

# FÍSICA I - MIEIC. 2017-2018

Aula 1. 2018-02-06

Regente: Jaime Villate <villate@fe.up.pt>

Página Web da disciplina: <http://def.fe.up.pt/eic0010>

Bibliografia: Dinâmica e Sistemas Dinâmicos  
(<http://def.fe.up.pt/dinamica>)

## Enquadramento dentro do MIEIC.

Esta não é a disciplina tradicional de Física para engenharia, mas tem sido concebida para dar competências de ciência computacional, seja em métodos numéricos, sistemas gráficos, motores de jogos e, em geral, em todas as áreas onde aparecem sistemas dinâmicos.

## CINEMÁTICA

Descrição do movimento (sem tentar explicar a sua causa).

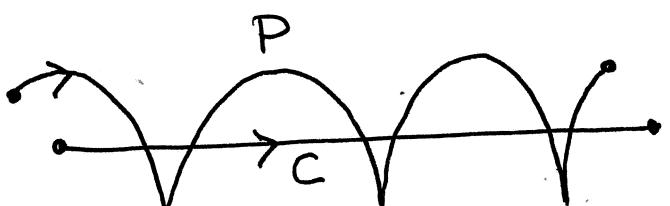
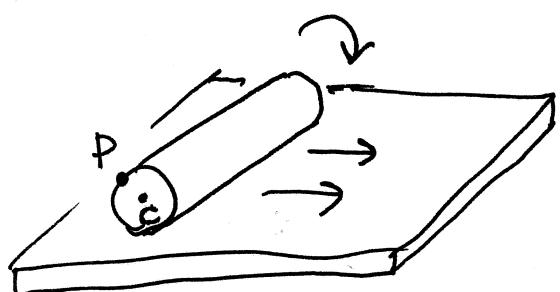
Movimento: mudança da posição de um objeto em diferentes instantes de tempo.

A posição determina-se por meio de algumas distâncias e/ou ângulos em relação a outros objetos (referencial) fixos.

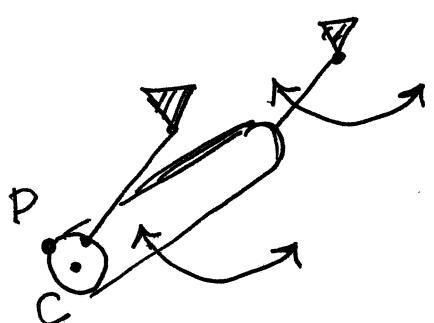
Como tal, o movimento e o repouso (ausência de movimento) são relativos (diferentes para diferentes referenciais).

Cada ponto num objeto em movimento descreve uma curva contínua no espaço, chamada **trajetória**

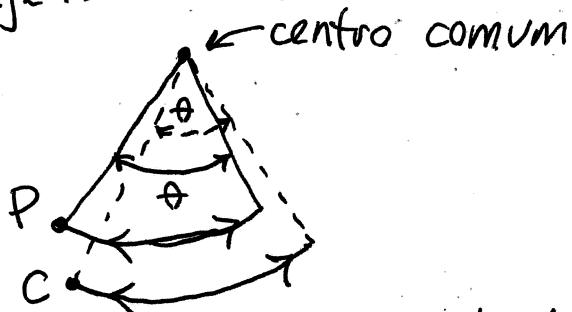
**Exemplo 1.** Cilindro a rodar sobre uma superfície  
trajetórias de P e C:



**Exemplo 2.** O mesmo cilindro é pendurado de dois fios nos seus extremos, colados a dois pontos fixas, de forma que o cilindro oscila como um pêndulo

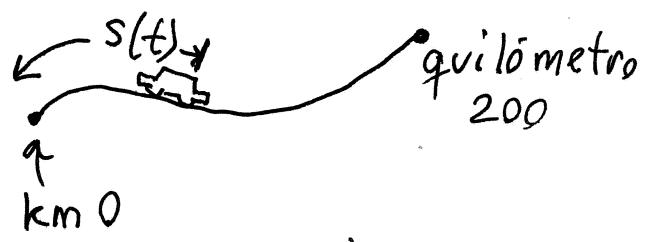


trajetórias de P e C:



As trajetórias de todos os pontos do cilindro são arcos de círculo, com o mesmo centro e o mesmo ângulo  $\theta$ , mas raios diferentes. Basta saber a expressão  $\theta(t)$  para qualquer tempo  $t$ , para conseguir determinar a trajetória de qualquer ponto do cilindro.

**Exemplo 3.** A posição dum automóvel numa autoestrada (se não interessa a sua inclinação) é dada por  $s(t)$ , que mede o comprimento de arco da autoestrada, desde a origem (quilômetro 0)



## GRAUS DE LIBERDADE

Variáveis necessárias para determinar a posição dos pontos dum objeto, em qualquer instante.

Exemplo 2 → um único grau de liberdade,  $\theta$

Exemplo 3 → um único grau de liberdade,  $s$

Exemplo 2 → dois graus de liberdade, porque bastam duas variáveis:  $s =$  posição do ponto C  
 $\theta =$  rotação em torno a C.

A Cada grau de liberdade está associada uma função contínua  $S(t)$  ( $s$  pode ser um comprimento de arco ao longo de uma curva, um ângulo ou distância) e o conjunto dessas funções define a posição do objeto.

Cada função  $S(t)$  define outras funções adicionais:

**DESLOCAMENTO**,  $\Delta s$ , num intervalo de tempo  $[t_1, t_2]$

$$\Delta s = s(t_2) - s(t_1) \quad (\text{aumento da posição})$$

Note-se que  $\Delta s$  pode ser negativo.

$S(t_1)$  e  $S(t_2)$  alteram-se se mudarmos a origem, mas  $\Delta s$  continua igual.

**VELOCIDADE MÉDIA**,  $\bar{v}$ , num intervalo  $[t_1, t_2]$

$$\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1} \quad (\text{deslocamento por unidade de tempo})$$

pode ter unidades:  $\frac{\text{cm}}{\text{s}}$ ,  $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ ,  $\frac{1}{\text{s}}$  (radianos por segundo), ...

$\Delta t = t_2 - t_1$  é sempre positivo, mas  $\Delta s$  pode ter qualquer sinal, como tal, a velocidade média pode ser negativa, indicando aproximação da origem.

**VELOCIDADE INSTANTÂNEA**,  $v(t)$ , ou simplesmente "velocidade".

$$v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{(t+\Delta t) - t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \begin{matrix} \text{derivada} \\ \text{de } s(t) \\ \text{em ordem} \\ \text{a } t \end{matrix}$$

representa-se como:

$$v(t) = \frac{ds}{dt}, \text{ ou ainda, } v(t) = \dot{s}$$

pode ser negativa; o seu valor absoluto chama-se rapidez.

**ACELERAÇÃO TANGENCIAL MÉDIA**

$$\bar{a}_t = \frac{v(t_2) - v(t_1)}{t_2 - t_1} = \begin{matrix} \text{aumento da velocidade} \\ \text{por unidade de tempo} \end{matrix}$$

**ACELERAÇÃO TANGENCIAL**

$$a_t(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = \dot{v} = \ddot{s}$$

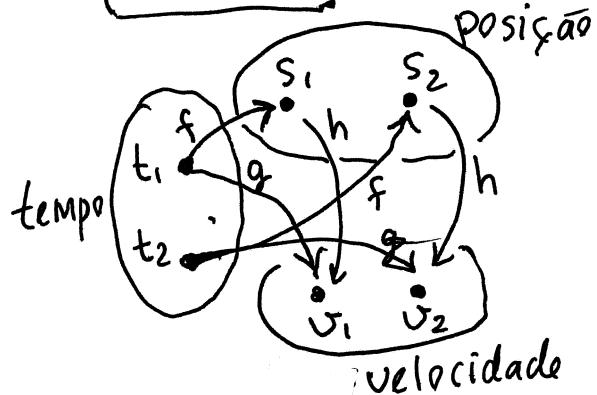
$v(t)$  é sempre função contínua e, por isso,  $a_t(t)$  existe. No entanto,  $a_t(t)$  pode ser função descontínua e, por isso, não definimos a derivada de  $a_t$ , que pode não existir.

Aula 2. 2018-02-08

## EQUAÇÕES CINEMÁTICAS

posição:  $s = f(t)$  = função contínua do tempo  $t$

$$(1) \boxed{v = \frac{ds}{dt}} = g(t)$$



$$(2) \boxed{a_t = \frac{dv}{dt}}$$

existe então também uma função contínua  $h$ :  $v = h(s)$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds} \frac{ds}{dt} = v \frac{dv}{ds}$$

$$\Rightarrow (3) \boxed{a_t = v \frac{dv}{ds}}$$

**Exemplo 1.** A posição  $s$  de um objeto ao longo de uma curva é dada pela expressão  $s = 3(1 - e^{-2t})$ , em função do tempo  $t$ . Determine as expressões da velocidade e da aceleração tangencial.

$$v = \dot{s} = 6e^{-2t} \quad a_t = \ddot{s} = \ddot{v} = -12e^{-2t}$$

$$\text{Note-se que: } e^{-2t} = 1 - \frac{s}{3}$$

e  $v$  pode escrever-se em função de  $s$ :

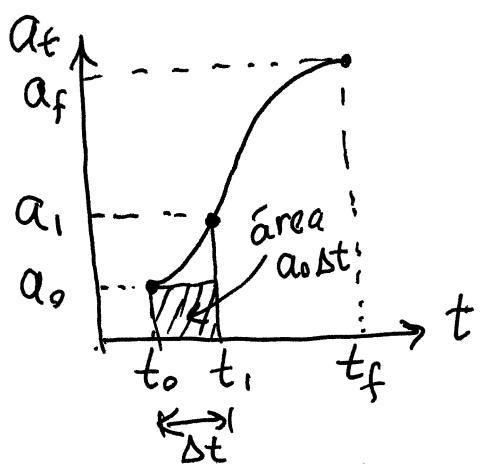
$$v = 6 - 2s \Rightarrow a_t = v \frac{dv}{ds} = (6 - 2s)(-2) = 4s - 12$$

que é equivalente a  $a_t = -12e^{-2t}$ :

$$4s - 12 = 4(3(1 - e^{-2t})) - 12 = 12 - 12e^{-2t} - 12 = -12e^{-2t}$$

se em vez de ser dada a expressão de  $s$  em função de  $t$  fosse dada a expressão  $v = 6 - 2s$ , pode obter-se  $a_t$  derivando  $v$  e  $s(t)$  integrando a equação 1.  
a equação 3

# INTEGRAÇÃO DAS EQUAÇÕES CINEMÁTICAS



em  $t_0$ : velocidade  $v_0$ ,  
aceleração tang.  $a_0$

em  $t_f$ :  $v_f$ ,  $a_f$

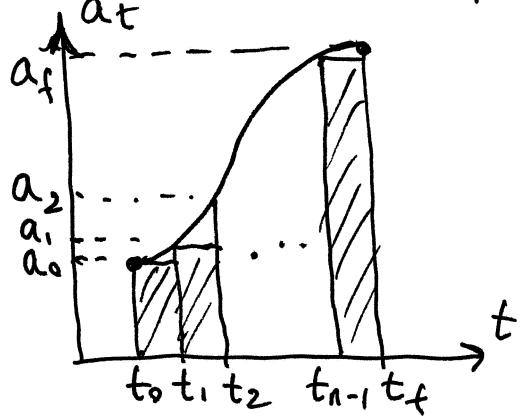
seja  $t_1 = t_0 + \Delta t$

$$\Rightarrow a_0 = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v_1 - v_0}{\Delta t}$$

$$\Rightarrow v_1 - v_0 = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} a_0 \Delta t = \text{área sob a curva } a_t(t) \text{ entre } t_0 \text{ e } t_1.$$

Divide-se o intervalo em  $n$

subintervalos de comprimento  $\Delta t = \frac{t_f - t_0}{n}$



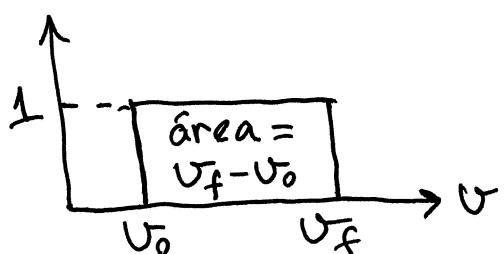
$$t_1 = t_0 + \Delta t, t_2 = t_0 + 2\Delta t, \dots, t_n = t_0 + n\Delta t = t_f$$

$v_f - v_0 = \text{soma das áreas de todos os retângulos, no limite } \Delta t \rightarrow 0,$   
ou seja,  $n \rightarrow \infty$

$$v_f - v_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} a_i \Delta t$$

esse somatório infinito chama-se **integral**, da função  $a_t$ , entre  $t_0$  e  $t_f$ , e representa-se assim:

$$(4) \boxed{v_f - v_0 = \int_{t_0}^{t_f} a_t dt}$$



Observe-se que  $v_f - v_0$  é igual a  $\int_{v_0}^{v_f} 1 dv$

$$\Rightarrow \int_{v_0}^{v_f} dv = \int_{t_0}^{t_f} a_t dt$$

Em vez de usarmos a equação (4), podemos obter o mesmo resultado aplicando o método descrito a seguir à equação (2).

## MÉTODO DE SEPARAÇÃO DE VARIÁVEIS

Cada uma das equações diferenciais (1), (2) e (3) pode ser integrada usando este método. Por exemplo, a equação

$$(2): \quad a_t = \frac{dv}{dt}$$

1º passo: coloca-se cada diferencial a um dos dois lados da equação.  $\rightarrow a_t dt = dv$

2º passo: coloca-se o símbolo de integração nos dois lados

$$\rightarrow \int a_t dt = \int dv$$

3º passo: indicam-se os limites de cada integral, que devem ser os valores iniciais e finais da respectiva variável no diferencial

$$\rightarrow \int_{t_0}^{t_f} a_t dt = \int_{v_0}^{v_f} dv \quad (o \text{ mesmo resultado})$$

Neste caso,  $\int_{v_0}^{v_f} dv = v_f - v_0$  e o integral no lado esquerdo só pode ser calculado se soubermos a expressão de  $a_t$  em função de  $t$ . Se soubermos  $a_t$  em função de  $v$ , a separação podia ser feita assim:

$$\int_{t_0}^{t_f} dt = \int_{v_0}^{v_f} \frac{dv}{a_t} \Rightarrow t_f - t_0 = \int_{v_0}^{v_f} \frac{dv}{a_t}$$

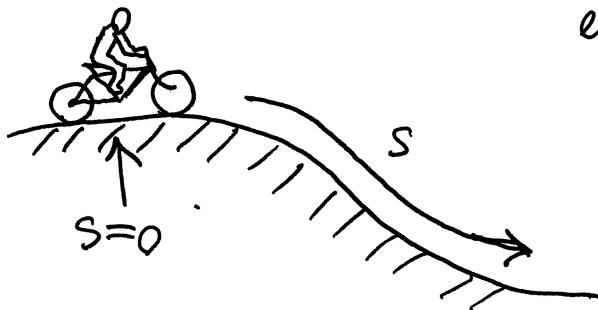
No caso da equação (1):

$$\int_{t_0}^{t_f} v dt = \int_{s_0}^{s_f} ds = s_f - s_0 \quad (\text{se soubermos } v(t))$$

$$\text{ou: } \int_{t_0}^{t_f} dt = \int_{s_0}^{s_f} \frac{ds}{v} \Rightarrow t_f - t_0 = \int_{s_0}^{s_f} \frac{ds}{v} \quad (\text{se soubermos } v(s))$$

e semelhante para a equação (3).

## Exemplo 2.



O ciclista aplica os travões em  $s=0$ , fazendo diminuir a velocidade de acordo com a expressão:

$$v = \frac{1}{2} \sqrt{100 - s^2} \text{ (unidades SI)}$$

até parar. Encontre o tempo que demora até parar.

Resolução: em  $t_0$ , que podemos arbitrar  $t_0 = 0$ ,

$$s_0 = 0 \text{ e } v_0 = \frac{1}{2} \sqrt{100 - 0^2} = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

No instante final  $t_f$ , quando pára completamente,

$v_f = 0$  e  $s_f$  obtém-se resolvendo a equação:

$$0 = \frac{1}{2} \sqrt{100 - s_f^2}$$

No Maxima:

(%i1) solve ( $\sqrt{100 - s_f^2}/2 = 0$ );  
 (%o1)  $[s_f = -10, s_f = 10]$

$$\Rightarrow s_f = 10 \text{ m}$$

A expressão para  $v$  pode substituir-se na equação 1, para obter uma relação entre  $s$  e  $t$ :

$$\frac{1}{2} \sqrt{100 - s^2} = \frac{ds}{dt} \Rightarrow \int_0^{t_f} dt = \int_0^{10} \frac{ds}{\frac{1}{2} \sqrt{100 - s^2}}$$

$$\Rightarrow t_f = \int_0^{10} \frac{2ds}{\sqrt{100 - s^2}}$$

(%i2) integrate ( $2/\sqrt{100 - s^2}$ ,  $s, 0, 10$ );

(%o2) %pi

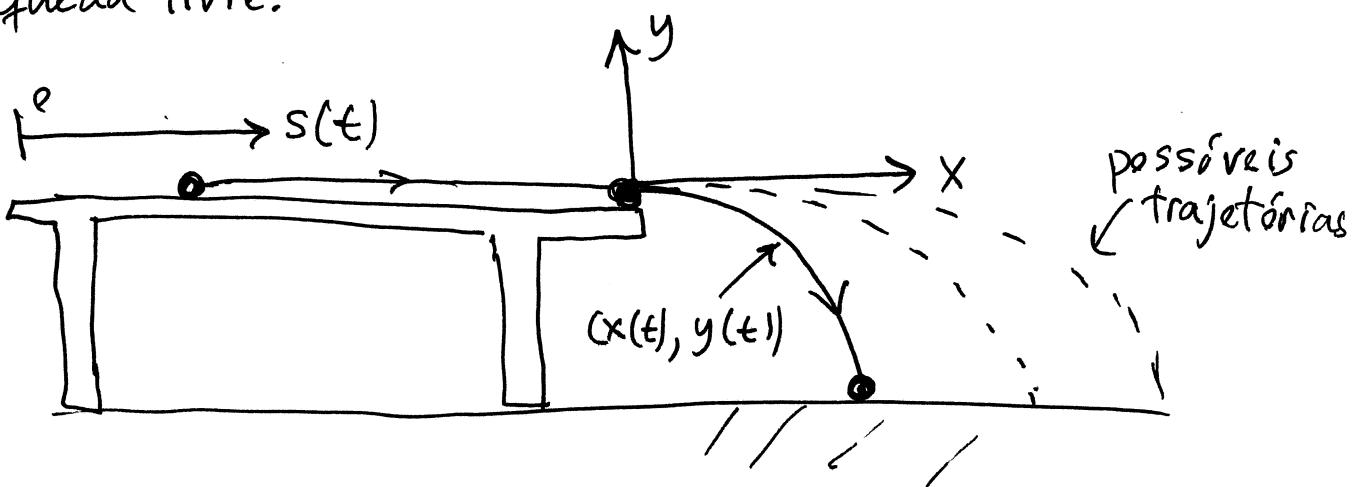
(%i3) float(%o2);

(%o3) 3.141592653589793

$\Rightarrow$  resposta:  
demora 3.14 segundos

# LANÇAMENTO DE PROJÉTEIS

Bolinha em movimento numa mesa horizontal. Quando atinge a borda da mesa torna-se um projétil, em queda livre:



Sobre a mesa, o movimento tem apenas um grau de liberdade,  $s(t)$ .

Na queda livre, como a trajetória não é fixa, mas depende da velocidade na mesa, o movimento tem dois graus de liberdade,  $x(t)$  e  $y(t)$ .

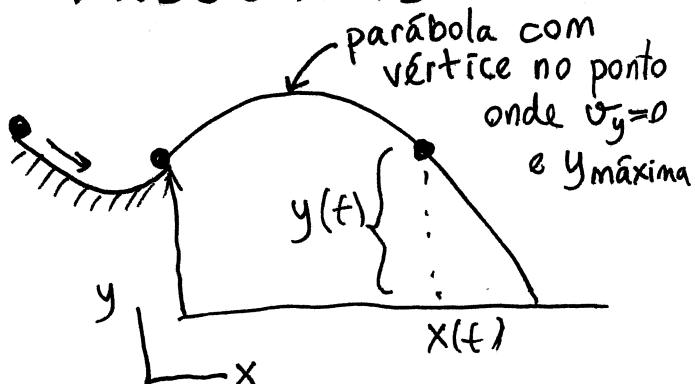
Para cada grau de liberdade há três equações cinemáticas:

$$v_x = \dot{x}, \quad a_x = \ddot{x}, \quad a_x = v_x \frac{dv_x}{dx}$$
$$v_y = \dot{y}, \quad a_y = \ddot{y}, \quad a_y = v_y \frac{dv_y}{dy}$$

observe-se que em relação a  $x(t)$ , a direção tangente é o próprio eixo dos  $x$  e, por isso,  $a_t = a_x$   
Igual para  $y(t)$ :  $a_t = a_y$

Aula 3. 2018-02-15

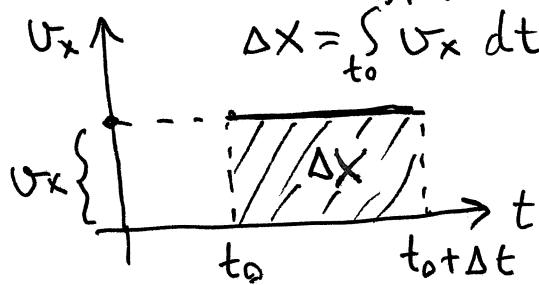
## PROJÉTEIS



Se o projétil for muito mais denso que o ar e com forma aerodinâmica, observa-se que a velocidade em x,  $v_x$ , permanece constante e a aceleração do movimento em y,  $a_y$  também permanece const.

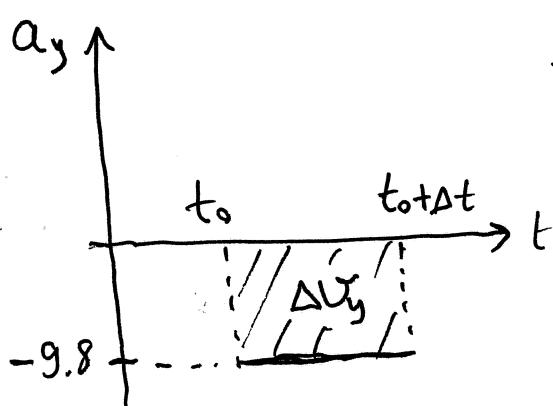
- $v_x$  pode ter qualquer valor (não muito elevado, caso contrário a resistência do ar faz com que já não seja constante)
- $a_y$  tem sempre o mesmo valor, em cada ponto geográfico na Terra. Se o eixo dos y aponta para cima,  
 $\Rightarrow a_y = -g$        $g = \text{constante} \approx 9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$   
 (aceleração da gravidade)

Resolução das equações cinemáticas. Neste caso pode também ser feita de forma gráfica:



$$\Delta x = v_x \Delta t$$

$a_x = 0$  (porque derivada de uma constante é 0)



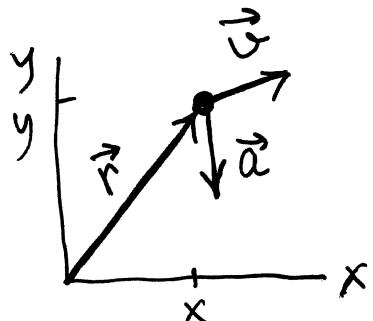
$$v_y = v_{y_0} - 9.8 \Delta t$$

$$y - y_0 = \int_{t_0}^{t_0+Δt} v_y dt = v_{y_0} \Delta t - 9.8 \int_{t_0}^{t_0+Δt} (t - t_0) dt$$

arbitrando  $t_0 = 0$ ,

$$\boxed{y = y_0 + v_{y0}t - \frac{9.8}{2} t^2} \quad \text{e} \quad v_y = v_{y0} - 9.8t$$

## VETORES POSIÇÃO, VELOCIDADE E ACELERAÇÃO.



$$\begin{aligned}\vec{r} &= x\hat{i} + y\hat{j} \\ \vec{v} &= v_x\hat{i} + v_y\hat{j} \\ \vec{a} &= a_x\hat{i} + a_y\hat{j}\end{aligned}$$

combinam-se  
as variáveis  
formando  
vetores

O mesmo pode ser feito em 3 dimensões e para qualquer movimento.  $\vec{r}$  é formado por 3 funções contínuas do tempo:

$$\vec{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} + z(t)\hat{k}$$

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} \hat{i} + \frac{y(t+\Delta t) - y(t)}{\Delta t} \hat{j} + \frac{z(t+\Delta t) - z(t)}{\Delta t} \hat{k} \right)$$

$$= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} (\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)) \Rightarrow$$

$$\boxed{\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}}$$

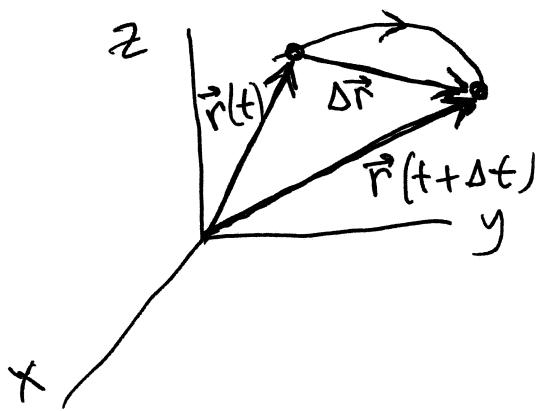
De forma semelhante,  $\boxed{\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}}$

e as equações vetoriais inversas são:

$$\begin{cases} \vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \int \vec{v}(t) dt \\ \vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \int \vec{a}(t) dt \end{cases}$$

cada integral vetorial  
são 3 integrais, das  
3 componentes do  
vetor.

# VETOR DESLOCAMENTO



$$\Delta \vec{r} = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)$$

começa na posição definida por  $\vec{r}(t)$  e termina na posição definida por  $\vec{r}(t + \Delta t)$

É um vetor livre ( $\vec{r}$  não é livre)

## VETORES LIVRES

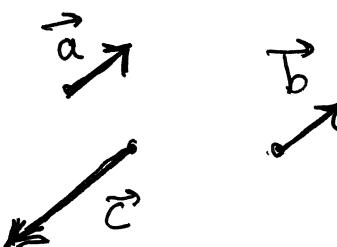
Caracterizados por:

- Direção:  $\hat{a}$  (versor)
- Sentido
- Módulo (norma)  $|\vec{a}|$

$$\vec{a} = |\vec{a}| \hat{a}$$

$\nwarrow$  versor

$\hat{a}$ : mesma direção e sentido de  $\vec{a}$ , mas módulo igual a 1.

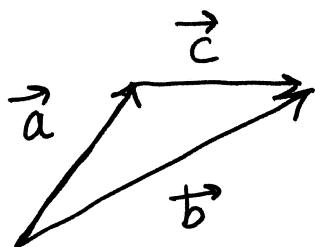


$\vec{a} = \vec{b}$   
mesma norma,  
direção e sentido

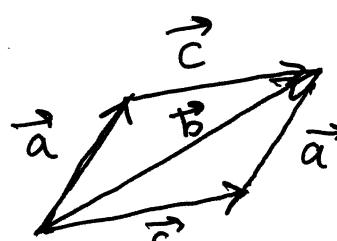
$$\vec{c} = -2\vec{a}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{c} = -\hat{a}, \text{ mesma direção mas sentidos opostos} \\ |\vec{c}| = 2|\vec{a}| \end{array} \right.$$

## SOMA VETORIAL



$$\vec{c} = \vec{b} - \vec{a} \Rightarrow \vec{b} = \vec{a} + \vec{c} = \vec{c} + \vec{a}$$



regra do  
paralelogramo

Exemplo 2.1. A velocidade de uma partícula (em unidades SI) é dada pela função do tempo  $t$ :

$$\vec{v} = (5 - t^2 e^{-t/5}) \hat{i} + (3 - e^{-t/12}) \hat{j}$$

A partícula passa pela posição  $(2\hat{i} + 5\hat{j})$  em  $t=0$ . Determine a sua posição, velocidade e aceleração em  $t=15s$ .

Resolução.  $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(5 - t^2 e^{-t/5}) \hat{i} + \frac{d}{dt}(3 - e^{-t/12}) \hat{j}$

$$\vec{a} = \left(\frac{t^2}{5} - 2t\right) e^{-t/5} \hat{i} + \frac{e^{-t/12}}{12} \hat{j}$$

OU, no Maxima, representam-se os vetores por listas:

(%i1)  $v: [5 - t^2 * \exp(-t/5), 3 - \exp(-t/12)]$  \$

(%i2)  $a: \text{diff}(v, t);$

(%o2)  $\left[ \frac{t^2 e^{-t/5}}{5} - 2t e^{-t/5}, \frac{e^{-t/12}}{12} \right]$

$$\vec{r} = 2\hat{i} + 5\hat{j} + \int_0^t (5 - t^2 e^{-t/5}) dt \hat{i} + \int_0^t (3 - e^{-t/12}) dt \hat{j}$$

(%i3)  $r: [2, 5] + \text{integrate}(v, t, 0, t);$

(%o3)  $[e^{-t/5} \dots ]$

Valores de  $\vec{r}$ ,  $\vec{v}$  e  $\vec{a}$  em  $t=15s$ :

(%i4)  $\text{fpprintprec}: 3$  \$

(%i5)  $\text{float}(\text{subst}(t=15, [r, v, a]));$

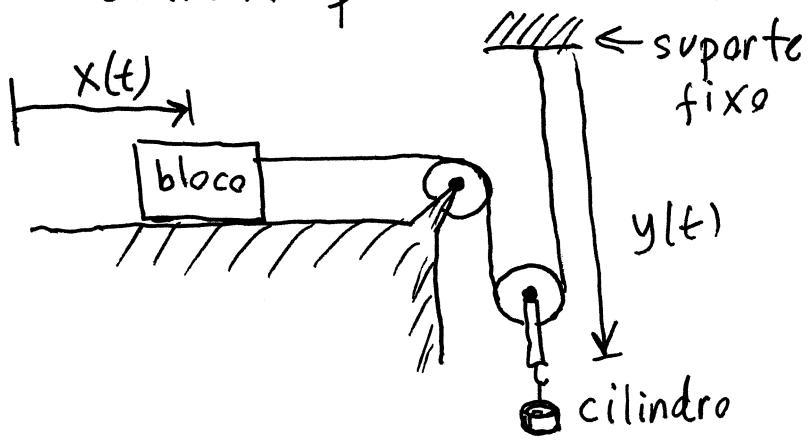
(%o5)  $[-67.241.4], [-6.2, 2.71], [0.747, 0.0239]$

$\nwarrow \vec{r} \quad \nwarrow \vec{v} \quad \nwarrow \vec{a}$

Aula 4. 2018-02-20

## MOVIMENTOS DEPENDENTES

Exemplo. Um bloco desliza sobre uma mesa horizontal, ligado por uma corda, através de duas roldanas, a um cilindro que se desloca na vertical

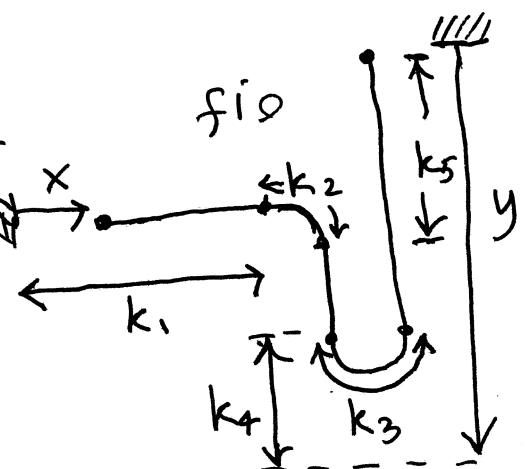


Há dois movimentos:  
o movimento horizontal  
do bloco, descrito por  
uma função  $x(t)$  e  
o movimento do ci-  
lindro, descrito por  $y(t)$ .

Mas esses dois movimentos não são independentes.  
Por exemplo, se o bloco se desloca para a esquerda,  
o cilindro necessariamente sobe.

A condição que torna  $x(t)$  e  $y(t)$  dependentes entre si é que o comprimento da corda permanece constante (se a corda fosse cortada  $x(t)$  e  $y(t)$  seriam independentes.)

Como tal, para encontrar a relação entre  $x$  e  $y$ , escrever-se o comprimento do fio,  $L$ , em função de  $x$  e  $y$ , para qualquer posição do bloco ( $x$ ) e do cilindro ( $y$ )



$$L = (k_1 - x) + k_2 + (y - k_4 - k_5) + k_3 + (y - k_4)$$

onde  $k_1, k_2, k_3, k_4, k_5$  e  $L$  permanecem constantes.

Derivando os dois lados da equação obtém-se:

$$\ddot{\theta} = -\ddot{x} + 2\ddot{y} \Rightarrow 2\ddot{y} = \ddot{x}$$

$\dot{x}$  é a velocidade do bloco e  $\dot{y}$  é a velocidade do cilindro

$$\Rightarrow \boxed{v_{\text{bloco}} = 2 v_{\text{cilindro}}}$$

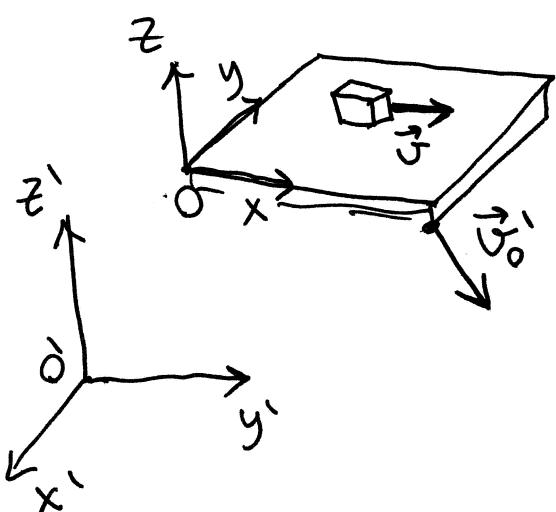
ambas velocidades têm o mesmo sinal, ou seja, se o bloco anda para a direita ( $v_{\text{bloco}} > 0$ ) o cilindro desce ( $v_{\text{cilindro}} > 0$ ) e vice versa.

Derivando uma segunda vez:  $2\ddot{y} = \ddot{x}$

$$\Rightarrow \boxed{a_{\text{bloco}} = 2 a_{\text{cilindro}}}$$

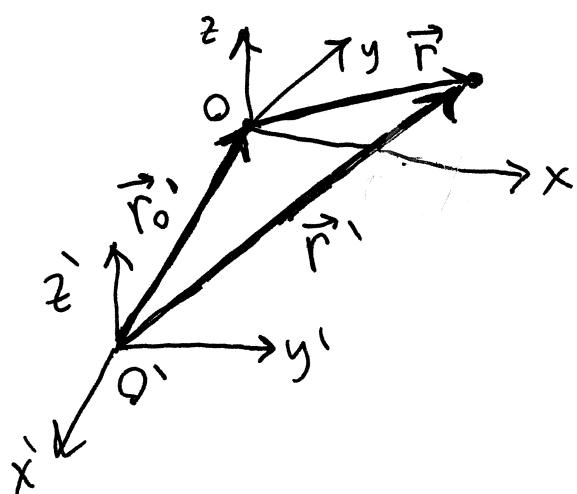
Observe-se que a pesar de existirem duas funções  $x(t)$  e  $y(t)$  necessárias para determinar a posição do sistema, o sistema tem apenas um grau de liberdade. Cada condição num sistema reduz um grau de liberdade.

## MOVIMENTO RELATIVO



Exemplo. Um bloco tem velocidade  $\vec{v}$ , medida em relação a um referencial  $Oxyz$ , e esse referencial a sua vez está em movimento em relação a outro referencial  $O'x'y'z'$

Se o referencial Oxyz tem apenas movimento de translação, sem rotação, todos os pontos desse referencial têm a mesma velocidade,  $\vec{v}_o$ , relativa a  $O'x'y'z'$ .



$$\vec{r}' = \vec{r}_o + \vec{r}$$

Se  $\vec{r}_o$  é o vetor posição de O, relativo ao referencial  $O'x'y'z'$ , e  $\vec{r}$  é a posição do bloco, relativa ao referencial Oxyz, então a posição do bloco, relativa a  $O'x'y'z'$  é:

Derivando os dois lados: (na física clássica o tempo é o mesmo em todos os referenciais)

$$\frac{d\vec{r}'}{dt} = \frac{d\vec{r}_o}{dt} + \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$\frac{d\vec{r}'}{dt}$  é a velocidade  $\vec{v}'$  do bloco, relativa a  $O'x'y'z'$

$\frac{d\vec{r}}{dt}$  é a velocidade  $\vec{v}$  do bloco, relativa a Oxyz

$\frac{d\vec{r}_o}{dt}$  é a velocidade  $\vec{v}_o$  do referencial Oxyz, relativa a  $O'x'y'z'$

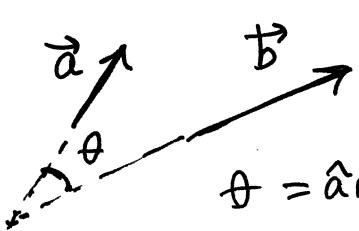
$$\Rightarrow \vec{v}' = \vec{v}_o + \vec{v}$$

Derivando uma segunda vez obtém-se:

$$\vec{a}' = \vec{a}_o + \vec{a}$$

(sobre posição das velocidades e acelerações relativas)

# PRODUTO ESCALAR ENTRE VETORES

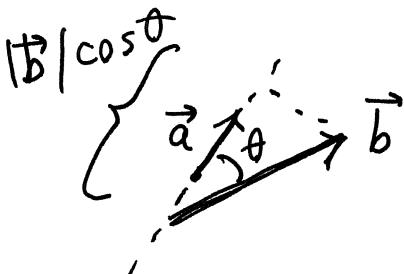
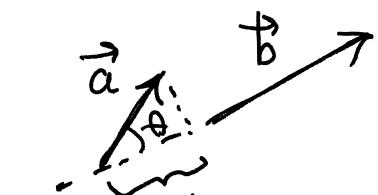


$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta}$$

o resultado é um número (escalar)

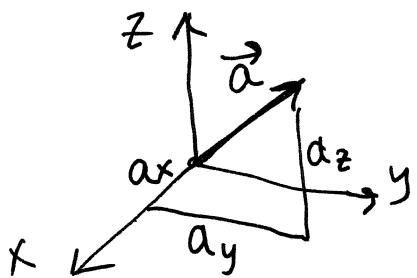
$\theta$  = ângulo entre as direções dos vetores

Observe-se que:



$$\Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = \text{projeção de } \vec{a} \text{ na direc. de } \vec{b}, \text{ vezes } |\vec{b}| = \text{projeção de } \vec{b} \text{ na direc. de } \vec{a}, \text{ vezes } |\vec{a}|$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}}$$



$$\vec{a} = a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k}$$

$$a_x = \vec{a} \cdot \hat{i} \quad (\text{projeção de } \vec{a} \text{ na direção } x, \text{ vezes } 1 \text{ (modulo de } \hat{i}))$$

$$\text{também } a_y = \vec{a} \cdot \hat{j}, a_z = \vec{a} \cdot \hat{k}$$

o produto escalar também é distributivo:

$$\boxed{\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}}$$

$$\hat{i} \cdot \hat{i} = \hat{j} \cdot \hat{j} = \hat{k} \cdot \hat{k} = 1 \times 1 \times \cos 0^\circ = 1$$

$$\hat{i} \cdot \hat{j} = \hat{i} \cdot \hat{k} = \hat{j} \cdot \hat{k} = 1 \times 1 \times \cos 90^\circ = 0$$

$$\Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = (a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k}) \cdot (b_x \hat{i} + b_y \hat{j} + b_z \hat{k})$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}$$

em particular,

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 = |\vec{a}|^2$$

$$\Rightarrow |\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$$

$$\Rightarrow \theta = \cos^{-1} \left( \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\sqrt{|\vec{a} \cdot \vec{a}|} \sqrt{|\vec{b} \cdot \vec{b}|}} \right)$$

No Maxima, o produto escalar representa-se por um ponto.

Exemplo.  $\vec{a} = 3.5\hat{i} - 2.2\hat{j} + 5.1\hat{k}$

$$\vec{b} = 3\hat{i} + 4\hat{j} - 2\hat{k}$$

O módulo de  $\vec{a}$  calcula-se assim:

(%i1)  $a: [3.5, -2.2, 5.1]$  \$

(%i2)  $\text{sqrt}(a \cdot a);$

(%o2) 6.5650...

E o ângulo entre os vetores  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$  é:

(%i3)  $b: [3, 4, -2]$  \$

(%i4)  $\text{acos}(a \cdot b / \text{sqrt}((a \cdot a) * (b \cdot b))) ;$

(%o4) 1.81360... (em radianos)

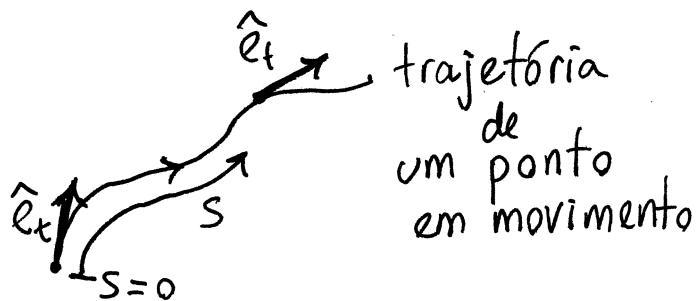
Em graus será:

(%i5)  $\text{float}(% * 180 / \% \pi);$

(%o5) 103.9116...

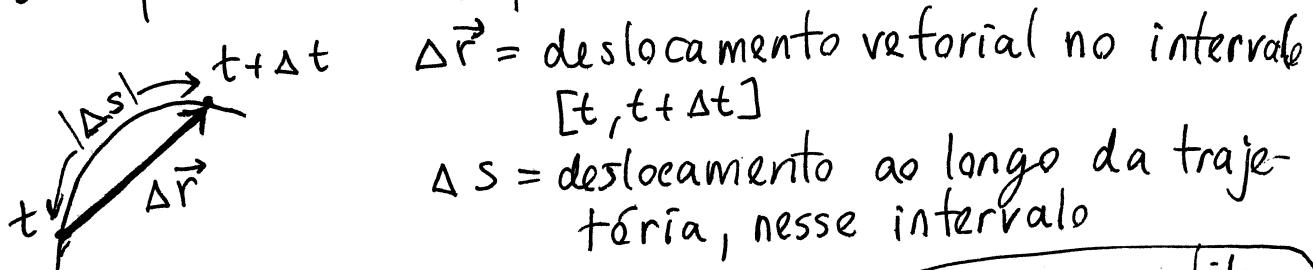
Aula 5. 2018-02-22

## COORDENADAS TANGENCIAL E NORMAL



$\hat{e}_t$  = versor tangente à trajetória com módulo 1 e no sentido em que a posição na trajetória,  $s$ , aumenta.

Se a trajetória é reta,  $\hat{e}_t$  é constante; caso contrário,  $\hat{e}_t$  depende de  $s$  (e portanto de  $t$ ).



$\Delta \vec{r} =$  deslocamento vetorial no intervalo  $[t, t + \Delta t]$

$\Delta s =$  deslocamento ao longo da trajetória, nesse intervalo

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} |\Delta \vec{r}| = |\Delta s|$$

e mesmo sentido,  
se  $\Delta s > 0$ , ou oposto, se  $\Delta s < 0$

E, no limite  $\Delta t \rightarrow 0$ ,  $\Delta \vec{r}$  terá a direção de  $\hat{e}_t$  em  $t$ .

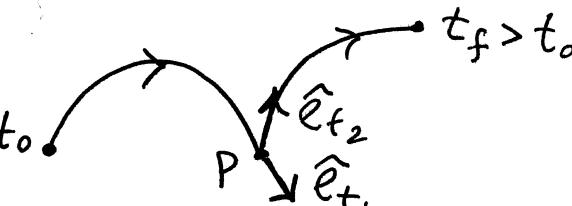
Como tal,

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} \hat{e}_t = \frac{ds}{dt} \hat{e}_t$$

$$\boxed{\vec{v} = \dot{s} \hat{e}_t}$$

O vetor velocidade é sempre tangente à trajetória, e o seu módulo é  $|\dot{s}|$

Existem pontos onde há dois vetores tangentes,  $\hat{e}_{t_1}$ ,  $t_0$ , e  $\hat{e}_{t_2}$ , como no ponto P na figura ao lado. Nesses pontos  $\dot{s}$  é sempre zero, e a velocidade é nula:  $\dot{s} \hat{e}_{t_1} = \dot{s} \hat{e}_{t_2} = \vec{0}$



$v = \dot{s} =$  valor da velocidade  $\vec{v}$ ; pode ser negativo.

Vetor aceleração. Se a trajetória é reta,  $\hat{e}_t$  permanece constante, e:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\dot{s}\hat{e}_t) = \ddot{s}\hat{e}_t = \ddot{v}\hat{e}_t = a_t\hat{e}_t$$

mas, no caso geral em que  $\hat{e}_t$  não é constante:

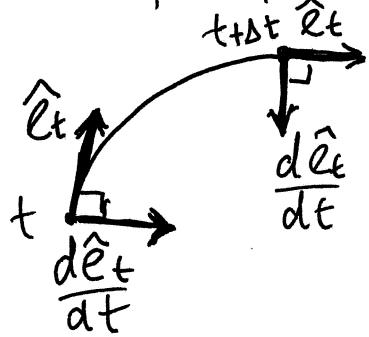
$$\vec{a} = \ddot{v}\hat{e}_t + v \frac{d\hat{e}_t}{dt}$$

Cálculo da derivada do versor tangente:

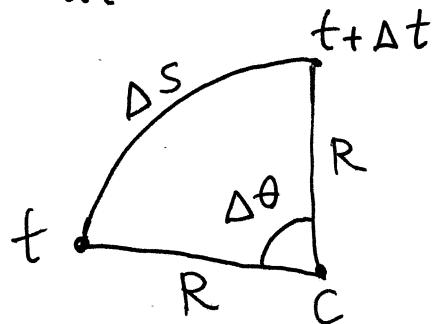
Como o módulo de  $\hat{e}_t$  é sempre 1, então

$$\hat{e}_t \cdot \hat{e}_t = 1 \Rightarrow \frac{d}{dt}(\hat{e}_t \cdot \hat{e}_t) = 0 \Rightarrow 2\hat{e}_t \cdot \frac{d\hat{e}_t}{dt} = 0$$

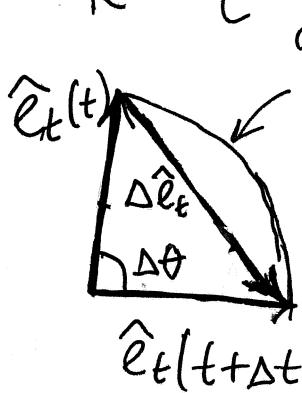
$\Rightarrow$  a derivada de  $\hat{e}_t$  é perpendicular a  $\hat{e}_t$ , em qualquer ponto da trajetória.



O sentido de  $\frac{d\hat{e}_t}{dt}$  é para o lado em que a trajetória se curva, porque é nesse sentido que aponta  $\hat{e}_t(t+\Delta t) - \hat{e}_t(t)$ .



Se  $\Delta t \rightarrow 0$ , a trajetória entre  $t$  e  $t+\Delta t$  é aproximadamente um arco de círculo, com raio  $R$  e ângulo  $\Delta\theta = \frac{\Delta s}{R}$



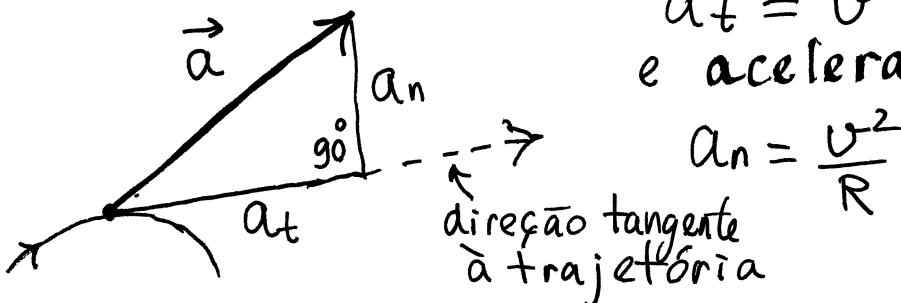
arco com  
raio = 1  
e o mesmo  
ângulo

$$\frac{d\hat{e}_t}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \hat{e}_t}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \theta}{\Delta t} \hat{e}_n$$

onde  $\hat{e}_n$  é o versor normal, perpendicular a  $\hat{e}_t$

$$\Rightarrow \frac{d\hat{e}_t}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{(\Delta s/R) \hat{e}_n}{\Delta t} = \frac{\dot{s}}{R} \hat{e}_n = \frac{v}{R} \hat{e}_n$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{a} = \dot{v} \hat{e}_t + \frac{v^2}{R} \hat{e}_n}$$



$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$$

**Exemplo.** O vetor posição dum ponto, em função do tempo  $t$  é:  $\vec{r} = 5t\hat{i} + \frac{3}{2}t^2\hat{j} + 2(1-t^2)\hat{k}$  (SI)

- Determine:
- ① O valor da velocidade  $v$  em função de  $t$ .
  - ② O raio de curvatura  $R$ , em função de  $t$
  - ③ O deslocamento ao longo da trajetória, no intervalo  $0 \leq t \leq 1$  (SI)

$$\textcircled{1} \quad \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = 5\hat{i} + 3t\hat{j} - 4t\hat{k}$$

$$v^2 = \vec{v} \cdot \vec{v} = 25 + 9t^2 + 16t^2 = 25(1+t^2)$$

arbitrando o sentido positivo de  $s$  no sentido do movimento, então  $v > 0$  e:

$$\boxed{v = 5\sqrt{1+t^2}}$$

A aceleração tem duas componentes perpendiculares: a **aceleração tangencial**,

$$a_t = \dot{v}$$

e **aceleração normal**,

$$a_n = \frac{v^2}{R}$$

$$\textcircled{b} \quad \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = 3\hat{j} - 4\hat{k} \quad \Rightarrow |\vec{a}|^2 = \vec{a} \cdot \vec{a} = 9 + 16 = 25$$

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} (5\sqrt{1+t^2}) = \frac{5t}{\sqrt{1+t^2}}$$

$$a_n^2 = |\vec{a}|^2 - a_t^2 = 25 - \frac{25t^2}{1+t^2} = \frac{25}{1+t^2}$$

$$R = \frac{v^2}{a_n} = \frac{25(1+t^2)}{\frac{5}{\sqrt{1+t^2}}} = 5\sqrt{(1+t^2)^3}$$

(Observe-se que  
a<sub>n</sub> é SEMPRE  
positiva)

$$\textcircled{c} \quad v = \frac{ds}{dt} \quad \Rightarrow \quad 5\sqrt{1+t^2} = \frac{ds}{dt} \quad \left( \begin{array}{l} \text{equação diferencial} \\ \text{de variáveis} \\ \text{separáveis} \end{array} \right)$$

$$\int_{s_0}^{s_0+\Delta s} ds = 5 \int_0^1 \sqrt{1+t^2} dt$$

$$\Rightarrow \Delta s = \frac{5}{2} (\sqrt{2} + \ln(\sqrt{2}+1)) \approx 5.739 \text{ m}$$

Na alínea **(b)**, a<sub>t</sub> podia ser calculada encontrando primeiro o versor tangencial, em função de t,

$$\hat{e}_t = \frac{\vec{v}}{v} = \frac{\hat{i}}{\sqrt{1+t^2}} + \frac{3t\hat{k}}{5\sqrt{1+t^2}} - \frac{4t\hat{k}}{5\sqrt{1+t^2}}$$

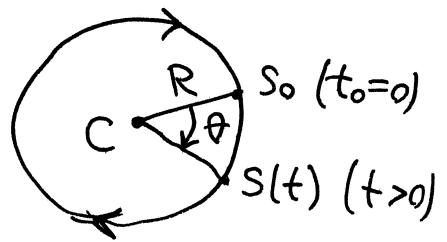
e a seguir projetar-se  $\vec{a}$  na direção de  $\hat{e}_t$

$$a_t = \vec{a} \cdot \vec{e}_t = \frac{9t}{5\sqrt{1+t^2}} + \frac{16t}{5\sqrt{1+t^2}} = \frac{5t}{\sqrt{1+t^2}}$$

Aula 6. 2018-02-27

## MOVIMENTO CIRCULAR

Trajetória plana, com centro de curvatura num ponto fixo e raio de curvatura ( $R$ ) constante



$$S(t) = S_0 + R\theta(t) \quad (\theta \text{ em radianos, e } \theta_0=0, \text{ em } t_0=0)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} v = \dot{s} = R\omega \quad (\omega = \dot{\theta} = \text{velocidade angular}) \\ a_t = \dot{v} = R\alpha \quad (\alpha = \dot{\omega} = \text{aceleração angular}) \\ a_n = \frac{v^2}{R} = R\omega^2 \end{array} \right.$$

Equações cinemáticas do movimento circular:

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega \quad \frac{d\omega}{dt} = \alpha \quad \alpha = \omega \frac{d\omega}{d\theta}$$

## MOVIMENTO CIRCULAR UNIFORME

$$\alpha = 0 \Rightarrow \omega = \text{constante} \Rightarrow \boxed{\theta = \omega t} \quad \text{se } \theta(t=0)=0$$

Período de rotação: tempo que demora cada volta ( $\pi$ )

$$\omega T = 2\pi \Rightarrow T = \frac{\omega}{2\pi}$$

Frequência de rotação: número de rotações por cada unidade de tempo ( $f$ )

$$f = \frac{1}{T} \Rightarrow \omega = 2\pi f$$

As unidades de  $f$  são o inverso do tempo. Por exemplo,  $s^{-1}$ , também designada por Hz (hertz) ou rotações por segundo.  $\text{rpm} = \text{min}^{-1} = \frac{1}{60} s^{-1}$

## MOVIMENTO DOS CORPOS RÍGIDOS

Num corpo rígido, qualquer segmento de reta  $\overline{PQ}$ , entre dois pontos P e Q do corpo, permanece sempre com o mesmo comprimento.

### ① Movimento de translação.

Quando qualquer segmento  $\overline{PQ}$  no corpo matem a mesma direção em qualquer instante.

$$\overrightarrow{PQ} = \vec{r}_P - \vec{r}_Q \quad (\vec{r}_P \text{ e } \vec{r}_Q: \text{vetores posição de } P \text{ e } Q, \text{ num referencial } Oxyz)$$

Como  $\overrightarrow{PQ}$  permanece constante em módulo, direção e sentido, a sua derivada em ordem a t é nula

$$\Rightarrow \frac{d\vec{r}_P}{dt} - \frac{d\vec{r}_Q}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \boxed{\vec{v}_P = \vec{v}_Q} \text{ em qualquer instante } t$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{a}_P = \vec{a}_Q}$$

Como tal, os versores  $\hat{e}_t$  e  $\hat{e}_n$ , e o raio de curvatura R, são iguais, a cada instante, nas trajetórias de P e Q

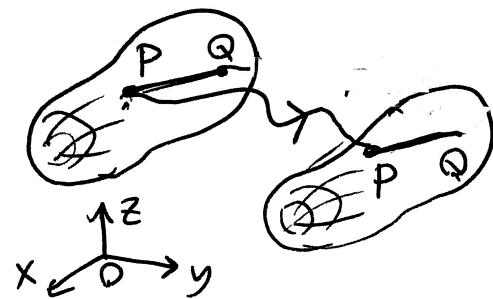
Todos os pontos do corpo rígido seguem a mesma trajetória (deslocada) e com a mesma velocidade.

### ② Movimento geral. $\overrightarrow{PQ}$ não é igual, em diferentes instantes, mas $|\overrightarrow{PQ}|$ sim permanece constante

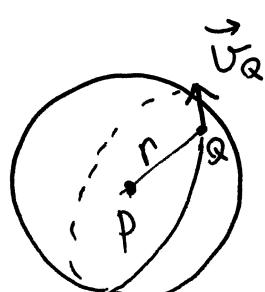
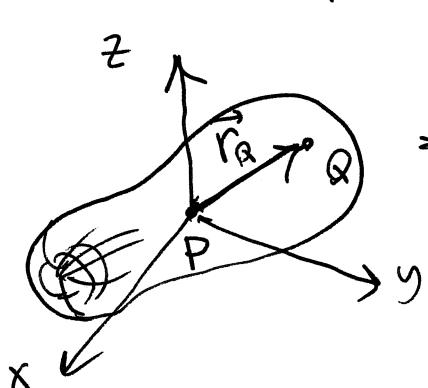
$$\Rightarrow \overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PQ} = \text{constante} \quad \Rightarrow \frac{d}{dt}(\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PQ}) = 0$$

$$\vec{v}_{P/Q} \cdot \overrightarrow{PQ} = 0 \quad \left( \vec{v}_{P/Q} = \frac{d(\overrightarrow{PQ})}{dt} = \text{velocidade de } P, \text{ relativa a } Q = \vec{v}_P - \vec{v}_Q \right)$$

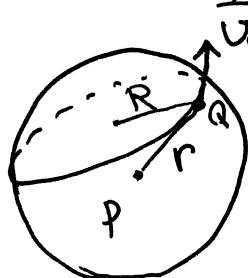
$$\Rightarrow \boxed{\vec{v}_{P/Q} \text{ é perpendicular a } \overrightarrow{PQ}.}$$



O movimento pode ser obtido pela sobreposição do movimento do ponto P, mais o movimento de todos os outros pontos em relação a P (colocando a origem em P).

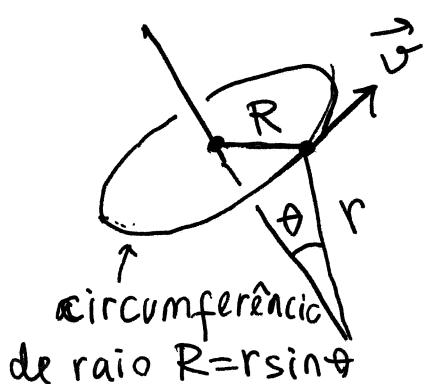
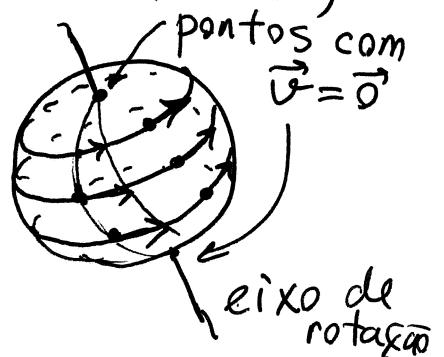


$\Rightarrow \vec{v}_Q$  é perpendicular a  $\vec{r}_Q$   
 $\Rightarrow$  Todos os pontos que estão à mesma distância  $r$  do ponto P têm velocidades tangentes à esfera de raio  $r$ , com centro em P

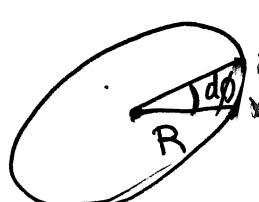


E  $\vec{v}_Q$  é tangente a uma circunferência na esfera que pode ter raio  $R=r$ , ou  $R < r$

Como todos os pontos do corpo (que estão à distância  $r$  desde P) mantêm a mesma distância entre eles, todos esses pontos descrevem trajetórias circulares, paralelas entre si, e há dois pontos com velocidade  $\vec{v}$  nula. O eixo de rotação é a reta que passa por esses pontos



circunferência de raio  $R = r \sin \theta$



$$ds = R d\phi = r \sin \theta d\phi$$

$$d\phi = w dt$$

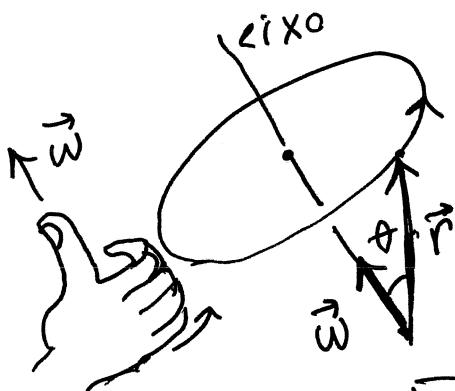
( $w$  = velocidade angular)

$$\Rightarrow ds = wr \sin \theta dt$$

$$v = \frac{ds}{dt} = wr \sin \theta$$

$d\phi$  é igual para todos os pontos na esfera  
 $\Rightarrow$  a velocidade angular  $w$  é igual em todo o corpo

## PRODUTO VETORIAL



Define-se o vetor velocidade angular  $\vec{\omega}$ , com módulo igual a  $|\omega|$ , na direção do eixo de rotação, e no sentido da regra da mão direita em relação à rotação.

$$\boxed{\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}} \quad \text{produto vetorial entre } \vec{\omega} \text{ e } \vec{r}$$

$|\vec{v}| = \omega r \sin \theta$ ; direção de  $\vec{v}$ , perpendicular ao plano de  $\vec{\omega}$  e  $\vec{r}$ , no sentido da regra da mão direita (de  $\vec{\omega}$  para  $\vec{r}$ )

Propriedades:  $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$      $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$

$$\hat{i} \times \hat{j} = \hat{k}, \quad \hat{j} \times \hat{k} = \hat{i}, \quad \hat{k} \times \hat{i} = \hat{j}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k}) \times (b_x \hat{i} + b_y \hat{j} + b_z \hat{k})$$

$$= (a_y b_z - a_z b_y) \hat{i} + (a_z b_x - a_x b_z) \hat{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \hat{k}$$

$$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

$$\text{Escolhendo } \vec{\omega} = \omega \hat{k} \Rightarrow \vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

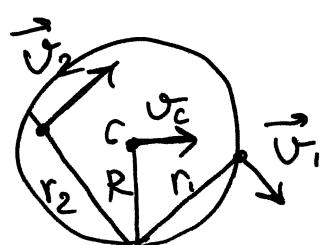
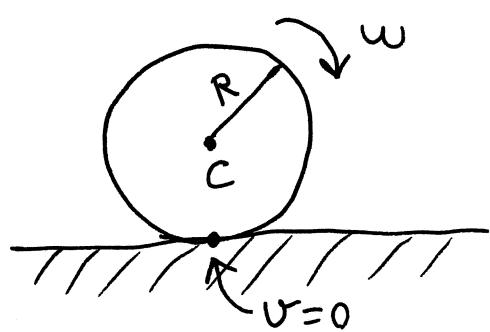
$$\boxed{\vec{v} = \omega(x \hat{j} - y \hat{k})} \quad (\text{a componente } z \text{ não interessa})$$

$$(\vec{R} = x \hat{i} + y \hat{j})$$

A velocidade angular  $\vec{\omega}$  é a mesma em todo o corpo rígido, e independente do ponto P escolhido como origem. O seu valor,  $\omega$ , calcula-se dividindo o módulo da velocidade relativa entre dois pontos no corpo, pela distância entre eles.

Exemplo.

Roda a rodar sobre uma superfície, sem deslizar



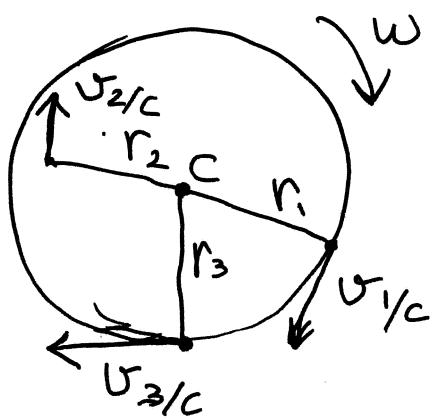
Como não desliza, a velocidade do ponto de contacto é nula.

Em relação a esse ponto, as velocidades das outras pontos são as velocidades absolutas

$$\frac{v_2}{r_2} = \frac{v_1}{r_1} = \frac{v_c}{R} = \omega$$

a velocidade do centro da roda é diretamente proporcional à veloc. angular:  $v_c = R\omega$

Em relação ao centro, as velocidades relativas são:



$$\frac{v_{1c}}{r_1} = \frac{v_{2c}}{r_2} = \frac{v_{3c}}{r_3} = \omega$$

$v_{1c}, v_{2c}, v_{3c}$  são velocidades relativas ao centro C. Como C está em movimento, há que somar  $\vec{v}_c$  para obter velocidades absolutas.

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_{1c} + \vec{v}_c, \quad \vec{v}_2 = \vec{v}_{2c} + \vec{v}_c, \quad \vec{v}_3 = \vec{v}_{3c} + \vec{v}_c$$

Aula 7. 2018-03-01

## LEIS DE NEWTON

No seu livro "Princípios Matemáticos da Filosofia Natural" (1687) Isaac Newton estabeleceu as bases do estudo da mecânica, através de 3 leis. Antes de enunciar as leis, Newton define algumas grandezas físicas, como, por exemplo:

massa =  $m \leftarrow$  quantidade de matéria.

quantidade de movimento =  $m \vec{v}$

produto da velocidade dum corpo, vezes a sua massa. Também costuma chamar-se momento linear.

$$\vec{P} = m \vec{v} \quad (\text{vetor})$$

### 1ª LEI. (lei da inércia).

"Todo corpo mantém o seu estado de repouso ou de movimento uniforme segundo uma linha reta, se não for compelido a mudar o seu estado por forças nele impressas."

(tradução de J. Resina Rodrigues)

Não existe distinção entre repouso e movimento uniforme retilíneo já que ambos são relativos a um referencial. Mas se num determinado referencial o objeto sobre o qual não atua nenhuma força não mantém o seu estado de repouso ou movimento retilíneo uniforme, então esse referencial está a acelerar. A lei da inércia é unicamente válida nos referenciais inertiais, que não têm aceleração relativa entre si.

Um comboio com movimento retilíneo uniforme é referencial inercial, mas um comboio com movimento acelerado ou curvilíneo não é.

**2ª LEI.** "A mudança na quantidade de movimento é proporcional à força motora impressa e faz-se na direção da linha reta segundo a qual a força motora é aplicada!"

Em notação vetorial (inventada muito após Newton), a segunda lei é ( $\Delta t \rightarrow 0$ ):

$$\Delta \vec{P} = \vec{F} \Delta t \quad (\vec{P}_f = \vec{P}_0 + \Delta \vec{P})$$

a constante de proporcionalidade escolhe-se igual a 1, se a força  $\vec{F}$  for então medida em unidades:

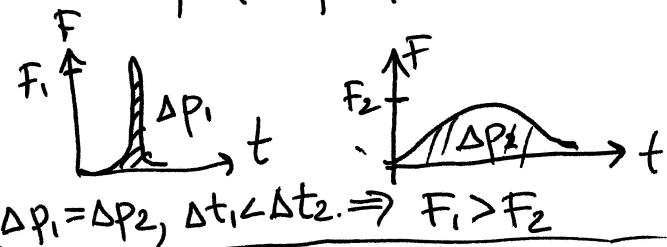
$$\text{kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \quad \text{que é chamada newton (N)}$$

Uma força de 1 N, actuando durante um segundo num corpo, faz aumentar a sua quantidade de movimento em  $1 \text{ kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}}$ . Num intervalo de tempo  $[t_1, t_2]$ , o aumento da quantidade de movimento é:

$$\vec{P}_2 - \vec{P}_1 = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \cdot dt = \frac{\text{impulso produzido}}{\text{pela força } \vec{F}}.$$

e também obtém-se:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt}$$



Num sistema em que  $m$  permanece constante, a derivada de  $\vec{P}$  é  $m$  vezes a derivada de  $\vec{x}$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{F} = m\vec{\alpha}}$$

Se houver várias forças a atuar em simultâneo,  $\vec{F}$  será a soma vetorial de todas essas forças.

### 3<sup>a</sup> LEI. (lei de ação e reação)

"A toda ação opõe sempre uma igual reação. Isto é, as ações mutuas de dois corpos um sobre o outro são sempre iguais e opostas!"

## FORÇAS

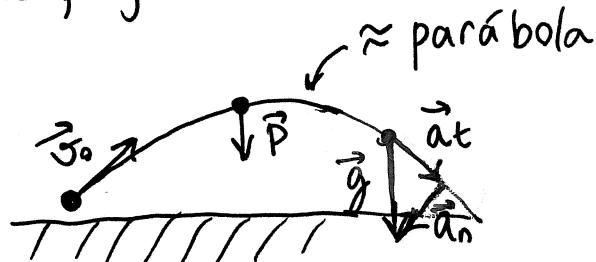
### ① O peso.



$$\vec{P} = m\vec{g} = \text{peso}$$

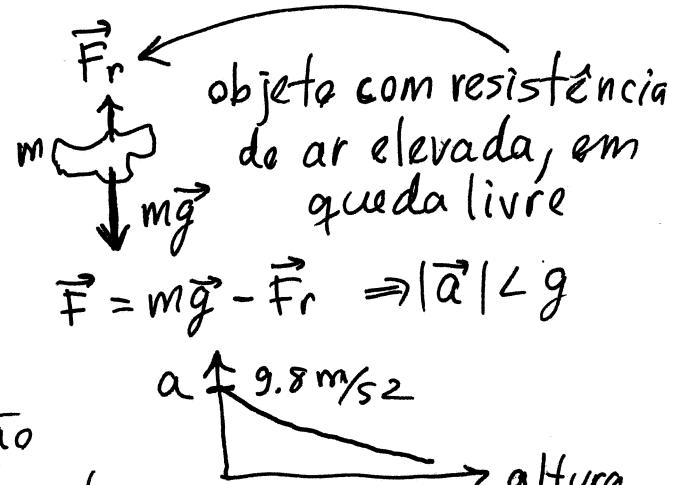
(uma pedra de 1 kg pesa 9.8 N)

Nestes casos só há aceleração tangencial. Mas num lançamento de projéteis há até  $\vec{a}_n$ :



$$\vec{a} = \frac{\vec{P}}{m} = \vec{g} = \vec{a}_t + \vec{a}_n$$

Mas a resistência do ar faz com que a aceleração seja diferente de  $\vec{g}$ . Se o projétil for um cubo (cubesat), lançado desde um foguetão quando estiver a uma altura em que já não há muito ar, pode manter-se a trajetória elíptica, com  $\vec{a}_n + \vec{a}_t = \vec{g}$  durante muitos anos.



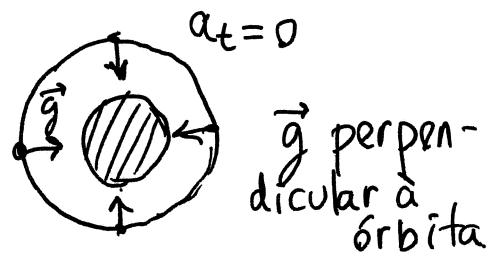
A trajetória é realmente uma elipse, devido a que  $\vec{g}$  muda de direção.



No caso da estação espacial, lançada em 1998, a uma altura de 408 km e com velocidade de 7.66  $\frac{\text{km}}{\text{s}}$ , a órbita é praticamente circular.

$$\Rightarrow \vec{a}_n = \vec{g} \Rightarrow g = \frac{7660^2}{((408+6370) \times 10^3)^2} \approx 8.7 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

↑ raio da Terra

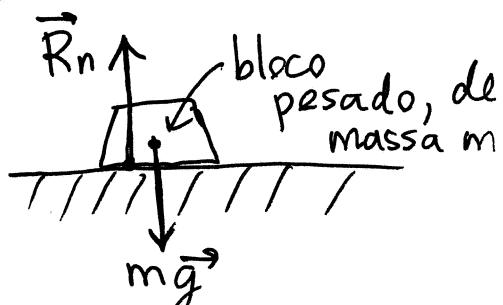


A estação e os tripulantes estão em queda livre, sob a ação dos seus pesos. Os tripulantes flutuam na estação e sentem como se não tivessem peso, a pesar de que ainda estão a ser atraídos pela terra:

$P = mg \approx 8.7 m$

O que sentimos como o nosso peso é realmente a força que as superfícies exercem, oposta ao peso:

## ② Reação normal.



a superfície exerce sobre o bloco uma força  $\vec{R}_n$ , para cima, com módulo igual a  $mg$

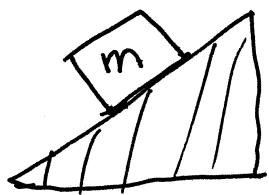
$$\Rightarrow \vec{P} + \vec{R}_n = \vec{mg} - \vec{mg} = \vec{0} \Rightarrow \vec{a} = 0.$$

$\vec{g} = \text{const.} = \vec{0}$

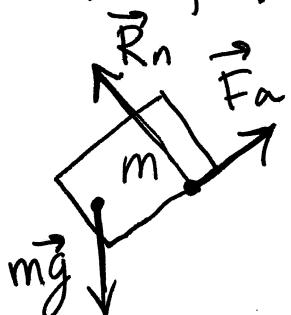
A pesar de chamar-se reação, não é a reação ao peso. A força de reação ao peso  $\vec{P}$  é uma força  $-\vec{P}$  com que o bloco atrai a Terra para cima! De facto,  $|\vec{R}_n|$  é diferente a  $mg$  em muitos casos.

③ Forças de atrito. Componente tangencial da força de contacto entre duas superfícies.

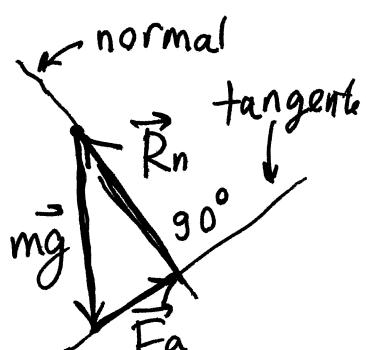
Exemplo. Plano inclinado com um bloco de massa  $m$ , em repouso, sobre ele.



Isolando o bloco, há 3 forças a atuarem nele: peso, reação normal e força de atrito ( $F_a$ )



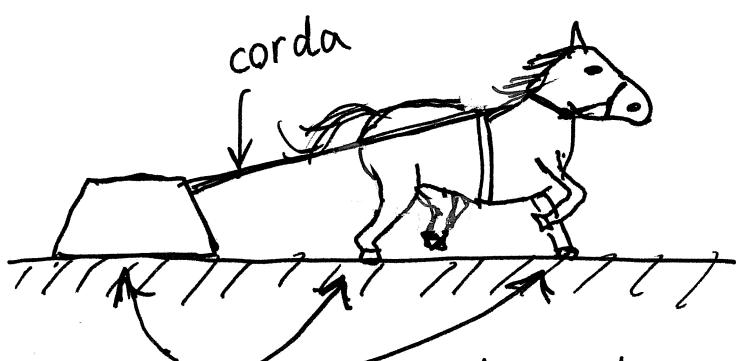
mas como  $\vec{\theta} = \vec{0}$  permanece constante,  
 $\Rightarrow \vec{a} = \vec{0} \Rightarrow \vec{F} = \vec{0}$



A soma das 3 forças deve ser nula: colocando uma a seguir às outras, fecham-se num triângulo retângulo

Observe-se que  $R_n < mg$

Exemplo do livro de Newton. Um cavalo a arrastar um bloco pesado, com velocidade uniforme.

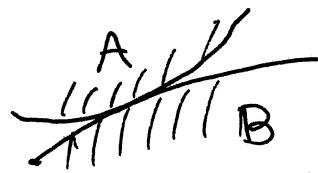


forças de atrito entre o bloco e o chão e as ferraduras e o chão. O cavalo puxa o bloco com uma força que é transmitida pela corda e, por ação e reação, o bloco puxa para trás o cavalo, com a mesma força. O cavalo consegue andar porque as forças de atrito nas suas ferraduras contrariam essa força.

Aula 8. 2018-03-06

## FORÇAS DE ATRITO

### ① Atrito cinético



quando a velocidade relativa entre as superfícies não é nula

$$\vec{v}_{A/B} = \vec{v}_A - \vec{v}_B \neq \vec{0} \Rightarrow F_a = \mu_c R_n \quad \left\{ \begin{array}{l} R_n = \text{reacção normal} \\ \mu_c = \text{coeficiente de atrito cinético} \end{array} \right.$$

$\vec{F}_a$  é oposta a  $\vec{v}_{A/B}$ , no corpo A,  
e oposta a  $\vec{v}_{B/A}$ , no corpo B



### ② Atrito estático

$$\vec{v}_{A/B} = \vec{0} \quad (\text{as superfícies não deslizam entre si})$$

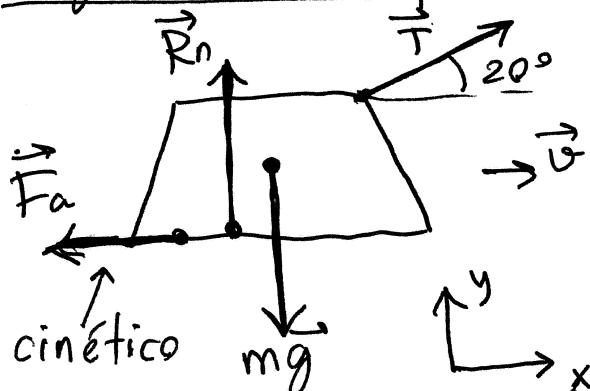
$F_a$  pode ter qualquer valor no intervalo:

$$0 \leq F_a \leq \mu_e R_n \quad \mu_e = \text{coeficiente de atrito estático} (\geq \mu_c)$$

$\vec{F}_a$  pode apontar em qualquer direcção do plano tangente às superfícies em contacto.

Exemplo 1. No exemplo do cavalo de 300 kg a arrastar um bloco de 350 kg sobre uma superfície horizontal com coeficiente de atrito cinético  $\mu_c = 0.4$  com o bloco,

#### Diagrama de corpo livre do bloco



$$mg = 350 \times 9.8 = 3430 \text{ N}$$

$T$  = tensão na corda

$$F_a = \mu_c R_n = 0.4 R_n$$

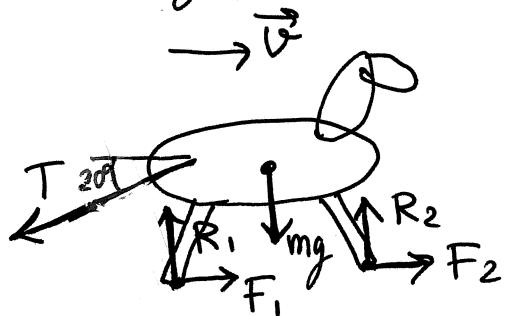
$$\vec{v} = \text{const.} \Rightarrow \vec{a} = \vec{0} \Rightarrow \vec{F} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} F_x = 0 \\ F_y = 0 \end{array} \right.$$

Obtém-se um sistema de duas equações com duas variáveis,  $T$  e  $R_n$ :

$$\begin{aligned} F_x &= T \cos(20^\circ) - 0.4 R_n = 0 \\ F_y &= R_n - 3430 + T \sin(20^\circ) = 0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} T = 1274 \text{ N} \\ R_n = 2994 \text{ N} \end{cases}$$

O diagrama de corpo livre do cavalo é o seguinte



$R_1, R_2$  = reações normais nos dois pés no chão

$$mg = 300 \times 9.8 = 2940 \text{ N}$$

Como o cavalo puxa a pedra com a força  $T = 1274 \text{ N}$  (transmitida pela corda), então a pedra puxa o cavalo para trás com a mesma força, mas em sentido oposto.

As forças de atrito  $F_1$  e  $F_2$  nos dois pés do cavalo são atrito estático, porque as ferraduras não deslizam, e apontam no sentido do movimento porque o cavalo exerce tração nas duas pernas (faz força sobre o chão, para trás, e a reação do chão é  $F_1$  e  $F_2$ , para a frente).

$$F_x = F_1 + F_2 - 1274 \cos(20^\circ) = 0$$

$$F_y = R_1 + R_2 - 2940 - 1274(\sin 20^\circ) = 0$$

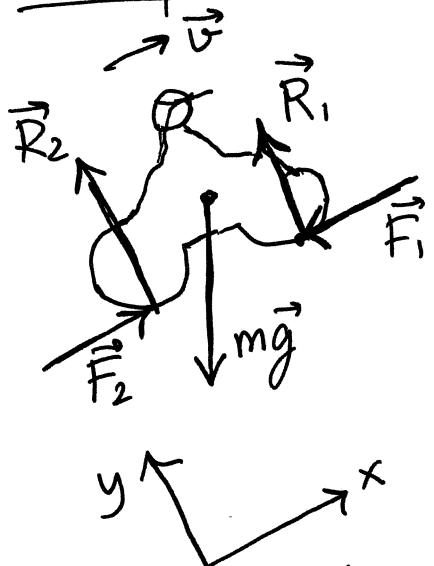
temos apenas 2 equações para 4 variáveis e, como tal, só podemos determinar a reação normal total e o atrito total:

$$R_1 + R_2 = 3376 \text{ N}$$

$$F_1 + F_2 = 1198 \text{ N}$$

No próximo capítulo explicar-se-á como encontrar  $R_1$  e  $R_2$ .

Exemplo 2. Bicicleta a subir uma rampa



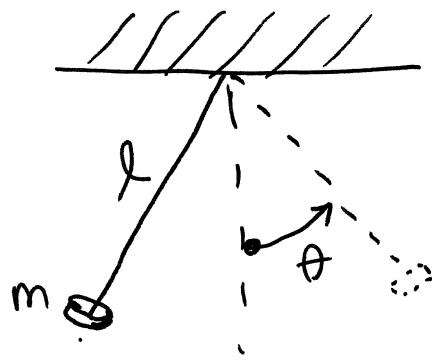
É conveniente então usar um dos eixos paralelo à rampa:

As forças de atrito nas duas rodas são atrito estático.  
No entanto, apenas as rodas de trás têm tração  
 $\rightarrow \vec{F}_2$  no sentido da velocidade  
 $\vec{F}_1$  no sentido oposto

Neste caso, se houver aceleração, deverá ser paralela à rampa.

$$\begin{cases} F_y = 0 \quad (v_y = 0, a_y = 0) \\ F_x = m\alpha \quad (\alpha = \alpha_x) \end{cases}$$

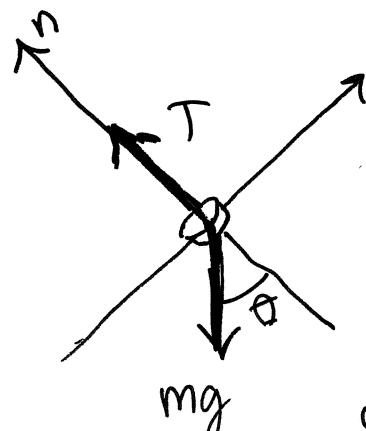
Exemplo 3. Pêndulo simples: pequeno objeto de massa  $M$ , pendurado dum suporte por meio de um fio de comprimento  $l$ .



O sistema tem um único grau de liberdade,  $\theta(t)$ .

Neste caso é mais conveniente usar eixos tangencial (t) e normal (n) que se deslocam com o objeto.

Diagrama de corpo livre. (ignorando a massa do fio e a resistência do ar)



t (sentido em que theta aumenta)

$$\left\{ \begin{array}{l} F_n = T - mg \cos \theta = ml \omega^2 (ma_n) \\ F_t = -mg \sin \theta = ml \alpha (mat) \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \boxed{\alpha = -\frac{g}{l} \sin \theta}$$

as equações  $\alpha = \omega \frac{d\omega}{d\theta}$ ,  $\frac{d\theta}{dt} = \omega$  só

podem ser integradas numericamente!

# FORÇA DE RESISTÊNCIA AO MOVIMENTO NOS FLUIDOS

Em qualquer fluido (líquido ou gás) atua uma força nos objetos em movimento, oposta à velocidade.

Mas se a velocidade for muito elevada, aparece turbulência no fluido, que faz com que a direção dessa força flutue, fora da direção da velocidade.

O critério para determinar se existe turbulência é o número de Reynolds:

$$Nr = \frac{l v \rho}{\eta}$$

$v$  = velocidade do corpo, relativa ao fluido.

$l$  = tamanho do corpo, na direção perpendicular a  $\vec{v}$

$\rho$  = massa volúmica do fluido ( $\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ )

$\eta$  = coeficiente de viscosidade do fluido ( $\frac{\text{kg}}{\text{m} \cdot \text{s}}$ )

$Nr$  é um número, sem unidades. Interessa apenas saber a sua ordem de grandeza (basta um valor aproximado de  $l$ )

a)  $Nr > 4000 \rightarrow$  turbulência

b)  $100 < Nr < 2000 \rightarrow$  a força de resistência é proporcional a  $\rho$  e ao quadrado da velocidade

$$Fr = \text{constante} \times \rho v^2 \quad \begin{matrix} (\text{a constante depende da}) \\ (\text{forma do objeto e}) \\ (\text{tem unidades de área}) \end{matrix}$$

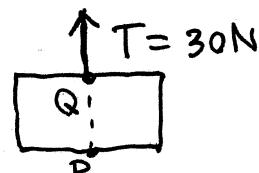
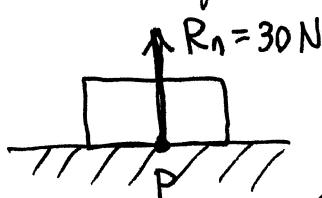
c)  $Nr < 1$ : a força é proporcional a  $\eta$  e o valor da velocidade

$$Fr = \text{constante} \times \eta v \quad \begin{matrix} (\text{a constante depende}) \\ (\text{da forma do objeto e}) \\ (\text{tem unidades de}) \\ (\text{distância}) \end{matrix}$$

## VETORES DESLIZANTES

Nas forças que atuam sobre um corpo rígido, é necessário saber a sua linha de ação, para além do módulo, direção e sentido. As forças são vetores deslizantes e não livres: não podem ser deslocados a qualquer ponto; mas sim podem ser deslocados ao longo da sua linha de ação.

Exemplos:



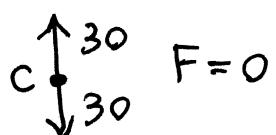
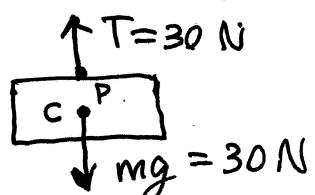
as duas forças são equivalentes,  
se P e Q estão na mesma vertical

as forças  $\vec{T}_1$  e  $\vec{T}_2$  não são equivalentes. Têm o mesmo  
módulo, direção e sentido, mas atuam em duas linhas  
diferentes.

## SOBREPOSIÇÃO DE FORÇAS

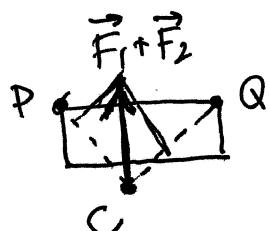
① Forças co-lineares, são as que têm a mesma linha de ação.

Podem deslocar-se nessa linha e somarem-se como vetores livres

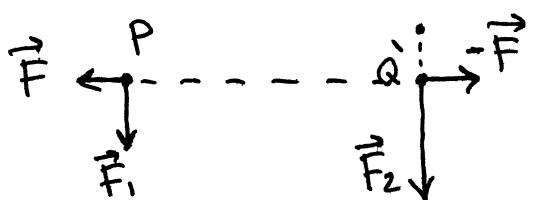
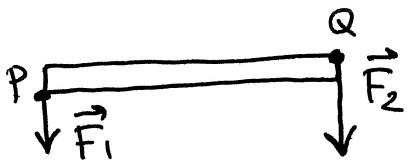


② Forças concorrentes. Têm linhas de ação diferentes mas essas linhas cruzam-se num ponto comum.

Deslocam-se as forças até o ponto comum e somam-se como vetores livres.



③ Forças paralelas, com linhas de ação paralelas. Podem somar-se usando o seguinte procedimento:



a) Adicionam-se duas forças auxiliares  $\vec{F}$  e  $-\vec{F}$ , co-lineares, numa linha de ação perpendicular a  $\vec{F}_1$  e  $\vec{F}_2$ . Não alteram nada, porque a resultante de  $\vec{F} + \vec{F}$  é nula.

b) Somam-se  $\vec{F}_1$  e  $\vec{F}$  em P, dando  $\vec{F}'_1$ , e somam-se  $\vec{F}_2$  e  $-\vec{F}$  em Q', com o resultado  $\vec{F}'_2$ . As forças  $\vec{F}'_1$  e  $\vec{F}'_2$  são concorrentes e, como tal, podem somar-se no ponto comum das linhas de ação, C,

$$\vec{F}_r = \vec{F}'_1 + \vec{F}'_2 = (\vec{F}_1 + \vec{F}) + (\vec{F}_2 - \vec{F}) = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

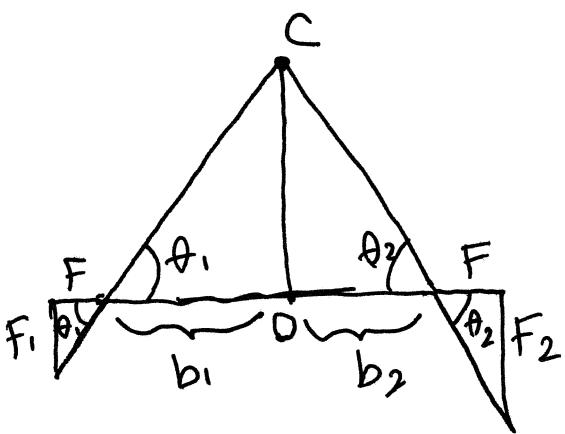
Ou seja, as forças paralelas podiam somar-se desde o início, como vetores livres, e a resultante é  $\vec{F}_r$  também paralela a  $\vec{F}_1$  e  $\vec{F}_2$ . No entanto, o procedimento usado permite encontrar a linha de ação de  $\vec{F}_r$ .

$b_1$  = braço de  $\vec{F}_1$  = distância entre as linhas de ação de  $\vec{F}_1$  e  $\vec{F}_r$

$b_2$  = braço de  $\vec{F}_2$

$$\Rightarrow b_1 \tan \theta_1 = b_2 \tan \theta_2$$

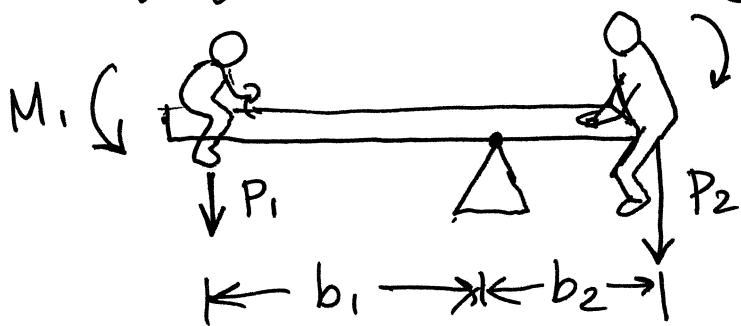
$$\tan \theta_1 = \frac{F_1}{F}, \quad \tan \theta_2 = \frac{F_2}{F}$$



$$\Rightarrow F_1 b_1 = F_2 b_2$$

quanto maior a força, menor o seu braço.  
Se  $F_1 = F_2 \Rightarrow b_1 = b_2$  e a resultante atua ao meio.

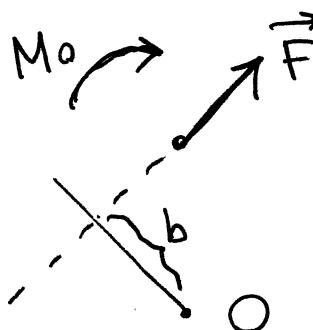
Este resultado é a **lei das alavancas**, já conhecido pelos gregos.



O peso da criança faz rodar a alavanca no sentido positivo ( $M_1$ ) e o peso do adulto faz rodar a alavanca no sentido oposto ( $M_2$ ). Se  $M_1 = M_2$ , mas com sentidos opostos, a alavanca não roda.

$M_2$  Se  $P_1 b_1$  for igual a  $P_2 b_2$ , o peso resultante do adulto e a criança atua exatamente no ponto de apoio do sobre-e-desce (alavanca) e o sistema está em equilíbrio.

## MOMENTO DE UMA FORÇA



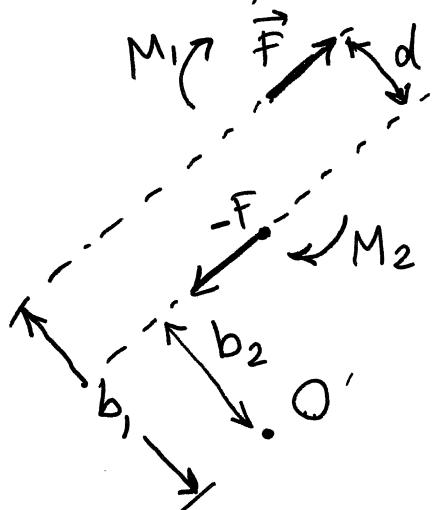
$b$  = distância entre O e a linha de ação de  $\vec{F}$   
= braço de  $\vec{F}$  relativo a O

define-se o momento de  $\vec{F}$ , em relação ao ponto O:

$$M_O = Fb$$

mede a tendência a rodar, em relação ao ponto O, que neste caso é no sentido dos ponteiros do relógio.

**BINÁRIOS.** O procedimento descrito em ③ falha no caso em que  $\vec{F}_1$  e  $\vec{F}_2$  são iguais e opostas, porque  $\vec{F}_1$  e  $\vec{F}_2$  também são paralelas. Nesse caso,  $\vec{F}_1 + \vec{F}_2$ , como vetores livres, é igual a zero e, como tal as duas forças não produzem translação; apenas rotação. Binário: duas forças  $\vec{F}$  e  $-\vec{F}$ , paralelas com linhas de ação a uma distância  $d$  → Produzem rotação, mas não translação.



O momento resultante, em relação a O é:

$$M_1 - M_2 = Fb_1 - Fb_2 \\ = F(b_1 - b_2)$$

$$\Rightarrow M = Fd$$

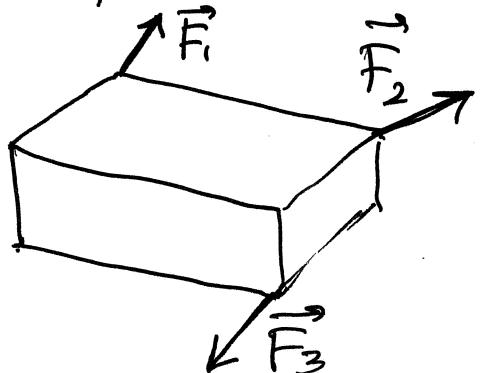
Não se escreve o subíndice 0, porque o resultado é o mesmo independentemente da posição do ponto O.

## SOMA DE FORÇAS

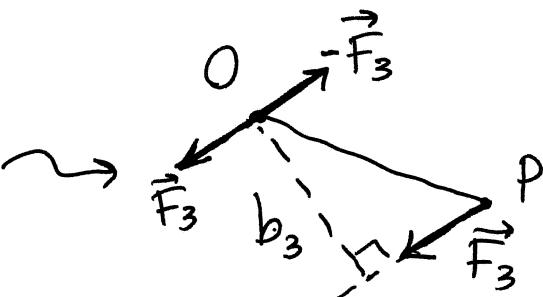
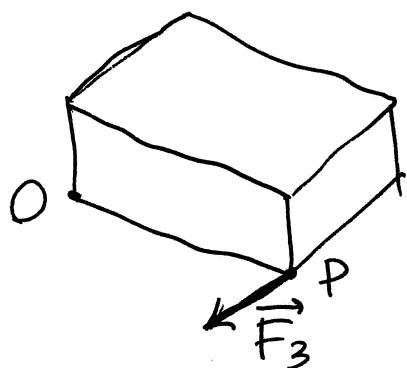
Qualquer sistema de forças, sejam co-lineares, concorrentes, paralelas, ou nenhum desses 3 casos, podem ser somadas usando o seguinte procedimento.

Exemplo: 3 forças

$$\vec{F}_1, \vec{F}_2 \text{ e } \vec{F}_3$$

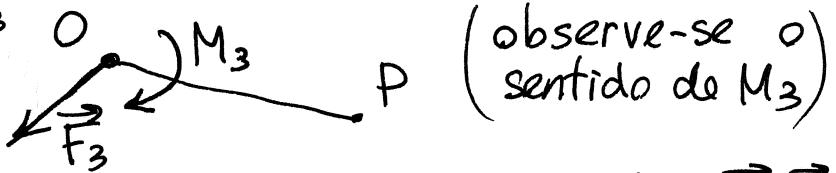


Escolhe-se um ponto qualquer  $O$  e desloca-se cada força para esse ponto usando o seguinte método, por exemplo, para  $\vec{F}_3$ ,



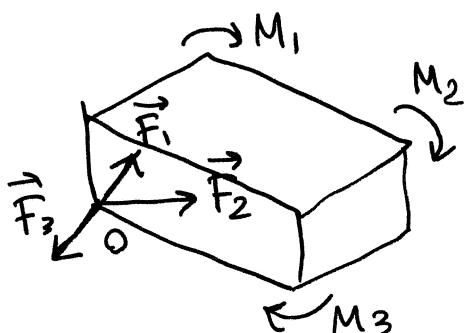
No ponto  $O$  acrescentam-se duas forças  $\vec{F}_3$  e  $-\vec{F}_3$ , que na alteram nada porque a sua resultante é nula

$\vec{F}_3$ , no ponto  $P$ , e  $-\vec{F}_3$  no ponto  $O$ , são um binário com momento  $M_3 = \vec{F}_3 b_3$ . O sistema é então equivalente a uma única força,  $\vec{F}_3$ , em  $O$ , mais um binário  $M_3 = \vec{F}_3 b_3$



(observe-se o sentido de  $M_3$ )

Faz-se o mesmo para  $\vec{F}_1$  e  $\vec{F}_2$ , ficando então  $\vec{F}_1, \vec{F}_2$  e  $\vec{F}_3$  no ponto  $O$ , mais 3 binários  $M_1, M_2$  e  $M_3$



resultante em  $O$

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{F}_r = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 \\ M_r = M_1 + M_2 + M_3 \end{array} \right.$$

$$M_1 = F_1 b_1$$

$$M_2 = F_2 b_2$$

$$M_3 = F_3 b_3$$

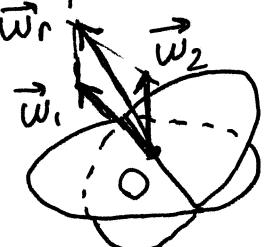
Aula 10. 2018-03-13

## SOMA DE MOMENTOS

O momento de uma força  $\vec{F}$ , em relação a um ponto  $O$ , produz rotação no plano onde estão  $\vec{F}$  e  $O$ . Se uma segunda força estiver nesse mesmo plano, os dois momentos das duas forças podem ser somados algebricamente (ou seja, tendo atenção aos sinais diferentes para sentidos opostos). Mas se os planos forem diferentes, a força  $\vec{F}_1$  produz velocidade  $\vec{v}_1 = \vec{\omega}_1 \times \vec{r}$  e a força  $\vec{F}_2$  produz velocidade  $\vec{v}_2 = \vec{\omega}_2 \times \vec{r}$  noutro plano. A resultante é:

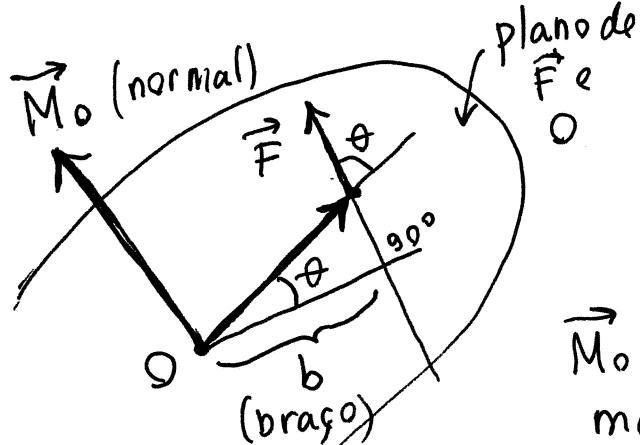
$$\vec{v}_r = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 \Rightarrow \vec{v}_r = (\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2) \times \vec{r}$$

Ou seja, as duas forças em conjunto produzem rotação com velocidade angular  $\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2$ , que está na diagonal do paralelogramo dos vetores  $\vec{\omega}_1$  e  $\vec{\omega}_2$ .



Como tal, os momentos devem ser somados como vetores, e  $\vec{M}_o$  é um vetor na direção perpendicular ao plano de  $\vec{F}$  e  $O$ .

## VETOR MOMENTO



$$M_o = b |\vec{F}| = |\vec{r}| \sin \theta |\vec{F}|$$

$\theta$  = ângulo entre os vetores  $\vec{r}$  e  $\vec{F}$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{M}_o = \vec{r} \times \vec{F}}$$

$M_o$  no sentido da regra da mão direita, de  $\vec{r}$  para  $\vec{F}$ .

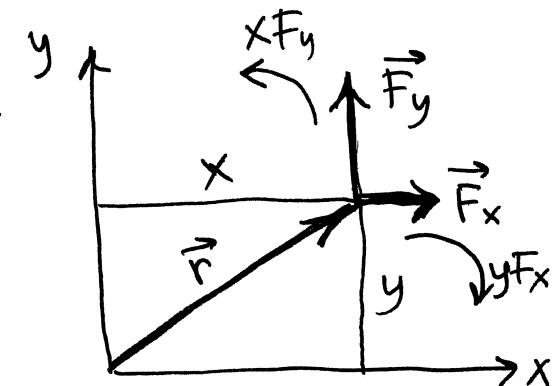
Se os eixos  $x$  e  $y$  definem-se no plano do ponto  $O$  e a força  $\vec{F}$ , com origem em  $O$ :

$$\Rightarrow \vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j}, \quad \vec{F} = F_x\hat{i} + F_y\hat{j}$$

$$\vec{M}_o = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ x & y & 0 \\ F_x & F_y & 0 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{M}_o = \begin{vmatrix} x & y & \hat{k} \\ F_x & F_y & 0 \end{vmatrix}} \quad M_o = xF_y - yF_x$$

$M_o$  pode ser obtido como a soma algébrica dos momentos de duas forças,  $\vec{F}_x$  e  $\vec{F}_y$ , no mesmo plano, com braços  $y$  e  $x$ .

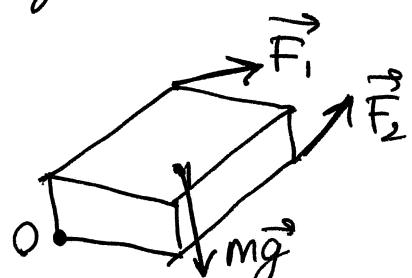


## CORPOS RÍGIDOS EM EQUILÍBRIO

Sem aceleração linear ( $\vec{a} = \vec{0}$ ), nem angular ( $\alpha$ )

A resultante de todas as forças externas deve ser nula. As forças podem ser somadas em qualquer ponto  $O$ , adicionando os momentos dessas forças em relação a  $O$ ; para que o resultado seja nulo, há duas condições:

$$\left\{ \sum \vec{F}_{ext} = \vec{0} \right.$$



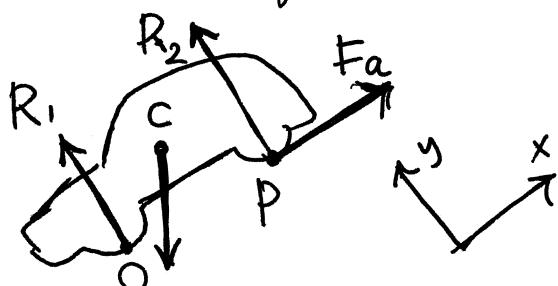
$$\left. \sum \vec{M}_o = \vec{0} \quad (O \text{ é qualquer ponto}) \right.$$

**Exemplo.** O automóvel da figura pesa 9000 N e encontra-se numa estrada com declive de 5%.

O centro de gravidade, C, encontra-se 0.4 m atrás dos pneus da frente, 1.20 m à frente dos pneus traseiros e a 0.35 m de altura. **a)** Determine as reações normais e as forças de atrito nos pneus quando o automóvel está parado **b)** Como se alteravam essas forças se o automóvel começar a descer a estrada com velocidade uniforme?

**Resolução.** Diagrama de corpo livre:

**a)**



atram forças em 3 pontos, O, C e P. Escolhemendo a origem em O e o eixo x paralelo à estrada:

$$O = (0,0), \quad P = (1.6,0), \quad C = (0.4, 0.35)$$

$$P_x = 9000 \sin \theta = \frac{9000 \times 5}{\sqrt{100^2 + 5^2}} = 449.4$$

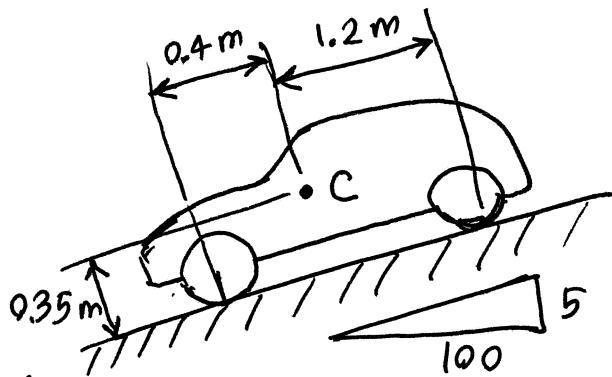
$$P_y = 9000 \cos \theta = \frac{9000 \times 100}{\sqrt{100^2 + 5^2}} = 8988.8 \quad (\text{SI})$$

$R_1$  = soma das duas reações normais nos pneus da frente

$R_2$  = soma das duas reações normais nos pneus de trás

$F_a$  = soma das forças de atrito nos quatro pneus.  
(tanto faz atuar em O ou em P, porque estão na mesma linha de ação.)

Para encontrar essas 3 variáveis são necessárias 3 equações:



$$\textcircled{1} \quad F_x = F_a - P_x = 0 \Rightarrow F_a - 449.4 = 0$$

$$F_a = 449.4 \text{ N}$$

$$\textcircled{2} \quad F_y = R_1 + R_2 - P_y = 0 \Rightarrow R_1 + R_2 = 8988.8$$

$$\textcircled{3} \quad |\vec{M}_o| = \vec{r}_c \times \vec{P} + \vec{r}_p \times \vec{R}_2 + \vec{r}_p \times \vec{F}_a = \vec{r}_c \times \vec{P} + \vec{r}_p \times (\vec{R}_2 + \vec{F}_a)$$

$$\Rightarrow M_o = \begin{vmatrix} 0.4 & 0.35 \\ -449.4 & -8988.8 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1.6 & 0 \\ F_a & R_2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow -3438.2 + 1.6 R_2 = 0 \Rightarrow R_2 = 2148.6 \text{ N}$$

$$\Rightarrow R_1 = 6839.9 \text{ N}$$

b) Se o automóvel começa a andar com velocidade constante, continua em equilíbrio, mas aparece outra força, de resistência do ar, que contraria  $\vec{P}_x$  e produz binário no sentido dos ponteiros do relógio

$\Rightarrow R_2$  aumenta, mas  $R_1$  e  $F_a$  diminuem.

( $F_a$  pode chegar a ser nula)  
(ou até negativa, no sentido oposto)

## CENTRO DE MASSA

Divide-se o corpo em pedaços infinitesimais com massa  $dm$

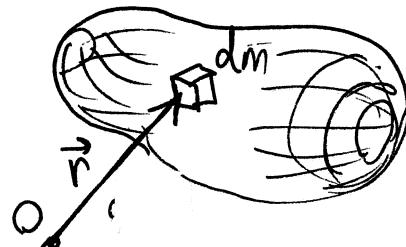
$$\iiint_{\text{volume}} dm = m \quad (\text{massa do corpo})$$

Se  $\vec{r}$  é o vetor posição de cada pedaço  $dm$ , define-se a posição do centro de massa:

$$\vec{r}_{cm} = \frac{1}{m} \iiint_{\text{volume}} \vec{r} dm = \frac{1}{m} \iiint_{\text{volume}} \vec{r} dx dy dz$$

Componentes:

$$x_{cm} = \frac{1}{m} \iiint \vec{r} x dx dy dz, \quad y_{cm} = \frac{1}{m} \iiint \vec{r} y dx dy dz, \quad z_{cm} = \dots$$



## SISTEMAS COM TRANSLAÇÃO (NÃO-UNIFORME) E SEM ROTAÇÃO

Existem duas condições:

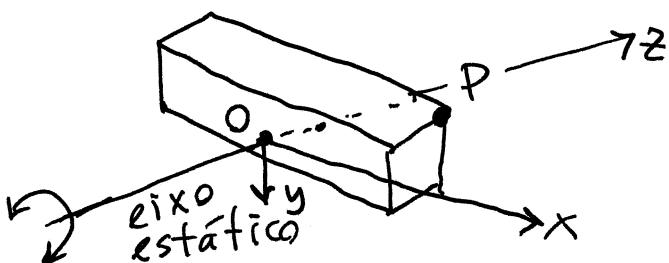
$$\left\{ \begin{array}{l} \sum \vec{F}_{ext} = m \vec{a} \quad (\vec{a} \text{ é igual para todos os pontos do objeto}) \\ \sum \vec{M}_{cm} = 0 \quad (\zeta = 0) \end{array} \right.$$

A soma dos momentos é nula apenas em relação ao centro de massa. Em relação a outros pontos já não é nula.

Esse resultado será demonstrado na próxima aula.

Aula II. 2018-03-15

## ROTAÇÃO COM EIXO FIXO



Cada ponto P só pode deslocar-se num círculo de raio  $R = \text{distância de } P \text{ até o eixo}$

Se o eixo dos z for o próprio eixo de rotação, o ponto P tem coordenadas cartesianas  $(x, y, z)$  e:

$$R = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) = \text{ângulo que o segmento desde } P \text{ até o eixo faz com o eixo.}$$



Coordenadas cilíndricas de P:  $(R, \theta, z)$

$R$  e  $z$  permanecem constantes, mas  $\theta$  é uma função contínua do tempo:

$$\omega = \dot{\theta}, \alpha = \ddot{\theta}$$

$\omega$  e  $\alpha$  são iguais para todos os pontos no corpo. O movimento do corpo tem um único grau de liberdade,  $\theta$ .

Como é um movimento circular, a aceleração de P tem componentes tangencial e normal iguais a:

$$a_t = R\alpha, a_n = R\omega^2$$

Pela segunda lei de Newton, a força resultante no elemento diferencial de massa,  $dm$ , no ponto P, tem componentes:  $df_t = R\alpha dm, df_n = R\omega^2 dm$

O momento que  $df_n$  produz, em relação a O, só tem componentes x e y, mas como o corpo não pode rodar nem à volta de x nem y, esses momentos anulam-se com forças no eixo. (binários)

Como tal, o momento que a força resultante atuando em P produz, em relação a O, é igual a:

$$dM_O = R dF_t = R^2 \alpha dm$$

E a resultante de todas as forças no corpo, em relação a O é:

$$M_O = \iiint_{\text{volume}} R^2 \alpha dm = \alpha \iiint_{\text{volume}} R^2 dm$$

$$\Rightarrow M_O = I_{\text{eixo}} \alpha$$

onde  $I_{\text{eixo}}$ , chamado **momento de inércia** em relação aos eixos, tem unidades de massa vezes distância ao quadrado e:

$$I_{\text{eixo}} = \iiint_{\text{volume}} R^2 dm = \iiint_{\text{volume}} s R^2 dx dy dz$$



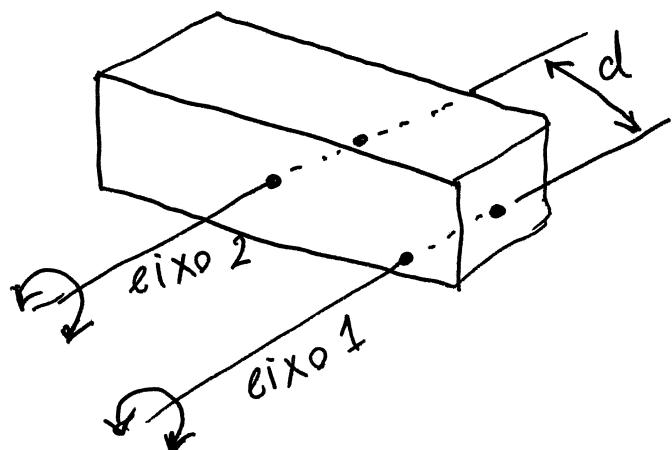
Em alguns pontos do corpo atuam forças externas, por exemplo,  $\vec{F}_i$ , que faz rodar o elemento  $dm$ .

Mas cada elemento vizinho produz uma força, oposta à rotação, por exemplo  $f_i$  (força interna entre duas partes do corpo). No elemento que produz essa força, atua a reação  $-f_i$ , que o faz rodar. As forças internas  $f_i$  e  $-f_i$  atuam no mesmo ponto e, como tal, produzem momentos iguais mas opostos, que se anulam. Conclui-se que o momento total  $M_O$  é apenas a soma dos momentos das forças externas:

$$\sum_{\text{forças externas}} M_O = I_{\text{eixo}} \alpha$$

$M_O$  = componente do momento de  $F_i$ ,  $\vec{M}_i = \vec{r} \times \vec{F}_i$ , na direção do eixo.

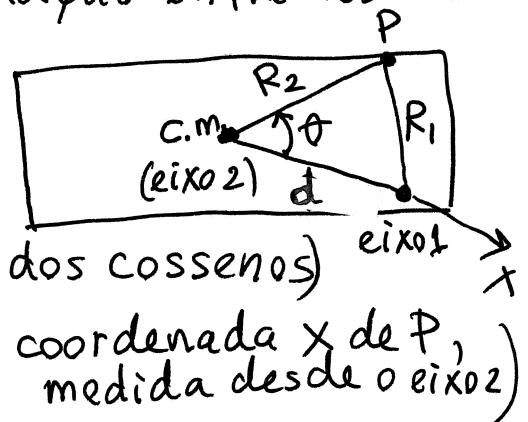
# TEOREMA DOS EIXOS PARALELOS



distâncias desde um ponto qualquer P até os dois eixos será:

$$R_1^2 = R_2^2 + d^2 - R_2 d \cos\theta \quad (\text{lei dos cossenos})$$

$$= R_2^2 + d^2 - d x_2 \quad (x_2 = \text{coordenada } x \text{ de } P, \text{ medida desde o eixo 2})$$



O momento de inércia, em relações ao eixo 1 é:

$$I_1 = \iiint_{\text{volum}} R_1^2 dm = \iiint R_2^2 dm + d^2 \iiint dm - d \iiint x_2 dm$$

o primeiro integral é  $I_2$  e o terceiro integral é a coordenada x do centro de massa, medida desde o eixo 2, que é zero

$$\Rightarrow I_1 = I_2 + m d^2$$

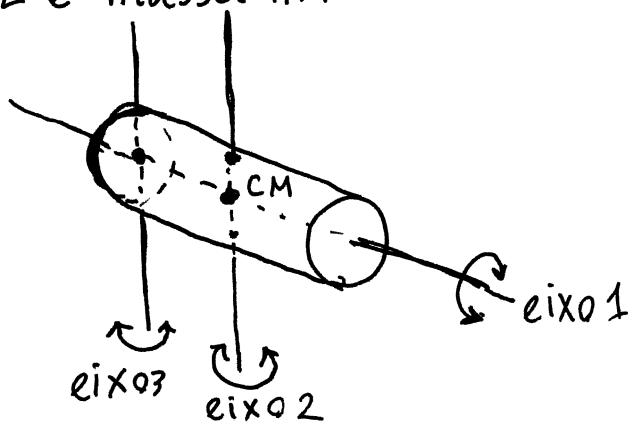
$I_2$  = momento em relação ao eixo, deslocado para o centro de massa

Em geral, o momento de inércia de qualquer objeto é sempre igual à sua massa m, vezes uma distância  $r_g$  ao quadrado:

$$I_{\text{eixo}} = m r_g^2$$

$r_g$  chama-se **raio de giração**

Exemplo. Cilindro homogêneo ( $\rho$  constante) de raio  $R$ , altura  $L$  e massa  $m$ .



$$\begin{cases} x = R \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$$

$$dx dy = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} dr d\theta = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} dr d\theta$$

$$\Rightarrow dx dy = r dr d\theta$$

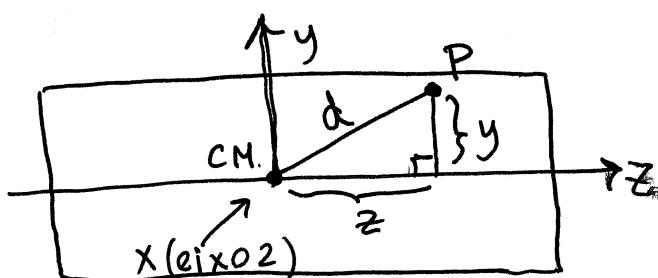
$$I_1 = \rho \int_{-L/2}^{L/2} \int_0^R \int_0^{2\pi} r^2 (r dr d\theta dz) = \frac{1}{2} \rho \pi L R^4$$

$$m = \rho \int_{-L/2}^{L/2} \int_0^R \int_0^{2\pi} r dr d\theta dz = \rho \pi L R^2 \Rightarrow I_1 = \frac{1}{2} M R^2$$

Escolhendo o eixo ~~2~~ igual ao eixo 2, então a distância  $d$ , desde um ponto  $P$  do cilindro até o eixo 2, é:  $d = \sqrt{z^2 + y^2}$

$$d^2 = z^2 + r^2 \sin^2 \theta$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \rho \iiint (z^2 + r^2 \sin^2 \theta) r dr d\theta dz = \rho \int_{-L/2}^{L/2} z^2 dz \int_0^R r dr \int_0^{2\pi} d\theta \\ &\quad + \rho \int_{-L/2}^{L/2} dz \int_0^R r^3 dr \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta \\ &= \rho \left( \frac{L^3}{24} - \frac{(-L)^3}{24} \right) \left( \frac{R^2}{2} \right) (2\pi) + \rho (L) \left( \frac{R^4}{4} \right) (\pi) \end{aligned}$$

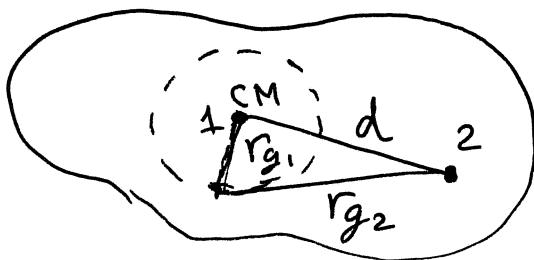


$$\Rightarrow I_2 = \frac{1}{4}mR^2 + \frac{1}{12}mL^2$$

Para determinar  $I_3$ , usa-se o teorema dos eixos paralelos.

$$I_3 = I_2 + m\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}mR^2 + \frac{1}{12}mL^2 + \frac{1}{4}mL^2$$

$$\Rightarrow I_3 = \frac{1}{4}mR^2 + \frac{1}{3}mL^2$$



O raio de giroação  $r_g$ , implica que quando o corpo roda à volta dum eixo 1, com raio de giroação  $r_{g1}$ , é como se

toda a massa do corpo estivesse concentrada num ponto na circunferência de raio  $r_{g1}$ , com centro no eixo e paralela a ele.

Se o eixo 1 passa pelo centro de massa, um segundo eixo 2, paralelo e a uma distância  $d$ , do eixo 1, tem raio de giroação  $r_{g2}$ . Pelo teorema dos eixos paralelos,

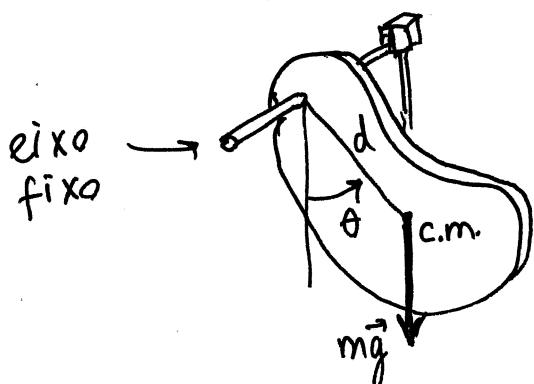
$$mr_{g2}^2 = mr_{g1}^2 + md^2$$

$$\Rightarrow r_{g2}^2 = r_{g1}^2 + d^2$$

$r_{g2}$  é a hipotenusa dum triângulo retângulo com catetos  $r_{g1}$  e  $d$ .

Aula 12. 2018-03-20

## O PÊNDULO



Momento em relação ao centro de massa:

$$-mgd \sin\theta = I_{eixo} \alpha$$

$$I_{eixo} = m r_g^2$$

$$\Rightarrow \alpha = -\frac{gd}{r_g^2} \sin\theta$$

É a mesma equação obtida para o pêndulo simples de comprimento  $l$ . Neste caso o comprimento eficaz é:

$$l = \frac{r_g^2}{d} = \frac{r_{cm}^2 + d^2}{d} = d + \frac{r_{cm}^2}{d} \quad (r_{cm} = \text{raio de giro em relação ao c.m.})$$

$$(l > d)$$

## MOVIMENTO DO CENTRO DE MASSA

$$\vec{r}_{cm} = \frac{1}{m} \iiint_{\text{volume}} \vec{r} dx dy dz$$

derivando em ordem ao tempo,

$$\vec{v}_{cm} = \frac{1}{m} \iiint_{\text{volume}} \vec{v} dx dy dz$$

$$\vec{a}_{cm} = \frac{1}{m} \iiint_{\text{volume}} \vec{a} dx dy dz \Rightarrow m \vec{a}_{cm} = \iiint_{\text{volume}} \vec{a} dm$$

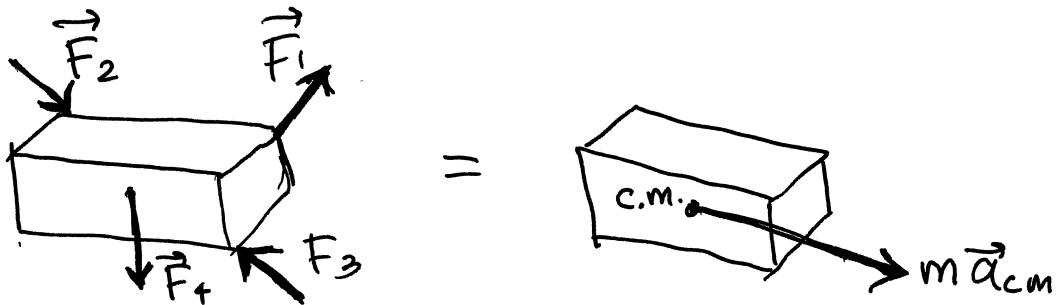
$\vec{a} dm$  é a força total que atua no elemento de massa  $dm$ .

$$\Rightarrow \iiint_{\text{volume}} \vec{df} = m \vec{a}_{cm}$$

No integral de  $\vec{df}$ , as forças internas anulam-se, ficando unicamente as forças externas.

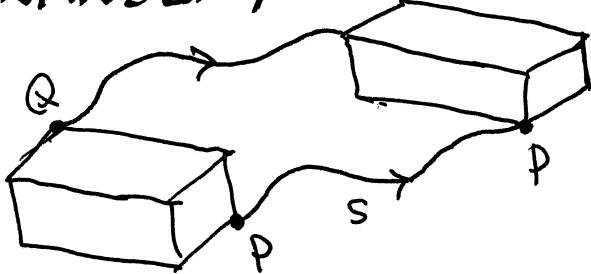
$$\sum_{\text{forças externas}} \vec{F}_i = m \vec{a}_{cm}$$

A força resultante altera a aceleração do centro de massa, como se a massa e "força estivessem concentradas no centro de massa"



Se o momento de todas as forças, em relação ao centro de massa, não for nulo, existiria também um momento resultante  $I_{cm} \alpha$ .

## CORPOS RÍGIDOS COM MOVIMENTO DE TRANSLAÇÃO



A trajetória de todos os pontos no corpo é a mesma.

A aceleração tangencial,

$a_t$ , (igual para todos os pontos) verifica as equações diferenciais:  $a_t = \frac{dv}{dt}$ ,  $a_t = v \frac{dv}{ds}$

Como  $a_t$  é também a aceleração tangencial do centro de massa, a força tangencial resultante é  $F_t = m a_t$  e verifica as equações:

$$\left\{ \begin{array}{l} F_t = m \frac{dv}{dt} \rightarrow \int_{t_1}^{t_2} F_t dt = m v_2 - m v_1 = P_2 - P_1 \\ \quad \text{(módulo do impulso)} \\ F_t = m v \frac{dv}{ds} \rightarrow \int_{s_1}^{s_2} F_t ds = m \left( \frac{v_2^2}{2} - \frac{v_1^2}{2} \right) \end{array} \right.$$

## TRABALHO E ENERGIA CINÉTICA

Define-se:  $W_{12} = \int_{S_1}^{S_2} F_f ds$  = trabalho da força resultante ao longo da trajetória.

$E_c = \frac{1}{2}mv^2$  = energia cinética do corpo, no instante em que a velocidade é  $v$ .

O último integral da página anterior é o teorema do trabalho e a energia cinética:

$$W_{12} = E_{c_2} - E_{c_1}$$

o aumento da energia cinética é igual ao trabalho da força resultante, ao longo da trajetória.

Unidade SI de trabalho e energia.

Joule (J).  $1 J = 1 N \cdot m = 1 \frac{kg \cdot m^2}{s^2}$

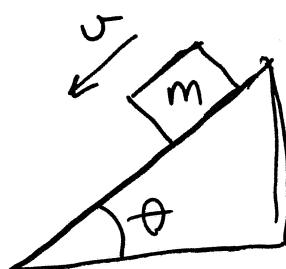
Como a força resultante é a soma das forças externas, então o trabalho da força resultante é igual à soma dos trabalhos das forças externas.

$$W_{12} = \int_{S_1}^{S_2} F_{t,1} ds + \int_{S_1}^{S_2} F_{t,2} ds + \dots + \int_{S_1}^{S_2} F_{t,n} ds$$

Exemplo. Um bloco de massa  $m$ , a descer um plano inclinado com ângulo  $\theta$ .

O coeficiente de atrito cinético entre o bloco e o plano é  $\mu_c$ .

Ignorando a resistência do ar, há três forças externas: peso, reação normal, e atrito (cinético).



Aula 13. 2018-03-22

Diagrama de corpo livre:

A reação normal não realiza trabalho, porque não tem componente tangencial

O trabalho do peso é:

$$\int_{S_1}^{S_2} (mg \sin\theta) ds = mg \sin\theta (S_2 - S_1) = mg \Delta s \sin\theta$$

E o trabalho da força de atrito é:

$$\int_{S_1}^{S_2} (-mg \cos\theta) \mu_c ds = -mg \mu_c \cos\theta (S_2 - S_1) = -mg \mu_c \Delta s \cos\theta$$

Como tal, se a velocidade inicial for  $v_i = 0$ , então:

$$mg \Delta s \sin\theta - mg \mu_c \Delta s \cos\theta = \frac{1}{2} m v_2^2$$

$$v_2 = \sqrt{2g \Delta s (\sin\theta - \mu_c \cos\theta)}$$

Observe-se que esta solução só é possível se:

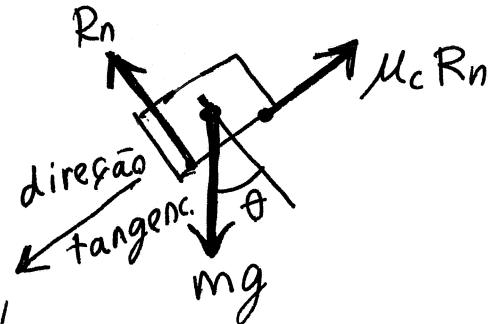
$$\sin\theta > \mu_c \cos\theta \Rightarrow \boxed{\mu_c < \tan\theta}$$

Se a inclinação do plano não fosse suficiente, então  $v_2$  permaneceria igual  $v_i = 0$ . (repouso).

Mas se  $\mu_c \geq \tan\theta$  e é dado um impulso inicial  $\Rightarrow v_i > 0$  e o objeto desce uma distância  $\Delta s$  até parar ( $v_2 = 0$ ):  $mg \Delta s (\sin\theta - \mu_c \cos\theta) = 0 - \frac{1}{2} m v_i^2$

$$\Delta s = \frac{v_i^2}{2g (\mu_c \cos\theta - \sin\theta)}$$

$\underbrace{\quad}_{> 0}$



# MOVIMENTO DE TRANSLAÇÃO E ROTAÇÃO

$d\vec{f}$  = força total a atuar num elemento infinitesimal de massa  $dm$ , num ponto P.

$d_{ft}$  = componente tangente à trajetória do ponto P (cada ponto tem uma trajetória diferente).

trabalho realizado por  $d_{ft}$ :

$$d_{ft} = a_f dm = v \frac{dv}{ds} dm$$

$$dW_{12} = \int_{s_1}^{s_2} d_{ft} ds = \left( \int_{v_1}^{v_2} v dv \right) dm = \left( \frac{v_2^2}{2} - \frac{v_1^2}{2} \right) dm$$

O trabalho total sobre o corpo é a integral de  $dW_{12}$  em todo o volume do corpo

$$W_{12} = E_{C_2} - E_{C_1} \quad \text{Energia cinética} = E_C = \iiint_{\text{volume}} \frac{v^2}{2} dm$$

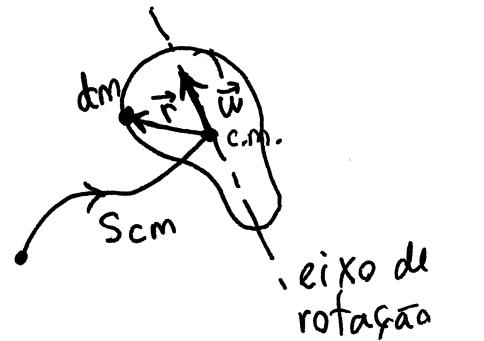
No cálculo de  $E_C$  é conveniente usar o referencial com origem no centro de massa, que se desloca com o corpo. A velocidade do elemento  $dm$ , relativa a esse referencial, é  $\vec{r} \times \vec{\omega}$ , onde  $\vec{r}$  é a posição de  $dm$  relativa ao centro de massa. A velocidade de  $dm$  é então:

$$\vec{v} = \vec{v}_{cm} - \vec{r} \times \vec{\omega} \quad (\vec{v}_{cm} = \text{veloc. do c.m.})$$

O módulo de  $\vec{r} \times \vec{\omega}$  é:  $|\vec{r} \times \vec{\omega}| = r \omega \sin \theta = R \omega$   
 ( $R$  = distância desde  $dm$  até o eixo de rotação que passa pelo c.m.)

$$v^2 = (\vec{v}_{cm} - \vec{r} \times \vec{\omega}) \cdot (\vec{v}_{cm} - \vec{r} \times \vec{\omega}) = v_{cm}^2 + \omega^2 R^2 - 2 \vec{v}_{cm} \cdot (\vec{r} \times \vec{\omega})$$

$$\Rightarrow E_C = \frac{v_{cm}^2}{2} \iiint dm + \frac{\omega^2}{2} \iiint R^2 dm - 2 \vec{v}_{cm} \cdot \left( \left( \iiint \vec{r} dm \right) \times \vec{\omega} \right)$$



O primeiro integral é a massa total,  $m$ . O segundo integral é o momento de inércia à volta do eixo de rotação que passa pelo centro de massa. (paralelo a  $\vec{\omega}$ ) O terceiro integral é a posição do centro de massa, que é zero, porque o centro de massa está na origem.

$$\Rightarrow E_c = \frac{1}{2} m v_{cm}^2 + \frac{1}{2} I_{cm} \omega^2$$

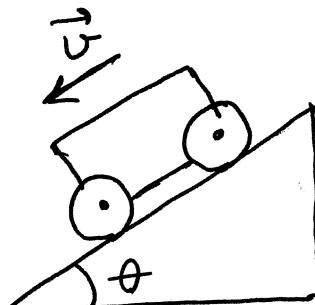
↑  
energia de  
translação      ↑  
energia de  
rotação

O trabalho total, integral de  $dW_{12}$  em todo o volume, dá a soma dos trabalhos das forças externas  $\vec{F}_i$ , porque os trabalhos das forças internas anulam-se

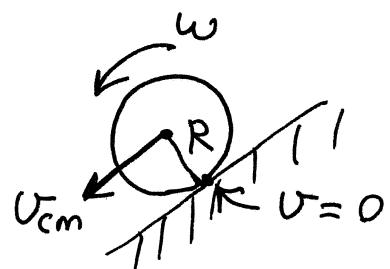
$$W_{12} = \sum_{i=1}^n \int_{S_{i1}}^{S_{i2}} \vec{F}_{ti} \cdot d\vec{s}_i$$

$d\vec{s}_i$  = deslocamento do ponto onde é aplicada a força externa  $\vec{F}_i$

**Exemplo.** Um carrinho de massa  $M$ , com quatro rodas homogêneas, de massa  $m$  e raio  $R$ , a descer um plano inclinado  $\theta$  radianos sobre a horizontal. O atrito cinético nos eixos das rodas pode ser desprezado. Se o carrinho parte do repouso, determine a velocidade após ter descido uma distância  $d$  sobre o plano inclinado.



Como as rodas não escorregam sobre o plano, a velocidade do seu centro de massa (no eixo da roda) é  $V_{cm} = RW$



As quatro rodas têm as mesmas velocidades  $V_{cm}$  e  $W$ , e o carrinho tem velocidade  $V_{cm}$ .

$$E_C = \frac{M}{2} V_{cm}^2 + 4 \left( \frac{m}{2} V_{cm}^2 \right) + 4 \left( \frac{1}{2} I_{cm} \omega^2 \right)$$

O momento de inércia de um disco uniforme, em relação ao seu eixo, que passa pelo cm., é:  $\frac{1}{2} m R^2$

$$\Rightarrow E_C = \frac{M}{2} V_{cm}^2 + 2m V_{cm}^2 + 2 \left( \frac{1}{2} m V_{cm}^2 \right) = \frac{1}{2} (M+6m) V_{cm}^2$$

As reações normais nas quatro rodas não realizam trabalho. As forças de atrito estático nas quatro rodas também não realizam trabalho porque o ponto de contacto entre cada roda e o plano não se desloca ( $ds=0$ )

$$\Rightarrow W_{12} = W(\text{peso total})_{12} = \int_{S_1}^{S_2} (M+4m) g \sin \theta \, ds_{cm}$$

$$= (M+4m) g \sin \theta \, d$$

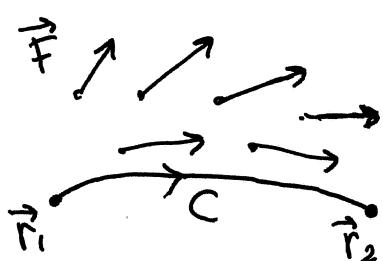
Como  $E_{C1}=0$ , então

$$\frac{1}{2} (M+6m) V_2^2 = (M+4m) g \sin \theta \, d$$

$$V_2 = \sqrt{\left( \frac{2M+8m}{M+6m} \right) d g \sin \theta}$$

Aula 14. 2018-04-03

## CAMPOS DE FORÇAS



$\vec{F}(\vec{r})$  = força que atua em qualquer posição  $\vec{r}$ . Não depende nem de  $t$  nem da velocidade  $\vec{v}$  dos objetos

$C$  = curva entre  $\vec{r}_1$  e  $\vec{r}_2$  ( $d\vec{r}$  tangente a  $C$ )

$$\Rightarrow \vec{F} \cdot d\vec{r} = F_t ds \quad (ds = \text{comprimento do arco em } C)$$

trabalho realizado por  $\vec{F}(\vec{r})$  entre  $\vec{r}_1$  e  $\vec{r}_2$

$$W_{12} = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \text{integral de linha} \quad (d\vec{r} \text{ depende da curva } C)$$

## FORÇAS CONSERVATIVAS

Um campo de forças é conservativo, se  $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$  dá o mesmo valor, qualquer que seja a curva desde  $\vec{r}_1$  até  $\vec{r}_2$ . Como tal, não é preciso indicar a curva no integral:

$$W_{12} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

e define-se um campo escalar  $U(\vec{r})$ :

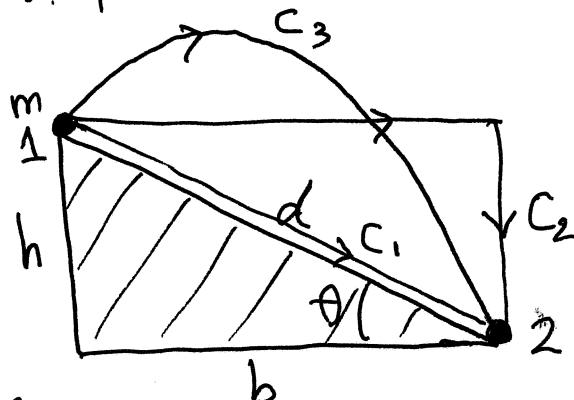
$$U(\vec{r}) = - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

= energia potencial

$\vec{r}_0$  = ponto arbitrário onde  $U=0$

## 1. O PESO

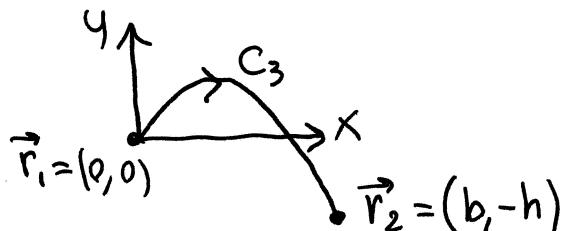
O peso é uma força conservativa. Por exemplo, numa partícula a descer um plano inclinado, o trabalho realizado pelo peso é igual em  $C_1, C_2, C_3$  ou qualquer outra trajetória.



$$C_1: F_t = mg \sin\theta, W_{12} = d mg \sin\theta \Rightarrow W_{12} = mgh$$

$$C_2: F_t = \begin{cases} 0, & \text{segmento horizontal} \\ mg, & \text{segmento vertical} \end{cases} \Rightarrow W_{12} = mgh$$

$$C_3: \quad y = -kx^2 + (kb - \tan\theta)x$$



$$x = \frac{kb - \tan\theta + \sqrt{C_1 - C_2 y}}{2k} \quad (y \in [0, -h])$$

$$d\vec{r} = dx\hat{i} + dy\hat{j}$$

dependem um do  
outro

$$\Rightarrow d\vec{r} = -\frac{C_2 dy}{4k\sqrt{C_1 - C_2 y}}\hat{i} + dy\hat{j}, \quad \vec{F} = -mg\hat{j}$$

$$\Rightarrow \vec{F} \cdot d\vec{r} = -mg dy \quad W_{12} = -mg \int_0^{-h} dy = mgh$$

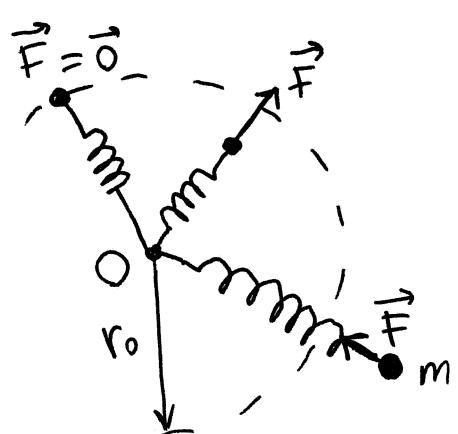
## ENERGIA POTENCIAL GRAVITACIONAL

$$U(\vec{r}) = -mgy$$

arbitrando \$U=0\$ em \$y=0\$

$$W_{12} = U_1 - U_2$$

## 2. FORÇA ELÁSTICA



$$k = \text{constante elástica}$$

Mola elástica, com um extremo fixo na origem \$O\$.

$$\vec{F} = -k(r - r_0)\hat{e}_r \leftarrow \begin{array}{l} \text{direção} \\ \text{radial} \end{array}$$

\$r\_0\$ = comprimento normal da mola

\$r > r\_0\$: mola esticada, a força aponta para \$O\$

\$r < r\_0\$: mola comprimida: \$\vec{F}\$ aponta para fora de \$O\$.

$$d\vec{r} = dr \hat{e}_r + r d\theta \hat{e}_\theta, \quad \vec{F} \cdot d\vec{r} = -k(r - r_0) dr$$

$$W_{12} = -k \int_{r_1}^{r_2} (r - r_0) dr = -k \int_{S_1}^{S_2} s ds \quad \left( \begin{array}{l} s = r - r_0 \\ \text{alongamento da mola} \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow W_{12} = -k \left( \frac{S_2^2}{2} - \frac{S_1^2}{2} \right)$$

$$U = \frac{1}{2} k S^2$$

$$W_{12} = U_1 - U_2$$

## Teorema do trabalho e a energia mecânica

$$\sum_{i=1}^n W_{12}(\text{força } i) = E_{C_2} - E_{C_1} \quad (\text{aumento da energia cinética})$$

$$\sum_{j=1}^m W_{12}(\text{força conserv. } j) + \sum_{k=1}^{n-m} W_{12}(\text{força não cons. } k) = E_{C_2} - E_C$$

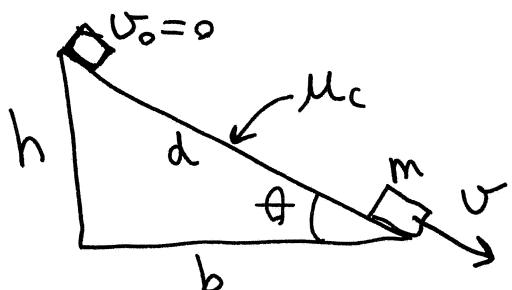
$$\xrightarrow{\substack{\text{energia potencial} \\ \text{total}}} U_1 - U_2 + W_{12}(\text{forças não conserv.}) = E_{C_2} - E_C$$

$$\Rightarrow W_{12}(\text{forças não conservativas}) = E_{m_2} - E_{m_1} \quad \begin{array}{l} \text{aumento} \\ \text{da energia} \\ \text{mecânica} \end{array}$$

$$\text{Energia mecânica} = E_m = E_C + U$$

↑  
energia cinética      ↑  
energia potencial total

Exemplo:



$$W(\text{força atrito}) = E_{m_2} - E_{m_1}$$

$$- dm g \mu_c \cos \theta = \frac{1}{2} m v^2 - mg h$$

$$\frac{1}{2} m v^2 = mg(h - \mu_c b)$$

$$v = \sqrt{2g(h - \mu_c b)} \quad (h > \mu_c b)$$

## SISTEMAS CONSERVATIVOS

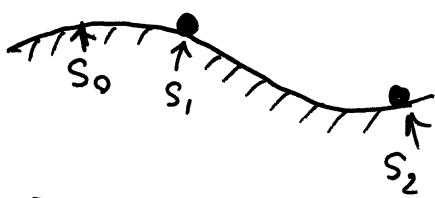
Se as forças não conservativas não realizam trabalho  
 $W_{12}$  (forças não conservativas) = 0

$$\Rightarrow E_{m_2} - E_{m_1} = 0 \quad \boxed{E_{m_1} = E_{m_2}}$$

$\Rightarrow$  Conservação da energia mecânica.  $E_m = \text{constante}$

## SISTEMAS CONSERVATIVOS COM UM GRAU DE LIBERDADE

Força resultante:  $\vec{F}$



componentes  $\begin{cases} F_t \text{ tangente à trajetória} \\ F_n \text{ normal} \end{cases}$

$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = F_t ds \quad (\text{a componente normal } F_n \text{ não realiza trabalho})$$

$$\Rightarrow W_{12} = \int_{\text{trajetória}} F_t ds$$

Se  $F_t$  depende apenas de  $s$ , mas não de  $t$  ou  $U$ ,

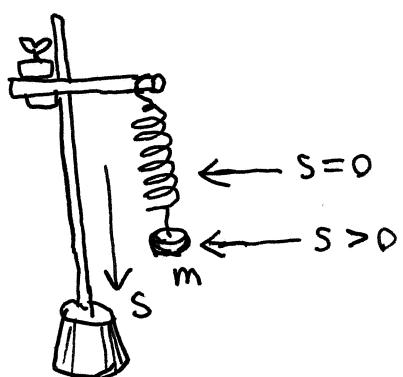
$$\Rightarrow W_{12} = \int_{S_1}^{S_2} F_t ds \quad \text{depende apenas de } S_1 \text{ e } S_2$$

$$\int_{S_1}^{S_2} F_t ds = \int_{S_0}^{S_1} F_t ds + \int_{S_0}^{S_2} F_t ds = U_1 - U_2$$

$$\begin{aligned} \text{Energia potencial} &= U(s) = - \int_{S_0}^s F_t ds \\ &= \text{uma primitiva de } F_t. \end{aligned}$$

Aula 15. 2018-04-05

## OSCILADOR HARMÓNICO SIMPLES



Mola elástica de constante  $k$ , com um objeto de massa  $m$  pendurado.

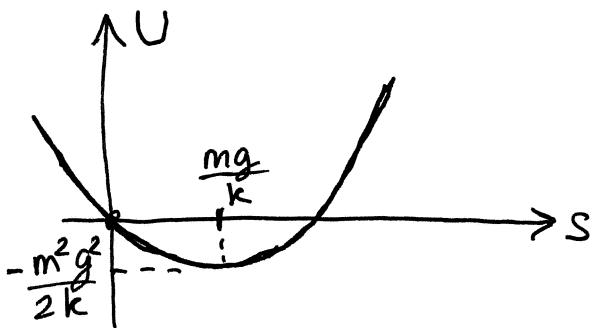
$s$  = alongamento da mola

Energia potencial total:

$$U = \frac{1}{2}ks^2 - mgs \quad (\text{parábola em função de } s)$$

$$U = \frac{1}{2}k\left(s - \frac{mg}{k}\right)^2 - \frac{m^2g^2}{2k}$$

$s_0 = \frac{mg}{k}$  = posição em que o peso  $mg$  é igual à força elástica  $+ks$  e o objeto permanece estático.



Ignorando a resistência do ar, a energia mecânica permanece constante

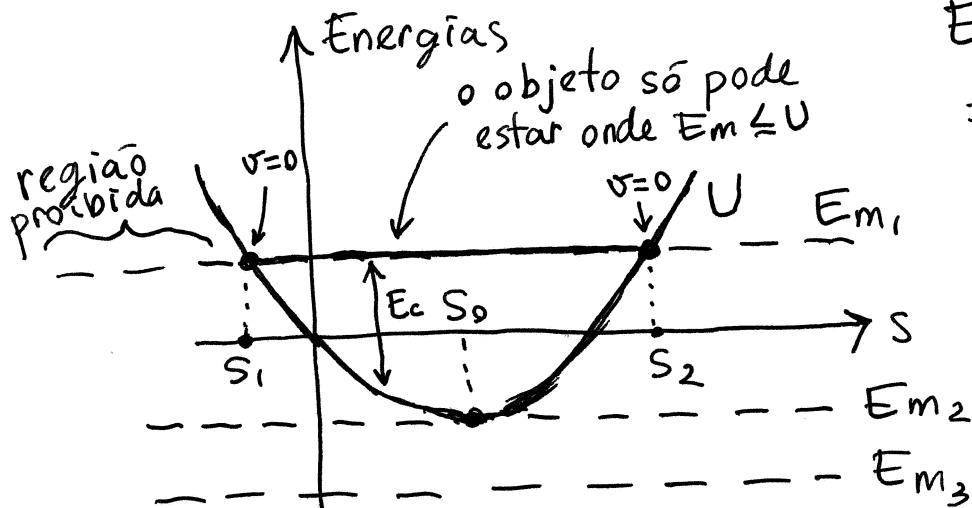
$$E_m = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}ks^2 - mgs$$

$v = \dot{s}$

$$E_m \geq -\frac{m^2g^2}{2k}$$

e constante

### Gráfico de energias

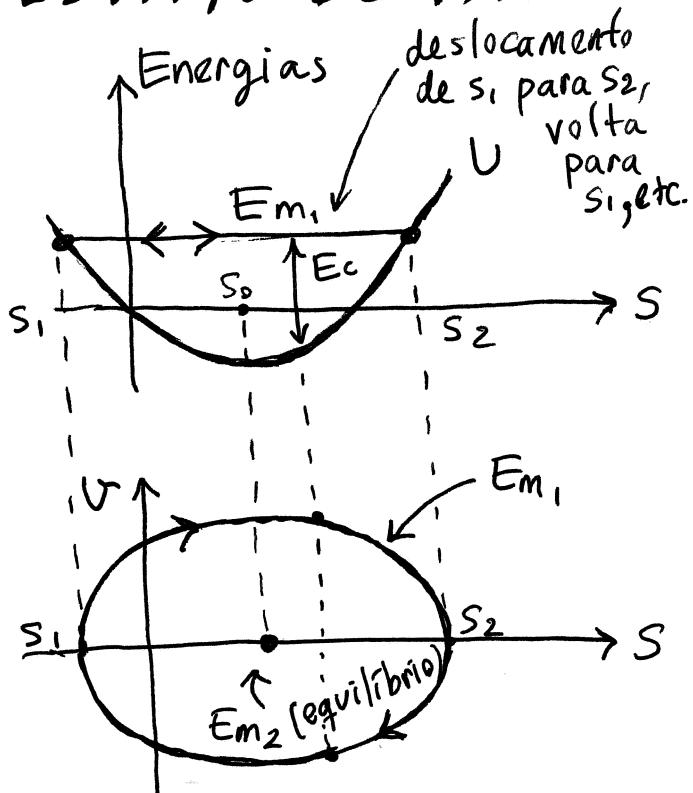


$E_{m3} \rightarrow$  impossível

$E_{m2} \rightarrow$  o objeto está em  $s_0 = \frac{mg}{k}$ , com  $v=0$ .

$E_{m1}$ , o objeto oscila entre  $s_1$  e  $s_2$

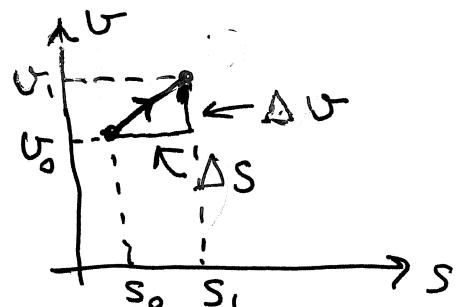
## ESPAÇO DE FASE



possível movimento (cada possível valor de  $E_m$ ) é uma elipse, percorrida no sentido dos ponteiros do relógio. O valor mínimo da energia mecânica, igual ao valor mínimo da energia potencial é apenas um ponto, no eixo  $S \rightarrow$  ponto de equilíbrio.

## VELOCIDADE DE FASE

Em cada ponto do espaço de fase  $(S_0, v_0)$  temos um possível estado inicial do sistema. A menos que esse ponto seja ponto de equilíbrio, o sistema está em movimento, ou seja, um instante mais tarde ( $\Delta t$ ) o estado passa a ser  $(S_1, v_1)$ . O deslocamento do estado, no espaço de fase, é  $\vec{\Delta r}_f = (S_1, v_1) - (S_0, v_0) = (\Delta S, \Delta v)$



No gráfico de energias, a diferença  $E_m - U$  é a energia cinética; quando é maior do que 0, o objeto tem velocidade diferente de zero. Pode estar a deslocar-se no sentido positivo ( $v > 0$ ) ou negativo ( $v < 0$ ). Passando o gráfico para o espaço de fase, com eixos  $S$  e  $v$ , cada

A velocidade de fase,  $\vec{U}$ , é o vetor que indica como se desloca o estado do sistema, por unidade de tempo, no espaço de fase:

$$\vec{U} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}_f}{\Delta t} = (\dot{s}, \dot{v}) = (v, a_t)$$

No caso do oscilador harmônico simples, como  $U$  é menos a primitiva de  $F_t$ , então  $F_t$  é menos a derivada de  $U$ :  $F_t = -\frac{dU}{dt} = -ks + mg$

$$a_t = \frac{F_t}{m} = -\frac{k}{m}s + g \Rightarrow \boxed{\vec{U} = (v, g - \frac{k}{m}s)}$$

A expressão da velocidade de fase  $\vec{U}$  em função das coordenadas do espaço de fase, é suficiente para determinar todos os possíveis movimentos do sistema.

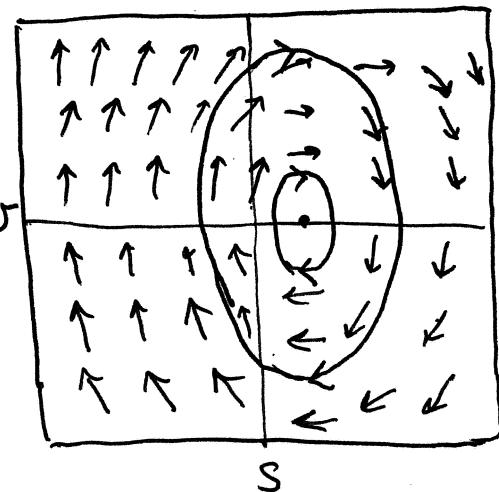
## PROGRAMA PLOTDF (Plot Direction Field)

Tem dois parâmetros de entrada: uma lista com as duas componentes da velocidade de fase, e outra lista com as variáveis que definem o espaço de fase.

A primeira lista ( $\vec{U}$ ) só pode depender das variáveis na segunda lista.

Exemplo. Oscilador harmônico simples com  $\frac{k}{m} = 4$ :

`plotdf ([v, 9.8 - 4*s], [s, v]);`



O programa mostra uma grelha com o vetor  $\vec{u}$  nos pontos dessa grelha (**campo de direções**). Clicando num ponto do espaço de fase, é traçada a **curva de evolução** que passa por esse ponto (movimento do sistema com estado inicial/final nesse ponto).

## SISTEMAS DINÂMICOS.

Qualquer sistema com variáveis de estado:  $s_1, s_2, \dots, s_n$  que determinam o estado do sistema, e equações de evolução:  $\dot{s}_1 = f_1(s_1, s_2, \dots), \dot{s}_2 = f_2(s_1, s_2, \dots), \dots, \dot{s}_n = f_n$  que determinam a evolução do sistema.

Em duas dimensões, os sistemas dinâmicos com duas variáveis de estado  $(s_1, s_2)$  são definidos por duas equações diferenciais:

$$\frac{ds_1}{dt} = f_1(s_1, s_2, t) \quad \frac{ds_2}{dt} = f_2(s_1, s_2, t)$$

O sistema é **autônomo**, se  $f_1$  e  $f_2$  não dependem do tempo. Nesse caso, a evolução do sistema é igual, independentemente do valor de  $t_0$ , e basta conhecer a velocidade de fase:

$$\vec{u} = (f_1(s_1, s_2), f_2(s_1, s_2))$$

para determinar a evolução do sistema.

**Exemplo 7.2**

$$\begin{cases} \dot{s}_1 = 4 - s_1^2 - 4s_2^2 \\ \dot{s}_2 = s_2^2 - s_1^2 + 1 \end{cases}$$

```
plotdf([4-s1^2-4*s2^2, s2^2-s1^2+1], [s1, s2], [s1, -2, 2],
       [s2, -2, 2]);
```

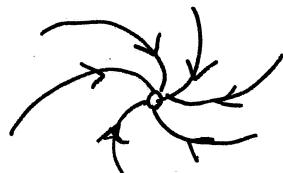
Aula 16. 2018-04-10

## PONTOS DE EQUILÍBRIO

Pontos do espaço de fase em que a velocidade de fase  $\dot{u}$  é nula  $\rightarrow$  se o estado inicial é um ponto de equilíbrio, esse estado permanece igual. Há dois tipos:

{ ponto de equilíbrio      estável. As curvas na vizinhança do ponto permanecem próximas dele, ou aproximam-se dele  
                                instável. As curvas na vizinhança do ponto afastam-se dele

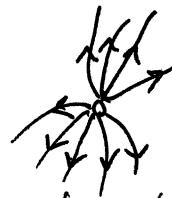
Exemplos:



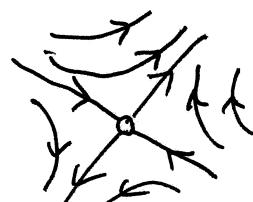
ponto estável



estável



instável

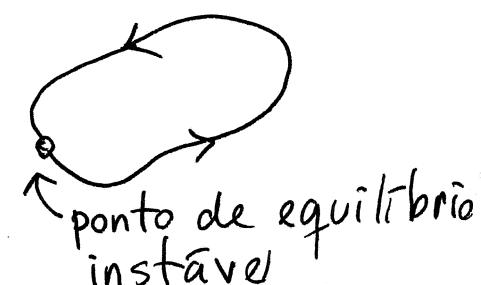
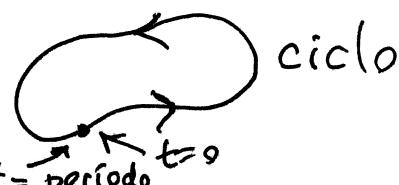


instável

## CICLOS

Curvas de evolução fechadas.

Correspondem a uma oscilação do estado do sistema, que se repete indefinidamente  
período: tempo que o estado demora a retomar o estado inicial



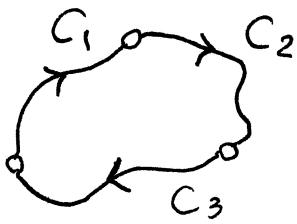
## ÓRBITAS HOMOCLÍNICAS

Curva de evolução que se afasta dum ponto de equilíbrio, mas regressa para esse ponto no limite  $t \rightarrow \infty$ . Parecem ciclos, mas a oscilação só acontece uma vez (solitão, onda solitária). O estado nunca chega até ao ponto de equilíbrio.

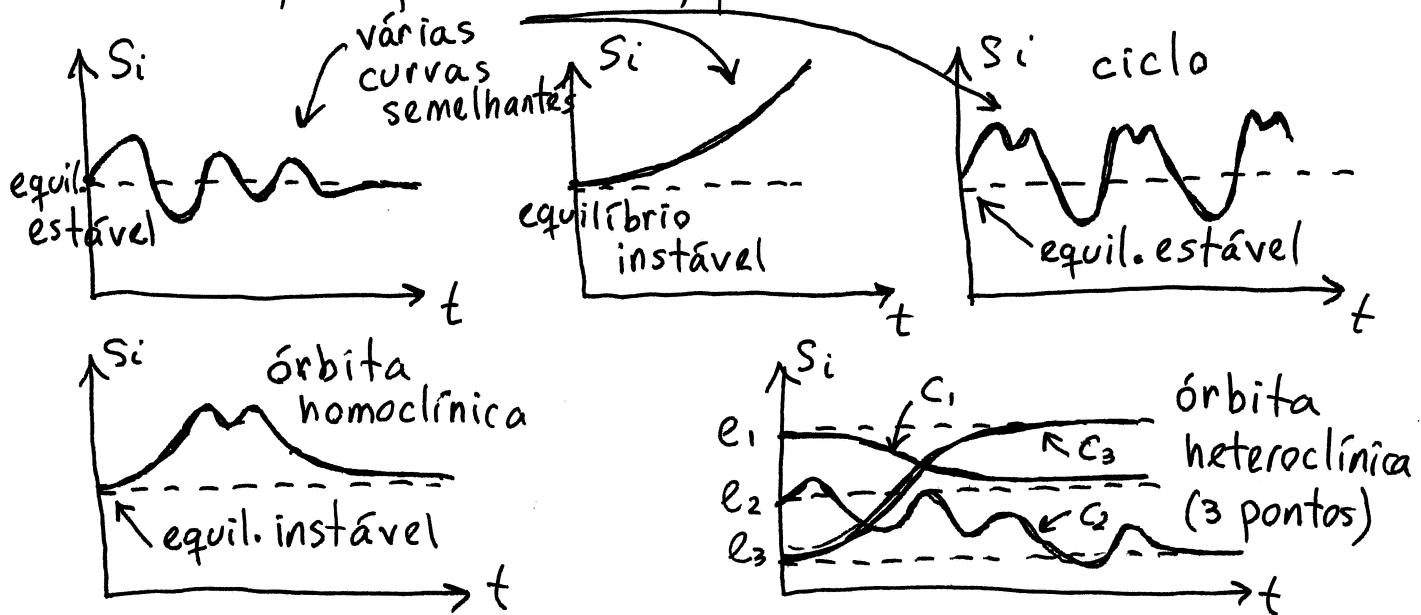
## ÓRBITAS HETEROCLÍNICAS

Curva fechada, mas com dois ou mais pontos de equilíbrio instável.

No exemplo da figura, com 3 pontos, há realmente 3 curvas de evolução diferentes,  $C_1$ ,  $C_2$ , e  $C_3$ , sem ligação entre elas.



Nos diferentes casos (ciclos, órbitas, etc.) Cada variável de estado, em função de  $t$ , pode ser:



## SISTEMAS HAMILTONIANOS (conservativos)

Existe uma função  $H(S_1, S_2, \dots, S_n)$ , chamada **hamiltoniana**, que define as equações de evolução. No caso de duas variáveis de estado:

$$\boxed{\dot{S}_1 = \frac{\partial H}{\partial S_2}, \quad \dot{S}_2 = -\frac{\partial H}{\partial S_1}}$$

Por outro lado a derivada da função hamiltoniana, em ordem ao tempo, é:  $\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial S_1} \dot{S}_1 + \frac{\partial H}{\partial S_2} \dot{S}_2$

e, ao longo das curvas de evolução, as derivadas de  $S_1$  e  $S_2$  são:  $\dot{S}_1 = \frac{\partial H}{\partial S_2}$ ,  $\dot{S}_2 = -\frac{\partial H}{\partial S_1}$ , ou seja:

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial s_1} \frac{\partial H}{\partial s_2} - \frac{\partial H}{\partial s_2} \frac{\partial H}{\partial s_1} = 0 \quad (\text{ao longo das curvas de evolução. } \neq \text{ noutras curvas})$$

Conclui-se que, ao longo de cada curva de evolução, a função hamiltoniana tem valor constante. Ou seja, as curvas de nível de  $H$ :  $H(s_1, s_2) = \text{constante}$ , são as curvas de evolução do sistema.

**Exemplo.**  $H = x^2 - y^2$ . Espaço de fase  $\rightarrow (x, y)$

As equações de evolução do sistema são:

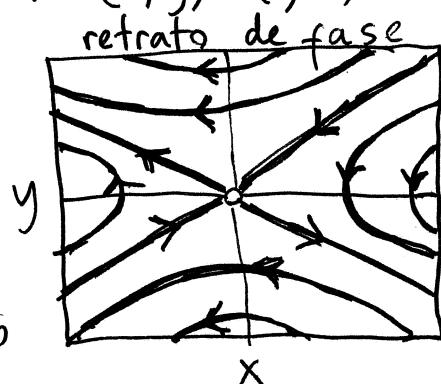
$$\begin{cases} \dot{x} = -2y \\ \dot{y} = -2x \end{cases} \quad \text{pontos de equilíbrio: } \begin{cases} -2y = 0 \\ -2x = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$  Um único ponto de equilíbrio:  $(x, y) = (0, 0)$

As curvas de evolução são as curvas de nível que podem ser traçadas no Maxima com:

ploteq( $x^2 - y^2$ )

O programa não mostra a direção das curvas, mas é fácil ver que é como na figura. A origem  $(0, 0)$  é ponto de equilíbrio instável.



## EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DE 2ª ORDEM

$$\ddot{x} = f(x, \dot{x}) \quad (\text{equação diferencial autônoma})$$

define-se  $\dot{x}$  como uma nova variável  $v$ . Então,  $\ddot{x}$  é igual a  $\dot{v}$  e obtém-se um sistema dinâmico autônomo:

$$\begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = f(x, v) \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{espaço de fase} \\ \downarrow \\ (x, v) \end{array}$$

velocidade de fase:  $\vec{u} = (v, f(x, v))$ .

# SISTEMAS MECÂNICOS COM UM GRAU DE LIBERDADE

grau de liberdade  $\rightarrow s(t) = \text{posição na trajetória}$ .

$$\text{equação de movimento: } a_t = \ddot{s} = \frac{F_t}{m}$$

é uma equação diferencial de segunda ordem. Se a força tangencial for função de  $s$  e  $\dot{s}$ , a equação é autônoma:

$$\ddot{s} = \frac{F_t(s, \dot{s})}{m}$$

sistema dinâmico:  $\begin{cases} \dot{s} = v \\ \dot{v} = \frac{F_t(s, v)}{m} \end{cases}$

## SISTEMAS CONSERVATIVOS

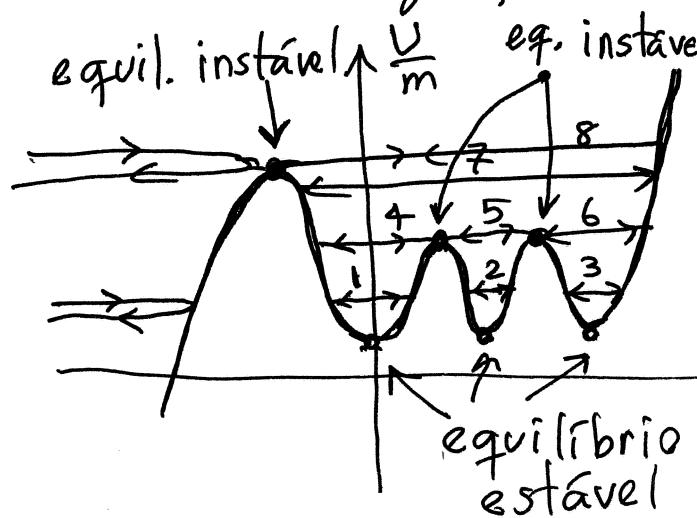
Se  $F_t$  depende apenas de  $s$ , define-se  $U(s)$  (energia potencial).

$$U = - \int F_t ds \Rightarrow \begin{cases} \dot{s} = v = \frac{d}{dv} \left( \frac{v^2}{2} \right) & \leftarrow \frac{\partial H}{\partial v} \\ (\dot{F}_t = - \frac{dU}{ds}) \quad \dot{v} = - \frac{1}{m} \frac{dU}{ds} & \leftarrow - \frac{\partial H}{\partial s} \end{cases}$$

A função hamiltoniana é:  $H = \frac{v^2}{2} + \frac{U}{m}$

energia  
mecânica  
por unidade  
de massa.

Como  $H$  permanece constante e  $v^2/2$  é positivo ou zero, é útil analisar o gráfico de  $\frac{U}{m}$ . Exemplo:



1, 2, 3 e 7  $\rightarrow$  ciclos  
4, 6 e 8  $\rightarrow$  órbitas homoclinicas  
5  $\rightarrow$  órbita heteroclinica composta por duas curvas de evolução

## MECÂNICA LAGRANGIANA

Usam-se equações de Lagrange, em vez de  $\sum \vec{F} = m\vec{a}$ ,  $\sum M = I\alpha$

vantagens:

- iguais em qualquer sistema de coordenadas.
- translação e rotação tratadas da mesma forma.
- válidas em referenciais não inerciais.
- as forças de ligação (reação normal, atrito estático, tensão numa corda) podem ser ignoradas.

**Coordenadas generalizadas.**  $n$  variáveis necessárias para determinar a configuração do sistema a cada instante (graus de liberdade):  $\{q_1, q_2, \dots, q_n\}$  ( $n$  graus de liberdade) podem ser distâncias, ângulos, etc.

**Velocidades generalizadas.** Derivadas das coordenadas generalizadas, em ordem ao tempo:

$$\{\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n\}$$

O espaço de fase do sistema tem  $2n$  dimensões. Cada estado possível é um ponto nesse espaço:  $(q_1, q_2, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n)$

Num sistema não-autônomo, o tempo  $t$  faz parte também do espaço de fase, que tem então  $2n+1$  dimensões.

**Energia cinética,  $E_c$ .** Expressão conhecida da energia cinética do sistema, que é função das coordenadas e velocidades generalizadas

$$E_c = \sum \frac{m_i}{2} v_i^2 + \sum \frac{I_i}{2} \omega_i^2 = f(q_1, q_2, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n)$$

$\uparrow$

dependem das coordenadas e velocidades generalizadas.

**Forças generalizadas.** Se há uma força  $\vec{F}_i$  aplicada na posição  $\vec{r}_i$ , define-se

$$Q_{ij} = \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \quad (j=1, 2, \dots, n)$$

As forças generalizadas  $\{Q_1, Q_2, \dots, Q_n\}$  são:

$$Q_j = \sum_{\text{forças } i} \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}$$

Observe-se que  $\vec{F}_i \cdot \partial \vec{r}_i = \partial W_i$  é o trabalho realizado pela força  $\vec{F}_i$  e, por isso, as forças de ligação não são incluídas, por não realizarem trabalho.

## EQUAÇÕES DE LAGRANGE

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial E_c}{\partial q_j} = Q_j$$

n equações:  
 $j=1, 2, \dots, n$

No apêndice B do livro mostra-se como essas equações são obtidas a partir das leis de Newton.

Há que ter cuidado com a diferença entre derivação parcial ( $\partial$ ) e total ( $d$ ). Por exemplo:

$$\frac{\partial}{\partial q_1} (q_1^2 \dot{q}_1^3) = 2q_1 \dot{q}_1^3 \quad \frac{\partial}{\partial q_1} (2q_1^2 \dot{q}_1^3) = 6q_1^2 \dot{q}_1^2$$

$$\frac{d}{dt} (q_1^2 \dot{q}_1^3) = (2q_1 \dot{q}_1) \dot{q}_1^3 + q_1^2 (3\dot{q}_1 \ddot{q}_1)$$

No maxima,  $\{\text{diff}(expressão, } q_1)\}$  calculam derivadas parciais

para calcular derivadas totais é preciso usar antes um comando que define a dependência entre as variáveis.

## FORÇAS CONSERVATIVAS

Se a força  $\vec{F}_i$  é conservativa, então:

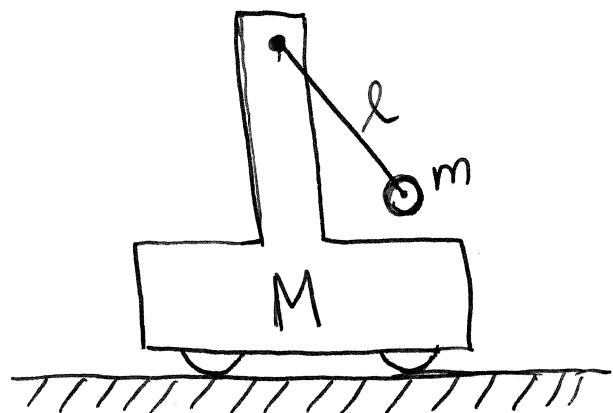
$$Q_{ij} = \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \frac{(\vec{F}_i \cdot \partial \vec{r}_i)}{\partial q_j} = -\frac{\partial U_i}{\partial q_j} \quad \begin{cases} U_i = \text{energia} \\ \text{potencial} \\ \text{associada} \\ \text{a } F_i \end{cases}$$

Como tal, as equações de Lagrange também podem ser escritas:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial E_c}{\partial q_j} + \frac{\partial U}{\partial q_j} = Q_j \quad (\text{não conservativas})$$

onde  $U$  é a energia potencial total.

**Exemplo.** Carrinho com um pêndulo simples, sobre uma superfície horizontal



- o atrito nos eixos das rodas pode ser desprezado.
- A resistência do ar é desprezável.
- O momento de inércia das rodas é desprezável
- massa da corda desprezável

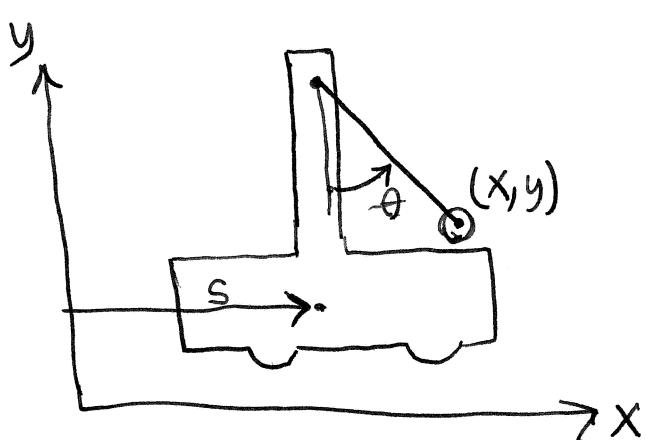
Este sistema tem dois graus de liberdade:  $(s, \theta)$

$s$  = posição do carrinho, na horizontal

$\theta$  = ângulo do pêndulo com a vertical

A posição  $(x, y)$  da esfera

$$\therefore x = s + l \sin \theta, \quad y = -l \cos \theta$$



Coordenadas generalizadas:  $\{s, \theta\}$

Velocidades generalizadas:  $\{\dot{s}, \dot{\theta}\}$

Energia cinética:

$$E_c = \frac{M}{2} \dot{s}^2 + \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$$

↑  
carrinho                    ↑  
                                  esfera

$$\Rightarrow E_c = \frac{M}{2} \dot{s}^2 + \frac{m}{2} ((\dot{s} + l \dot{\theta} \cos \theta)^2 + (l \dot{\theta} \sin \theta)^2)$$
$$= \frac{M}{2} \dot{s}^2 + \frac{m}{2} (\dot{s}^2 + l^2 \dot{\theta}^2) + m l \dot{s} \dot{\theta} \cos \theta$$

$$U = -mg l \cos \theta \quad \begin{array}{l} \text{(a energia potencial gravitacional} \\ \text{do carrinho permanece constante)} \end{array}$$

Equações de Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_c}{\partial \dot{s}} \right) - \frac{\partial E_c}{\partial s} + \frac{\partial U}{\partial s} = 0 \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_c}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial E_c}{\partial \theta} + \frac{\partial U}{\partial \theta} = 0$$

Resolução no Maxima  $\left( \begin{array}{l} sp \rightarrow \dot{s}, spp \rightarrow \ddot{s} \\ q \rightarrow \theta, qp \rightarrow \dot{\theta}, qpp \rightarrow \ddot{\theta} \end{array} \right)$

gradef(s, t, sp) # (define que  $\frac{ds}{dt} = \dot{s}$ )

gradef(sp, t, spp) # (define  $\frac{d\dot{s}}{dt} = \ddot{s}$ )

gradef(q, t, qp) # }  $\left\{ \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}, \frac{d\dot{\theta}}{dt} = \ddot{\theta} \right.$   
gradef(qp, t, qpp) # }

$E_c: M * sp^2 / 2 + m * (sp^2 + l^2 * qp^2) / 2 + m * l * sp * qp * \cos(q);$

$U: -m * g * l * \cos(q);$

e1: diff(diff(Ec, sp), t) - diff(Ec, s) + diff(U, s) = 0;

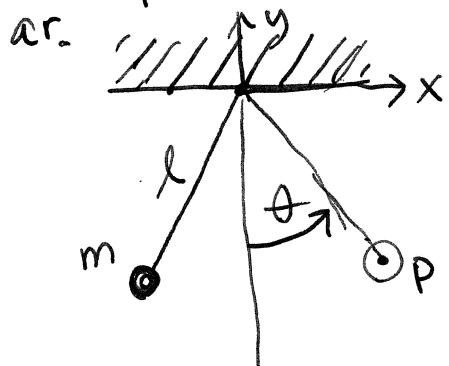
e2: diff(diff(Ec, qp), t) - diff(Ec, q) + diff(U, q) = 0;

solve([e1, e2], [spp, qpp]);

Aula 18. 2018-04-17

## FORÇAS NÃO CONSERVATIVAS

Exemplo: pêndulo simples, considerando a resistência do ar.



Posição do ponto P:

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} = l(\sin\theta\hat{i} - \cos\theta\hat{j})$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = l\dot{\theta}(\cos\theta\hat{i} + \sin\theta\hat{j})$$

$$E_c = \frac{m}{2}(v_x^2 + v_y^2) = \frac{ml^2\dot{\theta}^2}{2} \quad U = -mgl\cos\theta$$

resistência do ar:

$$\vec{F}_r = -(C_1 + C_2 l |\dot{\theta}|) \vec{v} = -(C_1 + C_2 l |\dot{\theta}|) \underbrace{x l \dot{\theta} (\cos\theta\hat{i} + \sin\theta\hat{j})}_{\text{constantes}}$$

força generalizada

$$Q_\theta = \vec{F}_r \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = -(C_1 + C_2 l |\dot{\theta}|) l \dot{\theta} (\cos\theta\hat{i} + \sin\theta\hat{j}) \cdot (l \cos\theta\hat{i} + l \sin\theta\hat{j})$$

$$Q_\theta = -l^2 \dot{\theta} (C_1 + C_2 l |\dot{\theta}|)$$

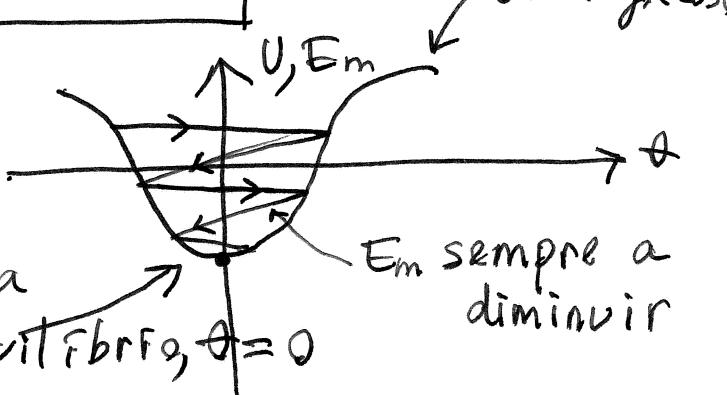
Equação de Lagrange:  $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial E_c}{\partial \theta} + \frac{\partial U}{\partial \theta} = Q_\theta$

$$\Rightarrow ml^2\ddot{\theta} - 0 + mgl\sin\theta = -l^2\dot{\theta} (C_1 + C_2 l |\dot{\theta}|)$$

equação de movimento:

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\sin\theta - \left(\frac{\dot{\theta}}{m}\right)(C_1 + C_2 l |\dot{\theta}|)$$

Gráfico de energias:



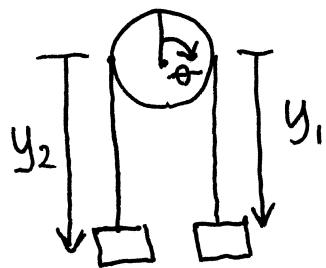
e pêndulo acaba  
na posição de equilíbrio,  $\theta = 0$

Em sempre a  
diminuir

# Máquina de Atwood



Variáveis:  $\theta, y_1, y_2$



condições:  $\begin{cases} y_1 - R\theta = c_1 \\ y_2 + R\theta = c_2 \end{cases}$  constantes

$$\Rightarrow \dot{y}_1 = R\dot{\theta} = -\dot{y}_2 \quad \ddot{y}_1 = R\ddot{\theta} = -\ddot{y}_2$$

$$E_c = \frac{m_1}{2} \dot{y}_1^2 + \frac{m_2}{2} \dot{y}_2^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{m_3}{2} R^2 \right) \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} \left( m_1 + m_2 + \frac{m_3}{2} \right) \dot{y}_1^2$$

$$U = -m_1 g y_1 - m_2 g y_2 = -m_1 g y_1 - m_2 g (c_1 + c_2 - y_1)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_c}{\partial \dot{y}_1} \right) - \frac{\partial E_c}{\partial y_1} + \frac{\partial U}{\partial y_1} = \frac{d}{dt} \left( m_1 + m_2 + \frac{m_3}{2} \right) \dot{y}_1 - m_1 g + m_2 g = 0$$

$$\boxed{\ddot{y}_1 = \left( \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + \frac{m_3}{2}} \right) g}$$

aceleração constante

## MULTIPLICADORES DE LAGRANGE

Para encontrar as forças de ligação (tensões na corda, no caso da máquina de Atwood), escrevem-se as condições de ligação na forma  $f(q_1, q_2, \dots, q_n) = \text{constante}$ . Não se usam as condições para eliminar variáveis e introduz-se, para cada condição, uma força generalizada:  $Q_j = \lambda \frac{\partial f}{\partial q_j}$  ( $\lambda$  = multiplicador de Lagrange) é a força a ser calculada.

No caso da máquina de Atwood,

$$f_1 = y_1 - R\theta \quad , \quad f_2 = y_2 + R\theta$$

$$E_c = \frac{m_1}{2} \dot{y}_1^2 + \frac{m_2}{2} \dot{y}_2^2 + \frac{m_3}{4} R^2 \dot{\theta}^2 \quad \begin{matrix} 3 \text{ variáveis} \\ \text{e 3 velocidades} \end{matrix}$$

$$U = -m_1 g y_1 - m_2 g y_2$$

Há 3 equações de Lagrange e 2 multiplicadores:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_c}{\partial \dot{y}_1} \right) - \frac{\partial E_c}{\partial y_1} + \frac{\partial U}{\partial y_1} = \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y_1} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial y_1} \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_c}{\partial \dot{y}_2} \right) - \frac{\partial E_c}{\partial y_2} + \frac{\partial U}{\partial y_2} = \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y_2} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial y_2} \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_c}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial E_c}{\partial \theta} + \frac{\partial U}{\partial \theta} = \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial \theta} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial \theta} \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} m_1 \ddot{y}_1 = m_1 g + \lambda_1 \\ m_2 \ddot{y}_2 = m_2 g + \lambda_2 \\ \frac{m_3 R^2}{2} \ddot{\theta} = -R\lambda_1 + R\lambda_2 \end{array} \right. \quad \begin{matrix} (3 \text{ acelerações} + 2 \text{ forças}) \end{matrix}$$

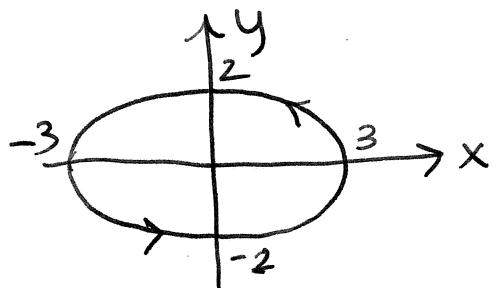
O sistema resolve-se junto com as duas condições:

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{y}_1 = R\ddot{\theta} \\ \ddot{y}_2 = -R\ddot{\theta} \end{array} \right.$$

$$\ddot{y}_1 = \left( \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + \frac{m_3}{2}} \right) g = -\ddot{y}_2 \quad \ddot{\theta} = \left( \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + \frac{m_3}{2}} \right) \frac{g}{R}$$

$$\lambda_1 = -\left( \frac{m_3 + 4m_2}{2m_1 + 2m_2 + m_3} \right) m_1 g \quad \lambda_2 = -\left( \frac{m_3 + 4m_1}{2m_1 + 2m_2 + m_3} \right) m_2 g$$

Exemplo. Uma partícula move-se livremente dentro de uma calha elíptica, com equação  $2x^2 + 3y^2 = 6$ , no plano horizontal  $xy$ . Determine a força horizontal exercida pela calha, na partícula.



$$E_c = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$$

Uma condição:

$$f(x, y) = 2x^2 + 3y^2 = \text{constante}$$

↓  
um multiplicador de Lagrange,  $\lambda$   
e uma força generalizada:

$$Q_x = \lambda \frac{\partial f}{\partial x} = 4x\lambda \quad Q_y = \lambda \frac{\partial f}{\partial y} = 6y\lambda$$

Equações de Lagrange:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial E_c}{\partial x} = Q_x \rightarrow m\ddot{x} = 4x\lambda$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{y}}\right) - \frac{\partial E_c}{\partial y} = Q_y \rightarrow m\ddot{y} = 6y\lambda$$

$$4x\dot{x} + 6y\dot{y} = 0 \Rightarrow 4\dot{x}^2 + 4x\ddot{x} + 6\dot{y}^2 + 6y\ddot{y} = 0$$

Resolvendo as 3 equações obtém-se

$$\lambda = -\frac{m(3\dot{y}^2 + 2\dot{x}^2)}{18y^2 + 8x^2}$$

E a força da calha é:

$$\vec{F} = Q_x \hat{i} + Q_y \hat{j} = 4x\lambda \hat{i} + 6y\lambda \hat{j}$$

$$\vec{F} = -\frac{m(3\dot{y}^2 + 2\dot{x}^2)}{18y^2 + 8x^2} (4x\hat{i} + 6y\hat{j})$$

Aula 19. 2018-04-19

## SISTEMAS DINÂMICOS LINEARES

Cada componente da velocidade de fase é uma combinação linear das variáveis de estado. No caso de segunda ordem:

$$\dot{x} = a_{11}x + a_{12}y$$

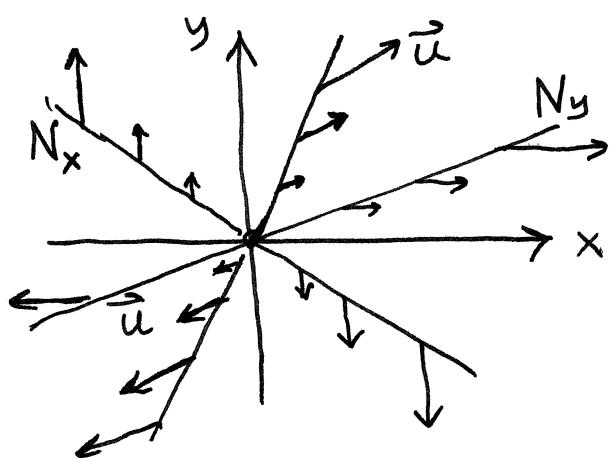
$$\dot{y} = a_{21}x + a_{22}y$$

forma matricial:  $\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

ou ainda:  $\frac{d\vec{r}}{dt} = A\vec{r}$ , onde  $\vec{r}$  é a posição no espaço de fase,  $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j}$ , e  $A$  é um operador linear em  $\mathbb{R}^2$

Em cada ponto do espaço de fase,  $\vec{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ , a velocidade de fase é  $A\vec{r}$ . Como  $A(k\vec{r}) = k(A\vec{r})$  ( $k=\text{constante}$ )

então: todas as retas que passam pela origem são **isóclinas**: a velocidade de fase tem a mesma direção em todos os pontos da reta, mas sentidos opostos nos dois lados da origem.



Em particular, há uma reta perpendicular ao vetor  $(a_{11}, a_{12})$ , onde  $a_{11}x + a_{12}y = 0$ , ou seja,  $\dot{x} = 0$  e  $\vec{u}$  é paralela a  $\hat{j}$ . Essa reta chama-se **nulclina** de  $x$  ( $N_x$  na figura). A nulclina de  $y$ , onde  $\dot{y} = 0$  e  $\vec{u}$  é paralela a  $\hat{i}$ , é a reta perpendicular ao vetor  $(a_{21}, a_{22})$ .

**Pontos de equilíbrio.**  $\dot{x} = 0, \dot{y} = 0$ . Ou seja, onde as duas nulclinas se cruzam. Se as duas nulclinas são diferentes, cruzam-se na origem.

Se as duas nulclinas  $N_x$  e  $N_y$  coincidem, então:

$$(a_{21}, a_{22}) = k(a_{11}, a_{12}) \Rightarrow k = \frac{a_{21}}{a_{11}} = \frac{a_{22}}{a_{12}}$$

$$\Rightarrow a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0 \quad \boxed{\det(A) = 0} \quad \text{determinante da matriz do sistema}$$

Nesses casos,  $y = kx + c$  ( $c = y_0 - kx_0$ ) e há realmente uma única equação diferencial  $\dot{x} = f(x)$  que é a mesma para  $y$ ; o sistema é realmente de primeira ordem.

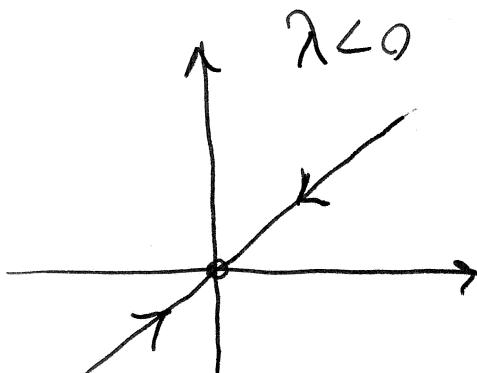
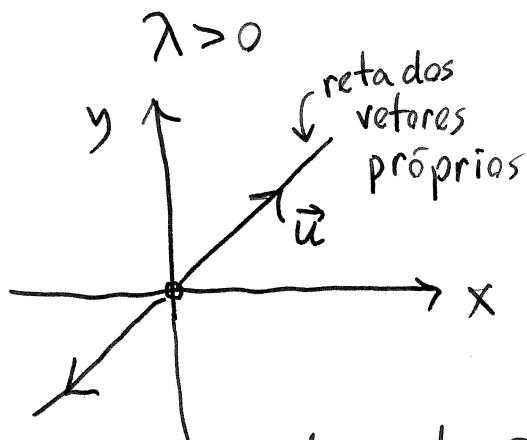
$\Rightarrow$  Se  $\det(A) \neq 0$  (sistemas realmente de 2ª ordem), existe um único ponto de equilíbrio na origem

Em todos os pontos do espaço de fase, a velocidade de fase tem valores diferentes.

## VETORES E VALORES PRÓPRIOS

Se existir uma isóclina onde a direção de  $\vec{u}$  é a própria isóclina, então para qualquer  $\vec{r}$  nessa isóclina.

$A\vec{r} = \lambda \vec{r}$   $\lambda = \text{número real} = \text{valor próprio}$  diz-se que  $\vec{r}$  é valor próprio da matriz  $A$ , correspondente ao valor próprio  $\lambda$ .  $\lambda$  não pode ser zero, porque estamos a admitir  $\det A \neq 0$  e, portanto,  $A\vec{r} = 0$  unicamente na origem. Há então duas possibilidades:



duas curvas de evolução retas que se afastam da origem ( $\lambda > 0$ ) ou se aproximam dele ( $\lambda < 0$ )

Determinação dos valores próprios

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} (a_{11}-\lambda)x + a_{12}y = 0 \\ a_{21}x + (a_{22}-\lambda)y = 0 \end{cases}$$

onde  $x$  e/ou  $y$  são diferentes de zero. Isso implica:

$$(a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda) - a_{12}a_{21} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\lambda^2 - \text{tr}(A)\lambda + \det(A) = 0} \quad \begin{aligned} \text{tr}(A) &= a_{11} + a_{22} \\ &= \text{trago de } A \end{aligned}$$

as raízes dessa equação quadrática são  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ :

$$(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = \text{tr}(A) \\ \lambda_1 \lambda_2 = \det(A) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{\text{tr}(A)}{2} \pm \Delta \quad (\Delta > 0)$$

$$\lambda_1 \lambda_2 = \frac{\text{tr}^2(A)}{4} - \Delta = \det(A) \rightarrow \Delta = \sqrt{\frac{\text{tr}^2(A)}{4} - \det(A)}$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{\text{tr}(A)}{2} \pm \sqrt{\frac{\text{tr}^2(A)}{4} - \det(A)}$$

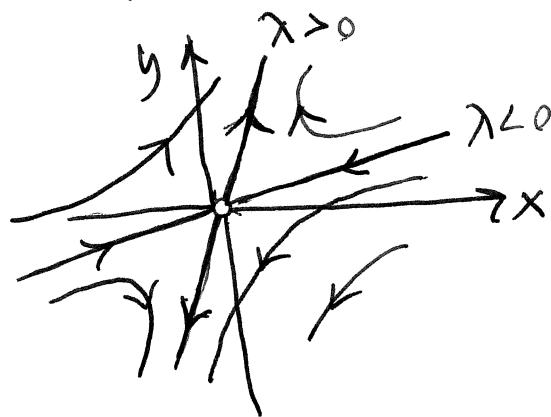
Há vários casos, dependentes dos valores do trago e do determinante da matriz do sistema:

i)  $\det(A) < 0 \Rightarrow \frac{\text{tr}^2(A)}{4} - \det(A) > \frac{\text{tr}^2(A)}{4}$

$$\Rightarrow \Delta > \left| \frac{\text{tr}(A)}{2} \right| \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{\text{tr}(A)}{2} \pm \Delta = \text{dois números reais, com sinais opostos}$$

Na direção dos vetores próprios do  $\lambda$  positivo, há duas retas de evolução que se afastam da origem, e na direção dos vetores do  $\lambda$  negativo há duas retas de evolução que se aproximam da origem.

o ponto de equilíbrio (origem) chama-se **PONTO DE SELA**  
retardo de fase:



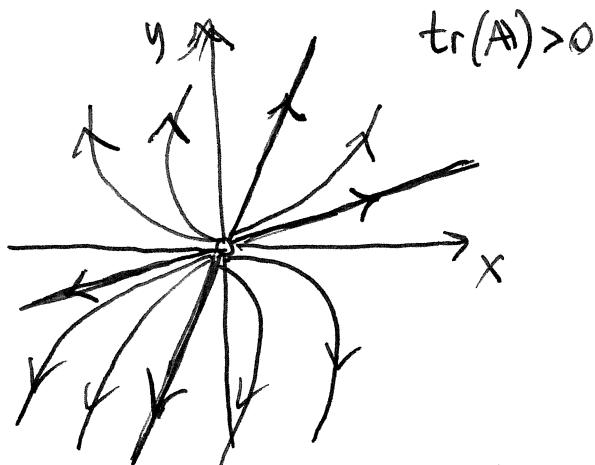
$$(i) \quad 0 < \det(A) < \frac{\text{tr}^2(A)}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{\text{tr}^2(A)}{4} - \det(A) > 0, \text{ mas menor que } \frac{\text{tr}^2(A)}{4}$$

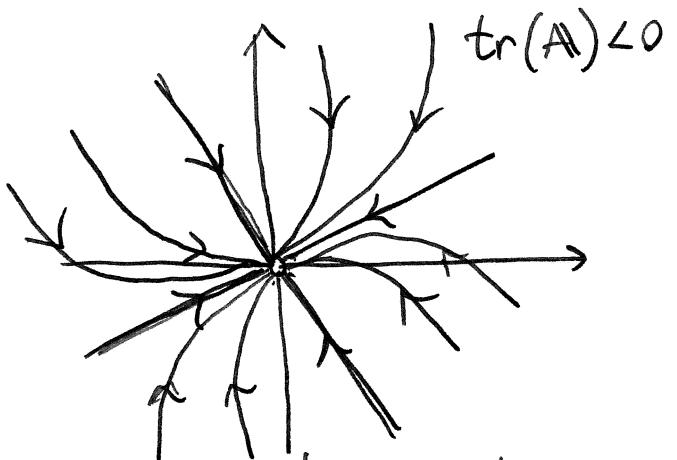
$$\Rightarrow \Delta < \left| \frac{\text{tr}(A)}{2} \right| \quad \lambda_{1,2} = \frac{\text{tr}(A)}{2} \pm \Delta$$

são dois números reais, diferentes, com o mesmo sinal  
de  $\text{tr}(A)$

O ponto de equilíbrio chama-se **NÓ**



Nó repulsivo. Todas  
as curvas de evolução  
afastam-se da origem.  
Sistema instável.

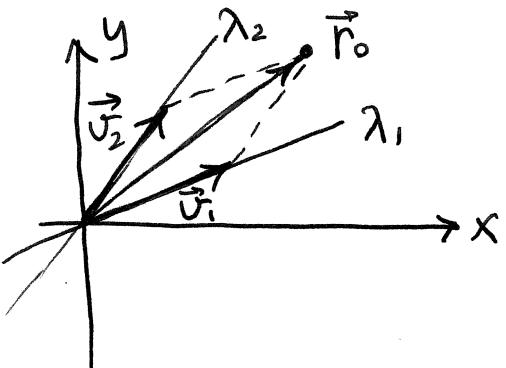


Nó atrativo. Todas as  
curvas de evolução aproxi-  
mam-se da origem.  
Sistema estável.

## CURVAS DE EVOLUÇÃO

Soluções particulares do sistema dinâmico, para diferentes estados iniciais  $\vec{r}_0 = (x_0, y_0)$ . Nos casos i) e ii), em que  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ , existem duas retas de vetores próprios diferentes e pode escrever-se:

$$\vec{r}_0 = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 \leftarrow \begin{array}{l} \text{vetor próprio} \\ \uparrow \quad \text{de } \lambda_2 \\ \text{vetor próprio de } \lambda_1 \end{array}$$



Cada curva de evolução é dada pela expressão

$$\vec{r}(t) = e^{\lambda_1 t} \vec{v}_1 + e^{\lambda_2 t} \vec{v}_2$$

Demonstração:  $\vec{r}(0) = e^0 \vec{v}_1 + e^0 \vec{v}_2 = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 = \vec{r}_0$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \lambda_1 e^{\lambda_1 t} \vec{v}_1 + \lambda_2 e^{\lambda_2 t} \vec{v}_2 = e^{\lambda_1 t} (A \vec{v}_1) + e^{\lambda_2 t} (A \vec{v}_2) = A \vec{r}$$

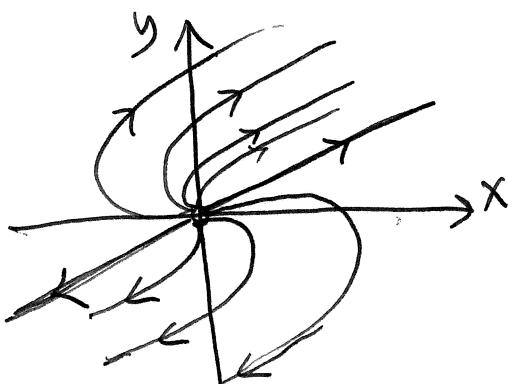
(verifica as equações do sistema)

iii) NÓS IMPRÓPRIOS. Quando  $\det(A) = \frac{\text{tr}^2(A)}{4}$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{\text{tr}(A)}{2} \text{ um único valor próprio.}$$

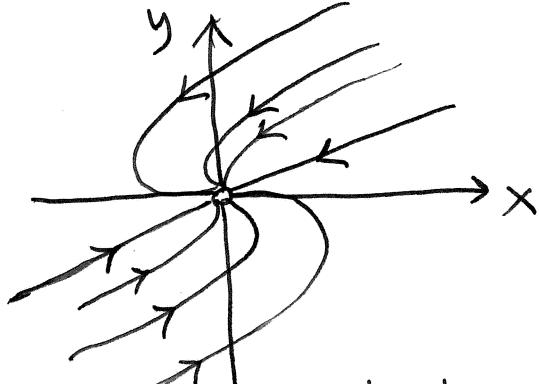
Dois únicas curvas de evolução retas, que se aproximam da origem (ou afastam da origem).

$$\text{tr}(A) > 0$$



nó impróprio repulsivo

$$\text{tr}(A) < 0$$



nó impróprio atrativo

$$iv) \det(A) > \frac{\text{tr}^2(A)}{4}$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = \frac{\text{tr} A}{2} + i\omega \quad \lambda_2 = \frac{\text{tr} A}{2} - i\omega = \lambda_1^*$$

complexo conjugado

existem vetores próprios, complexos,  $\vec{v}_1$  e  $\vec{v}_2$ , associados a  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ . As funções complexas:

$$\vec{z}_1 = e^{\lambda_1 t} \vec{v}_1, \quad \vec{z}_2 = e^{\lambda_2 t} \vec{v}_2 = \vec{z}_1^*$$

são soluções, complexas, do sistema dinâmico. Como o sistema é linear, a soma de duas soluções também é solução:

$$\vec{z}_1 + \vec{z}_2 = \vec{z}_1 + \vec{z}_1^* = 2 \text{Real}(\vec{z}_1) \text{ é solução real do sistema.}$$

$$\begin{aligned} \vec{r}(t) &= 2 \text{Real}(\vec{z}_1) = 2 \text{Real}(e^{\lambda_1 t}) \text{Real}(\vec{v}_1) \\ &= 2 \text{Real}(\vec{v}_1) e^{(\alpha + i\omega)t} \quad (\alpha = \frac{\text{Tr}(A)}{2}) \end{aligned}$$

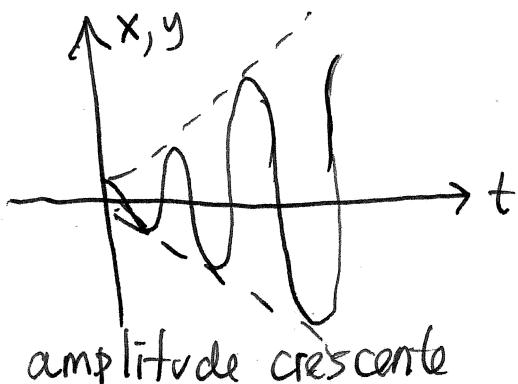
$$\cdot \vec{r}(t) = \vec{r}_0 \text{Re}(e^{\alpha t} (\cos(\omega t) + i \sin(\omega t)))$$

$$r(t) = \vec{r}_0 e^{\alpha t} \cos(\omega t)$$

função alternada, com frequência angular  $\omega$  e amplitude variável:

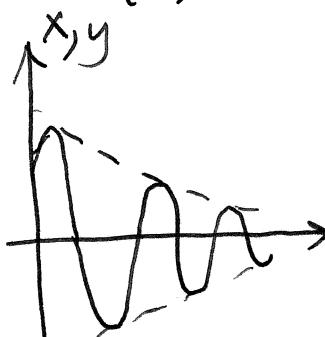
Há 3 possibilidades, segundo o valor de  $\alpha = \frac{\text{Tr}(A)}{2}$

$$\text{tr}(A) > 0$$



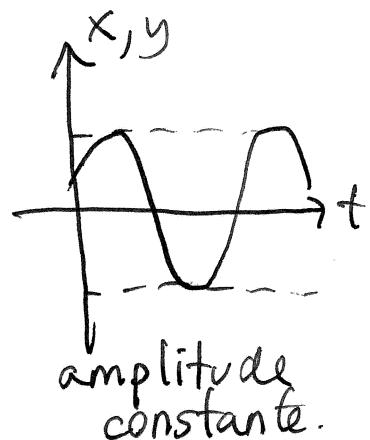
amplitude crescente

$$\text{tr}(A) < 0$$



amplitude decrescente

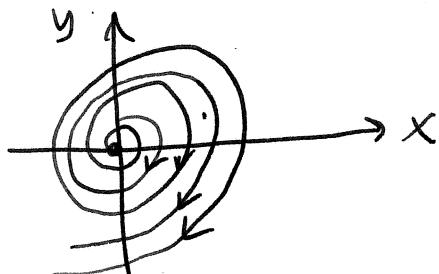
$$\text{tr}(A) = 0$$



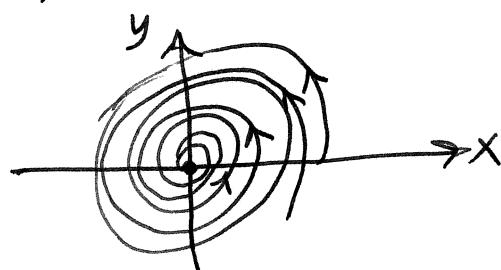
amplitude constante.

Os respetivos retratos de fase são os seguintes:

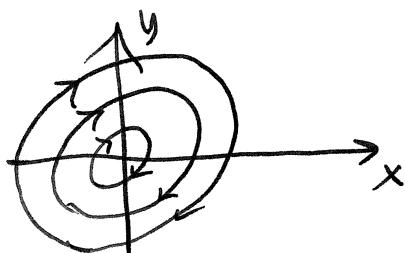
- a)  $\text{tr}(A) > 0$ . FOCO REPULSIVO (instável)



- b)  $\text{tr}(A) < 0$ . FOCO ATRATIVO (estável)



- c)  $\text{tr}(A) = 0$ . CENTRO (estável)



todas as curvas de evolução são ciclos.

Nos 3 casos, a frequência angular de oscilação,  $\omega$ , é a parte imaginária dos valores próprios ( $\sqrt{\det A - \frac{\text{tr}^2 A}{4}}$ )

O período de oscilação é:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

Exemplo  $\dot{x} = -3x + 5y, \dot{y} = -2x - 5y$

$$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} -3 & 5 \\ -2 & -5 \end{bmatrix} \quad \lambda^2 + 8\lambda + 25 = 0$$

$$\lambda = -4 \pm \sqrt{16 - 25} = -4 \pm i3 \quad (\text{foco atrativo})$$

Ou, no Maxima:

A: matrix  $([-3, 5], [-2, -5])$   
eigenvectors (A);

$$\text{período} = \frac{2\pi}{3}$$

O resultado é:

$$\left[ \left[ (-3\%i) - 4, \underbrace{3\%(-4)}_{\lambda_2}, [1, 1] \right], \left[ \left[ 1, \frac{-3\%i + 1}{5} \right], \left[ 1, \frac{3\%i - 1}{5} \right] \right] \right]$$

$\lambda_1$        $\lambda_2$

cada  $\lambda$   
só aparece  
1 vez

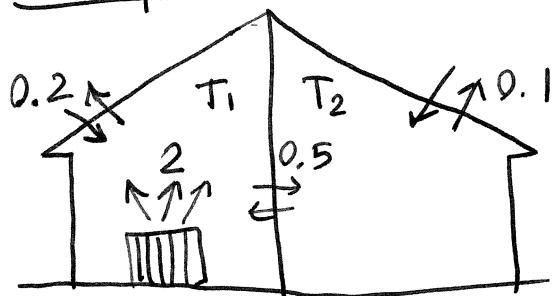
vetor próprio  
de  $\lambda_1$

vetor próprio  
de  $\lambda_2$

plotdf([-3\*x+5\*y, -2\*x-5\*y], [x, y]);

permite construir o retrato de fase.

Exemplo 9.1.



as temperaturas  $T_1$  e  $T_2$  em duas divisões de uma casa variam de acordo com as equações:

$$\dot{T}_1 = 2 - 0.2(T_1 - 8) - 0.5(T_1 - T_2)$$

$$\dot{T}_2 = -0.1(T_2 - 8) - 0.5(T_2 - T_1)$$

analice as variações das temperaturas em função do tempo de forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \dot{T}_1 \\ \dot{T}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.7 & 0.5 \\ 0.5 & -0.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3.6 \\ 0.8 \end{bmatrix}$$

pontos de equilíbrio:

$$A \begin{bmatrix} -0.7 & 0.5 \\ 0.5 & -0.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3.6 \\ 0.8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} \begin{bmatrix} -3.6 \\ 0.8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix}_{\text{equil.}}$$

$A$ : matriz  $([-0.7, 0.5], [0.5, -0.6])$ ;

$\text{invert}(A) \cdot [-3.6, 0.8]; \rightarrow T_1 = 15.06, T_2 = 13.88$

Com a mudança de variáveis  $x = T_1 - 15.06, y = T_2 - 13.88$

o sistema é linear:  $\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

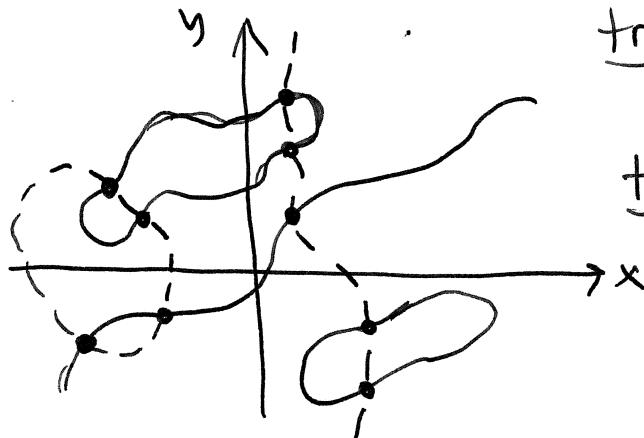
e pode ver-se que os valores próprios são 2 nūm. negativos.

$\rightarrow$  o ponto de equilíbrio é não atrativo.  $(T_1, T_2)$  aproximam-se de  $(15.06, 13.88)$ , sem oscilar.

## SISTEMAS DINÂMICOS NÃO LINEARES

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y) \\ \dot{y} = g(x, y) \end{cases} \quad f \text{ e } g \text{ são funções contínuas, não lineares}$$

**Pontos de equilíbrio.** As nulclinas são curvas.



traço contínuo: nulclinas de  $x$  ( $f(x, y) = 0$ )

tracejado: nulclinas de  $y$  ( $g(x, y) = 0$ )

neste caso há 9 pontos de equilíbrio, onde as duas nulclinas cruzam-se

Séries de Taylor de  $f$  e  $g$ , na vizinhança dum ponto  $(x_0, y_0)$  do espaço de fase

$$f = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)(x - x_0)^2 + \dots$$

$\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{\substack{\text{números} \\ (\text{derivadas no ponto})}} \qquad\qquad\qquad$

equação do plano tangente no ponto  $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$

$$g = g(x_0, y_0) + \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) + \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x_0, y_0)(x - x_0)^2 + \dots$$

A proximação linear, na vizinhança do ponto de equilíbrio  $(x_i, y_i)$ : ignoram-se os termos  $(x - x_i)^2$ ,  $(x - x_i)(y - y_i)$ ,  $(y - y_i)^2$  etc.

O primeiro termo das séries,  $f(x_i, y_i)$  e  $g(x_i, y_i)$  é zero, porque  $(x_i, y_i)$  é ponto de equilíbrio.

fica então:

$$\begin{cases} f(x,y) \approx \frac{\partial f}{\partial x}(x_i, y_i)(x - x_i) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_i, y_i)(y - y_i) \\ g(x,y) \approx \frac{\partial g}{\partial x}(x_i, y_i)(x - x_i) + \frac{\partial g}{\partial y}(x_i, y_i)(y - y_i) \end{cases}$$

A mudança de variáveis,  $X = x - x_i$ ,  $Y = y - y_i$ , não altera as derivadas, mas desloca a origem do espaço de fase para o ponto de equilíbrio  $(x_i, y_i)$ :

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{X} \approx \frac{\partial f}{\partial x}(x_i, y_i) X + \frac{\partial f}{\partial y}(x_i, y_i) Y \\ \dot{Y} \approx \frac{\partial g}{\partial x}(x_i, y_i) X + \frac{\partial g}{\partial y}(x_i, y_i) Y \end{cases}$$

que é um sistema linear com matriz:

$$A_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{bmatrix}_{(x_i, y_i)} = J(x_i, y_i)$$

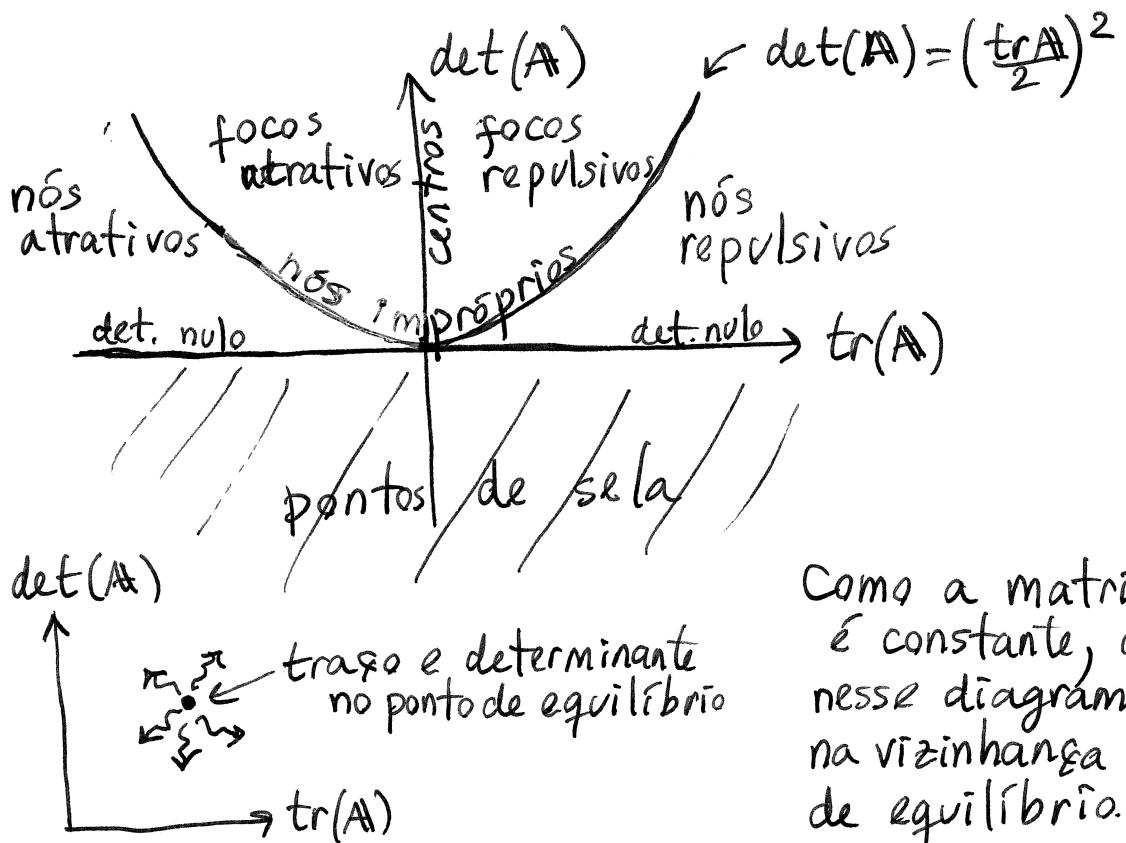
$$J(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{bmatrix} = \text{matriz jacobiana de } f \text{ e } g. \\ (\text{constante no caso de sist. lineares})$$

Um sistema não linear com  $n$  pontos de equilíbrio pode ser aproximado, na vizinhança desses pontos, por  $n$  sistemas lineares.

Os valores próprios das matrizes  $A_1, A_2, \dots, A_n$  permitem determinar o tipo de cada ponto de equilíbrio.

No entanto, há que ter em conta que os termos não lineares podem alterar o tipo em alguns casos.

Nos sistemas lineares, em função do traço e determinante de  $A$  temos os seguintes tipos de equilíbrio:



Como a matriz  $J$  não é constante, o ponto nesse diagrama desloca-se, na vizinhança do ponto de equilíbrio.

No caso dos pontos de sela, nós e focos, esse deslocamento mantém o ponto na mesma região; ou seja, não há dúvida que o ponto é ponto de sela, nó ou foco.

No caso dos centros e nós impróprios, o deslocamento pode fazer com que o ponto passe a ser foco ou nó (no caso dos nós impróprios).

Se  $\det(A) = 0$ , a aproximação linear não é suficiente para caracterizar o ponto de equilíbrio.

**Exemplo** -  $\begin{cases} \dot{x} = 6y(y^2 + x^2 - 1)^2 - 3x^2y^2 \\ \dot{y} = 2xy^3 - 6x(y^2 + x^2 - 1)^2 \end{cases}$

No Maxima:

$$f: 6 * y * (y^2 + x^2 - 1)^2 - 3 * x^2 * y^2 \$$$

$$g: 2 * x * y^3 - 6 * x * (y^2 + x^2 - 1)^2 \$$$

pontos de equilíbrio:

P: solve  $([f, g])$ ;

dá uma lista de 13 soluções mas apenas são válidas as soluções reais (7 primeiras e duas últimas).

P:  $\text{append}(\text{rest}(P, -6), \text{rest}(P, 11))$ ;  
 matriz jacobiana  
 J:  $\text{jacobian}([f, g], [x, y])$ ;  
 matrizes dos 9 sistemas lineares (aproximações nos 9 pontos de equilíbrio)

A:  $\text{makelist}(\text{subst}(q, J), q, P)$ ;

traços e determinantes das 9 matrizes  $A_1, A_2, \dots, A_9$ :

$\text{map}(\text{mat\_trace}, A)$ ;

$\text{map}(\text{determinant}, A)$ ;

Observa-se que há dois pontos de sela, 3 centros e 4 pontos onde  $\det(A) = 0$ . Os três centros são realmente centros, porque em qualquer outro ponto  $\text{tr}(\lambda J) = 0$  (trata-se dum sistema conservativo).

O retrato de fase obtém-se com os seguintes passos:

$\text{plotdf}([f, g], [x, y], [x, -2, 2], [y, -2, 2], [\text{vectors}, ""])$ ;

① No menu de configuração, nsteps  $\rightarrow 70$ , trajectory-at  $\rightarrow 0.005 \rightarrow 1.005$  ENTER

nsteps  $\rightarrow 110$ , trajectory-at  $\rightarrow 0.005 \rightarrow 1.005$  ENTER mostra, a vermelho, 4 curvas de evolução que formam uma órbita heteroclinica entre os 4 pontos de equilíbrio onde  $\det(A) = 0$ .

② nsteps  $\rightarrow 300$ , color  $\rightarrow$  black, trajectory-at  $\rightarrow 0 \rightarrow 0.8$  ENTER mostra um ciclo que envolve os 3 centros.  
 trajectory-at  $\rightarrow 0 \rightarrow 0.5 \rightarrow$  ciclo à volta do centro na origem

$\left\{ \begin{array}{l} \text{trajectory-at} \rightarrow 0.9 \\ \text{trajectory-at} \rightarrow -0.9 \end{array} \right| \begin{array}{l} \text{ciclos à volta dos outros} \\ \text{dois centros.} \end{array} \right.$

③ color → green.

{ trajectory\_at → 0.5773 0.6502

trajectory\_at → -0.5773 0.6502

mostra, a verde, duas órbitas homoclínicas, nos dois pontos de sela

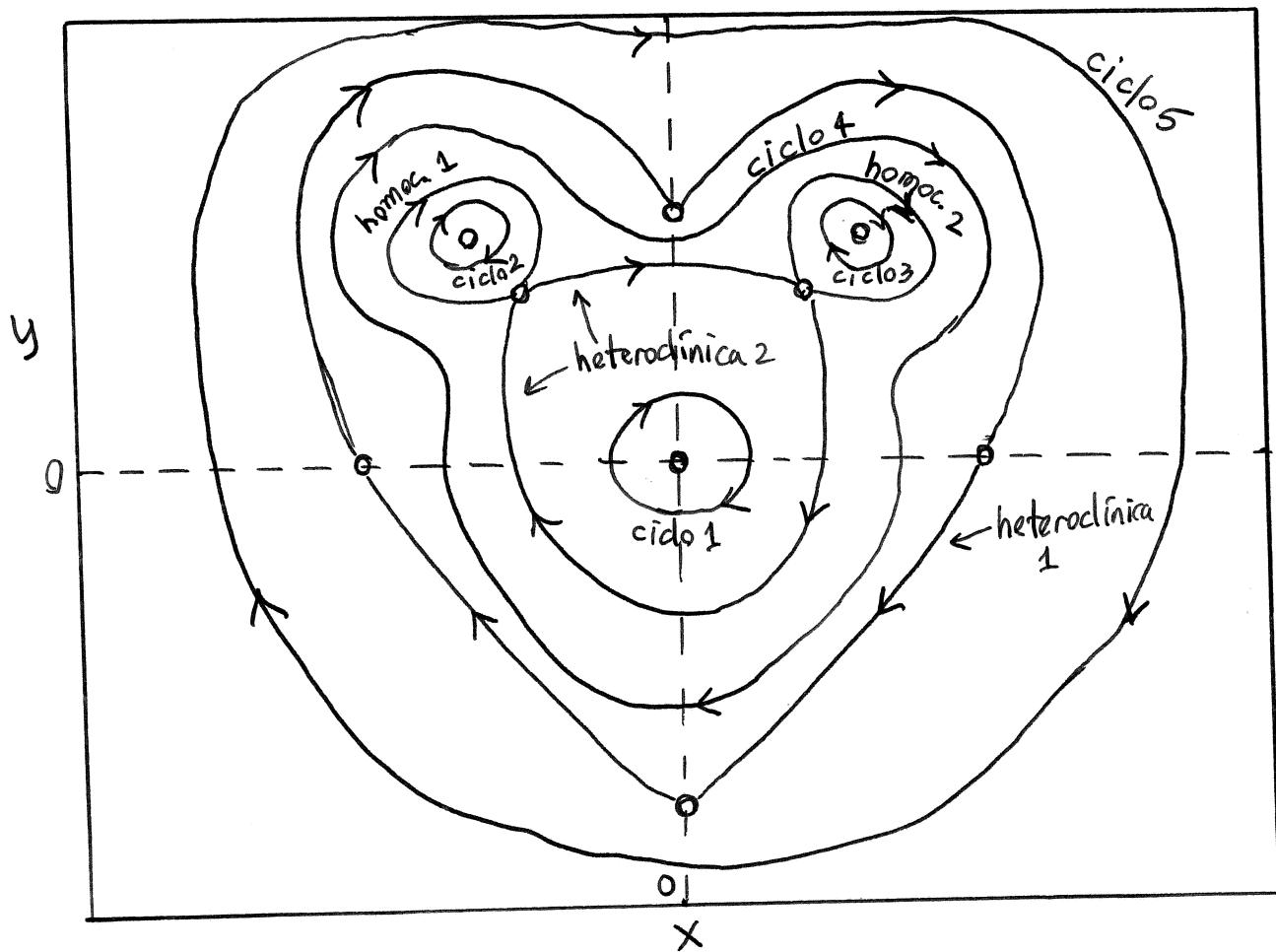
④ color → red. trajectory\_at → 0.5179 0.625

mostra outra órbita heteroclínica que liga os dois pontos de sela.

⑤ color → blue. trajectory\_at → 0 1.4

mostra um ciclo fora das órbitas heteroclínicas.

Resumindo, este sistema tem duas órbitas homoclínicas, duas órbitas heteroclínicas (de ordem 2 e quatro), e cinco tipos de ciclos diferentes.



## SISTEMAS DINÂMICOS COM 3 OU MAIS VARIÁVEIS DE ESTADO

O espaço de fase já não pode ser representado com o programa plotdf, mas as curvas de evolução podem ser obtidas com o programa rk (Runge-Kutta) e projetadas num plano com duas das variáveis.

**Exemplo 1.** Equações diferenciais de segunda ordem, não autônomas. Por exemplo:

$$t^2 \ddot{x} + t \dot{x} + \left(t^2 - \frac{1}{9}\right)x = 0 \quad (\text{equação de Bessel de ordem } \frac{1}{3})$$

Para escrevê-la como sistema dinâmico, resolve-se para

$$\ddot{x}: \quad \ddot{x} = \left(\frac{1}{9t^2} - 1\right)x - \frac{\dot{x}}{t}$$

Como tal há 3 variáveis de estado:  $(x, \dot{x}, t)$ .

Define-se  $y = \dot{x}$  e as 3 equações de evolução são então:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = \left(\frac{1}{9t^2} - 1\right)x - \frac{y}{t} \\ \dot{t} = 1 \end{cases} \quad (\text{derivada de } t \text{ em ordem a } t)$$

Para encontrar a curva de evolução (solução particular) com:  $t_0 = 0$ ,  $x_0 = 0$ ,  $y_0 = 1$ , usa-se rk(), que tem que ter 4 listas como parâmetros de entrada:

$\text{rk}([\text{veloc. de fase}], [\text{variav. de estado}], [\text{estado inicial}])$

Neste caso, como  $t$  aparecerá no [intervalo de integração], pode ser omitida nas três primeiras listas:

res:  $\text{rk}([y, (1/(9*t^2) - 1)*x - y/t], [x, y], [0, 1],$

$$[t, 0, 30, 0.01])\$$$

$\nwarrow t_0 \quad \nearrow t_{\text{final}} \quad \searrow \Delta t$

É importante guardar o resultado (neste caso em res) e não mostrá-lo, porque será uma lista muito comprida, com a seguinte forma:

$$[[t_0, x_0, y_0], [t_0 + \Delta t, x_1, y_1], [t_0 + 2\Delta t, x_2, y_2], \dots, [t_f, x_n, y_n]]$$

Convém olhar para o último elemento da lista:

$$\text{last(res)}; \rightarrow [0, 0, 0.1]$$

Isto quer dizer que rk não conseguiu avançar nem para  $t=0.01$ , porque os denominadores  $t^2$  e  $t$  na velocidade de fase produzem "overflow" em  $t=0$ .

Temos então que começar um pouco depois de  $t=0$ , por exemplo:

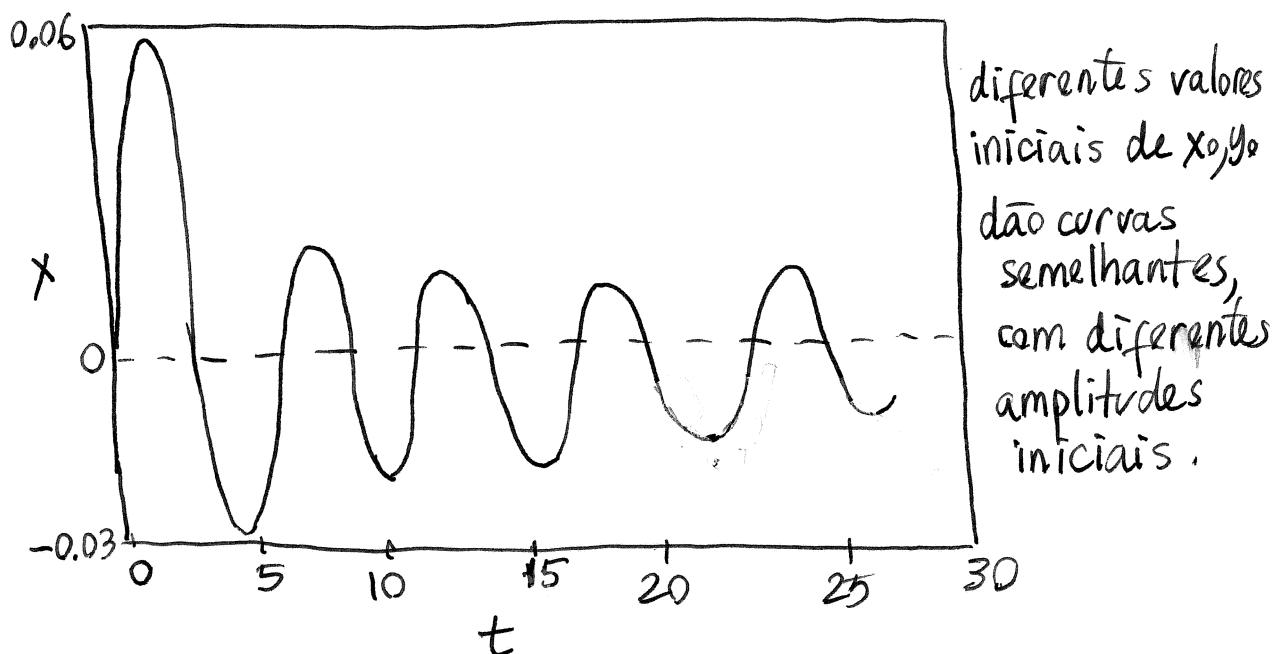
$$\text{res: rk}([y, (1/(9*t^2) - 1)*x - y/t], [x, y], [0, 1], [t, 0.01, 30, 0.01])$$

$$\text{last(res)}; \rightarrow [30.0, \underset{\substack{\uparrow \\ t_f}}{-0.01035\dots}, \underset{\substack{\uparrow \\ x(t_f)}}{0.0042\dots}]$$

$$\text{length(res)}; \rightarrow 3000 \quad (3000 \text{ pontos}).$$

O gráfico de  $X$  vs.  $t$  pode ser obtido assim:

$$\text{plot2d}([\text{discrete}, \text{makelist}([P[1], P[2]], P, \text{res})], [x, 0, 30]);$$

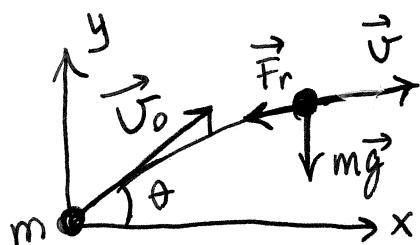


**Exemplo 2.** Lançamento de projéteis, considerando a resistência do ar; se o projétil for uma esfera de raio  $R$ , a força de resistência do ar é:

$$\vec{F}_r = -\frac{\pi}{4} \rho R^2 |\vec{v}| \vec{v}$$

$\vec{v}$  = veloc. da esfera

$\rho$  = massa volumétrica do ar  $\approx 1.2 \text{ kg/m}^3$



estado inicial (lançamento do projétil):

$$t_0 = 0, x_0 = 0, y_0 = 0, v_{0x} = v_0 \cos \theta$$

$$v_{0y} = v_0 \sin \theta$$

$$\vec{F} = m \vec{g} + \vec{F}_r \Rightarrow \vec{a} = \vec{g} - \frac{1.2 \pi}{4} \left( \frac{R^2}{m} \right) |\vec{v}| \vec{v}$$

Há quatro variáveis de estado:  $(x, y, v_x, v_y)$  as 4 equações de evolução são as definições de  $v_x$  e  $v_y$  e as expressões das componentes  $a_x$  e  $a_y$  da aceleração:

$$\begin{cases} \dot{x} = v_x \\ \dot{y} = v_y \\ \dot{v}_x = -\frac{1.2 \pi}{4} \left( \frac{R^2}{m} \right) \sqrt{v_x^2 + v_y^2} v_x \\ \dot{v}_y = -9.8 - \frac{1.2 \pi}{4} \left( \frac{R^2}{m} \right) \sqrt{v_x^2 + v_y^2} v_y \end{cases}$$

Uma bola de tênis tem raio 3.25 cm e massa 62g. Então, se a velocidade inicial for 12 m/s e  $\theta = 45^\circ$ , a trajetória determina-se assim:

$$k := \text{float}(1.2 * \% \pi * 0.0325^2 / 4 / 0.062);$$

$$\begin{aligned} t1 := & \text{rk}([v_x, v_y, -k * \text{sqrt}(v_x^2 + v_y^2) * v_x, \\ & -9.8 - k * \text{sqrt}(v_x^2 + v_y^2) * v_y], [x, y, v_x, v_y], \\ & [0, 0, 12 * \cos(\% \pi / 4), 12 * \sin(\% \pi / 4)], [t, 0, 2, 0.01]) \end{aligned}$$

last(t1);

$$\rightarrow [2.0, 14.7\dots, -3.1\dots, 6.3\dots, -10.5\dots]$$

O valor negativo de  $y_f$  indica que a bola já desceu da altura à que foi lançada. Se quisermos encontrar o instante em que regressa à altura inicial  $y=0$ , podemos usar o seguinte comando, para descobrir a partir de que ponto os valores de  $y$  ficam negativos:

`first (sublist-indices [t1, lambda ([P], P[3]<0))];`

↳ 167

Os seja, apenas os primeiros 166 elementos da lista  $t1$  correspondem à trajetória por cima de  $y=0$ :

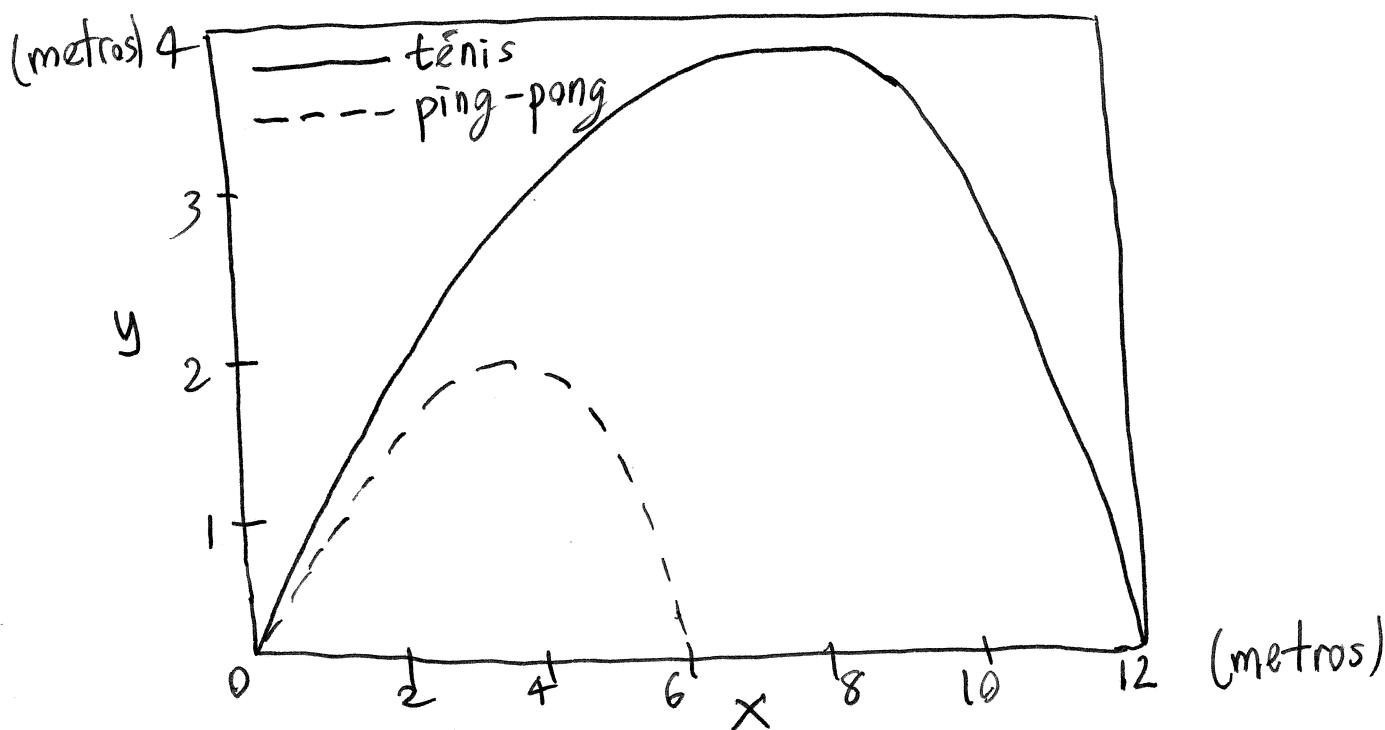
`t2: makelist ([t1[i][2], t1[i][3]], i, 1, 166);`

↑  
coordenadas dos pontos  $x_i$   $y_i$   
da trajetória por cima de  $y=0$

E o gráfico obtém-se com o comando:

`plot2d ([discrete, t2]);`

Se o mesmo cálculo for feito para uma bola de ping-pong, com  $R=1.9\text{cm}$  e  $M=2.4\text{g}$ , as trajetórias obtidas são as seguintes:



## CICLOS LÍMITE

Exemplo:  $\begin{cases} \dot{x} = x(1 - 18x^2 - 36y^2) - y \\ \dot{y} = y(1 - 18x^2 - 36y^2) + x \end{cases}$

Velocidade de fase:

$$u: [x*(1-18*x^2-36*y^2)-y, y*(1-18*x^2-36*y^2)+x] \$$$

pontos de equilíbrio:

solve(u);  $\rightarrow [x=0, y=0]$  um único ponto de equilíbrio na origem

J: jacobian(u, [x, y]) \$

$$A: \text{subst}([x=0, y=0], J); \rightarrow A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{eigenvalues}(A); [1-\%i, \%i+1], [1, 1]$$

A origem é foco repulsivo.

Retrato de fase:

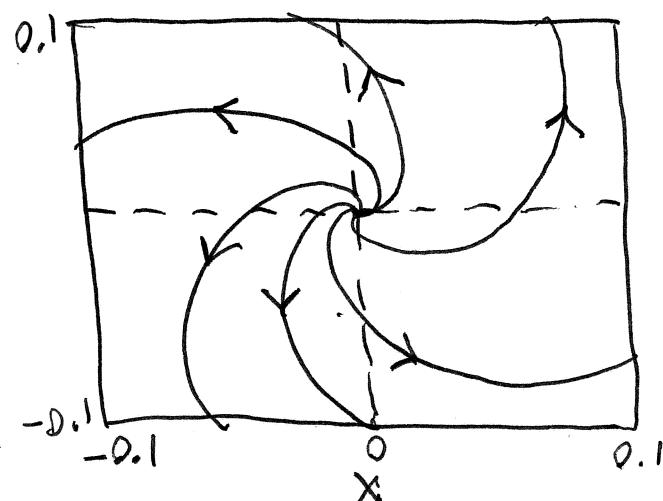
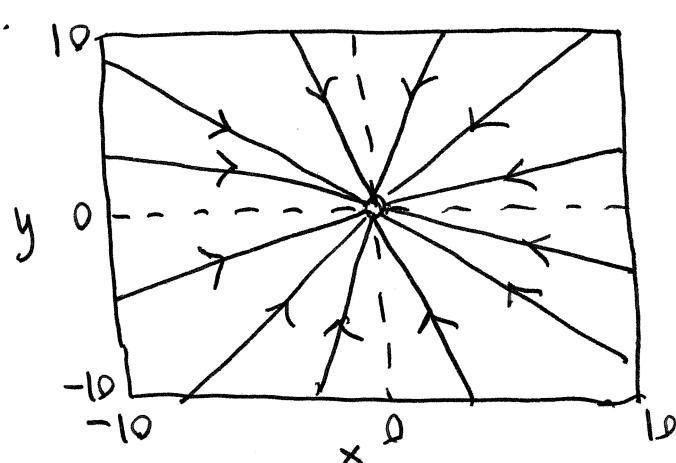
plotdf(u, [x, y]);

Dá a ideia de que a origem é <sup>(errada)</sup> não atrativa!

Olhando na vizinhança

da origem: plotdf(u, [x, y], [x, -0.1, 0.1], [y, -0.1, 0.1]);

Sim se consegue ver o foco repulsivo na origem. Num domínio intermédio consegui-se compreender a razão para a aparente discrepância das duas figuras:



`plotdf(u, [x, y], [x, -0.5, 0.5], [y, -0.5, 0.5]);`

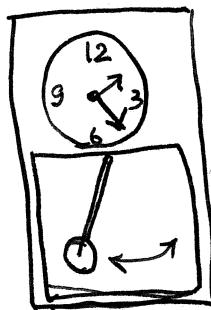
Há uma elipse no espaço de fase (círculo). As curvas de evolução dentro da elipse afastam-se da origem, aproximando-se do círculo. As curvas

fora do círculo também se aproximam dele.

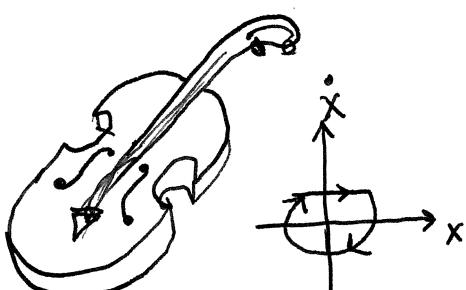
Esse tipo de círculo único representa uma oscilação com amplitude e velocidade  $v(t)$  bem definidas. E chama-se CÍRCULO LIMITE.

Neste caso é atrativo, mas há também ciclos repulsivos e ciclos atrativos num lado e repulsivos no outro.

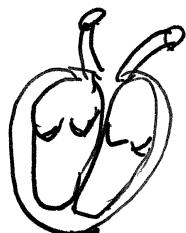
### Exemplos com ciclos limite



O pêndulo oscila de forma bem definida, que depende da forma como foi construído.



Violino. O movimento do arco pode fazer oscilar as cordas com forma bem definida no espaço de fase.  
(numa guitarra a oscilação é num foco atrativo,



Coração. Os batimentos cardíacos são um ciclo no espaço de fase, com forma própria que depende da condição física do sujeito.

Se existir um ciclo limite tem, necessariamente, de existir um ponto de equilíbrio, atrativo ou repulsivo, no seu interior. Esse é um critério para descartar a existência de ciclos limite em alguns sistemas. Para encontrar ciclos limite, em alguns casos é útil usar coordenadas polares

## VELOCIDADE DE FASE EM COORDENADAS POLARES.

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y) \\ \dot{y} = g(x, y) \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \frac{d(r\cos\theta)}{dt} = f(r\cos\theta, r\sin\theta) \\ \frac{d(r\sin\theta)}{dt} = g(r\cos\theta, r\sin\theta) \end{cases}$$

No lado esquerdo dessas novas equações aparecem  $\dot{r}$  e  $\dot{\theta}$ , sendo possível encontrar expressões para  $\dot{r}$  e  $\dot{\theta}$ . Usando o Maxima, no exemplo da seção anterior, a passagem para coordenadas polares pode ser feita assim:

(i) definem-se as expressões para  $x$  e  $y$  em coord. polares:

$$[x_p, y_p] : r * [\cos q, \sin q] \quad (q \text{ representa } \theta)$$

(ii) definem-se as derivadas de  $r$  e  $\theta$  em ordem a  $t$ :

$$\text{gradef}(r, t, r_p) \quad (r_p \rightarrow \dot{r})$$

$$\text{gradef}(q, t, q_p) \quad (q_p \rightarrow \dot{\theta})$$

(iii) substituem-se as coordenadas polares nas duas equações de evolução (u já está na memória, em função de  $x$  e  $y$ ).

$$\text{eq}: \text{subst}([x=x_p, y=y_p], [\text{diff}(x_p, t) = u[1], \text{diff}(y_p, t) = u[2]]);$$

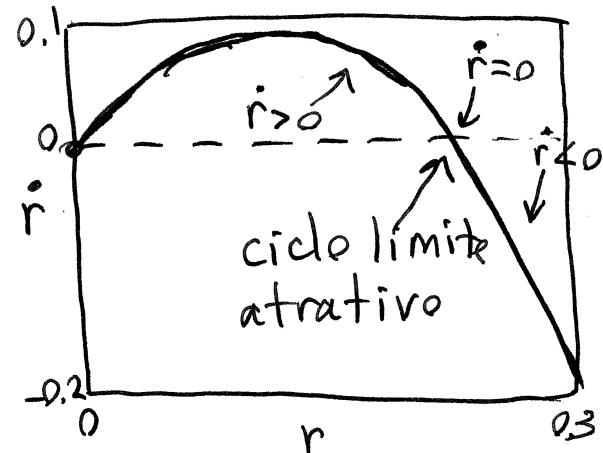
(iv) resolvem-se essas 2 equações para encontrar as expressões para  $\dot{r}$  e  $\ddot{\theta}$ :

`solve(eq,[rp,qθ]);`

$$\text{trigsimp}(\%) \rightarrow \begin{cases} \dot{\theta} = 1 & (\text{veloc. angular positiva constante}) \\ \dot{r} = (18\cos^2\theta - 36)r^3 + r \end{cases}$$

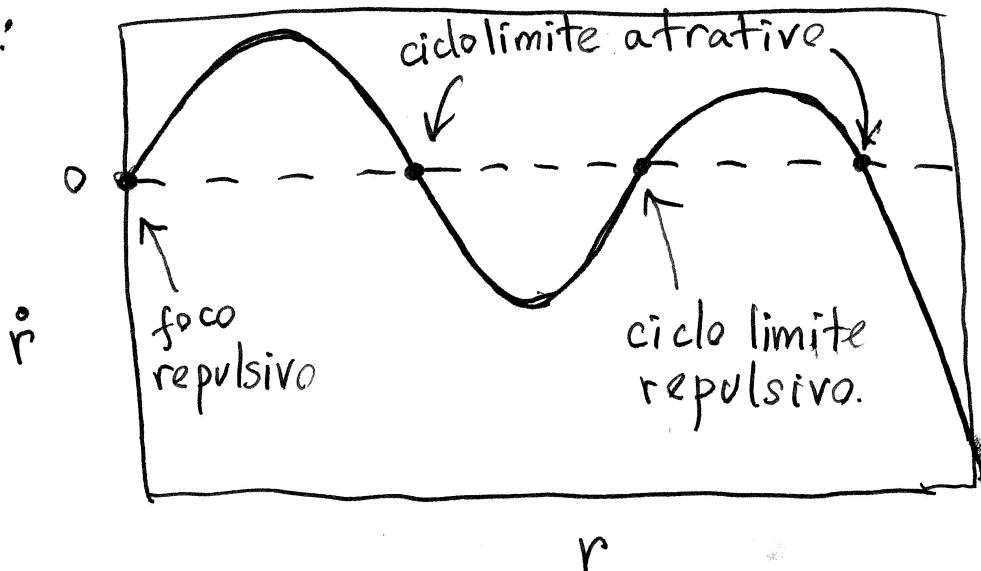
(v) Analisa-se o gráfico de  $\dot{r}$ , em ordem a  $r$ , para alguns valores de  $\theta$ . No nosso caso,  $\dot{r}$  para  $\theta=0$ ,

`plot2d(-18*r^3+r,[r,0,0.3]);`



Cada passagem de  $\dot{r}$  por zero (em  $r \neq 0$ ), representa um ciclo limite. Atrativo se a curva é decrescente, ou repulsivo, se a curva for crescente.

Num exemplo mais complicado, com 3 ciclos limite uns dentro dos outros, o gráfico podia ser o seguinte:



Aula 24. 2018-05-17

## DINÂMICA POPULACIONAL

$X(t)$  = população no instante  $t$ . ( $X \geq 0$ )

Admitindo que  $X$  pode ter qualquer valor real positivo e que  $X$  varia continuamente,

$\dot{X} = f(X, t)$  = aumento/diminuição da população no instante  $t$ .

trata-se de um sistema dinâmico com apenas uma variável de estado. Se a população se extinguir,  $X=0$ ,  $X$  já não pode aumentar ou diminuir. Como tal, a função  $f(X, t)$  deverá ter a seguinte propriedade:

$$f(0, t) = 0$$

e isso implica que  $X=0$  é ponto de equilíbrio do sistema.

taxa de aumento/diminuição =  $\frac{f(X, t)}{X}$  = taxa de natalidade da população - taxa de mortalidade

### MODELO DE MALTHUS

taxa de natalidade - taxa de mortalidade =  $a$  (constante positiva)

$$\frac{f(X, t)}{X} = a \Rightarrow f(X, t) = ax$$

equação de evolução:  $\boxed{\dot{X} = ax}$

apenas um ponto de equilíbrio, em  $X=0$ .

Retrato de fase:



existe apenas uma curva de evolução que vai até  $X \rightarrow +\infty$ .

Se em  $t=0$  a população for  $x_0$ , a equação da curva de evolução pode obter-se resolvendo a equação de evolução por separação de variáveis:

$$\frac{dx}{dt} = ax \Rightarrow \int_{x_0}^x \frac{dx}{x} = a \int_0^t dt \Rightarrow \ln\left(\frac{x}{x_0}\right) = at$$

$x(t) = x_0 e^{at}$

a população cresce exponencialmente

## MODELO LOGÍSTICO (Verhulst)

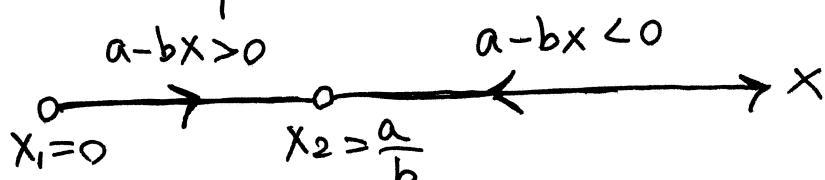
Admite-se taxa de natalidade constante,  $a$ , mas taxa de mortalidade,  $bX$ , diretamente proporcional à população:

$$\frac{f(x,t)}{x} = a - bx$$

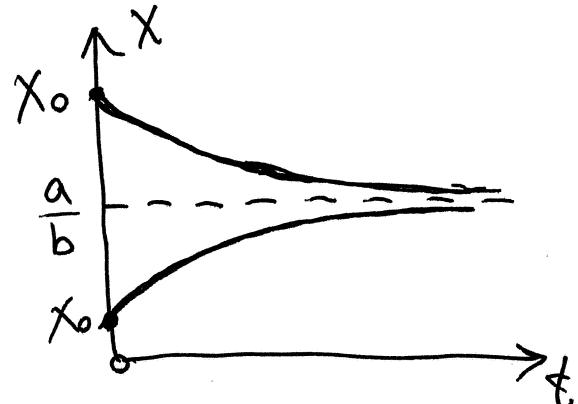
$$\Rightarrow \dot{x} = x(a - bx) \quad a > 0, b > 0$$

pontos de equilíbrio:  $x(a - bx) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, \forall, x_2 = \frac{a}{b}$

Retrato de fase:



Há duas curvas de evolução, que se aproximam do ponto  $x_2 = \frac{a}{b}$ , que é estável. As equações dessas curvas podem ser encontradas por separação de variáveis e o resultado são uma exponencial crescente e uma exponencial decrescente.



## SISTEMAS DE DUAS ESPÉCIES

$x(t)$  e  $y(t)$  são duas funções contínuas ( $x \geq 0, y \geq 0$ ), que representam as populações de duas espécies que interagem, ou seja, as taxas de aumento de cada espécie dependem dos valores das duas populações:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y) \\ \dot{y} = g(x, y) \end{cases} \quad \text{com as propriedades: } \begin{cases} f(0, y) = 0 \\ g(x, 0) = 0 \end{cases}$$

O espaço de fase é o primeiro quadrante do plano  $xy$ . e a origem é ponto de equilíbrio.

Matriz jacobiana:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{bmatrix}$$

$\frac{\partial f}{\partial x}$  = aumento/diminuição próprio da espécie  $x$

$\frac{\partial g}{\partial y}$  = aumento/diminuição próprio da espécie  $y$

$\frac{\partial f}{\partial y}$  = aumento/diminuição de  $x$ , devido a  $y$

$\frac{\partial g}{\partial x}$  = aumento/diminuição de  $y$ , devido a  $x$

### TIPOS DE SISTEMAS

① Sistema predador-presa:  $\frac{\partial f}{\partial y} < 0$  e  $\frac{\partial g}{\partial x} > 0$  com sinais opostos  
uma das espécies (predadores) faz diminuir a outra (presas)  
e aumenta as custas dela.

② Sistema com cooperação:  $\frac{\partial f}{\partial y} > 0$ ,  $\frac{\partial g}{\partial x} > 0$

③ Sistema com competição:  $\frac{\partial f}{\partial y} < 0$ ,  $\frac{\partial g}{\partial x} < 0$

## SISTEMA DE LOTKA - VOLTERRA

$$\begin{cases} \dot{x} = x(a - cy) \\ \dot{y} = y(bx - d) \end{cases} \quad \begin{array}{l} a, b, c \text{ e } d \text{ são quatro constantes} \\ \text{positivas.} \end{array}$$

Trata-se de um sistema predador-presa, em que  $x$  são presas e  $y$  predadores.

A população  $x$  crescerá exponencialmente se não houver predadores  $y$ . A população  $y$  de predadores extinguir-se-ia se não houvesse presas  $x$ .

2 Pontos de equilíbrio:  $(x_1, y_1) = (0, 0)$   $(x_2, y_2) = \left(\frac{d}{b}, \frac{a}{c}\right)$

$$J = \begin{bmatrix} a - cy & -cx \\ by & bx - d \end{bmatrix}$$

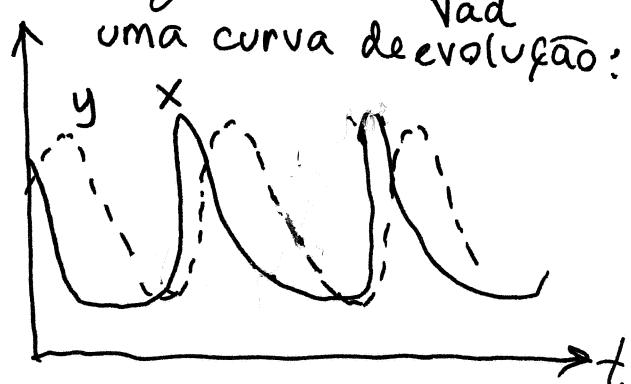
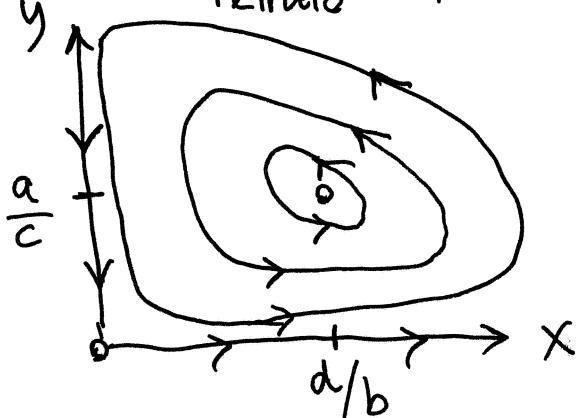
na vizinhança de  $(x_1, y_1)$ ,  $A_1 = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & -d \end{bmatrix}$   $\lambda_1 = a > 0$   
 $\lambda_2 = -d < 0$   
 $(x_1, y_1)$  é ponto de sela.

na vizinhança de  $(x_2, y_2)$ ,

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{cd}{b} \\ \frac{ab}{c} & 0 \end{bmatrix} \quad \text{tr}(A_2) = 0 \quad \lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{ad}$$

$$\det(A_2) = ad > 0$$

$(x_2, y_2)$  é de facto um centro. Há infinitos ciclos com período aproximadamente igual a  $\frac{2\pi}{\sqrt{ad}}$



Na realidade, em sistemas presa-predador como, por exemplo, populações de raposas e coelhos, observam-se oscilações dessas populações que se repetem após algum período. No entanto, a amplitude dessas oscilações não pode ser entre quase zero e um valor muito elevado, como acontece no modelo de Lotka-Volterra.

Um modelo mais realista deve ter ciclos limite, em vez de infinitos ciclos.

## SISTEMA DE HOLLING-TANNER

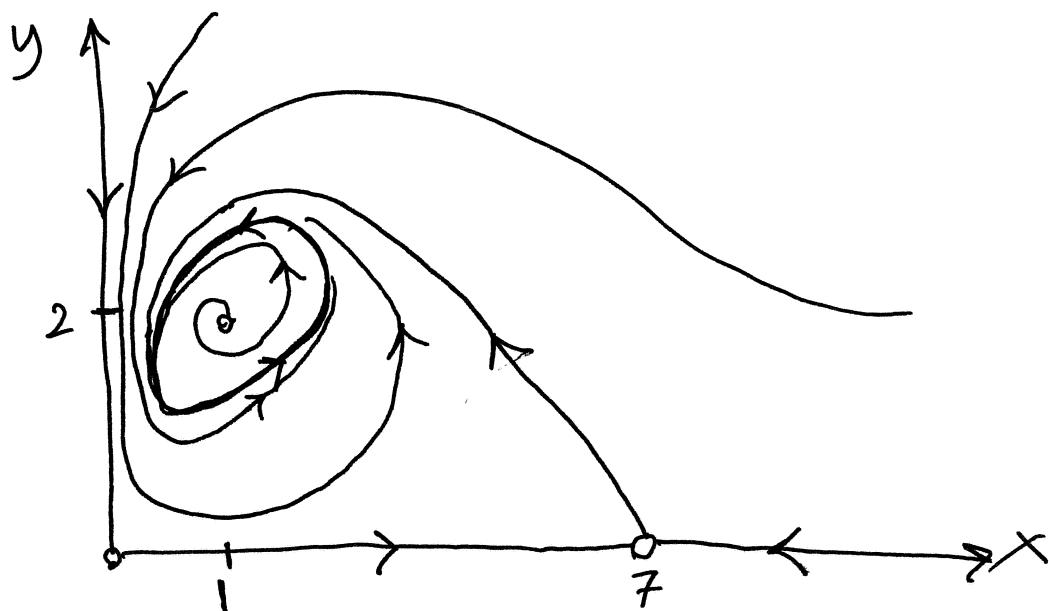
$$\begin{cases} \dot{x} = x\left(1 - \frac{x}{7}\right) - \frac{6xy}{7+7x} \\ \dot{y} = \frac{y}{5}\left(1 - \frac{y}{2x}\right) \end{cases}$$

Sistema predador-presa  
 $x \rightarrow$  presas  
 $y \rightarrow$  predadores

3 pontos de equilíbrio:  $(0,0)$ ,  $(7,0)$  e  $(1,2)$

O retrato de fase mostra que  $(0,0)$  e  $(7,0)$  são pontos de sela, enquanto  $(1,2)$  é foco repulsivo.

Existe um ciclo limite atrativo em torno de  $(1,2)$



Aula 25. 2018-05-22

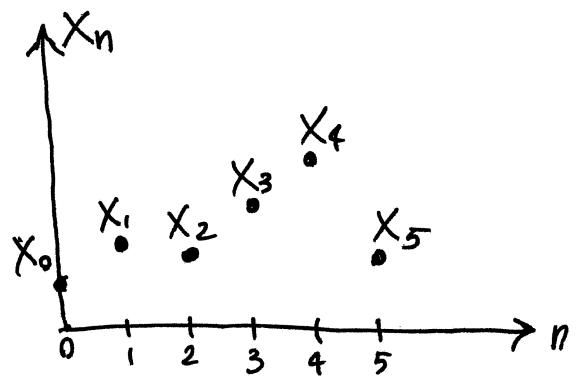
## SISTEMAS DINÂMICOS DISCRETOS

Cada variável de estado,  $x$ , em vez de ser função contínua do tempo é uma sucessão de valores  $\{x_0, x_1, \dots, x_n, \dots\}$ , nos instantes  $\{t_0, t_1, \dots, t_n, \dots\}$

Num sistema com uma única variável de estado, a equação de evolução é:

$$x_{n+1} = f(x_n) \quad (n=0, 1, 2, \dots)$$

$$\begin{aligned} x_1 &= f(x_0), \quad x_2 = f(f(x_0)), \\ \dots \quad x_n &= \underbrace{f(\dots(f(x_0)))}_{n \text{ vezes}} \end{aligned}$$



A função  $f$  aplica-se iterativamente ao valor inicial  $x_0$ .

### Mapa logístico

$z_n$  = população no instante  $t_n$

$a$  = taxa de natalidade. Igual em todos os instantes  $t_n$ .

$bz_n$  = taxa de mortalidade em  $t_n$ .

$a$  e  $b$  são constantes positivas.

A população no instante  $t_{n+1}$  é a que já havia em  $t_n$ , mais os nascimentos e menos as mortes:

$$z_{n+1} = z_n + az_n - bz_n^2 = cz_n - bz_n^2 \quad (\text{onde } c=a+b > 1)$$

$$\Rightarrow \frac{b}{c}z_{n+1} = c\left(\frac{b}{c}z_n\right) - c\left(\frac{b}{c}z_n\right)^2$$

Define-se outra sequência,  $x_n = \frac{b}{c}z_n$ , ficando assim:

$$x_{n+1} = cx_n(1-x_n)$$

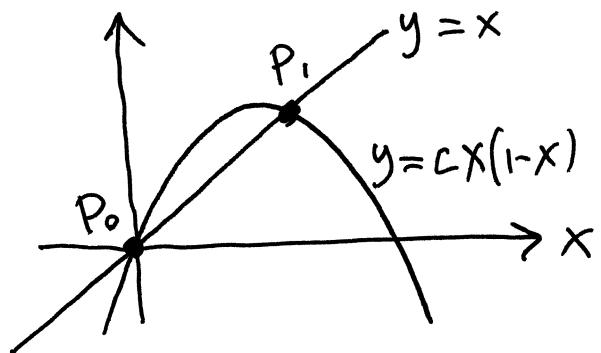
equação de evolução do mapa logístico.

Depende dum único parâmetro  $c > 1$

## Pontos fixos (de equilíbrio).

São os valores iniciais  $x_0$  que conduzem a uma sequência constante  $\{x_0, x_0, x_0, \dots\}$ , ou seja,  $f(x_0) = x_0$

Num gráfico onde se representam as funções  $y=x$  e  $y=f(x)$ , os pontos fixos são a intersecção das duas funções



$$\Rightarrow x = cx(1-x) \Rightarrow cx^2 + (1-c)x = 0 \Rightarrow x=0, \vee, x = \frac{c-1}{c}$$

## Diagrama de escada

No mesmo gráfico anterior, representa-se o ponto em  $y=x$  com  $x$  igual ao valor inicial  $x_0$ .

$x_1$  obtém-se deslocando-se verticalmente desde esse ponto, até tocar  $y=f(x)$ , e a seguir des-

locando-se horizontalmente até tocar novamente  $y=x$ . O procedimento repete-se recursivamente.

Vemos então que (se  $c < 3$ )  $x = \frac{c-1}{c}$  é ponto fixo atrativo. e  $x=0$  é ponto fixo repulsivo.

No Maxima, usa-se o comando:

`staircase(2*x*(1-x), 0.1, 10, [x, 0, 1]);`

$\underbrace{f(x)}$

$x_0$

$\uparrow$   
número  
de iterações

$\nwarrow$  domínio de  
 $x$  a  
mostrar,  
no gráfico

e também:

`evolution(2*x*(1-x), 0.1, 10);`

Se  $c > 3$ , o ponto fixo  $\frac{c-1}{c}$  torna-se repulsivo e aparece um ciclo limite atrativo:  $\{x_0, x_1, x_0, x_1, x_0, x_1, \dots\}$

$$\Rightarrow f(f(x_0)) = x_0 \quad (\text{e } f(f(x_1)) = x_1)$$

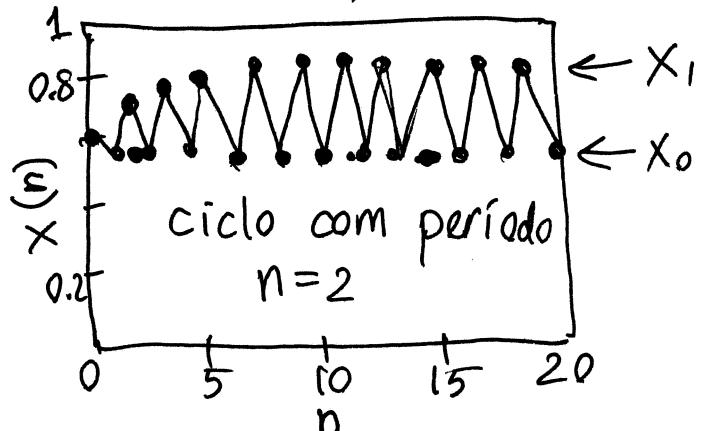
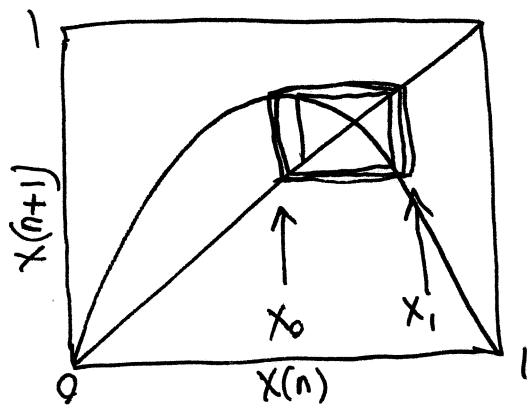
$$c(cx_i(1-x_i))(1-cx_i(1-x_i)) = x_i$$

$$x_{0,1} = \frac{c+1 \pm \sqrt{c^2-2c-3}}{2c}$$

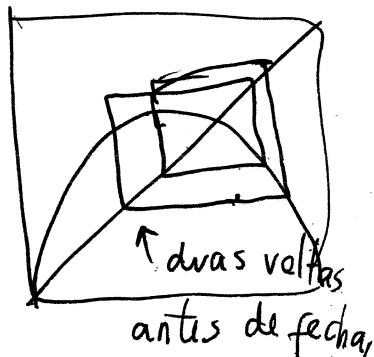
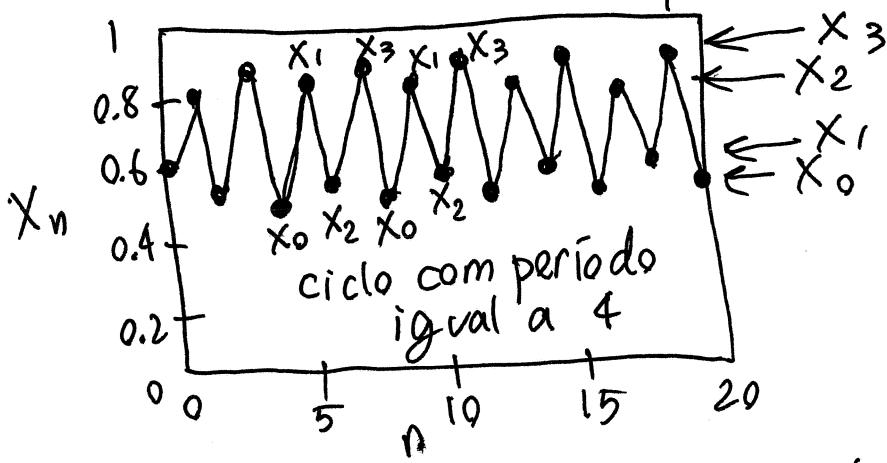
Por exemplo, com  $c = 3.2$ :

staircase ( $3.2 * x * (1-x), 0.6, 20, [x, 0, 1], [y, 0, 1]$ );

evolution ( $3.2 * x * (1-x), 0.6, 20, [y, 0, 1], [\text{style}, \text{linespoints}]$ );

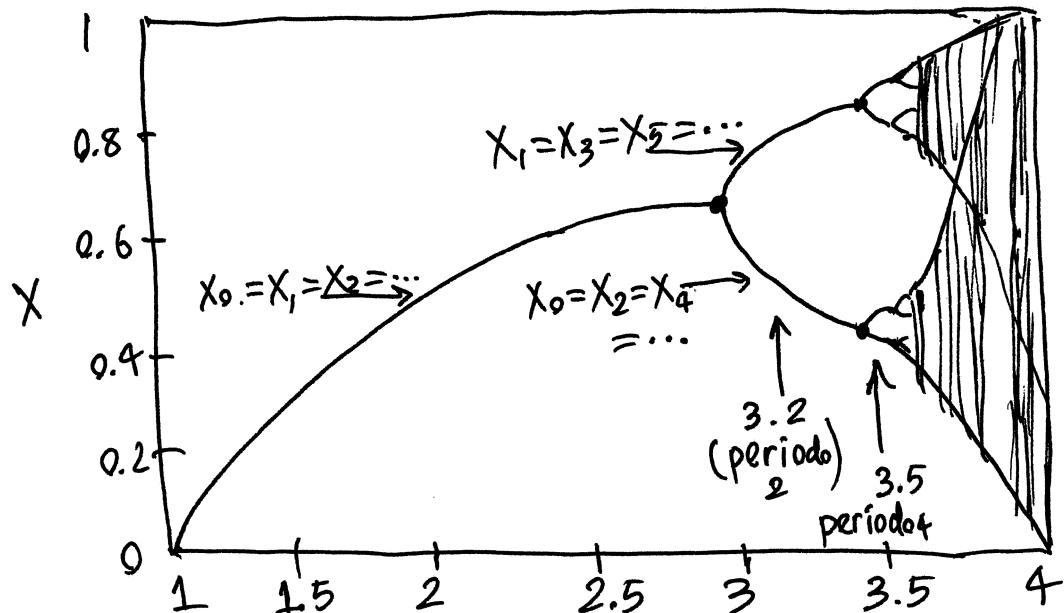


Em  $c = 3.5$  há um ciclo com período igual a 4:



Houve uma bifurcação (os dois pontos do ciclo passaram a ser 4) perto de  $c = 3.4495$

O seguinte gráfico mostra os valores limite de  $x_n$ , para os possíveis valores do parâmetro  $C$ :



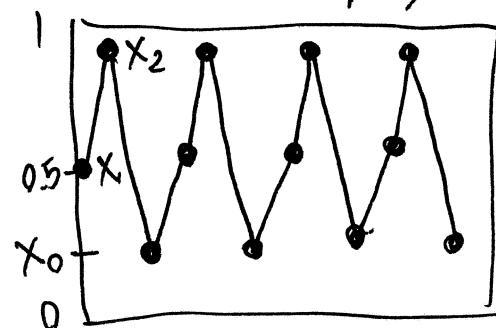
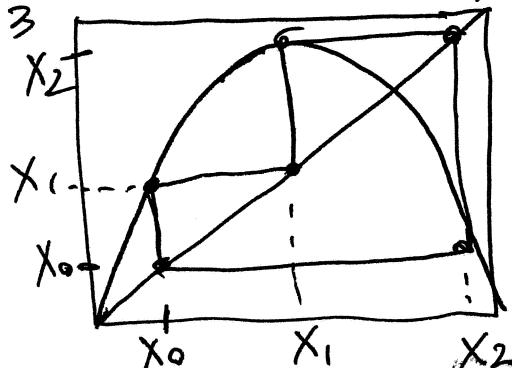
As bifurcações continuam a aparecer cada vez mais próximas, dando ciclos de período  $4, 8, 16, 32, \dots$ , até que em algum valor de  $C$  há um ciclo atrativo, com período infinito, chamado **atrator estranho**.

O atrator estranho é uma sequência de valores entre 0 e 1, que nunca se repete.

Esse tipo de solução chama-se caótica. A pesar de estar bem definida, um pequeno erro ou incerteza no valor inicial de  $x_0$  faz com que a sequência comece numra parte diferente do atrator estranho, dando uma sequência diferente.

Na região de  $C$  onde o sistema é caótico, aparecem intervalos de  $C$  onde  $x_n$  tem período igual a 3. Por exemplo, em

$$C = 3.83$$



Aula 26.

## SISTEMAS DINÂMICOS CAÓTICOS

Os sistemas dinâmicos contínuos, com 3 ou mais variáveis de estado, podem ter atratores estranhos (solução caótica).

O atrator estranho é uma curva que ocupa uma região finita do espaço de fase, sem passar duas vezes pelo mesmo ponto.

### Sistema de Rössler

$$\begin{cases} \dot{x} = -y - z \\ \dot{y} = x + cy \\ \dot{z} = a + (x - b)z \end{cases} \quad \text{com 3 parâmetros reais, } a, b \text{ e } c$$

Vamos estudar o caso  $a=2$ ,  $b=4$ , com valores de  $c$  aproximando-se de 0.4.

$$v(c) : [-y-z, x+c*y, 2+(x-4)*z];$$

① Em  $c=0.3$  há um ciclo limite atrativo. Com valores iniciais  $x_0=y_0=z_0=2$ , a solução entre  $t=0$  e  $t=60$  é:

$$s : rk(v(0.3), [x, y, z], [2, 2, 2], [t, 0, 60, 0.01]) \$$$

O gráfico de  $x$  vs.  $y$  mostra que o sistema aproxima-se do ciclo:

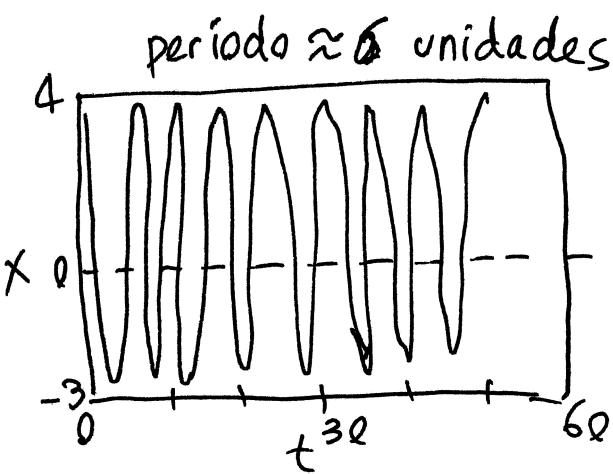
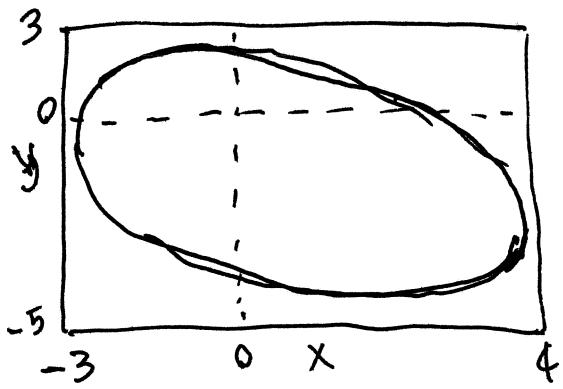
$$\text{plot2d}([\text{discrete}, \text{makelist}([p[2], p[3]], p, s)]) ;$$

repetindo o comando  $rk$ , usando como valores iniciais os valores finais da iteração anterior, consegue-se ver melhor o ciclo limite. Os últimos valores de  $x$ ,  $y$  e  $z$  da iteração anterior obtém-se com  $\text{last}(s)$  e eliminando o primeiro elemento ( $t$ ) nessa lista. Usa-se então:

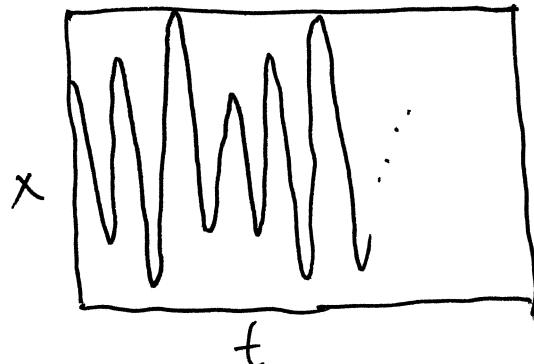
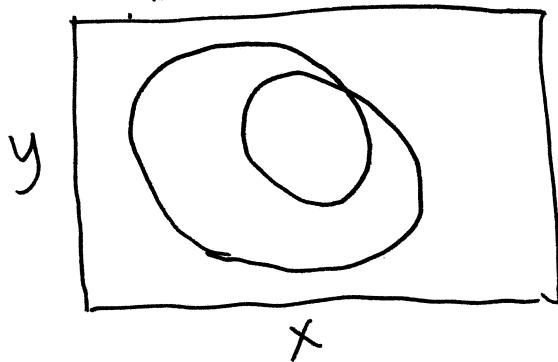
$$s : rk(v(0.3), [x, y, z], \text{rest}(\text{last}(s)), [t, 0, 60, 0.01]) \$$$

$$\text{plot2d}([\text{discrete}, \text{makelist}([p[2], p[3]], p, s)]) ;$$

$$\text{plot2d}([\text{discrete}, \text{makelist}([p[1], p[2]], p, s)]) ;$$

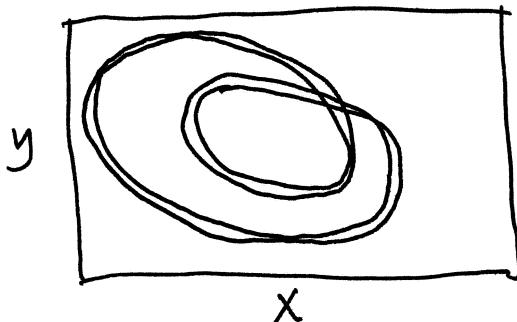


- b)  $c = 0.35$ . Obtém-se um ciclo que dá duas voltas no espaço de fase, com período aproximado de 12 unidades. Houve uma duplicação do período (bifurcação) entre 0.3 e 0.35



- c)  $c = 0.375$ . Ciclo que dá quatro voltas no espaço de fase, antes de fechar. Período aproximadamente 24.

Houve uma segunda bifurcação entre 0.35 e 0.375

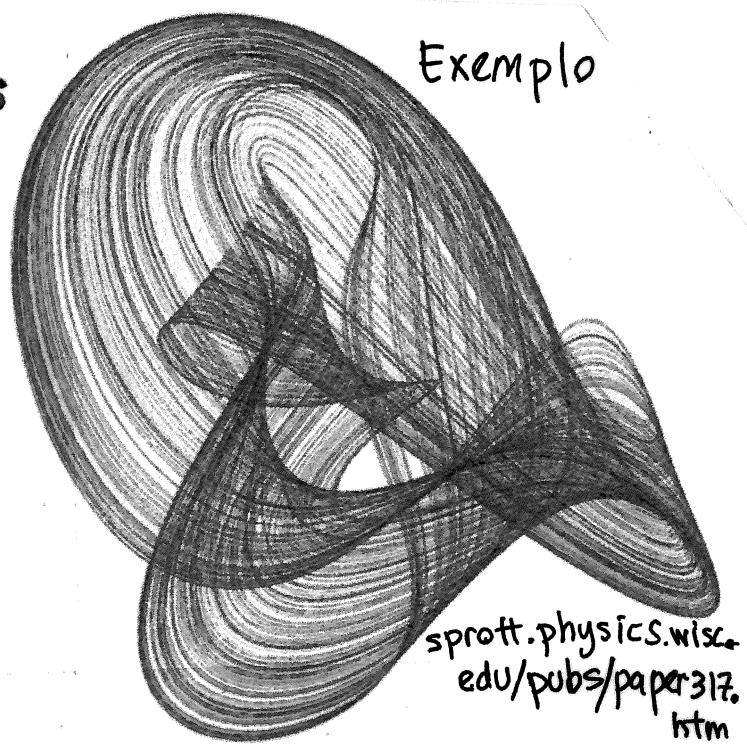


- d)  $c = 0.398$ . O ciclo limite, com período infinito, é um atrator estranho. Cada vez que se repete o comando `RK`, usando como valores iniciais os valores finais da execução anterior, a curva obtida no espaço de fase é diferente.

# ATRATORES ESTRANHOS

Em sistemas contínuos, com 3 ou mais variáveis de estado, são curvas de evolução infinitas, num volume finito do espaço de fase.

Em diferentes instantes, a curva passa por diferentes pontos, sem nunca passar novamente por um mesmo ponto

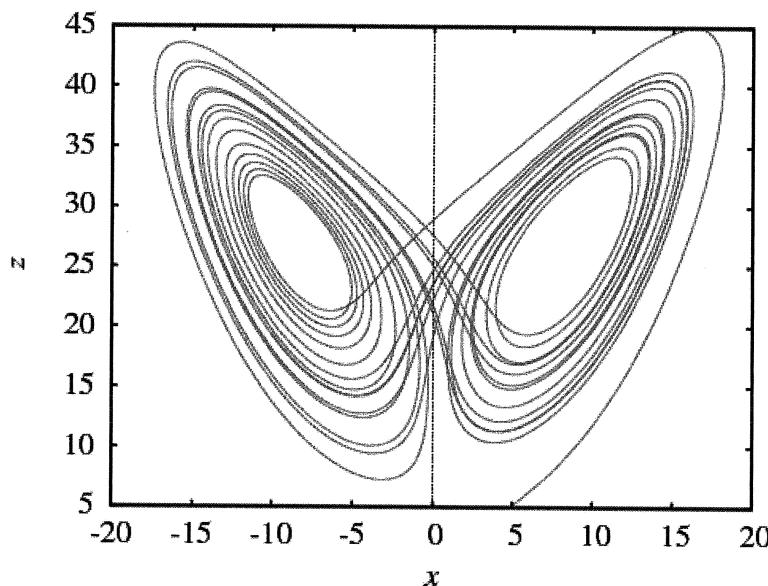


## Atrator de Lorenz

Modelo meteorológico para as correntes de convecção do ar em planos verticais, produzidas por aquecimento na aresta inferior dos planos (Lorenz, 1963).

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 10(y - x) \\ \dot{y} &= 28x - y - xz \\ \dot{z} &= xy - \frac{8}{3}z\end{aligned}$$

$x$  = amplitude das correntes.  $y$  = diferença de temperatura entre as correntes ascendente e descendente.  $z$  = desvio da temperatura normal no plano.



neste caso o sistema torna-se caótico por intermitência (oscilação entre dois pontos de equilíbrio) e não por duplicação do período.

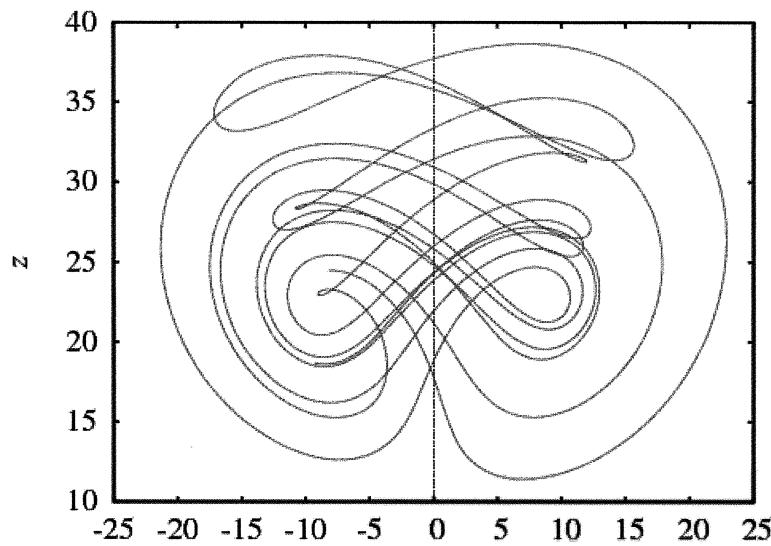
## Efeito borboleta

Uma pequena alteração nas condições iniciais produz grandes alterações na evolução do sistema.

Predictability: Does the Flap of a Butterfly's wings in Brazil Set Up a Tornado in Texas?, Lorenz, 1972. ([def.fe.up.pt/dinamica/caos/Butterfly-1972.pdf](http://def.fe.up.pt/dinamica/caos/Butterfly-1972.pdf))

# Atrator de Chen e Ueta

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 35(y - x) \\ \dot{y} &= (28 - \sigma)x + 28y - xz \\ \dot{z} &= xy - 3z\end{aligned}$$

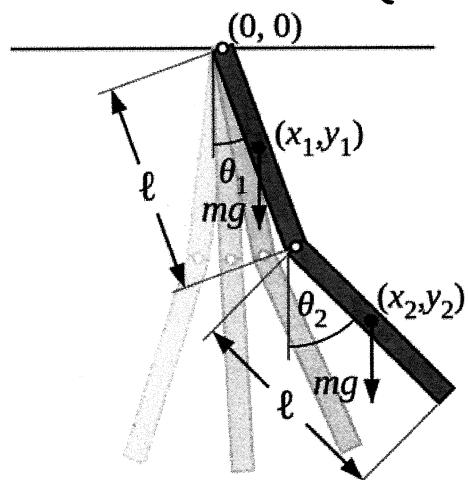


## Pêndulo duplo

(Imagens obtidas da página: Double pendulum da Wikipedia.)

[en.wikipedia.org/wiki/Double-pendulum](https://en.wikipedia.org/wiki/Double-pendulum))

Sistema com dois graus de liberdade e quatro variáveis de estado:  $\theta_1, \theta_2, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2$



O movimento é caótico.

A fotografia seguinte mostra a trajetória de um LED que foi colocado na ponta do pêndulo.

