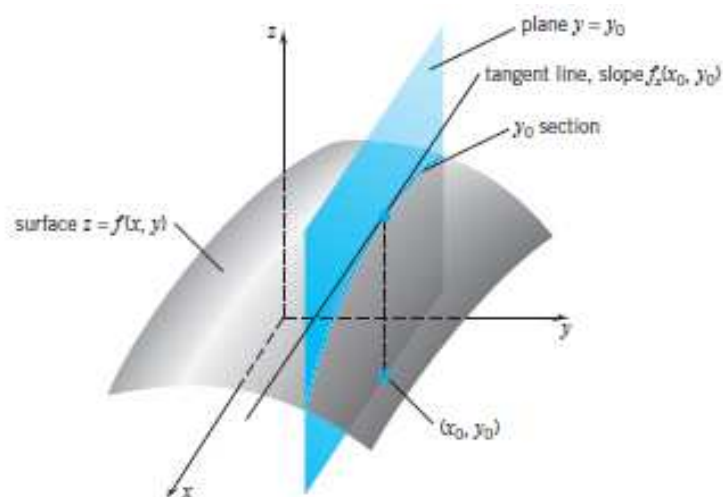
O número

$$f_y(2, 1) = 2e^2 + \frac{1}{5}$$

representa a razão da variação em relação a y da função:

$$f(2, y) = e^{2y} + \ln(4 + y) \text{ em } y = 1$$

- Tal como acontece no caso de uma função real a uma variável, os valores das derivadas parciais $f_x(x_0, y_0)$ e $f_y(x_0, y_0)$ podem ser interpretados geometricamente.
- Seja a superfície $z = f(x, y)$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Intersectando-a com o plano $y = y_0$ (paralelo ao plano xOz) obtém-se uma curva, que é a secção y_0 da superfície.



A secção y_0 da superfície é o gráfico da função:

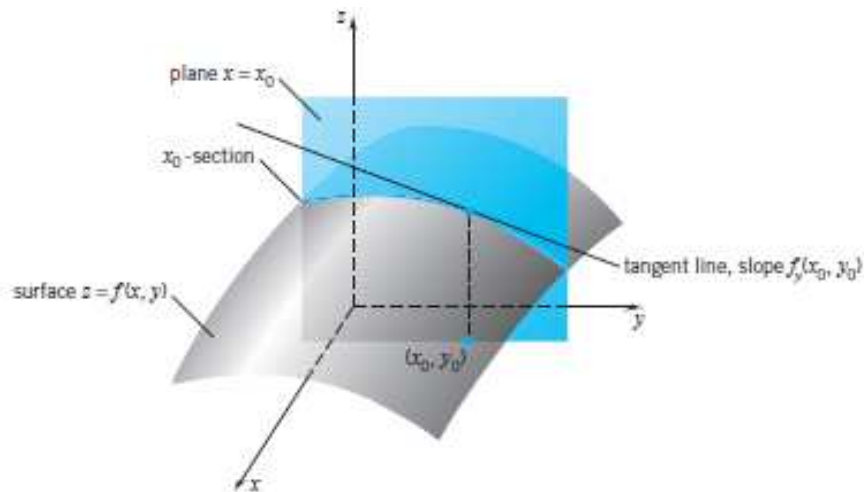
$$g(x) = f(x, y_0)$$

Derivando em ordem a x obtém-se

$$g'(x) = f_x(x, y_0)$$

e, em particular, $g'(x_0) = f_x(x_0, y_0)$. Assim, $f_x(x_0, y_0)$ é o declive da secção y_0 da superfície no ponto de coordenadas $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.

- Seja a superfície $z = f(x, y)$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Intersectando-a com o plano $x = x_0$ (paralelo ao plano yOz) obtém-se uma curva, que é a secção x_0 da superfície.



A secção x_0 da superfície é o gráfico da função:

$$h(y) = f(x_0, y)$$

Derivando em ordem a y obtém-se

$$h'(y) = f_y(x_0, y)$$

e, em particular, $h'(y_0) = f_y(x_0, y_0)$. Assim, $f_y(x_0, y_0)$ é o declive da secção x_0 da superfície no ponto de coordenadas $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.

- Usando a notação de Leibniz pode-se escrever:

$$f_x(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \text{ e } f_y(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$$

Derivadas parciais: funções reais a três variáveis

- Seja f uma função real a três variáveis x, y, z . As derivadas parciais de f em relação a x , em relação a y e em relação a z são, respectivamente, as funções f_x , f_y e f_z , definidas por

$$f_x(x, y, z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h, y, z) - f(x, y, z)}{h}$$

$$f_y(x, y, z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x, y+h, z) - f(x, y, z)}{h}$$

$$f_z(x, y, z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x, y, z+h) - f(x, y, z)}{h}$$

desde que estes limites existam.

- Neste caso:
 - i) $f_x(x_0, y_0, z_0)$ define a razão da variação de $f(x, y_0, z_0)$ em relação a x em $x = x_0$;
 - ii) $f_y(x_0, y_0, z_0)$ define a razão da variação de $f(x_0, y, z_0)$ em relação a y em $y = y_0$;
 - iii) $f_z(x_0, y_0, z_0)$ define a razão da variação de $f(x_0, y_0, z)$ em relação a z em $z = z_0$.

Exemplo 22: Em relação à função

$$g(x, y, z) = x^2 e^{y/z}$$

tem-se:

$$g_x(x, y, z) = 2xe^{y/z} \qquad g_y(x, y, z) = \frac{x^2}{z} e^{y/z}$$

$$g_z(x, y, z) = -\frac{x^2 y}{z^2} e^{y/z}$$

Em particular:

$$g_x(-1, 2, 1) = -2e^2, \qquad g_y(-1, 2, 1) = e^2, \qquad g_z(-1, 2, 1) = -2e^2$$

- Usando a notação de Leibniz pode-se escrever:

$$f_x(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z), \qquad f_y(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z),$$

$$f_z(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z)$$