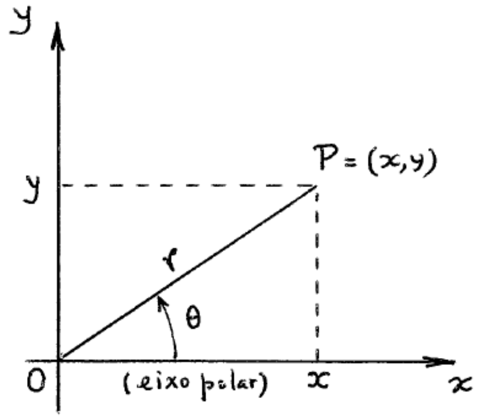
## Integral duplo em coordenadas polares

- Existem situações onde o *cálculo do integral duplo* sobre uma região, $\Omega$, do plano *xOy* pode ser efectuado de forma mais expedita quando se descreve essa região *usando coordenadas polares*.

- Considere-se um ponto *P* do plano *xOy*; se este ponto tem *coordenadas polares* $(r,\theta)$, em que $r \geq 0$ e $0 \leq \theta \leq 2\pi$, as suas *coordenadas cartesianas* $(x,y)$ são dadas por:

$$x = r\cos\theta \quad \text{e} \quad y = r\ \text{sen}\theta. \tag{13}$$




As expressões inversas de (13) são

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{e} \quad \theta = arctg\,\frac{y}{x}$$

excepto para os casos em que $x = 0$.

- Pretende-se mostrar como é possível calcular o integral duplo

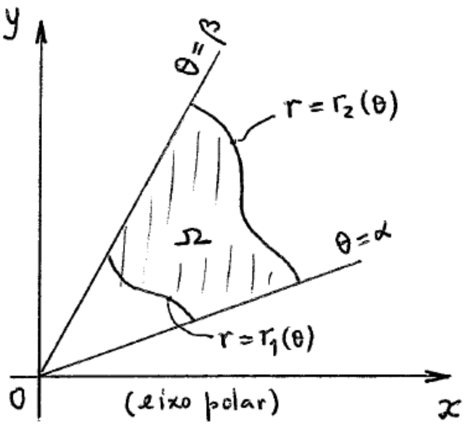
$$\iint_\Omega f(x,y)dxdy \tag{14}$$

usando coordenadas polares $(r,\theta)$.

- Seja a região $\Omega$ apresentada na figura seguinte, que é o conjunto de todos os pontos $(x,y)$ que possuem coordenadas polares $(r,\theta)$ definidas no conjunto

$$\Gamma \ : \ \alpha \le \theta \le \beta \ \wedge \ r_1(\theta) \le r \le r_2(\theta)$$

em que $0 \le \alpha < \beta \le 2\pi$.




Como é já conhecido, a área da região $\Omega$, $A(\Omega)$, é dada por:

$$A(\Omega) = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2}\left([r_2(\theta)]^2 - [r_1(\theta)]^2\right) d\theta$$

A expressão anterior pode, ainda, ser reescrita sob a forma de um integral duplo sobre a região $\Gamma$.
Com efeito, tendo em conta que

$$\frac{1}{2}\left([r_2(\theta)]^2 - [r_1(\theta)]^2\right) = \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} r \ dr$$

então:

$$A(\Omega) = \int_{\alpha}^{\beta} \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} r \ dr d\theta = \iint_{\Gamma} r \ dr d\theta$$

- Admita-se que $f(x,y)$ é uma função contínua em todos os pontos $(x,y)$ da região $\Omega$. Então a função composta

  $$F(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\ \mathrm{sen}\theta)$$

  é também uma função contínua em todos os pontos $(r,\theta)$ da região $\Gamma$.

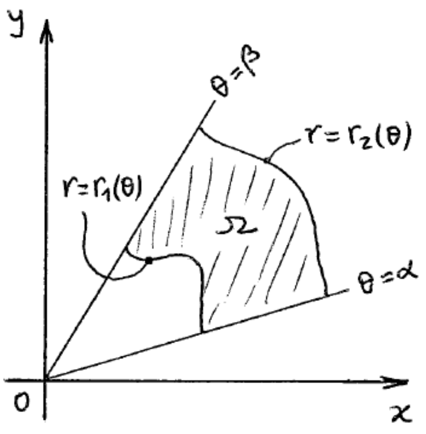
  Nestas condições, é possível mostrar que *o integral duplo* (14) é dado, *em coordenadas polares*, por:

  $$\iint_\Omega f(x,y)dxdy = \iint_\Gamma f(r\cos\theta, r\ \mathrm{sen}\theta)\ r\ drd\theta \qquad (15)$$

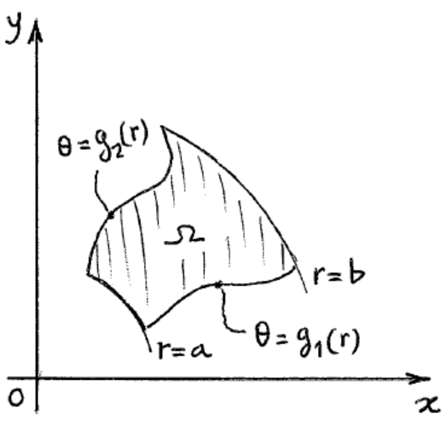
  A igualdade (15) traduz, no *integral duplo*, *a mudança de coordenadas cartesianas para coordenadas polares*.

## Cálculo do integral duplo em coordenadas polares

- O cálculo do integral duplo, sobre uma região $\Omega$, em coordenadas polares pode ser reduzido ao cálculo do integral sobre um de dois tipos de regiões básicas: região *Tipo I* e região *Tipo II*.




**Tipo I**




**Tipo II**

- Admita-se que $\Omega$ é uma região *Tipo I*, isto é, é o conjunto de todos os pontos $(x,y)$ que possuem coordenadas polares $(r,\theta)$ no conjunto

  $$\Gamma \ : \ \alpha \le \theta \le \beta \ , \ r_1(\theta) \le r \le r_2(\theta)$$

  em que $r_1(\theta)$ e $r_2(\theta)$ são funções contínuas em $[\alpha,\beta]$.
  Se $f(x,y)$ é uma função contínua em todos os pontos de $\Omega$, então:

  $$\iint_\Omega f(x,y)dxdy = \int_\alpha^\beta \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r\cos\theta, r \ \text{sen}\theta) \ r \ drd\theta$$

- Admita-se que $\Omega$ é uma região *Tipo II*, isto é, é o conjunto de todos os pontos $(x,y)$ que possuem coordenadas polares $(r,\theta)$ no conjunto

  $$\Gamma \ : \ a \le r \le b \ , \ g_1(r) \le \theta \le g_2(r)$$

  em que $g_1(r)$ e $g_2(r)$ são funções contínuas em $[a,b]$.
  Se $f(x,y)$ é uma função contínua em todos os pontos de $\Omega$, então:

  $$\iint_\Omega f(x,y)dxdy = \int_a^b \int_{g_1(r)}^{g_2(r)} f(r\cos\theta, r \ \text{sen}\theta) \ r \ d\theta dr$$

**Exemplo 8**: Usando coordenadas polares, calcule o integral duplo $\iint_\Omega xy \ dxdy$ onde $\Omega$ é a região, situada no primeiro quadrante, do círculo de raio um centrado na origem.

Solução:

Admita-se que $\Omega$ é o conjunto de todos os pontos $(x,y)$ que possuem coordenadas polares $(r,\theta)$ no conjunto (região *Tipo I*):

$$\Gamma \ : \ 0 \le \theta \le \pi/2 \ , \ 0 \le r \le 1$$

Então:

$$\iint_{\Omega} xy\ dxdy = \iint_{\Gamma} (r\cos\theta)(r\ \operatorname{sen}\theta)\ r\ drd\theta =$$

$$= \int_0^{\pi/2}\int_0^1 r^3 \cos\theta\ \operatorname{sen}\theta\ drd\theta = \int_0^{\pi/2}\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^1 \cos\theta\ \operatorname{sen}\theta\ d\theta =$$

$$= \frac{1}{8}\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}(2\theta)\ d\theta = \frac{1}{8}\left[\frac{-\cos(2\theta)}{2}\right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{8}$$

Convém notar que o integral duplo também poderia ser calculado considerando $\Omega$ como uma região *Tipo II*; neste caso, obtém-se

$$\iint_{\Omega} xy\ dxdy = \iint_{\Gamma_1} r^3 \cos\theta\ \operatorname{sen}\theta\ d\theta dr = \int_0^1\int_0^{\pi/2} r^3 \cos\theta\ \operatorname{sen}\theta\ d\theta dr$$

em que:

$$\Gamma_1\ :\ 0 \le r \le 1\ ,\ 0 \le \theta \le \pi/2$$

**Exemplo 9**: Usando coordenadas polares, calcule o volume da esfera de raio *R*.

Solução:

Considere-se a superfície esférica de raio *R* centrada na origem, cuja equação cartesiana é:

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

Assim, a esfera é o sólido, *T*, limitado superiormente pela superfície, $S_1$, de equação

$$S_1 : z = f(x,y) = \sqrt{R^2 - (x^2 + y^2)}\ ,\ (x,y) \in \Omega$$

e inferiormente pela superfície, $S_2$, de equação

$$S_2 : z = g(x,y) = -\sqrt{R^2 - (x^2 + y^2)} \ , \ (x,y) \in \Omega$$

em que $\Omega$ é o círculo de raio $R$ centrado na origem:

$$\Omega = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 0 \le x^2 + y^2 \le R^2 \right\}$$

Então, o volume da esfera, $V(T)$, é dado, em coordenadas cartesianas, pelo integral duplo

$$V(T) = \iint_{\Omega} \big( f(x,y) - g(x,y) \big) dxdy$$

isto é, dada a simetria da esfera em relação ao plano *xOy*:

$$V(T) = 2\iint_{\Omega} f(x,y) dxdy = 2\iint_{\Omega} \sqrt{R^2 - (x^2 + y^2)} dxdy \qquad (16)$$

Considere-se, agora, que $\Omega$ é o conjunto de todos os pontos $(x,y)$ que possuem coordenadas polares $(r,\theta)$ no conjunto (região *Tipo I*):

$$\Gamma \ : \ 0 \le \theta \le 2\pi \ , \ 0 \le r \le R$$

Recorrendo às coordenadas polares, verifica-se que

$$\sqrt{R^2 - (x^2 + y^2)} = \sqrt{R^2 - r^2(\cos^2\theta + sen^2\theta)} = \sqrt{R^2 - r^2}$$

e, portanto, a equação (16) pode ser reescrita sob a forma:

$$V(T) = 2\iint_{\Omega} \sqrt{R^2 - (x^2 + y^2)} dxdy = 2\iint_{\Gamma} \sqrt{R^2 - r^2} \ r \ drd\theta \qquad (17)$$

Obtém-se, finalmente:

$$V(T) = 2\iint_{\Gamma} \sqrt{R^2 - r^2} \ r \ drd\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^{R} 2r \left( R^2 - r^2 \right)^{1/2} drd\theta =$$

$$= -\int_0^{2\pi}\left[\frac{2}{3}\left(R^2 - r^2\right)^{3/2}\right]_0^R d\theta = \frac{2}{3}R^3\int_0^{2\pi} d\theta = \frac{4}{3}\pi R^3$$

Convém notar que o integral duplo (17) também poderia ser calculado considerando $\Omega$ como uma região *Tipo II*; neste caso, obtém-se

$$V(T) = 2\iint_{\Gamma_1}\sqrt{R^2 - r^2}\ r\ d\theta dr = \int_0^R\int_0^{2\pi} 2r\left(R^2 - r^2\right)^{1/2} d\theta dr$$

em que:

$$\Gamma_1\ :\ 0 \le r \le R\ ,\ 0 \le \theta \le 2\pi$$

**Exemplo 10**: Usando coordenadas polares, calcule o volume do sólido, *T*, limitado superiormente pela superfície cónica, *S*, de equação

$$S\ :\ z = f(x,y) = 2 - \sqrt{x^2 + y^2}$$

e inferiormente pela região, $\Omega$, de equação:

$$0 \le x^2 + (y-1)^2 \le 1 \qquad (18)$$

Solução:

Neste caso, $\Omega$ é a região circular situada no plano *xOy*, de raio um e com centro no ponto $P = (0,1,0)$, sendo a sua fronteira constituída pelos pontos que pertencem à circunferência, *C*, de equação cartesiana:

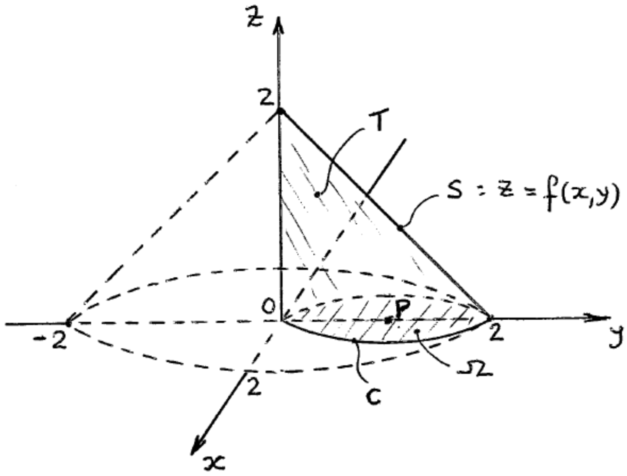
$$x^2 + (y-1)^2 = 1\ \Leftrightarrow\ x^2 + y^2 = 2y$$

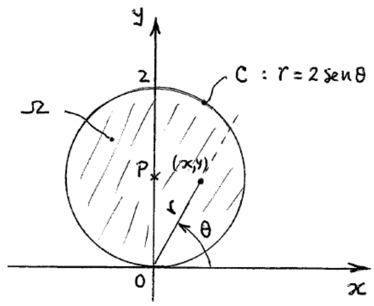
Esta equação pode ser reescrita em coordenadas polares, resultando:

$$r^2 = 2r\ \mathrm{sen}\theta\ \Leftrightarrow\ r = 2\ \mathrm{sen}\theta$$

Assim, a região $\Omega$, expressa em (18), é o conjunto de todos os pontos $(x,y)$ que possuem coordenadas polares $(r,\theta)$ no conjunto (região *Tipo I*):

$$\Gamma\ :\ 0 \le \theta \le \pi\ ,\ 0 \le r \le 2\ \mathrm{sen}\theta \qquad (19)$$




O volume do sólido $T$, $V(T)$, é dado, em coordenadas cartesianas, pelo integral duplo:

$$V(T) = \iint_{\Omega} \left( 2 - \sqrt{x^2 + y^2} \right) dxdy = 2\iint_{\Omega} dxdy - \iint_{\Omega} \sqrt{x^2 + y^2} dxdy \qquad (20)$$

Na equação (20) a primeira parcela do segundo membro é igual a duas vezes a área da região $\Omega$, $A(\Omega)$, ou seja,

$$2\iint_{\Omega} dxdy = 2A(\Omega) = 2\pi$$

enquanto a segunda parcela deverá ser determinada usando coordenadas polares.
Então, tendo em atenção (19), resulta:

$$\iint_{\Omega} \sqrt{x^2 + y^2} dxdy = \iint_{\Gamma} \sqrt{r^2}\ r\ drd\theta = \int_0^{\pi} \int_0^{2\text{sen}\theta} r^2\ drd\theta =$$

$$= \int_0^{\pi} \left[ \frac{r^3}{3} \right]_0^{2\text{sen}\theta} d\theta = \frac{8}{3} \int_0^{\pi} sen\theta (1 - \cos^2\theta)\ d\theta =$$

$$= \frac{8}{3} \int_0^{\pi} sen\theta\ d\theta - \frac{8}{3} \int_0^{\pi} sen\theta \cos^2\theta\ d\theta =$$

$$= \frac{8}{3} \left[ -\cos\theta \right]_0^{\pi} + \frac{8}{3} \left[ \frac{\cos^3\theta}{3} \right]_0^{\pi} = \frac{16}{3} - \frac{16}{9} = \frac{32}{9}$$

Obtém-se finalmente para o volume do sólido *T*:

$$V(T) = 2\pi - \frac{32}{9} = \frac{18\pi - 32}{9}$$

## Outras aplicações do integral duplo

- Considere-se uma placa muito fina ocupando uma região, $\Omega$, do plano *xOy* e designe-se por $\lambda(x,y)$ o valor da densidade mássica (por unidade de área) em cada ponto $(x,y)$ de $\Omega$ (placa).
  Assim, a *massa* da placa, $M(\Omega)$, é dada por:

  $$M(\Omega) = \iint_{\Omega} \lambda(x,y)dxdy$$

  Se a densidade for constante em cada ponto $(x,y)$ de $\Omega$, por exemplo, $\lambda(x,y) = \lambda$, então

  $$M(\Omega) = \lambda \iint_{\Omega} dxdy = \lambda A(\Omega) \tag{21}$$

  em que $A(\Omega)$ é a área de $\Omega$.
  Além disso, as coordenadas do *centro de massa* da placa, $C_M = (x_M, y_M)$, são obtidas a partir das duas *médias ponderadas*, *através da função (de peso)* $\lambda(x,y)$, seguintes:

  $$x_M = \frac{1}{M(\Omega)} \iint_{\Omega} x\ \lambda(x,y)\ dxdy$$

  $$y_M = \frac{1}{M(\Omega)} \iint_{\Omega} y\ \lambda(x,y)\ dxdy$$

**Exemplo 11**: Seja uma placa fina com a forma de um semi-círculo de raio $a$ e admita-se que a sua densidade mássica (por unidade de área), $\lambda(x,y)$, é, em cada ponto, directamente proporcional à distância ao ponto médio do lado recto da placa. Determine:

a) A função que define a densidade mássica em cada ponto da placa.

b) A massa da placa.

c) As coordenadas do seu centro de massa.

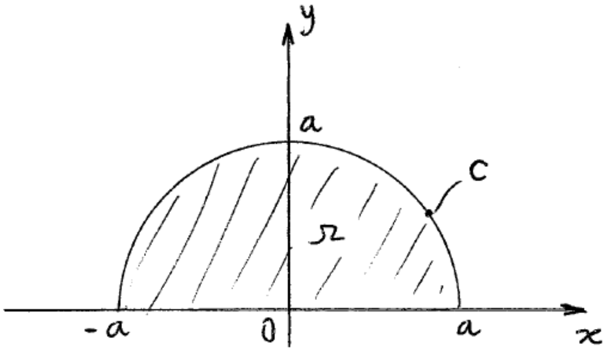
Solução:

a) Admita-se que a placa ocupa a região, $\Omega$, do plano $xOy$

$$\Omega \ : \ -a \le x \le a \ , \ 0 \le y \le \sqrt{a^2 - x^2}$$

tendo como fronteira o eixo dos $xx$ e a linha, $C$, de equação cartesiana:

$$y = \sqrt{a^2 - x^2}$$




Nestas condições, a densidade mássica é definida, em cada ponto de $\Omega$ (placa), pela função

$$\lambda(x,y) = \alpha\sqrt{x^2 + y^2}$$

em que $\alpha > 0$ é uma constante de proporcionalidade.

b) A massa da placa, *M*, é dada pelo integral duplo

$$M = \iint_{\Omega} \alpha\sqrt{x^2+y^2}\ dxdy$$

que deverá ser calculado em coordenadas polares.
Assim, considere-se que $\Omega$ é o conjunto de todos os pontos $(x,y)$ que possuem coordenadas polares $(r,\theta)$ no conjunto (região *Tipo I*):

$$\Gamma\ :\ 0 \le \theta \le \pi\ ,\ 0 \le r \le a$$

Notando que

$$\sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{r^2(\cos^2\theta + sen^2\theta)} = r$$

obtém-se:

$$M = \iint_{\Omega} \alpha\sqrt{x^2+y^2}\ dxdy = \iint_{\Gamma} (\alpha r)\ r\ drd\theta = \alpha\int_0^{\pi}\int_0^{a} r^2\ drd\theta =$$

$$= \alpha\int_0^{\pi} \frac{1}{3}\Big[r^3\Big]_0^a d\theta = \frac{\alpha a^3}{3}\int_0^{\pi} d\theta = \frac{\alpha\pi a^3}{3} \qquad (22)$$

c) Designando o centro de massa por $C_M = (x_M, y_M)$, então:

$$x_M = \frac{1}{M}\iint_{\Omega} \alpha x\sqrt{x^2+y^2}\ dxdy \qquad (23)$$

$$y_M = \frac{1}{M}\iint_{\Omega} \alpha y\sqrt{x^2+y^2}\ dxdy$$

Como a placa é simétrica em relação ao eixo dos *yy* e a função integranda em (23) é ímpar na variável *x*, resulta:

$$\iint_{\Omega} \alpha x\sqrt{x^2+y^2}\ dxdy = 0 \ \Rightarrow\ x_M = 0$$

Por outro lado,

$$y_M = \frac{1}{M}\iint_{\Omega} \alpha y\sqrt{x^2+y^2}\ dxdy = \frac{1}{M}\iint_{\Gamma}(\alpha r)(r\ \operatorname{sen}\theta)\ r\ drd\theta =$$

$$= \frac{\alpha}{M}\int_0^{\pi}\int_0^{a} r^3 \operatorname{sen}\theta\ drd\theta = \frac{\alpha}{M}\int_0^{\pi}\frac{1}{4}\Big[r^4\Big]_0^a \operatorname{sen}\theta\ d\theta =$$

$$= \frac{\alpha a^4}{4M}\int_0^{\pi}\operatorname{sen}\theta\ d\theta = \frac{\alpha a^4}{4M}\big[-\cos\theta\big]_0^{\pi} = \frac{\alpha a^4}{2M}$$

isto é, atendendo a (22):

$$y_M = \frac{3a}{2\pi}$$

Conclui-se que o centro de massa da placa localiza-se no ponto com coordenadas:

$$C_M = \left(0, \frac{3a}{2\pi}\right)$$

- Se a placa é materialmente *homogénea* (se a densidade é constante), tendo em atenção (21), obtém-se:

  $$\lambda(x,y) = \lambda = \frac{M(\Omega)}{A(\Omega)}$$

  Neste caso, o *centro de massa* da placa é coincidente com o *centroide da região* $\Omega$, $\bar{C} = (\bar{x}, \bar{y})$, sendo as suas coordenadas dadas por:

  $$\bar{x} = \frac{1}{A(\Omega)}\iint_{\Omega} x\ dxdy$$

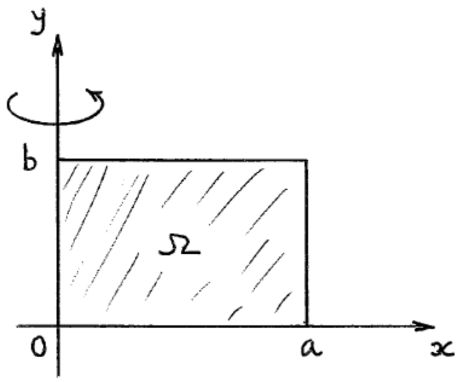
  $$\bar{y} = \frac{1}{A(\Omega)}\iint_{\Omega} y\ dxdy$$

- Admita-se, agora, que a placa roda em torno de uma linha, $L$. O *momento de inércia*, $I_L$, da placa *em relação ao eixo de rotação L*, é dado por

$$I_L = \iint_\Omega \lambda(x,y)[r(x,y)]^2 \; dxdy$$

onde $r(x,y)$ é distância de cada ponto $(x,y)$ de $\Omega$ ao eixo de rotação. Os momentos de inércia em relação aos eixos dos *xx* e dos *yy* são, respectivamente, designados por $I_x$ e $I_y$.

**Exemplo 12**: Seja a placa fina de massa *M* apresentada na figura seguinte




e admita-se que ela roda em torno do eixo dos *yy*. Calcule o momento de inércia da placa em relação a esse eixo, $I_y$, supondo que:

a) A placa tem uma densidade mássica uniforme.

b) A placa tem uma densidade mássica que varia proporcionalmente com o quadrado da distância ao lado oposto ao eixo de rotação.

Solução:

a) Se a densidade mássica da placa é constante, então o seu valor é

$$\lambda(x,y) = \frac{M}{A(\Omega)} = \frac{M}{ab}$$

onde $A(\Omega) = ab$ é a área da placa (região $\Omega$).

Projectando $\Omega$ sobre o eixo dos *yy* (região *Tipo II*)

$$\Omega = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 0 \le y \le b \ , \ 0 \le x \le a \right\}$$

e sabendo que $r(x,y) = x$, obtém-se:

$$I_y = \frac{M}{ab} \iint_R x^2 \ dxdy = \frac{M}{ab} \int_0^b \int_0^a x^2 \ dxdy =$$

$$= \frac{M}{ab} \int_0^b \frac{1}{3} \left[ x^3 \right]_0^a dy = \frac{Ma^2}{3b} \int_0^b dy = \frac{Ma^2}{3}$$

b) Neste caso, a densidade mássica da placa é dada por

$$\lambda(x,y) = \alpha(a-x)^2$$

em que $\alpha > 0$ é uma constante de proporcionalidade.
Tem-se, portanto:

$$I_y = \iint_R \alpha(a-x)^2 x^2 \ dxdy = \alpha \int_0^b \int_0^a (a^2x^2 - 2ax^3 + x^4) \ dxdy =$$

$$= \alpha \int_0^b \left[ \frac{a^2x^3}{3} - \frac{ax^4}{2} + \frac{x^5}{5} \right]_0^a dy = \alpha \frac{a^5}{30} \int_0^b dy = \frac{\alpha a^5 b}{30} \qquad (24)$$

O resultado obtido em (24) pode ainda ser reescrito em função da massa, *M*, da placa.
Com efeito, notando que

$$M = \iint_R \alpha(a-x)^2 \ dxdy = \alpha \int_0^b \int_0^a (a-x)^2 \ dxdy =$$

$$= \alpha \int_0^b \frac{1}{3} \left[ -(a-x)^3 \right]_0^a dy = \frac{\alpha a^3}{3} \int_0^b dy = \frac{\alpha a^3 b}{3}$$

ou seja,

$$\alpha = \frac{3M}{a^3 b}$$

substituindo em (24) obtém-se finalmente:

$$I_y = \frac{Ma^2}{10}$$