U.PORTO FEUP FACULDADE DE ENGENHARIA UNIVERSIDADE DO PORTO

Capítulo 7

Intervalos de Confiança

AMG, JFO (v8 – 2017)
adaptado de: *Estatística*,
Rui Campos Guimarães,
José A. Sarsfield Cabral

Slide 7c.-1

Conteúdo

Slide 7c.0

Resultados de aprendizagem

- Descrever o processo de especificação de Intervalos de Confiança (I.C.)
- Conhecer e verificar as condições de aplicação das fórmulas de cálculo de I.C. por via teórica (TLC)
- Aplicar as fórmulas de cálculo de I.C., obtidas por via teórica, para:
  - valores esperados,
  - proporções binomiais,
  - variâncias,
  - razões entre variâncias,
  - diferenças de valores esperados e
  - diferenças de proporções binomiais
- Calcular I.C. unilaterais e bilaterais
- Interpretar correctamente I.C.
- Determinar o tamanho da amostra de forma a garantir um I.C. de amplitude inferior a determinado valor
- Utilizar I.C. na comparação de e entre populações

Slide 7c.1

7.1 Introdução

Estimação de parâmetros
Recordando...

Estimador pontual – função dos valores da amostra que, se tiver um dado conjunto de propriedades, permite estimar um parâmetro da distribuição da população

- Amostras diferentes $\Longrightarrow$ estimativas com valores diferentes
- Qual desses valores coincide com o valor do parâmetro que está a ser estimado?
  Provavelmente nenhum!

Limitação da estimação pontual:

não fornece qualquer informação relativamente ao rigor ou confiança das estimativas obtidas através dela

$\Rightarrow$ Estimação por intervalo Slide 7c.2

7.2 O Conceito de Intervalo de Confiança

Exemplo

Admita-se que a altura dos alunos do 10^o ano segue uma distribuição Normal cuja variância é conhecida: $\sigma^2 = (0.051\,m)^2$. Admita-se ainda que foi recolhida uma amostra aleatória com dimensão $N = 25$ alunos e calculada a respectiva média amostral, tendo-se obtido $\bar{X} = 1.70\,m$.

Como definir um intervalo que, com uma "probabilidade" (confiança) de 95%, contenha o valor esperado da altura daquela população, μ?

Precisamos de:

$\Rightarrow$ Um estimador pontual do valor esperado — $\bar{X}$

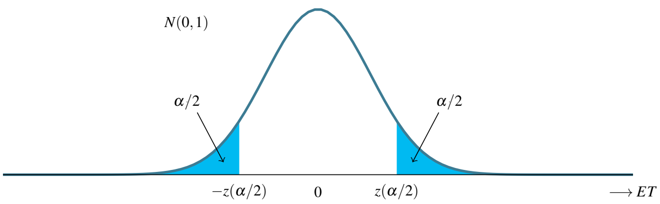
$\Rightarrow$ Conhecer a distribuição desse estimador — $N\left(\mu_X, \sigma_X^2/N\right)$

$\Rightarrow$ De uma estimativa pontual obtida a partir de uma amostra aleatória da população — $\bar{X} = 1.70$, $N = 25$ Slide 7c.3

Estimador: média amostral ($\bar{X}$)

$$\text{Como } X \rightsquigarrow N\left(\mu_X, \sigma_X^2\right) \;\Rightarrow\; \bar{X} \rightsquigarrow N\left(\mu_X, \frac{\sigma_X^2}{N}\right) \;\Rightarrow\; Z = \frac{\bar{X} - \mu_X}{\frac{\sigma_X}{\sqrt{N}}} \rightsquigarrow N(0,1)$$

Considerando a simetria da distribuição Normal:



Procura-se o valor $z\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ tal que: $P\left[-z\left(\frac{\alpha}{2}\right) < Z < z\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right] = 1 - \alpha$

(em que, no exemplo corrente, $1 - \alpha = 0.95$) Slide 7c.4

$$P\left[-z\left(\tfrac{\alpha}{2}\right) < Z < z\left(\tfrac{\alpha}{2}\right)\right] = 1 - \alpha$$
$$P\left[-z\left(\tfrac{\alpha}{2}\right) < \frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{N}}} < z\left(\tfrac{\alpha}{2}\right)\right] = 1 - \alpha$$
$$P\left[-z\left(\tfrac{\alpha}{2}\right)\frac{\sigma}{\sqrt{N}} < \bar{X} - \mu < z\left(\tfrac{\alpha}{2}\right)\frac{\sigma}{\sqrt{N}}\right] = 1 - \alpha$$
$$P\left[-\bar{X} - z\left(\tfrac{\alpha}{2}\right)\frac{\sigma}{\sqrt{N}} < -\mu < -\bar{X} + z\left(\tfrac{\alpha}{2}\right)\frac{\sigma}{\sqrt{N}}\right] = 1 - \alpha$$
$$P\left[\bar{X} + z\left(\tfrac{\alpha}{2}\right)\frac{\sigma}{\sqrt{N}} > \mu > \bar{X} - z\left(\tfrac{\alpha}{2}\right)\frac{\sigma}{\sqrt{N}}\right] = 1 - \alpha$$
$$P\left[\bar{X} - z\left(\tfrac{\alpha}{2}\right)\frac{\sigma}{\sqrt{N}} < \mu < \bar{X} + z\left(\tfrac{\alpha}{2}\right)\frac{\sigma}{\sqrt{N}}\right] = 1 - \alpha$$

Pelo que o intervalo:

$$\left[\bar{X} - z\left(\frac{\alpha}{2}\right)\frac{\sigma}{\sqrt{N}}, \bar{X} + z\left(\frac{\alpha}{2}\right)\frac{\sigma}{\sqrt{N}}\right]$$

incluirá, com "probabilidade" (confiança) $1-\alpha$, o valor de μ Slide 7c.5

Tomando os valores do exemplo:

$$\mu \in \left[1.70 - 1.96 \cdot \frac{0.051}{\sqrt{25}}, 1.70 + 1.96 \cdot \frac{0.051}{\sqrt{25}}\right] = [1.68, 1.72]$$

$z\left(\frac{\alpha}{2}\right) = z(0.025) = 1.96$ foi obtido a partir da consulta à tabela N(0,1)

Terminologia:

- Este é o *intervalo de confiança* para o valor esperado (μ) a $(1-\alpha)\cdot 100\%$, designado-se os seus extremos por *limites de confiança* a $(1-\alpha)\cdot 100\%$

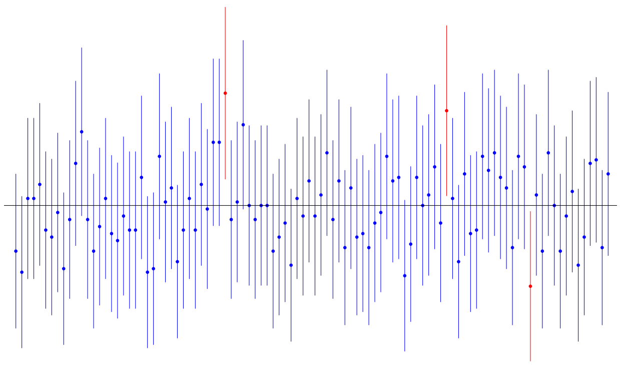
- A *semiamplitude* do intervalo de confiança corresponde ao *erro máximo* que, com a confiança especificada, se pode cometer na *estimativa* de μ

- Ao valor $(1-\alpha)\cdot 100\%$ dá-se o nome de *nível de confiança*

Slide 7c.6

Intervalos de confiança

Cálculo do I.C. para o valor esperado (μ) a partir de 100 amostras de dimensão N de uma população com desvio padrão conhecido (σ):



http://digitalfirst.bfwpub.com/stats_applet/stats_applet_4_ci.html

- O valor de $\bar{X}$ (pontos azuis) varia de amostra para amostra, variando a localização do I.C.
- A amplitude dos I.C. (comprimento das rectas azuis) mantém-se constante (só depende de N)
- α é a percentagem de vezes que, em média, o I.C. não inclui o valor do parâmetro, μ (linha horizontal), que se pretende estimar

Slide 7c.7

Intervalos de confiança não simétricos?

$$\forall_{\alpha_1,\alpha_2:\,\alpha_1+\alpha_2=\alpha} \left[\bar{X} - z(\alpha_1)\frac{\sigma}{\sqrt{N}}, \bar{X} + z(\alpha_2)\frac{\sigma}{\sqrt{N}}\right]$$

é um intervalo de confiança a $(1-\alpha)\cdot 100\%$

Para o mesmo α, simetria $(\alpha_1 = \alpha_2) \Longrightarrow$ menor amplitude do intervalo
(para distribuições de estatísticas simétricas e unimodais)

Intervalos de confiança unilaterais

- aberto à direita a 95%

$$\alpha_1 = 0.05, \alpha_2 = 0 \;(z(\alpha_2) = \infty) \qquad \rightarrow \qquad \left[\bar{X} - z(\alpha_1)\frac{\sigma}{\sqrt{N}}, +\infty\right[$$

- aberto à esquerda a 95%

$$\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0.05 \;(z(\alpha_1) = \infty) \qquad \rightarrow \qquad \left]-\infty, \bar{X} + z(\alpha_2)\frac{\sigma}{\sqrt{N}}\right]$$

Slide 7c.8

7.3 Especificação de Intervalos de Confiança

Especificação de Intervalos de Confiança

O que é *necessário* para construir um Intervalo de Confiança:

1. um estimador do parâmetro em causa
2. conhecer a distribuição do estimador
3. uma estimativa pontual do parâmetro
   (um valor particular desse estimador)

Intervalos de Confiança a estudar:

- Valor esperado
- Proporção binomial
- Variância
- Razão entre variâncias
- Diferença entre valores esperados
- Diferença entre proporções binomiais

Nota: veremos apenas I.C. bilaterais (para I.C. unilaterais ver adaptação do slide anterior) Slide 7c.9

7.3.1 Intervalo de confiança para o valor esperado

- Estimador do valor esperado (μ): *média amostral* ($\bar{X}$)
  - $\bar{X}$ é um estimador não-enviesado, eficiente (para distribuições Normais) e consistente de μ
- Conhecer a distribuição da média amostral: $\bar{X} \rightsquigarrow N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{N}\right)$
  - Teorema do Limite Central ou Combinação Linear de v.a. Normais
- Estimativa pontual: $\bar{X} = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} X_n$
  - obter uma amostra aleatória e calcular a respectiva média amostral

$\Rightarrow$ já vimos que o I.C. para o valor esperado (μ) é:

$$\left[\bar{X} - z\left(\frac{\alpha}{2}\right)\frac{\sigma}{\sqrt{N}}, \bar{X} + z\left(\frac{\alpha}{2}\right)\frac{\sigma}{\sqrt{N}}\right]$$

Atenção:

- necessário verificar as condições de aplicação do T.L.C.
- necessário conhecer o desvio padrão da população (σ)

Slide 7c.10

Intervalo de confiança para o valor esperado
(1) Amostra de grande dimensão, população qualquer

Amostra de grande dimensão $\Longrightarrow$ verificam-se as condições do T.L.C.

$$\bar{X} \rightsquigarrow N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{N}\right) \quad \Rightarrow \quad Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{N}}} \rightsquigarrow N(0,1)$$

Em geral σ é desconhecido podendo ser estimado através do desvio padrão amostral:

$$S = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(X_i - \bar{X})^2}$$

Para amostras de grande dimensão o erro de estimação de σ é desprezável

$$S \approx \sigma \qquad \text{(constante)}$$

Logo:

$$Z = \frac{\bar{X}-\mu}{\frac{S}{\sqrt{N}}} \approx \frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{N}}} \rightsquigarrow N(0,1)$$

Intervalo de confiança para o valor esperado (μ) a $(1-\alpha)\cdot 100\%$:

$$\left[\bar{X} - z\left(\frac{\alpha}{2}\right)\frac{S}{\sqrt{N}}, \bar{X} + z\left(\frac{\alpha}{2}\right)\frac{S}{\sqrt{N}}\right]$$

Slide 7c.11

Intervalos de confiança para o valor esperado
(2) Amostra de pequena dimensão, população Normal

Notar que quando a amostra é de pequena dimensão:

- ⇒ não se verificam as condições do T.L.C., obrigando a que a população seja Normal (já vimos que uma combinação linear de Normais é uma distribuição Normal);
- ⇒ não é válida a aproximação de σ por S.

$$S \not\approx \sigma \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{\bar{X}-\mu}{\frac{S}{\sqrt{N}}} \not\rightsquigarrow N(0,1)$$

Qual é a distribuição de $\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{S}{\sqrt{N}}}$?

$$\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{S}{\sqrt{N}}} = \frac{\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{N}}} \rightsquigarrow N(0,1)}{\frac{S}{\sigma} \rightsquigarrow ?}$$

$$(N-1)\frac{S^2}{\sigma^2} = \frac{N-1}{\sigma^2}\left[\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(X_i-\bar{X})^2\right] = \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{X_i-\bar{X}}{\sigma}\right)^2 \rightsquigarrow \chi^2_{N-1}$$

(Demonstração no apêndice 10.1 do livro de apoio)

Slide 7c.12

Então:

$$\frac{S}{\sigma} \rightsquigarrow \sqrt{\frac{\chi^2_{N-1}}{N-1}}$$

Pelo que:

$$\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{S}{\sqrt{N}}} \rightsquigarrow \frac{N(0,1)}{\sqrt{\frac{\chi^2_{N-1}}{N-1}}} \rightsquigarrow t_{N-1}$$

Por definição da distribuição de t de Student e porque $\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{N}}}$ e $\frac{S}{\sigma}$ são independentes (não demonstrado aqui).

Intervalo de confiança para o valor esperado (μ) a $(1-\alpha)\cdot 100\%$:

$$\left[\bar{X} - t_{N-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\frac{S}{\sqrt{N}}, \bar{X} + t_{N-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\frac{S}{\sqrt{N}}\right]$$

Slide 7c.13

Regra prática

livro adoptado: $N \geq 10$ quando X segue distribuição simétrica e $N \geq 50$ quando X segue distribuição muito assimétrica

outros livros: $N \geq 30$

Nota: podem usar qualquer uma das regras anteriores

N	$\mathbf{t_{N-1}}(\alpha = \mathbf{0.05})$
2	6.314
11	1.812
21	1.725
31	1.697
41	1.684
61	1.671
∞	1.645

Notar que: $t_{N-1} \stackrel{N\to\infty}{\longrightarrow} N(0,1)$
Quando N aumenta, para um dado α, diminui o valor de $t_{N-1}(\alpha)$ e consequentemente a amplitude do I.C., justificada pela consequente diminuição do erro de estimação de σ

Slide 7c.14

Intervalos de confiança para o valor esperado

Abordagem alternativa

- a divisão entre amostras grandes e amostras pequenas no cálculo do I.C. para o valor esperado deve-se à dificuldade que havia em lidar com a distribuição t de Student, o que levava a aproximá-la pela Normal para amostras de grande dimensão
- com o poder de cálculo disponível actualmente em calculadoras e computadores essa dificuldade deixou de existir pelo que é viável usar sempre a fórmula com a distribuição t de Student

Intervalo de confiança para o valor esperado (μ) a $(1-\alpha)\cdot 100\%$:

$$\left[\bar{X} - t_{N-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\frac{S}{\sqrt{N}}, \bar{X} + t_{N-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\frac{S}{\sqrt{N}}\right]$$

Slide 7c.15

Exemplo

Com o objectivo de verificar a qualidade da água de um rio, avaliada pela quantidade de oxigénio dissolvido na água, foram recolhidas ao acaso 6 trutas. As análises efectuadas a órgãos desses peixes revelaram as seguintes taxas de oxigénio dissolvido na água: 5.4, 5.2, 5.1, 5.0, 4.9 e 4.9 ppm (partes por milhão). Defina o I.C. a 95% para o valor esperado da quantidade de oxigénio dissolvido na água.

Resolução:

Seja: X – quantidade de oxigénio dissolvido na água (ppm)

A partir dos dados fornecidos obtém-se:

$$\bar{x} = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6} x_i = 5.083 \qquad s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{6}(x_i-\bar{x})^2}{6-1}} = 0.194$$

Admitindo-se que X segue uma distribuição Normal, dado que se trata de uma amostra de pequena dimensão, temos que

$$\left[\bar{X} - t_{N-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\frac{S}{\sqrt{N}}, \bar{X} + t_{N-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\frac{S}{\sqrt{N}}\right] \qquad (t_6(0.025) = 2.571)$$

$$\left[5.083 - 2.571\cdot\frac{0.194}{\sqrt{6}}, 5.083 + 2.571\cdot\frac{0.194}{\sqrt{6}}\right] = [4.879, 5.287]$$

Slide 7c.16

I.C. para o valor esperado – Comentários

Questões:

- Qual é o efeito do tamanho da amostra na amplitude do intervalo?
- Que correcção é necessária introduzir na fórmula do I.C. devido ao erro de aproximação de σ por S?
- Qual é o efeito de aumentar o nível de confiança?

Precauções:

- Os dados devem ser obtidos por um processo de amostragem aleatório simples da população
- A fórmula do I.C. é específica para cada situação concreta, mas a lógica geral é sempre a mesma
- O I.C. é sensível a "outliers" já que a média amostral e o desvio padrão amostral também o são
- O I.C. apenas tem em conta a incerteza causada por erros amostrais, não considerando erros causados por: não-respostas, sub-representatividade, erros de medida, ...

Slide 7c.17

7.3.2 Intervalo de confiança para a proporção Binomial

Proporção binomial (p) – corresponde à proporção de elementos de um tipo, numa população constituída por elementos de dois tipos

Proporção amostral $(\hat{p})$ – numa amostra de dimensão N com y elementos de um dos tipos, $\hat{p} = \frac{y}{N}$

– corresponde a valor particular do estimador $\hat{P} = \frac{Y}{N}$

$$\left.\begin{array}{l}\text{População infinita} \\ \quad\text{ou} \\ \text{Amostragem com reposição}\end{array}\right\} \xrightarrow{\text{amostragem aleatória simples}} \quad Y \rightsquigarrow B(N,p)$$

(Y: número de sucessos em N experiências de *Bernoulli*)

Pelo Teorema do Limite Central, para N suficientemente grande (na prática exige-se que $N \geq 20$, $N \cdot p > 5$ e $N \cdot q > 5$, sendo desejável que $N \cdot p > 7$ e $N \cdot q > 7$):

$$Y \rightsquigarrow N(N \cdot p, N \cdot p \cdot (1-p))$$

Pelo que a proporção amostral ($\hat{P} = Y/N$) também segue uma distribuição Normal

$$\hat{P} = \frac{Y}{N} \rightsquigarrow N\left(p, \frac{p \cdot (1-p)}{N}\right)$$

Slide 7c.18

Limites do I.C. para p a $(1-\alpha)\,100\%$: $\quad \frac{Y}{N} \pm z(\alpha/2) \cdot \sigma$

Como a amostra é grande, σ pode ser substituído por um qualquer valor do seu estimador:

$$S = \sqrt{\frac{\hat{P}(1-\hat{P})}{N}} = \sqrt{\frac{\frac{Y}{N}(1-\frac{Y}{N})}{N}} = \sqrt{\frac{Y(N-Y)}{N^3}}$$

e logo:

$$\frac{\frac{Y}{N} - p}{\sqrt{\frac{Y(N-Y)}{N^3}}} \rightsquigarrow N(0,1)$$

originando o intervalo de confiança:

$$\left[\frac{Y}{N} - z\left(\frac{\alpha}{2}\right)\sqrt{\frac{Y(N-Y)}{N^3}}, \frac{Y}{N} + z\left(\frac{\alpha}{2}\right)\sqrt{\frac{Y(N-Y)}{N^3}}\right]$$

Amostras de populações finitas retiradas sem reposição

- Amostras de grande dimensão (regra prática: $N \geq 20$, $N \cdot p > 7$, $N \cdot q > 7$ e $M \geq 10 \cdot N$)
- A estimativa do desvio padrão de Y/N deve ser multiplicada pelo factor de redução: $(M-N)/(M-1)$

Slide 7c.19

Exemplo

Num lote de 150 peças fabricadas numa determinada máquina-ferramenta encontraram-se 12 peças defeituosas. Defina o Intervalo de Confiança a 95% para a proporção de peças defeituosas que a máquina produz.

Resolução:

Seja: Y – Número de peças defeituosas numa amostra de dimensão N

Admitindo que a probabilidade de uma peça ser defeituosa é constante e independente da qualidade das peças anteriores e como se trata de uma amostra de grande dimensão,

$$\frac{Y}{N} \rightsquigarrow N\left(p, \frac{p \cdot (1-p)}{N}\right)$$

com

$$\hat{p} = \frac{y}{N} = \frac{12}{150} = 0.08 \qquad z(0.025) = 1.96$$

Nestas condições, o Intervalo de Confiança para a proporção binomial com 95% de confiança dado por:

$$\left[\frac{y}{N} \pm z(0.025) \cdot \sqrt{\frac{y \cdot (N-y)}{N^3}}\right] = \left[\frac{12}{150} \pm 1.96 \cdot \sqrt{\frac{12 \cdot (250-12)}{250^3}}\right] = [0.037, 0.123]$$

Slide 7c.20

I.C. para a proporção Binomial – Comentários

- Não confundir o parâmetro p com o estimador $\hat{P} = Y/N$ nem com a estimativa $\hat{p} = y/N$.

- O I.C. é calculado usando o valor de $\hat{p}$, mas trata-se de um I.C. para p, a proporção Binomial.

- Não confundir ponto percentual com percentagem (erro frequente na imprensa):
  - margem de erro de 2.4 pontos percentuais equivale a $\hat{p} \pm 0.024$;
  - margem de erro de 2.4% equivale a $\hat{p} \pm 0.024 \cdot \hat{p}$;

- A fórmula do I.C. apresentada é válida para amostragens aleatórias simples (populações infinitas ou muito maiores que o tamanho da amostra);

- O I.C. apenas tem em conta a incerteza causada por erros amostrais, não considerando erros causados por: não-respostas, sub-representatividade, erros de medida, ...

Slide 7c.21

- Tamanhos típicos das amostras: centenas ou milhares de elementos

  $\Longrightarrow$ garantem a validade da aproximação da Binomial pela Normal (atenção a Binomiais assimétricas – valores de p muito altos ou baixos, daí as condições $N \cdot p > 7$ e $N \cdot (1-p) > 7$);

- O que fazer caso não se disponha de uma amostra para calcular a estimativa $\hat{p} = y/N$?

  Considerar o pior caso: $\hat{p} = 0.5$ (valor que maximiza a variância);

- Notar que a fórmula do I.C. não depende do tamanho da população: uma amostra aleatória de 1089 pessoas nos E.U.A. é tão precisa quanto uma amostra de 1089 pessoas em Portugal

  (é consequência da aleatoriedade da amostra e do T.L.C.);

- Muitas sondagens eleitorais são apresentadas com margens de erro de 3 pontos percentuais, porquê?

  Amostras de tamanho 1000 + 95% de confiança + $\hat{p}$ de 0.5.

Slide 7c.22

7.3.3 Intervalo de Confiança para a variância

Vimos atrás que $(N-1)\frac{S^2}{\sigma^2} \rightsquigarrow \chi^2_{N-1}$

(com S^2 calculada usando $\bar{X}$: $S^2 = \sum_{n=1}^{N}\left(\frac{X_n - \bar{X}}{N-1}\right)^2$)

Sejam $(\chi^2_{N-1})_A$ e $(\chi^2_{N-1})_B$ dois valores tais que:

$$P[(\chi^2_{N-1})_A < \chi^2_{n-1} < (\chi^2_{N-1})_B] = 1 - \alpha \qquad (*)$$

Substituindo χ^2_{N-1} por $(N-1)\frac{s^2}{\sigma^2}$:

$$P\left[\frac{(N-1)s^2}{(\chi^2_{N-1})_B} < \sigma^2 < \frac{(N-1)s^2}{(\chi^2_{N-1})_A}\right] = 1 - \alpha$$

Intervalo de confiança para σ^2 a $(1-\alpha) \cdot 100\%$:

$$\left[\frac{(N-1) \cdot s^2}{(\chi^2_{N-1})_B}, \frac{(N-1) \cdot s^2}{(\chi^2_{N-1})_A}\right]$$

Nota: Trata-se de um I.C. para a Variância e não para o Desvio Padrão

Slide 7c.23

- χ^2 não é simétrica $\Rightarrow$ procurar um par de valores que verifique $(*)$

  Regra prática: $\chi^2_{N-1}(\frac{\alpha}{2})$ e $\chi^2_{N-1}(1-\frac{\alpha}{2})$

  (mesmo sabendo que não se obtém o I.C. de menor amplitude) vindo o intervalo de confiança para σ^2 a $(1-\alpha)\cdot 100\%$:

$$\left[\frac{(N-1)\cdot s^2}{\chi^2_{N-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right)}, \frac{(N-1)\cdot s^2}{\chi^2_{N-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}\right]$$

- O termo *Graus de Liberdade* pode ser interpretado como o número de variáveis independentes menos o número de restrições impostas, em que:

  n^o de variáveis independentes = dimensão da amostra

  retrições impostas = 1 (o cálculo de $\bar{X}$ impõe uma restrição)

- No caso da média populacional (μ_X) ser conhecida existirão N graus de liberdade (não é preciso usar $\bar{X}$ no cálculo de S^2)

  Vindo o I.C. para σ^2 a $(1-\alpha)\cdot 100\%$:

$$\left[\frac{N\cdot s^2}{\chi^2_{N}\left(\frac{\alpha}{2}\right)}, \frac{N\cdot s^2}{\chi^2_{N}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}\right]$$

Slide 7c.24

Exemplo

Com o objectivo de avaliar a variabilidade associada a um dado método de análise efectuaram-se 17 análises a uma determinada substância. A variância amostral dos resultados foi de 2.70.

Construa o Intervalo de Confiança a 95% para a variância dos resultados do método de análise.

Resolução:

Seja: X – resultado do método de análise

É necessário admitir que a distribuição dos resultados do método de análise é Normal. Nestas condições o I.C. a 95% para a variância dos resultados é dado por

$$\left[\frac{(N-1)\cdot s^2}{\chi^2_{N-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right)}, \frac{(N-1)\cdot s^2}{\chi^2_{N-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}\right]$$

com $\chi^2_{16}(0.025) = 28.8$ e $\chi^2_{16}(0.975) = 6.91$, o que dá

$$\left[\frac{(17-1)\cdot 2.70}{28.8}, \frac{(17-1)\cdot 2.70}{6.91}\right] = [1.50, 6.25]$$

Slide 7c.25

7.3.4 Intervalo de confiança para a razão entre variâncias

Admita-se que σ^2_A e σ^2_B correspodem às variâncias de duas populações normais A e B. Com base em amostras independentes, de dimensões N_A e N_B obtêm-se estimadores S^2_A e S^2_B

$$\frac{S^2_A/\sigma^2_A}{S^2_B/\sigma^2_B} \rightsquigarrow \frac{\chi^2_{N_A-1}/(N_A-1)}{\chi^2_{N_B-1}/(N_B-1)} = F_{N_A-1,N_B-1}$$

Então, o I.C. a $(1-\alpha)\cdot 100\%$ para a razão entre as variâncias das duas populações normais, $\frac{\sigma^2_A}{\sigma^2_B}$, tem a seguinte expressão:

$$\left[\frac{1}{F_{N_A-1,N_B-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\frac{S^2_A}{S^2_B}, \frac{1}{F_{N_A-1,N_B-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}\frac{S^2_A}{S^2_B}\right]$$

Notas

- por simplicidade usa-se $F_{N_A-1,N_B-1}(\alpha/2)$ e $F_{N_A-1,N_B-1}(1-\alpha/2)$ apesar da distribuição F ser assimétrica
- recordar que $F_{N_A-1,N_B-1}(\alpha/2) = 1/F_{N_B-1,N_A-1}(1-\alpha/2)$

Slide 7c.26

Exemplo

Pretende-se comparar o desempenho de duas máquinas, A e B, no que diz respeito à precisão de fabrico de uma peça. A partir de duas amostras de 13 e 17 peças produzidas nas máquinas A e B, respectivamente, obtiveram-se os seguintes resultados para a variância amostral de uma determinada dimensão da peça: $S_A^2 = 6.32mm^2$ e $S_B^2 = 4.8mm^2$

Admitindo-se que as peças produzidas em ambas as máquinas a distribuição da referida dimensão é Normal, defina o I.C. a 90% para a razão das variâncias.

Resolução:

Sejam: X_A e X_B – dimensão das peças produzidas nas máquinas A e B

Considerando que as duas amostras são independentes. Para $\alpha = 10\%$ e para 12 e 16 graus de liberdade temos que

$F_{12,16}(0.05) = 2.42$ e $F_{12,16}(0.95) = \dfrac{1}{F_{16,12}(0.05)} = \dfrac{1}{2.60}$

Vindo o I.C. a 90% para a razão de variâncias

$$\left[\frac{1}{2.42}\cdot\frac{6.32}{4.80},\ 2.60\cdot\frac{6.32}{4.8}\right] = [0.544,\ 3.423]$$

Como interpretar o resultado do I.C. acabado de calcular? ...

Slide 7c.27

7.3.5 Intervalo de confiança para a diferença entre valores esperados

(1) Amostras independentes de grande dimensão, populações quaisquer

Sejam μ_A e μ_B os valores esperados das populações A e B e σ_A^2 e σ_B^2 as suas variâncias. Admita-se que se obtiveram duas amostras independentes de dimensões N_A e N_B, e com base nelas se calcularam os estimadores dos valores esperados, $\bar{X}_A$ e $\bar{X}_B$, e das variâncias, S_A^2 e S_B^2

Sendo as amostras de grandes dimensões temos que

$$S_A^2 \approx \sigma_A^2 \qquad\qquad S_B^2 \approx \sigma_B^2$$

De acordo com o T.L.C., e quaisquer que sejam as distribuições de A e B, podemos dizer que

$$\bar{X}_A \rightsquigarrow N(\mu_A, \sigma_A^2/N_A) \approx N(\mu_A, S_A^2/N_A)$$
$$\bar{X}_B \rightsquigarrow N(\mu_B, \sigma_B^2/N_B) \approx N(\mu_B, S_B^2/N_B)$$

Dado que se admitiu que as amostras são independentes

$$\bar{X}_A - \bar{X}_B \rightsquigarrow N(\mu_A - \mu_B, \sigma_A^2/N_A + \sigma_B^2/N_B) \approx N(\mu_A - \mu_B, S_A^2/N_A + S_B^2/N_B)$$

Slide 7c.28

Logo

$$Z = \frac{(\bar{X}_A - \bar{X}_B) - (\mu_A - \mu_B)}{\sqrt{\frac{S_A^2}{N_A} + \frac{S_B^2}{N_B}}} \rightsquigarrow N(0, 1)$$

Então, o I.C. a $(1-\alpha)\,100\%$ para a diferença entre os valores esperados, $\mu_A - \mu_B$, tem a seguinte expressão:

$$\left[(\bar{X}_A - \bar{X}_B) - z\left(\frac{\alpha}{2}\right)\sqrt{\frac{S_A^2}{N_A} + \frac{S_B^2}{N_B}}, (\bar{X}_A - \bar{X}_B) + z\left(\frac{\alpha}{2}\right)\sqrt{\frac{S_A^2}{N_A} + \frac{S_B^2}{N_B}}\right]$$

Se se admitir que as variâncias das duas populações são iguais ($\sigma_A^2 = \sigma_B^2$), podemos estimar a variância comum (σ) pela exptressão:

$$S^2 = \frac{(N_A - 1)\cdot S_A^2 + (N_B - 1)\cdot S_B^2}{N_A + N_B - 2}$$

vindo o I.C. a $(1-\alpha)\,100\%$ para a diferença entre os valores esperados, $\mu_A - \mu_B$ quando as variâncias são iguais:

$$\left[(\bar{X}_A - \bar{X}_B) - z\left(\frac{\alpha}{2}\right)S\sqrt{\frac{1}{N_A} + \frac{1}{N_B}}, (\bar{X}_A - \bar{X}_B) + z\left(\frac{\alpha}{2}\right)S\sqrt{\frac{1}{N_A} + \frac{1}{N_B}}\right]$$

Slide 7c.29

Exemplo

Um campo experimental foi utilizado para testar o crescimento de duas espécies florestais, A e B. Analisaram-se 200 árvores do tipo A com 20 anos de idade obtendo-se uma altura média de 145 cm e um desvio padrão amostral de 15 cm. Para 150 árvores do tipo B, com a mesma idade, a altura média medida foi de 141 cm e o desvio padrão amostral 12 cm.

Defina o I.C. a 95% para a diferença dos valores esperados.

Resolução:

Sejam: X_A e X_B – altura de uma árvore da espécie A e B (cm)

Tratam-se de duas amostras de grande dimensão ($N_A = 200$ e $N_B = 150$). Considerando que as amostras são independentes e que os dois tipos de árvore têm variâncias diferentes, o I.C. para a diferença de valores esperados, $\mu_A - \mu_B$, com 95% de confiança vem dado pela expressão

$$\left[(\bar{X}_A - \bar{X}_B) \pm z\left(\frac{\alpha}{2}\right)\sqrt{\frac{S_A^2}{N_A} + \frac{S_B^2}{N_B}}\right] = \left[(145-141) \pm 1.96 \cdot \sqrt{\frac{15^2}{200} + \frac{12^2}{150}},\right] = [1.2, 6.8]$$

Será que há diferenças no crescimento das duas espécies? ...

E se analisássemos a possibilidade de as variâncias serem iguais ...

Slide 7c.30

I.C. para a diferença entre valores esperados de duas pop.

(2) Amostras independentes de pequenas dimensões, populações Normais

Quando as amostras são pequenas é necessário admitir populações Normais e já não são válidas as aproximações

$$S_A^2 \not\approx \sigma_A^2 \qquad S_B^2 \not\approx \sigma_B^2$$

e consequentemente $\frac{(\bar{X}_A - \bar{X}_B) - (\mu_A - \mu_B)}{\sqrt{\frac{S_A^2}{N_A} + \frac{S_B^2}{N_B}}} \not\rightsquigarrow N(0, 1)$

É no entanto possível mostrar que

$$\frac{(\bar{X}_A - \bar{X}_B) - (\mu_A - \mu_B)}{\sqrt{\frac{S_A^2}{N_A} + \frac{S_B^2}{N_B}}} = \frac{\frac{(\bar{X}_A - \bar{X}_B) - (\mu_A - \mu_B)}{\sqrt{\frac{\sigma_A^2}{N_A} + \frac{\sigma_B^2}{N_B}}}}{\frac{\sqrt{\frac{S_A^2}{N_A} + \frac{S_B^2}{N_B}}}{\sqrt{\frac{\sigma_A^2}{N_A} + \frac{\sigma_B^2}{N_B}}}} \rightsquigarrow t_{GL}$$

Para definir o número de Graus de Liberdade (GL) vamos considerar duas situações: quando as variâncias das duas populações são iguais e quando são diferentes

Slide 7c.31

Quando se puder admitir que as variâncias das populações são iguais

$$\sigma_A^2 = \sigma_B^2 = \sigma$$

Podemos estimar a variância comum (σ) pela exptressão

$$S^2 = \frac{(N_A - 1) \cdot S_A^2 + (N_B - 1) \cdot S_B^2}{N_A + N_B - 2}$$

Resultando

$$\frac{(\bar{X}_A - \bar{X}_B) - (\mu_a - \mu_B)}{S \cdot \sqrt{\frac{1}{N_A} + \frac{1}{N_B}}} \rightsquigarrow t_{GL} = t_{N_a + N_B - 2}$$

O I.C. a $(1-\alpha)\,100\%$ para a diferença entre os valores esperados, $\mu_A - \mu_B$, tem então a seguinte expressão:

$$\left[(\bar{X}_A - \bar{X}_B) - t_{N_a+N_B-2}\left(\frac{\alpha}{2}\right) S\sqrt{\frac{1}{N_A} + \frac{1}{N_B}},\ (\bar{X}_A - \bar{X}_B) + t_{N_a+N_B-2}\left(\frac{\alpha}{2}\right) S\sqrt{\frac{1}{N_A} + \frac{1}{N_B}}\right]$$

Slide 7c.32

Quando a hipótese de as variâncias das populações serem iguais não puder ser admitida vem

$$\frac{(\bar{X}_A - \bar{X}_B) - (\mu_a - \mu_B)}{\sqrt{\frac{S_A^2}{N_A} + \frac{S_B^2}{N_B}}} \rightsquigarrow t_{GL}$$

em que o número de Graus de Liberdade (GL) é calculado por

$$GL = \frac{\left(\frac{S_A^2}{N_A} + \frac{S_B^2}{N_B}\right)^2}{\frac{\left(\frac{S_A^2}{N_A}\right)^2}{N_A - 1} + \frac{\left(\frac{S_B^2}{N_B}\right)^2}{N_B - 1}}$$

Neste caso, o I.C. a $(1-\alpha)\,100\%$ para a diferença entre os valores esperados, $\mu_A - \mu_B$ é dado pela expressão:

$$\left[(\bar{X}_A - \bar{X}_B) - t_{GL}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\sqrt{\frac{S_A^2}{N_A} + \frac{S_B^2}{N_B}},\, (\bar{X}_A - \bar{X}_B) + t_{GL}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\sqrt{\frac{S_A^2}{N_A} + \frac{S_B^2}{N_B}}\right]$$

Slide 7c.33

7.3.6 Intervalo de confiança para a diferença entre proporções

(amostras independentes e de grandes dimensões)

Considerem-se duas populações A e B constituídas por elementos de dois tipos

Seja p_A a proporção de elementos de um dos dois tipos na população A e p_B a correspondente proporção na população B

Seja ainda $\hat{P}_A = \frac{Y_A}{N_A}$ um estimador de p_A, baseado numa amostra de dimensão N_A, e $\hat{P}_B = \frac{Y_B}{N_B}$ um estimador de p_B, baseado numa amostra de dimensão N_B

Admita que as amostras são independentes

Como se viu atrás, para que as distribuições de $\hat{P}_A$ e $\hat{P}_B$ possam ser aproximadas por distribuições Normais é necessário que:

- populações infinitas ou amostragem com reposição:

  $N \geq 20$, $N \cdot p > 5$ e $N \cdot q > 5$ (desejável que $N \cdot p > 7$ e $N \cdot q > 7$)

- populações finitas e amostragem sem reposição:

  dimensão da população (M) muito maior que a da amostra (N),

  na prática $M > 10 \cdot N$, além de $N \geq 20$, $N \cdot p > 7$ e $N \cdot q > 7$

Slide 7c.34

Como se admitiu que as amostras são independentes, pode afirmar-se que $\hat{P}_A - \hat{P}_B$ segue também uma distribuição Normal, com parâmetros

$$\mu = p_A - p_B$$

$$\sigma^2 = \frac{p_A \cdot (1 - p_A)}{N_A} + \frac{p_B \cdot (1 - p_B)}{N_B}$$

De modo análogo ao adoptado na definição do I.C. para a proporção binomial, os limites do I.C. a $(1-\alpha)100\%$ para $p_A - p_B$ são os seguintes:

$$\left(\frac{Y_A}{N_A} - \frac{Y_B}{N_B}\right) \pm z\left(\frac{\alpha}{2}\right)\sqrt{\frac{Y_A(N_A - Y_A)}{N_A^3} + \frac{Y_B(N_B - Y_B)}{N_B^3}}$$

Slide 7c.35

Exemplo

Num estudo efectuado com a finalidade de comparar os hábitos de compra de homens e mulheres foram analisadas as proporções do número de vezes que uma compra é concretizada após a entrada numa loja. Em 45 observações seleccionadas aleatoriamente, os homens realizaram compras em 27 vezes. No caso das mulheres, em 74 visitas a lojas 32 resultaram em compras. Construa o I.C. a 95% de confiança para a diferença entre as proporções de concretização de compras entre homens e mulheres,

Resolução:

Sejam: Y_H e Y_M – o n^o de compras realiz. por H. e M. em 45 e 74 visitas

Considerando que as amostras são independentes e como as amostras são de grande dimensão ($N_H = 45, N_H \cdot \hat{p}_H = 27, N_H \cdot \hat{q}_H = 45 - 27 = 18, N_M = 74, N_M \cdot \hat{p}_M = 32, N_M \cdot \hat{q}_M = 74 - 32 = 42$), o I.C. para a diferença de proporções com 95% de confiança é dado pela expressão

$$\left[\left(\frac{Y_H}{N_H} - \frac{Y_M}{N_M}\right) \pm z\left(\frac{\alpha}{2}\right)\sqrt{\frac{Y_H(N_H - Y_H)}{N_H^3} + \frac{Y_M(N_M - Y_M)}{N_M^3}}\right] =$$

$$= \left[\left(\frac{27}{45} - \frac{32}{74}\right) \pm 1.96 \cdot \sqrt{\frac{27 \cdot 18}{45^3} + \frac{32 \cdot 42}{74^3}}\right] = [-1,47\%, 34.99\%]$$

Como interpretar este resultado? ...

Slide 7c.36

7.4 Dimensionamento de amostras

Dimensionamento de amostras

Em geral a dimensão de uma amostra não é imposta à partida, constituindo antes uma importante decisão a tomar, dado que:

- recolher e tratar uma amostra desnecessariamente grande constitui um desperdício de recursos;
- recolher uma amostra de dimensão insuficiente não permitirá retirar as conclusões pretendidas.

O tamanho adequado para uma amostra aumenta com:

- a precisão do intervalo de confiança (varia na razão inversa da sua amplitude);
- o nível de confiança do intervalo.

Slide 7c.37

Exemplo

A proporção de peças defeituosas à saída de uma linha de fabrico será estimada a partir de um lote de peças constituído para esse efeito. Qual deverá ser a dimensão do lote para que a amplitude do intervalo de confiança a 95% não ultrapasse 0.02?

Admitindo que se trata de uma amostra de grande dimensão, o I.C. para a proporção Binomial é dado por:

$$\frac{y}{N} \pm z\left(\frac{\alpha}{2}\right)\sqrt{\frac{y \cdot (N - y)}{N^3}}$$

Como se pretende um intervalo de amplitude máxima de 2 pontos percentuais vem:

$$2 \cdot 1.96 \cdot \sqrt{\frac{y \cdot (N - y)}{N^3}} < 0.02 \qquad (z(0.025) = 1.96)$$

Slide 7c.38

É necessário conhecer uma estimativa de p, que pode ser obtida através da recolha de uma amostra piloto de dimensão arbitrária

Admita-se que a partir de uma amostra piloto de dimensão $N = 300$ se obteve $y = 30$:

$$\hat{p} = \frac{y}{N} = 0.1$$

Substituindo-se na expressão anterior y por $0.1 \cdot N$ vem:

$$1.96^2 \cdot \frac{0.1 \cdot N \cdot (N - 0.1 \cdot N)}{N^3} < 0.01^2 \quad \Leftrightarrow \quad N \geq 3458$$

Comentários:

- a amostra piloto poderia (e deveria) ser incluída na amostra final
- seria mais razoável ir reestimando p à medida que a amostra final é recolhida

Slide 7c.39

E se não for possível recolher uma amostra piloto?

Considerar o pior caso:

$$\max\left[\frac{\hat{p} \cdot (1 - \hat{p})}{N}\right] \quad \rightarrow \quad \hat{p} = 0.5 \quad \Leftrightarrow \quad y = 0.5 \cdot N$$

Substituindo-se na expressão anterior y por $0.5 \cdot N$ vem:

$$1.96^2 \cdot \frac{0.5N \cdot (N - 0.5 \cdot N)}{N^3} < 0.01^2 \quad \Leftrightarrow \quad N \geq 9604$$

Comentários:

- pode conduzir a uma dimensão da amostra eventualmente superior ao necessário ...
- mas garante que se cumpre a condição imposta

Slide 7c.40

7.5 Comentários Finais

Comentários Finais

Interpretação de um Intervalo de Confiança

- A interpretação correcta de um Intervalo de Confiança requer algum cuidado.
- Há uma interpretação correcta e muitas, variadas e criativas, interpretações incorrectas.

Exemplo
Numa pesquisa do "Pew Research Center", 70% dos 1.500 adultos seleccionados aleatoriamente nos Estados Unidos acredita no aquecimento global. Construa um Intervalo de Confiança, com 95% de confiança, para a proporção de adultos nos Estados Unidos que acreditam no aquecimento global. (Notar que: $\hat{p} = y/N = 0.70$)

O IC a 95% de confiança para a proporção é $0.677 < p < 0.723$.

- Como deverá ser interpretado este IC?

Slide 7c.41

Interpretações Correctas

- "Estamos 95% confiantes de que o intervalo $[0.677, 0.723]$ realmente contém o verdadeiro valor da proporção (p)."
- Significa que, "se seleccionássemos muitas amostras diferentes de tamanho 1500 e construíssemos os correspondentes IC, cerca de 95% deles iriam realmente conter o verdadeiro valor da proporção (p)".

Interpretações Erradas

- "Há 95% de probabilidade de o verdadeiro valor da proporção (p) estará contido no intervalo $[0.677, 0.723]$."
- "95% das proporções amostrais estariam entre 0.677 e 0.723".

- Note-se que na interpretação correcta, o nível confiança de 95% refere-se à *taxa de sucesso do processo* a ser utilizado para estimar a proporção (p) e *não à probabilidade* de um determinado intervalo de confiança conter o verdadeiro valor da proporção (p).

Slide 7c.42

Comparação de e entre populações

- Porquê I.C. para a diferença de valores esperados e não para a soma?

  ⇒ permite realizar comparações entre populações

- Como comparar populações?

  ⇒ calculando o I.C. para diferença de valores esperados, se o valor 0 pertencer ao intervalo não se pode afirmar que existam diferenças significativas entre as duas populações

  Exemplo:

  População A – amostra: $N_A = 10$ $\bar{X}_A = 109.60$ $S_A = 2.875$

  População B – amostra: $N_B = 11$ $\bar{X}_B = 106.45$ $S_B = 2.945$

  I.C. a 95% para $\mu_A - \mu_B$ vem: $[0.485, 5.85]$

  ⇒ a média da população A é estatisticamente superior à da população B, porque o valor 0 não está contido no intervalo calculado

- De modo análogo para diferenças de proporções ou razão de variâncias

- Como verificar se um parâmetro populacional é igual a um dado valor ($\mu_A = 110$)?

  ⇒ verificar se o valor 110 pertence ao I.C. calculado para μ

Slide 7c.43

– Cuidados e Precauções

- O que geralmente acontece quando a amostra é demasiado grande?

  ⇒ a amplitude do I.C. é muito pequena → tudo é diferente

- O que geralmente acontece quando a amostra é demasiado pequena?

  ⇒ a amplitude do I.C. é muito grande → tudo é igual

- O resultado da comparação depende do valor de α, que é escolhido por quem calcula o I.C.

  ⇒ manipulação de resultados de forma a se obter a conclusão pretendida

- Os I.C. apresentados para comparação de duas populações obrigam à independência entre as duas amostras

  ⇒ existem outros I.C. que não exigem independência entre as amostras

  (p.e. para amostras emparelhadas: diferença de idades de um casal)

- Este assunto (Comparação de e entre populações) será aprofundado no próximo capítulo (Teste de Hipóteses)

Slide 7c.44

Estimação por Intervalo – Comentários finais

- Basta utilizar uma amostra de grande dimensão para se calcular um I.C.?

  ⇒ não, uma amostra grande não assegura representatividade, apenas a aleatoriedade o garante

- No dimensionamento de uma amostra, a dimensão calculada é aproximada já que depende do desvio padrão da população

  ⇒ interpretar como ordem de grandeza no planeamento de experiências

- Porquê utilizar níveis de confiança de 90%, 95% e 99%?

  hábito, valores tabelados, ... (nada impede a utilização de outros α)

- Sempre que ouvirem uma afirmação envolvendo uma estatística devem perguntar:

– A amostra utilizada é aleatória e representativa?
– Qual é a margem de erro (a parte com o $\pm$ do I.C.)?

$\Rightarrow$ permite evitar que façam afirmações disparatadas

Slide 7c.45

- É possível obter expressões de I.C. para outras estatísticas pela via teórica?

$\Rightarrow$ sim, existem variantes do T.L.C. que permitem obter a distribuição amostral de algumas estatísticas bem comportadas e para amostras de "grande" dimensão

$\Rightarrow$ em alternativa pode-se recorrer à geração da distribuição amostral e do respectivo I.C. por *bootstrap*

- O que é *Significância Estatística*?

$\Rightarrow$ um resultado é estatisticamente significativo se for improvável de ocorrer por razões aleatórias (p.e.: erros medidas)

- Um resultado estatisticamente significativo tem sempre significância prática?

$\Rightarrow$ não, trata-se de um erro muito frequente (p.e.: usando-se amostras muito grandes todas as populações são diferentes, ...)

Slide 7c.46

7.6 Exercícios

1. O fabricante do material a partir do qual são produzidos uns determinados tirantes, afirma que a tensão de ruptura desse material segue uma distribuição normal. Foram realizados sete ensaios, a partir de outros tantos tirantes seleccionados ao acaso, cujos resultados se apresentam na tabela seguinte (tensão de ruptura expressa em kg/mm^2)

49.84	51.83	51.46	49.48	51.99	51.62	51.36

i) Defina o intervalo que, com 95% de confiança, inclui o valor esperado da tensão de ruptura dos tirantes. Defina também o intervalo aberto à direita.

ii) Admita que, com base em resultados obtidos ao longo de vários anos, a variância da tensão de ruptura do material é conhecida e tem o valor 1. Defina o novo intervalo de confiança e comente os resultados.

iii) Qual a dimensão da amostra que é necessário recolher por forma a que a amplitude do intervalo de confiança não exceda 0.6 kg/mm^2?

Slide 7c.47

iv) O fabricante do material anuncia que a tensão de ruptura é de 52 kg/mm^2. Comente o anúncio feito pelo anunciante.

v) Admita que foram realizados mais 8 ensaios, cujos resultados se apresentam na tabela seguinte.

50.83	50.69	51.75	50.62	51.03	49.70	52.01	50.91

Defina o novo intervalo de confiança e comente os resultados.

vi) Pretende-se agora comparar a resistência do material utilizado com a resistência de um novo material recentemente introduzido no mercado. Para tal, efectuaram-se 10 ensaios com o novo material, cujos resultados se apresentam de seguida.

52.41	50.60	50.51	51.85	53.09
52.52	50.55	53.00	52.18	50.32

Construa o intervalo de confiança para a diferença entre os valores esperados da tensão de ruptura dos dois materiais. Verifique se é razoável admitir que as variâncias são iguais e, em caso afirmativo, especifique o novo intervalo de confiança.

Resolução

i)

X: tensão de ruptura de um tirante $\quad$ $\big($em que $X \rightsquigarrow N(\mu, \sigma^2)\big)$

Pretende-se obter um I.C. para o valor esperado de X com base numa amostra de pequena dimensão ($N = 7$) retirada de uma população Normal

$N=7,\qquad \bar{X}=\frac{1}{7}\cdot\sum_{i=1}^{7}X_i=51.08,\qquad s^2\approx\frac{1}{6}\cdot\sum_{i=1}^{7}(X_i-\bar{X})^2=1.00^2$

Dada a reduzida dimensão da amostra a aproximação $\sigma\approx S$ não é válida, pelo que $\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{N}}\rightsquigarrow t_{N-1}$. Nestas condições o I.C. para o valor esperado, μ, a 95% de confiança (ou seja, $\alpha=5\%$) é dado por:

- I.C. bilateral: $(t_6(\alpha/2)=2.447)$

$$\left[\bar{X}-t_{N-1}(\alpha/2)\cdot\frac{S}{\sqrt{N}},\bar{X}+t_{N-1}(\alpha/2)\cdot\frac{S}{\sqrt{N}}\right]=[50.155,\,52.005]$$

- I.C. unilateral aberto à direita: $(t_6(\alpha)=1.943)$

$$\left[\bar{X}-t_{N-1}(\alpha)\cdot\frac{S}{\sqrt{N}},+\infty\right[=[50.346,+\infty[$$

ii)

Agora conhece-se o valor do desvio padrão populacional, $\sigma=1$, pelo que $\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{N}}\rightsquigarrow N(0,\,1)$. Nestas condições o I.C. para o valor esperado a 95% de confiança é dado por ($\alpha=5\%$)

$$\left[\bar{X}-Z(\alpha/2)\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{N}},\bar{X}+Z(\alpha/2)\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{N}}\right]=[50.339,\,51.821]\qquad(Z(\alpha/2)=1.96)$$

Quando desconhecemos o valor de σ, o I.C. terá necessariamente de ter maior amplitude para precaver possíveis erros provenientes da utilização de S em vez de σ. Daí a utilização de $t_{N-1}(\alpha/2)$ em vez de $Z(\alpha/2)$.

iii)

Conhecido σ, a amplitude do I.C. é dada por $2\cdot Z(\alpha/2)\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{N}}$, logo

$$2\cdot Z(0.025)\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{N}}\leq 0.6\Leftrightarrow N\geq\left(\frac{1.96\cdot 1}{0.3}\right)^2\Leftrightarrow N\geq 42.68\quad\longrightarrow\quad N_{min}=43$$

Nota: no caso de desconhecermos σ deve-se começar por assumir que a amostra é de grande dimensão. Nesta situação $S\approx\sigma$ e a resolução é análoga à anterior.

No final deve-se verificar se o N obtido é suficientemente grande para se considerar a amostra de grande dimensão.

Caso o seja a resolução estaria terminada, no caso contrário poderíamos considerar um N maior ou resolver de forma iterativa com base na expressão do I.C. para amostras de pequena dimensão (t_{N-1}).

iv)

De acordo com o resultado da alínea i) não podemos afirmar, com 95% de confiança, que o fabricante está a anunciar uma tensão de ruptura muito alta.

Podemos no entanto duvidar de tal anúncio já que se trata de uma amostra de pequena dimensão e o valor anunciado está muito perto do limite do I.C..

Já o resultado da alínea ii), permite afirmar, com 95% de confiança, que o fabricante está a anunciar uma tensão de ruptura muito alta. Também nesta situação devemos ter cautelas já que se trata de uma amostra de pequena dimensão e o valor anunciado está relativamente perto do limite do I.C..

Para uma resposta mais conclusiva, deverá ser recolhida uma amostra de maior dimensão.

v)

Pretende-se agora obter um I.C. para o valor esperado de X com base numa amostra de grande dimensão retirada de uma população Normal (dado que a distribuição Normal é simétrica e $N=15\geq 10$)

$N=15,\quad \bar{X}=\frac{1}{15}\cdot\sum_{i=1}^{7}X_i=51.01,\quad s^2=\frac{1}{14}\cdot\sum_{i=1}^{7}(X_i-\bar{X})^2=0.83^2$

Dada a dimensão da amostra a aproximação $\sigma\approx S$ é válida, pelo que $\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{N}}\approx\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{N}}\rightsquigarrow N(0,\,1)$

Nestas condições o I.C. para o valor esperado, μ, a 95% de confiança (ou seja, $\alpha=5\%$) é dado por:

$$\left[\bar{X}-Z(\alpha/2)\cdot\frac{S}{\sqrt{N}},\bar{X}+Z(\alpha/2)\cdot\frac{S}{\sqrt{N}}\right]=[50.59,\,51.43]$$

Se considerássemos que a aproximação $S\approx\sigma$ não era razoável, teríamos $\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{N}}\rightsquigarrow t_{N-1}$.

Vindo o I.C. para o valor esperado a 95% de confiança (com $\alpha=5\%$ e $t_{14}(0.025)=2.145$) dado por

$$\left[\bar{X}-t_{N-1}(\alpha/2)\cdot\frac{S}{\sqrt{N}},\bar{X}+t_{N-1}(\alpha/2)\cdot\frac{S}{\sqrt{N}}\right]=[50.55,\,51.47]$$

Notar que: os dois I.C. calculados são muito próximos, já que distribuição t_{N-1} tende para a $N(0,\,1)$ à medida que N aumenta (o 1^o dos I.C. calculados é mais optimista).

Comparando estes I.C. com os obtidos nas alíneas i) e ii), constata-se que têm menor amplitude já que o aumento da dimensão da amostra permitiu reduzir o erro cometido na aproximação $S \approx \sigma$.

Estes I.C. permitem ainda confirmar, com um nível de significância de 5%, que o valor anunciado pelo fabricante do material é demasiado alto.

vi)

Assumindo que as duas amostras são independentes (nada no enunciado indicia o contrário) e provenientes de duas populações Normais com variâncias diferentes (i.e., $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$).

$N_1 = 15, \quad \bar{x}_1 = 51.01, \quad s_1^2 = 0.83^2, \quad N_2 = 10, \quad \bar{x}_2 = 51.70, \quad s_2^2 = 1.10^2$

Nota: não é por s_1^2 ser diferente de s_2^2 que se pode afirmar que $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

Como $N_2 = 10$ considera-se que as amostras são de pequena dimensão.

Nestas condições $\frac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{(S_1/N_1)+(S_2/N_2)}} \rightsquigarrow t_{GL}$ (já que $S^2 \not\approx \sigma^2$), com

$$GL = \frac{\left(\frac{S_1^2}{N_1}+\frac{S_2^2}{N_2}\right)^2}{\frac{\left(S_1^2/N_1\right)^2}{N_1-1}+\frac{\left(S_2^2/N_2\right)^2}{N_2-1}} = \frac{\left(\frac{0.83^2}{15}+\frac{1.10^2}{10}\right)^2}{\frac{(0.83^2/15)^2}{15-1}+\frac{(1.102^2/10)^2}{10-1}} = 15.67 \quad \longrightarrow \quad GL = 15$$

Nota: GL é um número inteiro e o arredondamento para baixo (aumento da amplitude do I.C.) permite manter o nível de confiança.

Os limites de confiança a 95% são dados por $(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) \pm t_{15}(\alpha/2) \cdot \sqrt{(S_1^2/N_1)+(S_2^2/N_2)}$ $\qquad (t_{15}(0.025) = 2.131)$

Vindo o I.C. para a diferença de valores esperados a 95% de confiança

$$\left[(51.01 - 51.70) \pm 2.131 \cdot \sqrt{\frac{0.83^2}{15}+\frac{1.10^2}{10}}\right] = [-1.561,\, 0.181]$$

Como o I.C. calculado inclui o valor 0 não podemos afirmar que um material seja melhor que o outro.

Vamos agora analisar a situação das variâncias das duas populações serem iguais (i.e., $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$), começando por calcular o I.C. para a razão das variâncias (continuando a assumir que o novo material segue uma distr. Normal e que são amostras independentes e de pequena dimensão)

Nestas condições $\dfrac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} \rightsquigarrow F_{N_1-1,N_2-1}$, vindo o I.C. para a razão de variâncias a 95% de confiança dado por

$$\left[\frac{1}{F_{14,9}(\alpha/2)} \cdot \frac{S_1^2}{S_2^2}, \frac{1}{F_{14,9}(1-\alpha/2)} \cdot \frac{S_1^2}{S_2^2}\right] =$$

$$= \left[\frac{1}{3.8} \cdot \frac{0.83^2}{1.10^2}, \frac{1}{0.311} \cdot \frac{0.83^2}{1.10^2}\right] = [0.15,\, 1.83]$$

Como o I.C. inclui o valor 1 é razoável admitir que as variâncias são iguais, devendo-se nesta situação reestimar a variância comum duas populações pela expressão:

$$S^2 = \frac{(N_1-1)\cdot S_1^2 + (N_2-1)\cdot S_2^2}{N_1+N_2-2} = 0.893 = 0.945^2$$

Vindo o I.C. para a diferença de valores esperados a 95% de confiança

$$\left[(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) \pm t_{N_1+N_2-2}(\alpha/2) \cdot S \cdot \sqrt{(1/N_1)+(1/N_2)}\right] \qquad (t_{23}(0.025) = 2.069)$$

Substituindo-se

$$\left[(51.01 - 51.70) \pm 2.069 \cdot 0.945 \cdot \sqrt{(1/15)+(1/10)}\right] = [-1.488,\, 0.108]$$

Tal como no caso anterior, o I.C. calculado não permite afirmar que um material seja melhor (ou pior) que o outro. Como seria de esperar o 2^o I.C. é mais preciso, pois a variância comum foi estimada com base num maior número de valores.

Nota: Neste tipo de exercícios a resolução habitual é começar por analisar a possibilidade de as variâncias populacionais serem iguais com base num I.C. para a razão de variâncias.

De seguida, analisa-se a questão principal (comparação entre valores esperados) recorrendo a um I.C. para a diferença de valores esperados, tendo em consideração o resultado do I.C. para a razão de variâncias. Slide 7c.48

2. A assiduidade dos estudantes às aulas é um problema que preocupa a direção de uma conhecida Universidade localizada na Capital. Suspeita-se que, no 2^{o} semestre, os alunos que estudam numa Faculdade perto do mar, por irem para a praia logo que começa o bom tempo, faltam mais do que aqueles que estudam numa Faculdade localizada no centro da cidade. Para testar esta conjectura foram selecionados aleatoriamente dois grupos de estudantes: 300 pertencentes à Faculdade perto do mar e 400 da outra. Verificou-se que no primeiro grupo 72 estudantes tinham faltado pelo menos um dia às aulas, enquanto que no segundo 78 tinham feito o mesmo.

   Recorrendo a um intervalo com 95% de confiança, verifique se se confirma a suspeita da direção da Universidade (admita que o número de estudantes em cada Faculdade é superior a 5000). Slide 7c.49