

RESOLUÇÃO ASSISTIDA DE PROBLEMAS

CAPÍTULO 6 – CARACTERIZAÇÃO DE ALGUMAS DISTRIBUIÇÕES DISCRETAS UNIVARIADAS

PROBLEMA 6.1

APOIOS À RESOLUÇÃO

Alínea (i)

Apoio 1 (apenas o resultado)

- a) 24.58%.
- b) 9.89%.
- c) 90.11%. ■

Apoio 2 (sugestão)

Note que a variável aleatória “número de grandes prémios terminados” segue uma distribuição Binomial. Na secção 6.1 veja qual a expressão da função de probabilidade de uma variável aleatória Binomial. ■

Apoio 3 (resolução completa)

A variável aleatória Y corresponde ao número de grandes prémios terminados. Admitindo que os resultados associados a cada grande prémio são independentes, então Y segue uma distribuição Binomial $B(6, 0.20)$, cuja função de probabilidade, $p(y)$, é:

$$p(y) = \binom{6}{y} \cdot 0.20^y \cdot 0.80^{6-y}.$$

$$a) \quad p(2) = \binom{6}{2} \cdot 0.20^2 \cdot 0.80^4 = 0.2458$$

(este valor é dado directamente na Tabela da distribuição Binomial, incluída no Anexo «Tabelas»).

$$b) \quad p(Y \geq 3) = p(3) + p(4) + p(5) + p(6) = 1 - [p(0) + p(1) + p(2)] = \\ = 1 - (0.2621 + 0.3932 + 0.2458) = 0.0989.$$

$$c) \quad p(Y \leq 2) = p(0) + p(1) + p(2) = 1 - p(Y \geq 3) = 1 - 0.0989 = 0.9011. \quad \blacksquare$$

Alínea (ii)

Apoio 1 (apenas o resultado)

1.77%. ■

Apoio 2 (sugestão)

Procure caracterizar a variável “número de carros Fórmula 1 patrocinados pela firma RFM à chegada de um grande prémio”. A partir desta variável, procure definir a variável “número de grandes prémios nos quais há pelo menos dois Fórmula 1 à chegada”. ■

Apoio 3 (resolução completa)

Denote-se por U o número de carros fórmula 1 patrocinados pela firma RFM à chegada de um grande prémio. A variável U seguirá a distribuição Binomial $B(3, 0.20)$ e assim

$$p(U \geq 2) = p(2) + p(3) = 0.0960 + 0.0080 = 0.1040.$$

Denote-se por V o número de grandes prémios nos quais há pelo menos dois Fórmula 1 à chegada. A variável V seguirá ainda a distribuição Binomial $B(6, 0.104)$, pelo que

$$p(V \geq 3) = 1 - [p(0) + p(1) + p(2)],$$

com

$$p(0) = (1 - 0.104)^6 = 0.896^6 = 0.5174,$$

$$p(1) = \binom{6}{1} \cdot 0.104 \cdot 0.896^5 = 0.3603 \text{ e}$$

$$p(2) = \binom{6}{2} \cdot 0.104^2 \cdot 0.896^4 = 0.1046.$$

Finalmente

$$p(V \geq 3) = 1 - (0.5174 + 0.3603 + 0.1046) = 0.0177. \blacksquare$$

PROBLEMA 6.2

APOIOS À RESOLUÇÃO

Alínea (i)

Apoio 1 (apenas o resultado)

35.29%. ■

Apoio 2 (sugestão)

Note que a variável aleatória “número de votos favoráveis dos vogais” segue uma distribuição Binomial. Na secção 6.1 veja qual a expressão da função de probabilidade de uma variável aleatória Binomial. ■

Apoio 3 (resolução completa)

Considere-se a hipótese de que os vogais não se abstêm. Nestas condições, e dado que o presidente vota favoravelmente na «sua» proposta, a variável Y , que denota o número de votos favoráveis dos vogais, segue a distribuição Binomial $B(6, 0.35)$. Nestas condições,

$$p(y) = \binom{6}{y} \cdot 0.35^y \cdot 0.65^{6-y}$$

e

$$\begin{aligned} p(Y \geq 3) &= p(3) + p(4) + p(5) + p(6) = 1 - p(Y \leq 2) = 1 - [p(0) + p(1) + p(2)] = \\ &= 1 - (0.0754 + 0.2437 + 0.3280) = 0.3529. \blacksquare \end{aligned}$$

Alínea (ii)

Apoio 1 (apenas o resultado)

82.15%. ■

Apoio 2 (sugestão)

Note que, nesta situação, o número de vogais cujas intenções de voto o presidente da empresa desconhece cinge-se a quatro. ■

Apoio 3 (resolução completa)

Seja Z a variável aleatória que corresponde ao número de votos favoráveis dos vogais cujas intenções de voto o Presidente desconhece. Esta variável segue uma distribuição Binomial $B(4, 0.35)$. Assim,

$$p(z) = \binom{4}{z} \cdot 0.35^z \cdot 0.65^{4-z}$$

e

$$p(Z \geq 1) = 1 - p(0) = 1 - 0.1785 = 0.8215. \blacksquare$$

Alínea (iii)

Apoio 1 (apenas o resultado)

48.07%. ■

Apoio 2 (sugestão)

Procure aplicar o Teorema de Bayes, recorrendo ao conceito de probabilidade condicional. ■

Apoio 3 (resolução completa)

Considere os seguintes acontecimentos:

S1: sucesso na votação prévia

S2: sucesso na votação em concelho.

A probabilidade associada a este segundo acontecimento é

$$P(S2) = P(S2 | S1) \cdot P(S1) + P(S2 | \overline{S1}) \cdot P(\overline{S1}).$$

Seja Y_1 uma variável aleatória que denota o número de votos favoráveis dos dois vogais. Então

$$Y_1 \sim B(2, 0.35).$$

Nestas condições

$$P(S1) = P(Y_1 \geq 1) = 1 - p(0) = 1 - 0.4225 = 0.5775$$

e

$$P(\overline{S1}) = 1 - P(S1) = 1 - 0.5775 = 0.4225.$$

Falta ainda determinar $P(S2 | S1)$ e $P(S2 | \overline{S1})$. Seja Y_2 a variável aleatória que corresponde ao o número de votos favoráveis dos vogais que não participaram na primeira votação. Então

$$Y_2 \sim B(4, 0.35),$$

vindo

$$P(S2 | S1) = P(Y_2 \geq 1) = 1 - p(0) = 1 - 0.1785 = 0.8215$$

e

$$P(S2 | \overline{S1}) = P(Y_2 \geq 4) = P(Y_2 = 4) = 0.0150.$$

Substituindo, resulta

$$P(S2) = 0.8215 \cdot 0.5775 + 0.0150 \cdot 0.4225 = 0.4807. \blacksquare$$

PROBLEMA 6.3

APOIOS À RESOLUÇÃO

Apoio 1 (apenas o resultado)

9.8%. ■

Apoio 2 (sugestão)

Note que a variável aleatória “número de calços defeituosos na remessa de dez” segue uma distribuição Binomial. Na secção 6.1 veja qual a expressão da função de probabilidade de uma variável aleatória Binomial.

Note ainda que a variável aleatória “número de calços defeituosos no conjunto de dois seleccionados retirados aleatoriamente da remessa”, segue uma distribuição Hipergeométrica. Na secção 6.3 veja qual a expressão da função de probabilidade de uma variável aleatória com esta característica.

Recorra ao conceito de probabilidade condicional. ■

Apoio 3 (resolução completa)

Alternativa 1

Seja Y a variável aleatória que corresponde ao número de calços defeituosos na remessa de dez. Esta variável segue uma distribuição Binomial $B(10, 0.05)$. Assim,

$$p(y) = \binom{10}{y} \cdot 0.05^y \cdot 0.95^{10-y},$$

pelo que

$$p(0) = 0.5987$$

$$p(1) = 0.3151$$

$$p(2) = 0.0746$$

$$p(3) = 0.0105$$

e

$p(y > 3)$ corresponde a um valor desprezável.

Seja agora Z a variável aleatória que denota o número de calços defeituosos no conjunto de dois seleccionados aleatoriamente. Esta variável segue a distribuição Hipergeométrica $H(10 \cdot p, 10 \cdot q, 2)$, em que $10 \cdot p$ corresponde ao número de calços defeituosos na remessa e $10 \cdot q$ ao número de calços não defeituosos. Assim,

$$p(z) = \frac{\binom{10 \cdot p}{z} \binom{10 \cdot q}{N-z}}{\binom{10}{2}}.$$

Ora,

$$\begin{aligned} P(Z=0) &= P(Z=0 \mid Y=0) \cdot P(Y=0) + P(Z=0 \mid Y=1) \cdot P(Y=1) + \\ &\quad + P(Z=0 \mid Y=2) \cdot P(Y=2) + P(Z=0 \mid Y=3) \cdot P(Y=3) \end{aligned} \quad (1).$$

Calculam-se agora as probabilidades incluídas nesta expressão.

$$P(Z = 0 \mid Y = 0) = 1.$$

Para determinar $P(Z = 0 \mid Y = 1)$ refira-se que, nestas condições, Z segue uma distribuição $H(1, 9, 2)$. Então

$$p(Z = 0 \mid Y = 1) = \frac{\binom{1}{0} \binom{9}{2}}{\binom{10}{2}} = \frac{1 \cdot 9! \cdot 2! \cdot 8!}{2! \cdot 7! \cdot 10!} = \frac{8}{10} = 0.800.$$

Para determinar $P(Z = 0 \mid Y = 2)$ o raciocínio é semelhante. Com $Y = 2$ a variável Z segue uma distribuição $H(2, 8, 2)$, pelo que

$$p(Z = 0 \mid Y = 2) = \frac{\binom{2}{0} \binom{8}{2}}{\binom{10}{2}} = \frac{1 \cdot 8! \cdot 2! \cdot 8!}{2! \cdot 6! \cdot 10!} = \frac{8 \cdot 7}{10 \cdot 9} = 0.622.$$

Com $Y = 3$ variável Z segue uma $H(3, 7, 2)$, pelo que $P(Z = 0 \mid Y = 3)$ é dado por

$$p(Z = 0 \mid Y = 3) = \frac{\binom{3}{0} \binom{7}{2}}{\binom{10}{2}} = \frac{1 \cdot 7! \cdot 2! \cdot 8!}{2! \cdot 5! \cdot 10!} = \frac{6 \cdot 7}{10 \cdot 9} = 0.467.$$

Substituindo os valores encontrados na expressão (1), vem:

$$P(Z = 0) = 1 \cdot 0.5987 + 0.800 \cdot 0.3151 + 0.622 \cdot 0.0746 + 0.467 \cdot 0.0105 \approx 0.902$$

Assim, a probabilidade de a remessa ser rejeitada é

$$P(Z \geq 1) = 1 - P(Z = 0) = 1 - 0.902 = 0.098.$$

Alternativa 2:

Note que seleccionar dois calços ao acaso a partir de uma remessa supostamente aleatória é o mesmo que retirar uma amostra aleatória de dois calços a partir da população. Então a variável Z (número de calços defeituosos no conjunto de dois seleccionados aleatoriamente) segue uma distribuição $B(2, 0.05)$. Nestas condições,

$$p(z) = \binom{2}{z} \cdot 0.05^z \cdot 0.95^{2-z}$$

e

$$P(Z \geq 1) = 1 - P(Z = 0) = 1 - 0.95^2 = 0.0978 \approx 0.098. \blacksquare$$

PROBLEMA 6.4

APOIOS À RESOLUÇÃO

Alínea (i)

Apoio 1 (apenas o resultado)

48.4%. ■

Apoio 2 (sugestão)

Note que a probabilidade de o operador permanecer 10 minutos sem executar nenhum retoque é equivalente à probabilidade de, numa sequência de 10 peças, nenhuma necessitar de ser retocada. Reveja as definições associadas à distribuição Binomial. ■

Apoio 3 (resolução completa)

Alternativa 1

A probabilidade de o operador permanecer 10 minutos sem executar nenhum retoque é equivalente probabilidade de, numa sequência de 10 peças, nenhuma necessitar de ser retocada.

Seja Y a variável aleatória que denota o número de peças retocadas em 10 minutos. Seja ainda $p = 0.07$ a probabilidade de uma peça ser retocada manualmente pelo operador e $q = 1 - 0.07 = 0.93$ a probabilidade de uma peça não necessitar de ser retocada. A variável Y seguirá então a distribuição Binomial $B(10, 0.07)$. Assim,

$$p(y) = \binom{10}{y} \cdot 0.07^y \cdot 0.93^{10-y}$$

e

$$p(Y = 0) = 0.93^{10} = 0.484. \blacksquare$$

Alínea (ii)

Apoio 1 (apenas o resultado)

1.83%. ■

Apoio 2 (sugestão)

A variável número de peças produzidas sem retoque até ocorrer a segunda peça a necessitar de retoque, segue uma distribuição Binomial Negativa. Na secção 6.3 veja qual a expressão da função de probabilidade de uma variável aleatória com esta característica. ■

Apoio 3 (resolução completa)

Alternativa 1

Seja Y a variável aleatória que corresponde ao número de peças produzidas sem retoque até ocorrer a segunda peça a necessitar de retoque. Esta variável segue uma distribuição Binomial Negativa $BN(2, 0.07)$, cuja função probabilidade é

$$p(y) = \binom{y+2-1}{y} \cdot 0.07^2 \cdot (1-0.07)^y.$$

Assim, numa sequência de seis peças, a probabilidade de a última ser a segunda peça a necessitar de retoque é:

$$p(4) = \binom{5}{4} \cdot (0.07)^2 \cdot (0.93)^4 = 0.0183.$$

Alternativa 2

Note que o facto de, entre 6 produzidas, a sexta peça corresponder à segunda a necessitar de retoque, implica que nas 5 primeiras haja uma a necessitar de retoque e que a sexta peça seja também defeituosa. Considerem-se os acontecimentos:

A: existir uma defeituosa nas 5 primeiras peças produzidas

B: a sexta peça produzida é defeituosa.

A variável Z que denota o número de peças retocadas num conjunto de cinco, segue uma distribuição Binomial $B(5, 0.07)$. Nestas condições, a probabilidade pretendida é

$$p(A \cap B) = p(B|A) \cdot p(A).$$

Ora, $p(A) = p(Z = 1)$ e, portanto,

$$p(Z = 1) = \left[\binom{5}{1} \cdot 0.07^1 \cdot 0.93^4 \right].$$

Por outro lado, como A e B são acontecimentos independentes, $p(B|A) = p(B) = 0.07$.

Substituindo, resulta

$$p(A \cap B) = \left[\binom{5}{1} \cdot 0.07^1 \cdot 0.93^4 \right] \cdot 0.07 = 0.0183 = 1.83\%. \blacksquare$$

Alínea (iii)

Apoio 1 (apenas o resultado)

13.28 minutos. ■

Apoio 2 (sugestão)

Note que o tempo (em minutos) que o operador permanece sem executar nenhum retoque equivale ao número de peças que são produzidas sem necessitarem de qualquer retoque, até

que haja uma que necessite. A variável em questão segue uma distribuição geométrica, que é um caso particular da distribuição Binomial Negativa. ■

Apoio 3 (resolução completa)

Seja Y a variável aleatória que corresponde ao número de peças produzidas até ocorrer a primeira peça a precisar de retoque. Esta variável segue uma distribuição Geométrica $G(0.07)$. O valor esperado de Y é dado por

$$\mu_y = \frac{q}{p},$$

pelo que o tempo que, em média, o operador permanece sem executar nenhum retoque é

$\mu_y = 0.93/0.07 = 13.28$ peças (o que equivale a 13.28 minutos). ■

PROBLEMA 6.5

APOIOS À RESOLUÇÃO

Apoio 1 (apenas o resultado)

$$2 \cdot \frac{5^{N-1} - 4^{N-1}}{6^N}, \text{ com } N \geq 2 \text{ (em que } N \text{ representa o número cartas recebidas).} \blacksquare$$

Apoio 2 (sugestão)

Sejam A e B os selos em falta. A colecção só pode ficar completa após ter sido recebida a segunda carta. Tal sucederá na N -ésima carta ($N \geq 2$) se ocorrer uma das duas situações seguintes:

- (i) Nas $N - 1$ cartas anteriores o coleccionador recebe pelo menos um selo A, não recebe nenhum selo B e na N -ésima carta recebe um selo B.
- (ii) Nas $N - 1$ cartas anteriores coleccionador recebe pelo menos um selo B, não recebe nenhum selo A e na N -ésima carta recebe um selo A. ■

Apoio 3 (resolução completa)

Sejam A e B os selos em falta. A colecção só pode ficar completa após ter sido recebida a segunda carta. Tal sucederá na N -ésima carta ($N \geq 2$) se ocorrer uma das duas situações seguintes:

- (i) Nas $N - 1$ cartas anteriores o coleccionador recebe pelo menos um selo A, não recebe nenhum selo B e na N -ésima carta recebe um selo B.
- (ii) Nas $N - 1$ cartas anteriores o coleccionador recebe pelo menos um selo B, não recebe nenhum selo A e na N -ésima carta recebe um selo A.

As probabilidades de ocorrência destas duas situações são claramente iguais. Calcule-se a primeira. Sejam

Acontecimento B: a última carta (a N -ésima) traz um selo B.

Y : número de selos A nas $N - 1$ cartas que precedem a última.

Z : número de selos B nas $N - 1$ cartas que precedem a última.

Para $N \geq 2$:

$$\begin{aligned} P_N &= P\{[Y \geq 1 \cap Z = 0] \cap B\} = P[Y \geq 1 \cap Z = 0] \cdot P(B) \\ &= P[Y \geq 1 | Z = 0] \cdot P(Z = 0) \cdot P(B) = [1 - P(Y = 0 | Z = 0)] \cdot P(Z = 0) \cdot P(B). \end{aligned}$$

Ora, a variável Z segue uma Binomial $B(N - 1, 1/6)$ e $Y | Z = 0$ uma Binomial $B(N - 1, 1/5)$. Assim,

$$P(Z = 0) = \left(1 - \frac{1}{6}\right)^{N-1} = \left(\frac{5}{6}\right)^{N-1}$$

e

$$P(Y = 0 | Z = 0) = \left(1 - \frac{1}{5}\right)^{N-1} = \left(\frac{4}{5}\right)^{N-1}$$

Substituindo, vem:

$$P_N = \left[1 - \left(\frac{4}{5}\right)^{N-1}\right] \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{N-1} \cdot \frac{1}{6} = \frac{5^{N-1} - 4^{N-1}}{5^{N-1}} \cdot \frac{5^{N-1}}{6^{N-1}} \cdot \frac{1}{6} = \frac{5^{N-1} - 4^{N-1}}{6^N}.$$

A probabilidade de ocorrência da situação (i) ou (ii) é então:

$$2P_N = \begin{cases} 0, & N < 2 \\ 2 \cdot \frac{5^{N-1} - 4^{N-1}}{6^N}, & N \geq 2 \end{cases}$$

■

PROBLEMA 6.6

APOIOS À RESOLUÇÃO

Alínea (i)

Apoio 1 (apenas o resultado)

4.9%. ■

Apoio 2 (sugestão)

Note que a variável aleatória “número de peças defeituosas entre as 5 retiradas do lote” segue uma distribuição Hipergeométrica. Para o cálculo da probabilidade pretendida recorra ao acontecimento complementar. Na secção 6.3 veja qual a expressão da função de probabilidade de uma variável aleatória com esta característica. ■

Apoio 3 (resolução completa)

Seja Y a variável aleatória que denota o número de peças defeituosas entre as 5 retiradas do lote. Então, Y segue uma distribuição Hipergeométrica $H(M \cdot p, M \cdot (1 - p), N)$, em que p representa a proporção de peças defeituosas no lote (com $p = 0.01$) e M o número de peças que compõe o lote (com $M = 300$). Ou seja, Y segue uma distribuição $H(3, 297, 5)$. A função de probabilidade de Y é:

$$p(y) = \frac{\binom{3}{y} \cdot \binom{297}{5-y}}{\binom{300}{5}}.$$

Como

$$p(Y \geq 1) = 1 - p(Y = 0)$$

e

$$p(0) = \frac{\binom{3}{0} \cdot \binom{297}{5}}{\binom{300}{5}} = \frac{297! \cdot 5! \cdot 295!}{5! \cdot 300! \cdot 292!} = 0.951,$$

resulta

$$p(Y \geq 1) = 1 - 0.951 = 0.049. \quad \blacksquare$$

PROBLEMA 6.7

APOIOS À RESOLUÇÃO

Alínea (i)

Apoio 1 (apenas o resultado)

4.19%. ■

Apoio 2 (sugestão)

É razoável admitir que a variável aleatória “número de avarias por unidade de tempo” segue uma distribuição de Poisson. Na secção 6.3 veja qual a expressão da função de probabilidade de uma variável aleatória que segue uma distribuição de Poisson. ■

Apoio 3 (resolução completa)

Para cada máquina, o número médio de avarias por hora é de $\lambda_M = 2 \text{ avarias}/8 \text{ horas} = 0.25$. É razoável admitir que a variável aleatória Y' - número de avarias/hora – segue uma distribuição de Poisson($\lambda_M = 0.25$). Considera-se agora o conjunto de 20 máquinas. Nesta situação, a taxa horária de avarias (das 20 máquinas) será:

$$\lambda_C = 20 \cdot 0.25 = 5 \text{ [avarias/hora]}.$$

Ora, um intervalo de tempo Δt de 10 minutos corresponde a 0.1667 horas. Dado que a probabilidade de se registar uma avaria num intervalo qualquer de dimensão Δt é praticamente proporcional à dimensão do intervalo, a taxa de avarias, para o conjunto das 20 máquinas, em períodos de 10 minutos é dada por:

$$\lambda = \lambda_C \cdot \Delta t = 5 \cdot 0.1667 = 0.8333 \text{ [avarias/10 minutos]}.$$

Nestas condições, a variável aleatória Y , que denota o número de avarias em qualquer período de 10 minutos, seguirá uma distribuição de Poisson($\lambda = 0.8333$). Note-se que a distribuição do número de avarias em cada intervalo de 10 minutos é a mesma para todos os intervalos (constitui uma das condições que se deverá verificar numa distribuição de Poisson). Como a função de probabilidade de Y é

$$p_Y(y) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^y}{y!},$$

vem

$$P(Y = 3) = e^{-0.8333} \cdot \frac{0.8333^3}{3!} = 0.0419. \blacksquare$$

Alínea (ii)

Apoio 1 (apenas o resultado)

Valor esperado: 5 [avarias/hora]

Variância: 5 [avarias/hora]². ■

Apoio 2 (sugestão)

Na secção 6.3 veja quais as expressões do valor esperado e da variância da distribuição de Poisson. ■

Apoio 3 (resolução completa)

Seja Z a variável aleatória que representa o número de avarias/hora que se verificam no conjunto de 20 máquinas. Para este conjunto, a taxa horária de avarias é $\lambda_C = 20 \cdot 0.25 = 5$ e a variável Z seguirá uma distribuição de Poisson($\lambda_C = 5$). Nestas condições,

$$E(Z) = \mu_Z = \lambda_C = 5 \text{ [avarias/hora]}$$

e

$$\text{Var}(Z) = \sigma_Z^2 = \lambda_C = 5 \text{ [avarias/hora]}^2. \blacksquare$$

PROBLEMA 6.8

APOIOS À RESOLUÇÃO

Alínea (i)

Apoio 1 (apenas o resultado)

83.47%. ■

Apoio 2 (sugestão)

A distribuição das variáveis aleatórias “número de bolhas por m²” e “número de bolhas por placa” podem ser aproximadas por distribuições de Poisson. Na secção 6.3 veja qual a expressão da função de probabilidade de uma variável aleatória seguindo uma distribuição de Poisson. ■

Apoio 3 (resolução completa)

Considera-se aceitável admitir que a variável aleatória Y' , número de bolhas por m², segue uma distribuição de Poisson($\lambda = 0.4$). Considerando agora cada placa de $1.5 \cdot 3.0 \text{ m}^2$, o número médio de bolhas por placa (λ_p) será de:

$$\lambda_p = (0.4 \text{ bolhas/m}^2)(1.5 \cdot 3.0 \text{ m}^2) = 1.8 \text{ bolhas/placa.}$$

A variável aleatória Y , número de bolhas por placa, seguirá então uma distribuição de Poisson($\lambda_p = 1.8$). Assim,

$$P(Y \geq 1) = 1 - P(Y = 0) = 1 - e^{-1.8} \cdot \frac{1.8^0}{0!} = 1 - e^{-1.8} = 1 - 0.1653 = 0.8347. \blacksquare$$

Alínea (ii)

Apoio 1 (apenas o resultado)

0.844%. ■

Apoio 2 (sugestão)

Note que a variável aleatória “número de placas sem bolhas de entre um conjunto de seis” segue uma distribuição Binomial. Na secção 6.1 veja qual a expressão da função de probabilidade de uma variável aleatória Binomial. ■

Apoio 3 (resolução completa)

Na alínea (i) admitiu-se que variável aleatória Y , número de bolhas por placa, seguia uma distribuição de Poisson($\lambda_p = 1.8$). Ora (ver Tabela 2 do Anexo Tabelas),

$$P(Y = 0) = 0.1653.$$

Seja Z a variável aleatória que denota o número de placas sem bolhas num conjunto de seis. A variável Z segue uma distribuição Binomial $B(6, 0.1653)$, cuja função probabilidade é

$$p(z) = \binom{6}{z} \cdot 0.1653^z \cdot 0.8347^{6-z}.$$

Assim, como

$$P(Z \geq 4) = p(4) + p(5) + p(6)$$

e

$$p(4) = \binom{6}{4} \cdot 0.1653^4 \cdot 0.8347^2 = 0.00780,$$

$$p(5) = \binom{6}{5} \cdot 0.1653^5 \cdot 0.8347^1 = 0.00062,$$

$$p(6) = \binom{6}{6} \cdot 0.1653^6 \cdot 0.8347^0 = 0.00002,$$

resulta

$$P(Z \geq 4) = 0.00780 + 0.00062 + 0.00002 = 0.00844. \quad \blacksquare$$

PROBLEMA 6.9

APOIOS À RESOLUÇÃO

Alínea (i)

Apoio 1 (apenas o resultado)

53.6 toneladas ■

Apoio 2 (sugestão)

Note que a quantidade de cimento transferida diariamente do comboio para o entreposto (que se denota por Q) é igual à quantidade descarregada diariamente para os camiões. Procure definir a função de probabilidade da variável Q em função do número de camiões que podem chegar diariamente ao entreposto. ■

Apoio 3 (resolução completa)

A variável aleatória Y - número de camiões que se dirigem diariamente ao entreposto – segue uma distribuição de Poisson ($\lambda = 3$). Considere-se agora a variável Q que denota a quantidade de cimento que, diariamente, é transferida do comboio para o entreposto. Ora, Q (em toneladas) é igual à quantidade descarregada diariamente para os camiões o que, por sua vez, corresponde à procura satisfeita diariamente. Assim:

$$Q = \begin{cases} 20 \cdot y & , y \leq 3 \\ 80 & , y > 3 \end{cases}$$

Na tabela seguinte apresentam-se os valores da função probabilidade de Q em função do número de camiões que chegam por dia. Note-se que a capacidade máxima do entreposto equivale à descarga de quatro camiões (80 toneladas) e portanto

$$\begin{aligned} p(Y \geq 4) &= 1 - p(Y \leq 3) = 1 - [p(0) + p(1) + p(2) + p(3)] = \\ &= 1 - (0.0498 + 0.1493 + 0.2241 + 0.2240) = 0.3528. \end{aligned}$$

y [nº. de camiões]	q [toneladas]	$p(Q = q) = p(Y = y)$
0	0	$p(0) = p(Y = 0) = 0.0498$
1	20	$p(20) = p(Y = 1) = 0.1493$
2	40	$p(40) = p(Y = 2) = 0.2241$
3	60	$p(60) = p(Y = 3) = 0.2240$
≥ 4	80	$p(80) = p(Y \geq 4) = 0.3528$

O valor esperado de Q resulta então,

$$E(Q) = \mu_Q = \sum_q q \cdot p(q)$$

$$= 0 \cdot 0.0498 + 20 \cdot 0.1493 + 40 \cdot 0.2241 + 60 \cdot 0.2240 + 80 \cdot 0.3528 = 53.6 \text{ toneladas.} \blacksquare$$

Alínea (ii)

Apoio 1 (apenas o resultado)

6.4 [toneladas]. ■

Apoio 2 (sugestão)

Procure definir a variável aleatória “procura não satisfeita” (PNS) a partir das variáveis aleatórias “procura total” (PT) e “procura satisfeita” (Q). Na Secção 4.5 do Capítulo 4, veja como se calcula o parâmetro valor esperado de uma variável transformada a partir dos

parâmetros das distribuições das variáveis originais. Note que se está perante uma transformação linear. ■

Apoio 3 (resolução completa)

Alternativa 1

Seja,

PT : procura total (diária)

PNS : procura não satisfeita (diariamente)

Q : procura satisfeita (diariamente).

Então,

$$PNS = PT - Q.$$

O valor esperado de PNS é

$$E(PNS) = \mu_{PNS} = E(PT) - E(Q).$$

Ora,

$$PT = 20 \cdot Y,$$

donde

$$E(PT) = \mu_{PT} = 20 \cdot E(Y).$$

Uma vez que Y segue uma distribuição de Poisson($\lambda = 3$), o seu valor esperado é $\mu_Y = 3$ camiões/dia. Então $E(PT) = \mu_{PT} = 20 \cdot 3 = 60$ toneladas/dia, obtendo-se

$$E(PNS) = \mu_{PNS} = E(PT) - E(Q) = 60 - 53.6 = 6.4 \text{ toneladas/dia.}$$

Alternativa 2

A procura não satisfeita (PNS) toma os seguintes valores (em toneladas/dia)

$$PNS = \begin{cases} 0 & , \quad y \leq 4 \\ 20 \cdot y & , \quad y > 4 \end{cases}$$

Na tabela seguinte apresentam-se os valores da função probabilidade de PNS para o número de camiões (y) que, por dia, são desviados por não poderem descarregar (pelo facto de o entreposto estar cheio).

y [nº. de camiões]	pns [toneladas]	$p(Q = q) = p(Y = y)$
≤ 4	0	$p(0) = p(Y = 0) = 0.8153$
5	20	$p(20) = p(Y = 5) = 0.1008$
6	40	$p(40) = p(Y = 6) = 0.0504$
7	60	$p(60) = p(Y = 7) = 0.0216$
8	80	$p(80) = p(Y = 8) = 0.0081$
9	100	$p(100) = p(Y = 9) = 0.0027$
10	120	$p(120) = p(Y = 10) = 0.0008$
11	140	$p(140) = p(Y = 11) = 0.0002$
> 11	> 140	$p(>140) = p(Y > 11) \approx 0$

Ora,

$$\begin{aligned} E(PNS) &= \sum pns \cdot p(pns) \\ &= 20 \cdot 0.1008 + 40 \cdot 0.0504 + 60 \cdot 0.0216 + 80 \cdot 0.0081 + \\ &\quad + 100 \cdot 0.0027 + 120 \cdot 0.0008 + 140 \cdot 0.0002 = 6.37 \approx 6.4 \text{ [toneladas]}. \blacksquare \end{aligned}$$

PROBLEMA 6.10

APOIOS À RESOLUÇÃO

Alínea (i)

Apoio 1 (apenas o resultado)

6.23%. ■

Apoio 2 (sugestão)

O número de insucessos até ocorrer o r -ésimo sucesso (sair a face escolhida) segue uma distribuição Binomial Negativa. Calcule a probabilidade de ganhar o jogo ou ao fim de três lançamentos, ou fim de quatro, ou de cinco, ou de seis. A probabilidade pretendida no enunciado (ganhar uma partida) corresponde à soma das anteriores. Na secção 6.1 veja qual a expressão da função de probabilidade de uma variável aleatória Binomial Negativa.

■

Apoio 3 (resolução completa)

Calcule-se a probabilidade de ganhar o jogo ou ao fim de três lançamentos, ou fim de quatro, ou de cinco, ou de seis. A probabilidade pretendida no enunciado (ganhar uma partida) corresponde à soma das anteriores. A primeira situação ocorre quando em três lançamentos sucessivos se verificam zero insucessos (ou seja, a partida acaba ao fim de três lançamentos), a segunda quando se ganha ao quarto lançamento (o que significa que ocorre um insucesso antes dele) e assim sucessivamente, até à situação em que se obtém o terceiro sucesso apenas no sexto lançamento.

Uma vez que se está perante experiências de Bernoulli, a probabilidade de existirem Y insucessos até ocorrer o r -ésimo sucesso (sair a face escolhida) é dada recorrendo à distribuição Binomial Negativa. No caso em estudo, a variável Y segue uma distribuição Binomial Negativa $BN(r=3, p=1/6)$, cuja função de probabilidade é:

$$p(y) = \binom{y+3-1}{y} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^y.$$

Assim, a probabilidade de ganhar em seis lançamentos é

$$p(Y \leq 3) = p(0) + p(1) + p(2) + p(3).$$

Como

$$p(0) = \binom{2}{0} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^0 = 0.0046$$

$$p(1) = \binom{3}{1} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^1 = 0.0116$$

$$p(2) = \binom{4}{2} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 = 0.0193$$

$$p(3) = \binom{5}{3} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3 = 0.0268,$$

resulta

$$p(Y \leq 3) = 0.0046 + 0.0116 + 0.0193 + 0.0268 = 0.0623. \blacksquare$$

Alínea (ii)

Apoio 1 (apenas o resultado)

5. \blacksquare

Apoio 2 (sugestão)

Em vez de calcular directamente a probabilidade de, entre N partidas jogadas, haver pelo menos uma em que ganha, tente obter a expressão baseada no acontecimento complementar (nenhuma das N partidas é ganha pelo Sr. Jo Gador). Em alternativa, considere a variável aleatória Y que denota o número de partidas que o Sr. Jo Gador joga antes de ganhar pela primeira vez. A variável Y segue uma distribuição Geométrica $G(p)$, em que p corresponde ao resultado obtido na alínea (i). \blacksquare

Apoio 3 (resolução completa)

Alternativa 1

Considerem-se os seguintes acontecimentos:

A: de entre as N partidas jogadas, há pelo menos uma em que o Sr. Jo Gador ganha

\bar{A} : o Sr. Jo Gador perde as N partidas jogadas.

A probabilidade de o Sr. Jo Gador não ganhar uma partida é de $p = 1 - 0.0623 = 0.9377$ (ver o resultado da alínea (i)). A probabilidade de o Sr. Jo Gador não ganhar N partidas (admitindo que os resultados são independentes) será:

$$p(\bar{A}) = (1 - 0.0623)^N = 0.9377^N.$$

Então, a probabilidade de em N partidas ganhar pelo menos uma vem

$$p(A) = 1 - p(\bar{A}) = 1 - 0.9377^N,$$

donde

$$p(A) \geq 0.25 \Rightarrow 1 - 0.9377^N \geq 0.25.$$

Esta inequação pode ser resolvida de duas maneiras:

- Por tentativas:

$$N = 4: 1 - 0.9377^4 = 0.227 \leq 0.25 \quad (\text{pelo que o número de partidas que devem ser jogadas será superior a 4})$$

$$N = 5: 1 - 0.9377^5 = 0.275 \geq 0.25 \quad (\text{o número de partidas que devem ser jogadas será de 5}).$$

- Recorrendo ao cálculo de logaritmos:

$$1 - 0.9377^N \geq 0.25 \Rightarrow 0.9377^N \leq 0.75$$

$$\ln(0.9377^N) \leq \ln(0.75)$$

$$N \cdot \ln(0.9377) \leq \ln(0.75)$$

$$N \cdot (-0.06433) \leq -0.28768$$

$$N \geq \frac{0.28768}{0.06433} = 4.47.$$

Uma vez que N é inteiro, o número de partidas que devem ser jogadas será de $N = 5$.

Alternativa 2

Como se viu na alínea (i), a probabilidade de ganhar uma partida é de $p = 6.23\%$. Seja Y a variável aleatória que denota o número de partidas que o Sr. Jo Gador joga antes de ganhar pela primeira vez. Nesta situação, a variável Y segue uma distribuição Geométrica $G(p = 0.0623)$ (note-se que a distribuição Geométrica é um caso particular da distribuição Binomial Negativa). A função de probabilidade de Y é:

$$p(Y = y) = 0.0623 \cdot (1 - 0.0623)^y.$$

Seja $K = Y + 1$ o número de partidas que o Sr. Jo Gador joga, na condição de ganhar na última pela primeira vez. Na tabela seguinte apresentam-se os valores da função de probabilidade e de distribuição de K para cada valor de Y .

k	y	$p(Y = y)$	$F(y)$
1	0	0.0623	0.0623
2	1	0.0584	0.1207
3	2	0.0548	0.1755
4	3	0.0514	0.2269
5	4	0.0482	0.2750

Dado que para $F(k = 5) \geq 0.25$, o número mínimo de partidas que o Sr. Jo Gador deve jogar será de 5. ■

Alínea (iii)

Apoio 1 (apenas o resultado)

Valor esperado: -33.15 moedas de ouro. ■

Apoio 2 (sugestão)

Note que há seis situações distintas que podem ocorrer: ganhar numa das 5 partidas disponíveis ou não ganhar nenhuma. Determine a probabilidade de ocorrer cada situação e o respectivo lucro. ■

Apoio 3 (resolução completa)

Há seis situações distintas que podem ocorrer: ganhar numa das 5 partidas disponíveis ou não ganhar nenhuma.

Determine-a probabilidade de ocorrer a última situação (não ganhar nenhuma partida) e o respectivo lucro. Denote-se por L o lucro obtido e por Y o número de partidas ganhas em 5 tentativas. A variável aleatória Y segue uma distribuição Binomial $B(N = 5, p = 0.0623)$ (ver resultado da alínea (i)). A probabilidade de não ganhar nenhuma partida é dada por:

$$p(0) = \binom{5}{0} \cdot (0.0623)^0 \cdot (1 - 0.0623)^5 = 0.7250.$$

A este resultado está associado um lucro (negativo) de $L = 0 \cdot 30 - 5 \cdot 10 = -50$ [moedas de ouro].

Seja Y a variável aleatória que denota o número de partidas que o Sr. Jo Gador joga antes de ganhar pela primeira vez. Nesta situação, a variável Y segue uma distribuição Geométrica $G(p = 0.0623)$ e o lucro é dado por $L = 30 - 10 \cdot Y$. Atendendo às regras estabelecidas pelo Sr. Jo Gador, Y deverá ser inferior a 5 ($Y \leq 4$).

Na tabela seguinte apresentam-se os cinco valores da função de probabilidade de Y e de L para as cinco situações que faltam considerar: ganhar numa das 5 partidas disponíveis.

y	$p(Y=y)$	L	$p(L=l)$
0	0.0623	30	$P(L=30) = p(Y=0) = 0.0623$
1	0.0584	20	$P(L=20) = p(Y=1) = 0.0584$
2	0.0548	10	$P(L=10) = p(Y=2) = 0.0548$
3	0.0514	0	$P(L=0) = p(Y=3) = 0.0514$
4	0.0482	-10	$P(L=-10) = p(Y=4) = 0.0482$

O valor esperado lucro é dado por

$$\begin{aligned} E(L) &= \sum_{l=-10}^{30} l \cdot p(l) = -50 \cdot 0.7250 + 30 \cdot 0.0623 + \\ &\quad + 20 \cdot 0.0584 + 10 \cdot 0.0548 - 10 \cdot 0.0482 = -33.15 \text{ [moedas de ouro]}. \blacksquare \end{aligned}$$

APÊNDICE

Distribuições Discretas no “Microsoft Excel”

Distribuição Binomial

BINOMDIST: Dá o valor da função de probabilidade [$P(Y = y_0)$] e da função de probabilidade acumulada [$P(Y \leq y_0)$] da distribuição Binomial.

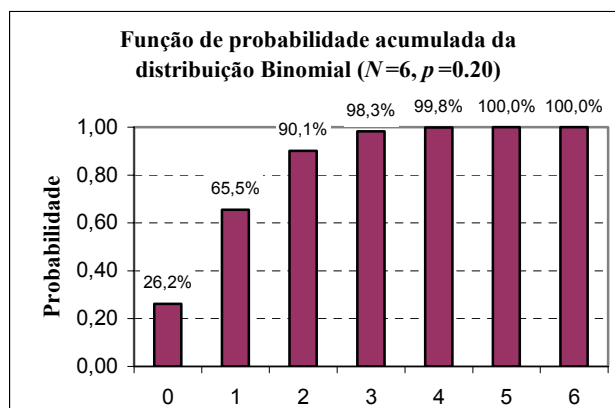
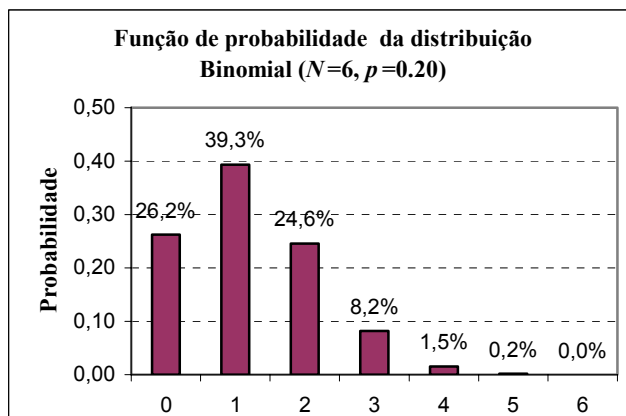
Exemplo: Se Y for $B(6,0.20)$, calcular $P(Y = 2)$ [= 0.24576] e $P(Y \leq 2)$ [= 0.90112].

Number_s: número de sucessos: 2
Trials: número de experiências: 6
Probability_s: probabilidade de um sucesso: 0.20
Cumulative: FALSE – dá a função de probabilidade
TRUE – dá a função de probabilidade acumulada

CRITBINOM: Dá o menor valor da variável Binomial para o qual a função de probabilidade acumulada é maior ou igual a um determinado valor.

Exemplo: Se Y for $B(6,0.20)$, calcular o menor valor de y_0 para o qual $P(Y \leq y_0) \geq 70\%$ [$y_0 = 2$]

Trials: número de experiências: 6
Probability_s: probabilidade de um sucesso: 0.20
Alpha: valor da probabilidade em análise: 0.70



Distribuição Hipergeométrica

HYPGEOMDIST: Dá o valor da função de probabilidade da distribuição Hipergeométrica.

Exemplo: Se Y for $H(3, 297, 5)$, calcular $P(Y = 1)$ [= 0.048669].

Sample_s: número de sucessos: 1

Number_sample: número de experiências: 5

Population_s: número de sucessos na população: 3

Number_pop: dimensão total da população: 300

Distribuição Binomial Negativa

NEGBINOMDIST: Dá o valor da função de probabilidade da distribuição Binomial Negativa [$\text{Prob}(Y = y_0)$], isto é, dá a probabilidade de existirem y_0 insucessos até ocorrer o r -ésimo sucesso.

Exemplo: Se $Y \rightarrow BN(r = 2, p = 0.07)$, calcular $P(Y = 4)$ [= 0.0183].

Number_f: número de insucessos ocorridos até ao r -ésimo sucesso: 4

Number_s: valor de r : 2

Probability_s: probabilidade de ocorrer um sucesso: 0.07

Distribuição de Poisson

POISSON: Dá o valor da função de probabilidade [$P(Y = y_0)$] e da função de probabilidade acumulada da distribuição de Poisson [$P(Y \leq y_0)$].

Exemplo: Se Y for Poisson ($\lambda = 0.833$), calcular $P(Y = 2)$ [= 0.15083] e $P(Y \leq 2)$ [= 0.94772].

Y: número de ocorrências no intervalo considerado: 2

Mean: número médio de ocorrências por unidade de tempo (λ): 0.833

Cumulative: TRUE – dá a função de probabilidade acumulada
FALSE – dá a função de probabilidade

RESOLUÇÃO ASSISTIDA DE PROBLEMAS

CAPÍTULO 7 – CARACTERIZAÇÃO DE ALGUMAS DISTRIBUIÇÕES CONTÍNUAS UNIVARIADAS

PROBLEMA 7.1

APOIOS À RESOLUÇÃO

Alínea (i)

Apoio 1 (apenas o resultado)

26.4%. ■

Apoio 2 (sugestão)

A variável aleatória “tempo entre avarias consecutivas”, Δ_t , segue uma distribuição Exponencial Negativa. Note que a probabilidade de não ocorrer qualquer avaria antes do instante $t = 6$ horas é equivalente à probabilidade de o tempo entre avarias consecutivas, Δ_t , ser superior a 6 horas. Na secção 7.2 veja qual a expressão da função de distribuição de uma variável aleatória com estas características. ■

Apoio 3 (resolução completa)

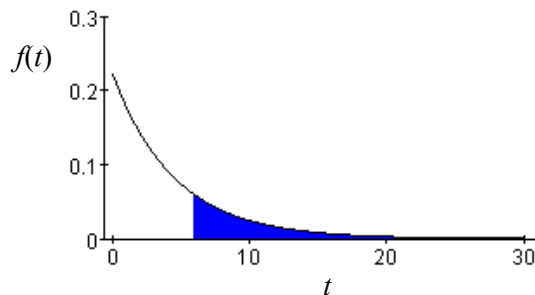
A variável aleatória “tempo entre avarias consecutivas”, t , segue uma distribuição Exponencial Negativa $EN(\mu = 1/\lambda = 4.5 \text{ horas})$, onde λ representa a taxa (média) de avarias por hora. A função distribuição $F(t)$, que corresponde à probabilidade de ocorrer pelo menos uma avaria no intervalo $[0, t]$, é dada por

$$F(t) = 1 - e^{-\frac{1}{4.5}t}, \text{ com } t > 0.$$

Assim, a probabilidade pretendida vem

$$P(t \geq 6) = 1 - F(6) = 1 - \left(1 - e^{-\frac{6}{4.5}}\right) = e^{-\frac{6}{4.5}} = e^{-1.333} = 0.264.$$

Na figura seguinte representa-se esta função densidade de probabilidade de t para $\lambda = 1/4.5$, bem como a área que corresponde a $P(t \geq 6)$.



■

Alínea (ii)

Apoio 1 (apenas o resultado)

6.41%. ■

Apoio 2 (sugestão)

A probabilidade pretendida é condicional (ver definição na secção 7.1, expressão 7.10). ■

Apoio 3 (resolução completa)

Pretende-se calcular a probabilidade condicional

$$P(t \geq 6 | t \geq 4) = \frac{P(t \geq 6 \wedge t \geq 4)}{P(t \geq 4)} = \frac{P(t \geq 6)}{P(t \geq 4)}.$$

Ora

$$P(t \geq 6) = 1 - F(6) = 1 - \left(1 - e^{-\frac{6}{4.5}}\right) = e^{-\frac{6}{4.5}} = e^{-1.333} = 0.264$$

e

$$P(t \geq 4) = 1 - F(4) = 1 - \left(1 - e^{-\frac{4}{4.5}}\right) = e^{-\frac{4}{4.5}} = e^{-0.889} = 0.411.$$

Substituindo,

$$P(t \geq 6 | t \geq 4) = \frac{0.264}{0.411} = 0.641.$$

Note-se que, uma vez que t segue uma distribuição Exponencial Negativa, resulta que $P(t \geq 6 | t \geq 4) = P(t \geq 2)$. De facto,

$$P(t \geq 2) = 1 - F(2) = 1 - \left(1 - e^{-\frac{2}{4.5}}\right) = e^{-\frac{2}{4.5}} = e^{-0.444} = 0.641. \quad \blacksquare$$

Alínea (iii)

Apoio 1 (apenas o resultado)

23.4%. ■

Apoio 2 (sugestão)

Note que, a variável aleatória “número de avarias por unidade de tempo” segue uma distribuição de Poisson. Na secção 6.3 veja qual a expressão da função de probabilidade de uma variável aleatória seguindo uma distribuição de Poisson. ■

Apoio 3 (resolução completa)

Seja Y a variável aleatória que denota o número de avarias por período de 6 horas. Sabe-se que o número médio de avarias por hora é de $\lambda = 1/4.5$. Dado que a probabilidade de se registar uma avaria num intervalo qualquer de dimensão t é praticamente proporcional à dimensão do intervalo, vem que

$$\lambda_t = \lambda \cdot t = \frac{1}{4.5} \cdot 6 = 1.333 \text{ [avarías / 6 horas]}.$$

Nestas condições, Y segue uma distribuição de Poisson ($\lambda = 1.333$). Recorrendo à expressão da função de probabilidade de Y vem

$$P(Y = 2) = e^{-1.333} \cdot \frac{1.333^2}{2!} = 0.234. \quad \blacksquare$$

PROBLEMA 7.2

APOIOS À RESOLUÇÃO

Alínea (i)

Apoio 1 (apenas o resultado)

1.08%. ■

Apoio 2 (sugestão)

Considere que as alturas, X , dos cidadãos são medidas com uma precisão de ± 0.005 m (± 0.5 cm). Comece por padronizar a variável X (na secção 7.3 veja como se efectua esta transformação). Seguidamente recorra à Tabela 3, do Anexo «Tabelas», para determinar a probabilidade pretendida. ■

Apoio 3 (resolução completa)

Denote-se por X a variável aleatória que representa a altura dos cidadãos adultos de um determinado país. Admita-se que as alturas dos cidadãos são medidas com uma precisão de ± 0.005 m (± 0.5 cm). Ora, X segue uma distribuição Normal $N(\mu_x = 1.7, \sigma_x = 0.05)$. Padronize-se a variável X :

$$Z = \frac{X - \mu_x}{\sigma_x} \quad (\text{note-se que } Z \text{ é uma Normal } N(0, 1)).$$

Assim,

$$\begin{aligned} P(1.795 \leq X \leq 1.805) &= P\left(\frac{1.795 - 1.700}{0.05} \leq Z = \frac{X - 1.700}{0.05} \leq \frac{1.805 - 1.700}{0.05}\right) \\ &= P(1.9 \leq Z \leq 2.1) = P(Z \geq 1.9) - P(Z \geq 2.1) \\ &= 0.0287 - 0.0179 = 0.0108 \text{ (ver Tabela 3, do Anexo «Tabelas»)}. \blacksquare \end{aligned}$$

Alínea (ii)

Apoio 1 (apenas o resultado)

1.79%. ■

Apoio 2 (sugestão)

Comece por padronizar a variável X (na secção 7.3 veja como se efectua esta transformação). Seguidamente recorra à Tabela 3, do Anexo «Tabelas», para determinar a probabilidade pretendida. ■

Apoio 3 (resolução completa)

A variável aleatória X , que representa a altura dos cidadãos adultos de um determinado país, segue uma distribuição Normal $N(\mu_x = 1.7, \sigma_x = 0.05)$. Padronizando a variável X vem

$$\begin{aligned} P(X \geq 1.805) &= P\left(Z = \frac{X - 1.700}{0.05} \geq \frac{1.805 - 1.700}{0.05}\right) \\ &= P(Z \geq 2.1) = 0.0179. \blacksquare \end{aligned}$$

Alínea (iii)

Apoio 1 (apenas o resultado)

1.32%. ■

Apoio 2 (sugestão)

A probabilidade pretendida é condicional (ver definição na secção 3.1, expressão 3.10). ■

Apoio 3 (resolução completa)

A variável aleatória X , que representa a altura dos cidadãos adultos de um determinado país, segue uma distribuição Normal $N(\mu_x = 1.700, \sigma_x = 0.05)$. A probabilidade condicional pretendida é:

$$P(X \geq 1.805 \mid X \geq 1.755) = \frac{P(X \geq 1.805 \wedge X \geq 1.755)}{P(X \geq 1.755)} = \frac{P(X \geq 1.805)}{P(X \geq 1.755)}.$$

Ora,

$$P(X \geq 1.805) = 0.0179$$

e

$$\begin{aligned} P(X \geq 1.755) &= P\left(Z = \frac{X - 1.700}{0.05} \geq \frac{1.755 - 1.700}{0.05}\right) \\ &= P(Z \geq 1.1) = 0.1357. \end{aligned}$$

Finalmente,

$$P(X \geq 1.805 \mid X \geq 1.755) = \frac{0.0179}{0.1357} = 0.132. \blacksquare$$

Alínea (iv)

Apoio 1 (apenas o resultado)

96.42%. ■

Apoio 2 (sugestão)

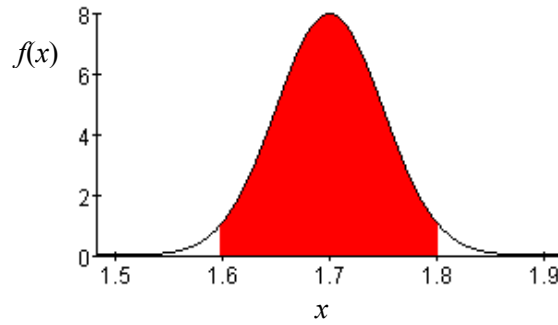
Comece por padronizar a variável X (na secção 7.3 veja como se efectua esta transformação). Seguidamente recorra à Tabela 3, do Anexo «Tabelas», para determinar a probabilidade pretendida. ■

Apoio 3 (resolução completa)

A variável aleatória X , que representa a altura dos cidadãos adultos de um determinado país, segue uma distribuição Normal $N(\mu_x = 1.7, \sigma_x = 0.05)$. Assim

$$\begin{aligned} P(1.595 \leq X \leq 1.805) &= P\left(\frac{1.595 - 1.700}{0.05} \leq Z = \frac{X - 1.700}{0.05} \leq \frac{1.805 - 1.700}{0.05}\right) \\ &= P(-2.1 \leq Z \leq 2.1) \\ &= P(Z \geq -2.1) - P(Z \geq 2.1) = 1 - P(Z \geq 2.1) - P(Z \geq 2.1) \\ &= 1 - 2 \cdot P(Z \geq 2.1) = 1 - 2 \cdot 0.0179 = 0.9642. \end{aligned}$$

Na figura seguinte representa-se a função densidade de probabilidade de X e a área correspondente à probabilidade pretendida.



■

PROBLEMA 7.3

APOIOS À RESOLUÇÃO

Alínea (i)

Apoio 1 (apenas o resultado)

46.81%. ■

Apoio 2 (sugestão)

Recorra à transformação logarítmica da variável “rendimento mensal de um agricultor”. De acordo com a definição de distribuição Lognormal, a variável transformada, V , seguirá uma distribuição Normal. Veja na Secção 7.52, as expressões dos parâmetros da variável transformada V . ■

Apoio 3 (resolução completa)

A variável aleatória X , que representa o rendimento mensal (milhares de euros) dos agricultores numa determinada região, é Lognormal $LN(\mu_X = 3.25, \sigma_X^2 = 0.25)$. Assim

$$V = \ln X \rightsquigarrow N(\mu_V, \sigma_V^2),$$

com

$$\mu_V = \frac{1}{2} \cdot \ln\left(\frac{\mu_X^4}{\sigma_X^2 + \mu_X^2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \ln\left(\frac{3.25^4}{0.25 + 3.25^2}\right) = 1.167$$

e

$$\sigma_V^2 = \ln\left(\frac{\sigma_X^2}{\mu_X^2} + 1\right) = \ln\left(\frac{0.25}{3.25^2} + 1\right) = 0.153^2.$$

Nestas condições,

$$\begin{aligned} P(X > 3.25) &= P(V = \ln X > \ln 3.25) = P(V > 1.179) \\ &= P\left(Z = \frac{V - 1.167}{0.153} > \frac{1.179 - 1.167}{0.153}\right) = 0.08 \\ &= 0.4681. \blacksquare \end{aligned}$$

Alínea (ii)

Apoio 1 (apenas o resultado)

3.21. ■

Apoio 2 (sugestão)

Na secção 7.5.2 apresenta-se a expressão para a mediana de uma distribuição Lognormal, que é função do valor esperado da variável transformada V . ■

Apoio 3 (resolução completa)

A mediana de X é dada por

$$\eta_X = e^{\mu_V} = e^{1.167} = 3.21$$

Note que, ao contrário da distribuição Normal, a distribuição Lognormal é assimétrica à direita. ■

Alínea (iii)

Apoio 1 (apenas o resultado)

≈ 0 . ■

Apoio 2 (sugestão)

Recorra à padronização da variável transformada V , consultando posteriormente a tabela da distribuição Normal padronizada (Tabela 3 do Anexo «Tabelas»). ■

Apoio 3 (resolução completa)

A variável aleatória X , que rendimento mensal (milhares de euros) dos agricultores numa determinada região é Lognormal $LN(\mu_X = 3.25, \sigma_X^2 = 0.25)$. A variável transformada $V = \ln X$ segue uma distribuição Normal $N(\mu_V, \sigma_V^2)$. Nestas condições,

$$P(X < 0.9) = P(V < \ln 0.9) = P(V < -0.105)$$

$$= P\left(Z = \frac{V - 1.167}{0.153} < \frac{-0.105 - 1.167}{0.153} = -8.32\right)$$

$$= P(Z < -8.32) \approx 0. \blacksquare$$

PROBLEMA 7.4

APOIOS À RESOLUÇÃO

Apoio 1 (apenas o resultado)

22.84%. \blacksquare

Apoio 2 (sugestão)

Note que a variável aleatória “número de peças com grau de qualidade A incluídas na amostra” segue uma distribuição Hipergeométrica. Procure aproximar esta distribuição por uma distribuição Normal cujos parâmetros valor esperado e desvio padrão são os mesmos da distribuição Hipergeométrica. \blacksquare

Apoio 3 (resolução completa)

A variável aleatória X , que denota número de peças com grau de qualidade A incluídas na amostra, segue uma distribuição Hipergeométrica $H(7000 \cdot p, 7000 \cdot q, 300)$. O parâmetro $p = 5000/7000 = 5/7$ corresponde à proporção de peças com grau de qualidade A e $q = 1 - p = 2/7$ à proporção de peças com grau de qualidade B. Assim

$$X \rightsquigarrow H(5000, 2000, 300),$$

com

$$\mu_X = N \cdot p = 300 \cdot \frac{5}{7} = 214.3 \text{ [peças]}$$

$$\sigma_X^2 = N \cdot p \cdot q \cdot \frac{M - N}{M - 1} = 300 \cdot \frac{5}{7} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{7000 - 300}{7000 - 1} = 58.6 \text{ [peças}^2\text{]}$$

e

$$\sigma_X = \sqrt{58.6} = 7.66 \text{ [peças]}.$$

Uma vez que $M \geq 10 \cdot N$, esta distribuição Hipergeométrica pode ser aproximada por uma distribuição Binomial. Por sua vez, dado que $N \geq 20$ e $N \cdot p > 7$, a distribuição Binomial pode ser aproximada por uma distribuição Normal. Assim, admite-se que X segue aproximadamente uma distribuição Normal $N(\mu = 214.3, \sigma^2 = 58.6)$, vindo

$$P(X > 220) = P\left(Z = \frac{X - 214.3}{7.66} > \frac{220 - 214.3}{7.66}\right)$$

$$= P(Z > 0.744).$$

Ora

$$\left. \begin{array}{l} P(Z > 0.74) = 0.2296 \\ P(Z > 0.75) = 0.2266 \end{array} \right\} \text{ver Tabela 3, do Anexo «Tabelas»}$$

Efectuando uma interpolação linear obtém-se

$$\begin{aligned} P(Z > 0.744) &= 0.2296 - \frac{0.2296 - 0.2266}{0.75 - 0.74} \cdot (0.744 - 0.74) = 0.2296 - \frac{4}{10} \cdot 0.0030 \\ &= 0.2284. \blacksquare \end{aligned}$$

PROBLEMA 7.5

APOIOS À RESOLUÇÃO

Alínea (i)

Apoio 1 (apenas o resultado)

10.12. ■

Apoio 2 (sugestão)

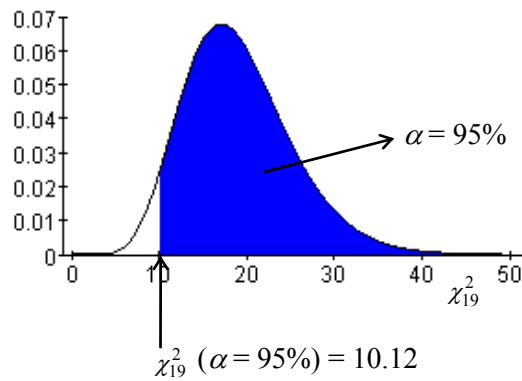
O valor pretendido pode ser obtido directamente da Tabela 4 no Anexo «Tabelas». ■

Apoio 3 (resolução completa)

A variável X segue uma distribuição χ^2_{19} . Na Tabela 4 do Anexo «Tabelas» registam-se os

valores críticos de distribuições $\chi^2_{GL}(\alpha)$, tais que $\alpha = \int_{\chi^2_{GL}(\alpha)}^{\infty} f(u) \cdot du$.

Ora, o valor de x_0 que satisfaz a condição $P(X < x_0) = 5\%$ satisfaz também $P(X > x_0) = 95\%$. Consultando a tabela obtém-se directamente $x_0 = 10.12$. Na figura seguinte representa-se a função densidade de probabilidade da distribuição χ^2_{19} e o valor correspondente à probabilidade pretendida.



■

Alínea (ii)

Apoio 1 (apenas o resultado)

72.5%. ■

Apoio 2 (sugestão)

O valor pretendido pode ser obtido directamente da Tabela 4 no Anexo «Tabelas». ■

Apoio 3 (resolução completa)

Note que na Tabela 4 do Anexo «Tabelas» se registam os valores críticos de distribuições $\chi^2_{GL}(\alpha)$ e não as probabilidades associadas às caudas (tal como na distribuição Normal). Estes valores podem ser obtidos directamente desta tabela:

$$\begin{aligned} P(8.91 < X < 22.72) &= P(X < 8.91) - P(X > 22.72) \\ &= 0.975 - 0.250 \\ &= 0.725. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

PROBLEMA 7.6

APOIOS À RESOLUÇÃO

Alínea (i)

Apoio 1 (apenas o resultado)

2.998. ■

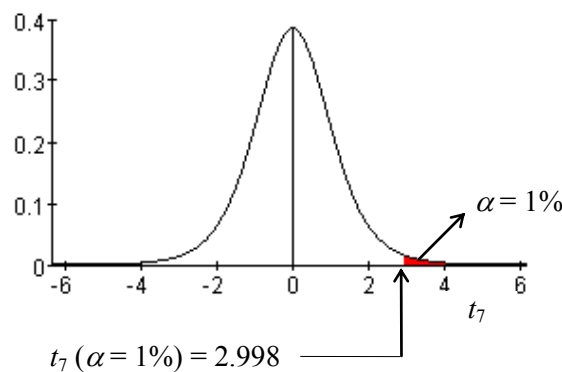
Apoio 2 (sugestão)

O valor pretendido pode ser obtido directamente da Tabela 5 no Anexo «Tabelas». ■

Apoio 3 (resolução completa)

A variável V segue uma distribuição t_7 . Na Tabela 5 do Anexo «Tabelas» registam-se as probabilidades associadas à cauda direita de distribuições $t_{GL}(\alpha)$, tais que $\alpha = \int_{t_{GL}(\alpha)}^{\infty} f(u) \cdot du$.

Consultando a tabela obtém-se directamente o valor de v_0 que satisfaz a condição $P(V > v_0) = 1\%$. Tal valor é $v_0 = 2.998$. Na figura seguinte representa-se a função densidade de probabilidade da distribuição t_7 e o valor correspondente à probabilidade pretendida.



Alínea (ii)

Apoio 1 (apenas o resultado)

84.0%. ■

Apoio 2 (sugestão)

A probabilidade pretendida pode ser calculada com base nos valores que se apresentam na Tabela 5 do Anexo «Tabelas». ■

Apoio 3 (resolução completa)

Pretende-se calcular $P(-1.12 < V < 2.99)$. Ora,

$$P(-1.12 < V < 2.99) = P(V < 2.99) - P(V < -1.12) = 1 - [P(V > 2.99) + P(V > -1.12)].$$

Recorrendo à Tabela 5 do Anexo «Tabelas» é fácil determinar estas probabilidades:

$$1 - [P(V > 2.99) + P(V > -1.12)] = 1 - [0.010 + 0.150] = 0.840. \quad \blacksquare$$

PROBLEMA 7.7

APOIOS À RESOLUÇÃO

Alínea (i)

Apoio 1 (apenas o resultado)

1.89. ■

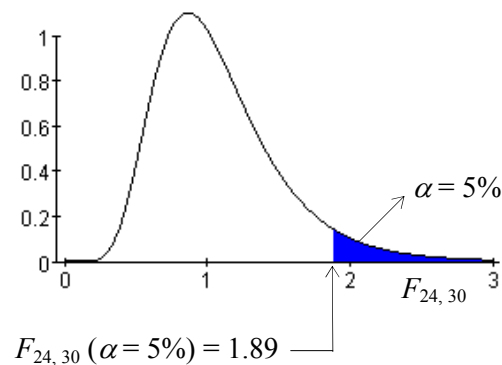
Apoio 2 (sugestão)

O valor pretendido pode ser obtido directamente da Tabela 6 no Anexo «Tabelas». ■

Apoio 3 (resolução completa)

A variável U segue uma distribuição $F_{24, 30}$. Na Tabela 6 do Anexo «Tabelas» registam-se os valores $F_{GL_1, GL_2}(\alpha)$, tais que $\alpha = \int_{F_{GL_1, GL_2}(\alpha)}^{\infty} f(u) \cdot du$.

Consultando a tabela obtém-se directamente o valor de u_0 que satisfaz a condição $P(U > u_0) = 5\%$. Tal valor é $u_0 = 1.89$. Na figura seguinte representa-se a função densidade de probabilidade da distribuição $F_{24,30}$ e o valor correspondente à probabilidade pretendida.



■

Alínea (ii)

Apoio 1 (apenas o resultado)

0.388 ■

Apoio 2 (sugestão)

Para determinar o valor pretendido recorra à seguinte relação

$$F_{GL_1, GL_2}(1-\alpha) = \frac{1}{F_{GL_2, GL_1}(\alpha)} \cdot \blacksquare$$

Apoio 3 (resolução completa)

Seja α a probabilidade associada à cauda direita da distribuição $F_{GL_1, GL_2}(\alpha)$, ou seja,

$$\alpha = \int_{F_{GL_1, GL_2}(\alpha)}^{\infty} f(u) \cdot du .$$

Para se obterem os valores $F_{GL_1, GL_2}(1-\alpha)$ correspondentes a áreas de valor α situadas na cauda esquerda da distribuição F_{GL_1, GL_2} , recorre-se á seguinte expressão;

$$F_{GL_1, GL_2}(1-\alpha) = \frac{1}{F_{GL_2, GL_1}(\alpha)} \cdot$$

O valor de u_1 que satisfaz a condição $P(U = F_{24, 30} < u_1) = 1\%$ corresponde ao valor da distribuição $F_{24, 30}$ cuja área à sua direita é de 99%. Assim

$$F_{24, 30}(0.99) = \frac{1}{F_{30, 24}(0.01)} \cdot$$

Recorrendo à Tabela 6 verifica-se que $P(F_{30, 24} > 2.58) = 1\%$, donde

$$F_{24, 30}(0.99) = \frac{1}{2.58} \Rightarrow u_1 = \frac{1}{2.58} = 0.388 \cdot \blacksquare$$

PROBLEMA 7.8

APOIOS À RESOLUÇÃO

Apoio 1 (apenas o resultado)

15.15%. \blacksquare

Apoio 2 (sugestão)

Repare que a probabilidade de uma variável tomar um valor superior ao de uma outra, é equivalente a considerar-se a probabilidade de uma nova variável, que resulta da diferença entre as duas anteriores, ser superior a zero. Recorde que a combinação linear de duas variáveis normais independentes segue ainda uma distribuição Normal. \blacksquare

Apoio 3 (resolução completa)

Denote-se por D_T a longevidade de um pilha do tipo T (em horas) e por D_A a longevidade de uma pilha do tipo A. A probabilidade pretendida é:

$$P(D_T > D_A) = P(D_T - D_A > 0).$$

A variável $(D_T - D_A)$ resulta da diferença entre duas distribuições Normais, pelo que também é Normal. Atendendo a que D_T e D_A são presumivelmente independentes, o valor esperado e a variância de $(D_T - D_A)$ vêm dados por:

$$E(D_T - D_A) = E(D_T) - E(D_A) = 150 - 156 = -6$$

$$\text{Var}(D_T - D_A) = \text{Var}(D_T) + \text{Var}(D_A) = 25 + 9 = 34.$$

Assim,

$$\begin{aligned} P(D_T - D_A > 0) &= P\left[\frac{(D_T - D_A) - (-6)}{\sqrt{34}} = Z > \frac{0 + 6}{\sqrt{34}}\right] \\ &= P(Z > 1.03) = 0.1515. \blacksquare \end{aligned}$$

APÊNDICE

Distribuições Contínuas no “Microsoft Excel”

Distribuição Normal

NORMDIST: dá o valor da função de probabilidade acumulada $[P(X \leq x_0)]$ e da função densidade de probabilidade $f(x_0)$.

Exemplo: Se X for Normal ($\mu = 2.5$, $\sigma = 1.2$), calcular $P(X \leq 1.6)$ [= 0.2266] e $f(x_0 = 1.6)$ [= 0.2509].

X: valor em análise: 1.6
Mean: valor esperado (μ): 2.5
Standard_dev: desvio padrão (σ): 1.2
Cumulative: TRUE – dá o valor da função de probabilidade acumulada
FALSE – dá o valor da função densidade de probabilidade

NORMINV: dá o valor crítico (x_0) cuja função de probabilidade acumulada é igual a um determinado valor $P1$. [$\text{Prob}(X \leq x_0) = P1$].

Exemplo: Se X for Normal ($\mu = 2.5$, $\sigma = 1.2$), calcular x_0 tal que $P(X \leq x_0) = 0.900$ [= 4.0379].

Probability: valor da probabilidade acumulada: 0.90
Mean: valor esperado (μ): 2.5
Standard_dev: desvio padrão (σ): 1.2

NORMSDIST: dá o valor da função de probabilidade acumulada $[P(Z \leq z_0)]$ da distribuição Normal padronizada.

Exemplo: Se Z for Normal ($\mu = 0$, $\sigma = 1$), calcular $P(Z \leq 1.645)$ [= 0.9500].

Z: valor em análise: 1.645

NORMSINV: dá o valor crítico (z_0) cuja função de probabilidade acumulada da distribuição Normal padronizada é igual a um determinado valor $P1$ [$\text{Prob}(Z \leq z_0) = P1$].

Exemplo: Se Z for Normal ($\mu = 0$, $\sigma = 1$), calcular z_0 tal que $P(Z \leq z_0) = 0.025$ [= -1.9600].

Probability: valor da probabilidade acumulada: 0.025

STANDARDIZE: Padroniza o valor de uma variável X que segue uma distribuição Normal qualquer.

Exemplo: Se X for Normal ($\mu = 2.5$, $\sigma = 1.2$), obter o valor padronizado de $X = 0.7$ [= -1.5].

X: valor da variável a padronizar: 0.7
Mean: valor esperado (μ): 2.5
Standard_dev: desvio padrão (σ): 1.2

Distribuição t de Student

TDIST: dá, para um determinado valor positivo (t_0) da distribuição t_{GL} , a probabilidade de obter um valor superior a t_0 , $[P(t_{GL} \geq t_0)]$, ou a probabilidade de obter um valor mais extremo do que t_0 $[P(t_{GL} \leq -t_0 \text{ ou } t_{GL} \geq t_0)]$.

Exemplo: Para a distribuição t_{18} , calcular $P(t_{18} \geq 1.6)$ [= 0.0635] e $P(t_{18} \geq 1.6 \text{ ou } t_{18} \leq -1.6)$ [= $2 \times 0.0635 = 0.1270$].

X: valor em análise: 1.6
Deg_freedom: Graus de liberdade da distribuição t : 18
Tails: 1 – dá a valor da $P(t_{GL} \geq 1.6)$
2 – dá o valor da $P(t_{GL} \leq -1.6 \text{ ou } t_{GL} \geq 1.6)$

TINV: dá o valor crítico (t_0) cuja probabilidade de obter um valor mais extremo na distribuição t_{GL} é igual a um determinado valor $P1$ $[P(t_{GL} \geq t_0 \text{ ou } t_{GL} \leq -t_0) = P1]$.

Exemplo: Para a distribuição t_{12} , calcular t_0 tal que $P(t_{12} \geq t_0 \text{ ou } t_{12} \leq -t_0) = 0.05$ [= 2.1788].

Probability: valor da probabilidade: 0.05
Deg_freedom: graus de liberdade da distribuição t : 12

Distribuição F

FDIST: dá, para um determinado valor (x_0) da distribuição $F_{GL1, GL2}$ (x_0), a probabilidade de obter um valor superior a x_0 $[P(F_{GL1, GL2} \geq x_0)]$.

Exemplo: Para a distribuição $F_{6,15}$, calcular $P(F_{6,15} \geq 2.79)$ [= 0.0500].

X: valor em análise: 2.79
Deg_freedom1: graus de liberdade GL_1 : 6
Deg_freedom2: graus de liberdade GL_2 : 15

FINV: dá o valor crítico (x_0) cuja probabilidade de obter um valor superior na distribuição $F_{GL1, GL2}$ é igual a um determinado valor $P1$ $[P(F_{GL1, GL2} \geq x_0) = P1]$.

Exemplo: Para a distribuição $F_{6,15}$, calcular x_0 tal que $P(F_{6,15} \geq x_0) = 0.08$ [= 2.3916].

Probability: valor da probabilidade: 0.08
Deg_freedom1: Graus de liberdade GL_1 : 6
Deg_freedom2: Graus de liberdade GL_2 : 15

Distribuição do Qui-Quadrado

CHIDIST: dá, para um determinado valor (x_0) da distribuição χ^2_{GL} (x_0), a probabilidade de obter um valor superior a x_0 $[P(\chi^2_{GL} \geq x_0)]$.

Exemplo: Para a distribuição χ^2_{18} , calcular $P(\chi^2_{18} \geq 31)$ [= 0.0288].

X: valor em análise: 31
Deg_freedom: graus de liberdade da distribuição χ^2_{18} : 18

CHIINV: dá o valor crítico (x_0) cuja probabilidade de obter um valor superior na distribuição χ^2_{GL} é igual a um determinado valor $P1$ $[P(\chi^2_{GL} \geq x_0) = P1]$.

Exemplo: Para a distribuição χ^2_{30} , calcular x_0 tal que $P(\chi^2_{30} \geq x_0) = 0.05$ [= 43.7730].

Probability: valor da probabilidade: 0.05

Deg_freedom: graus de liberdade da distribuição χ^2_{GL} : 30

Distribuição Exponencial Negativa

EXPONDIST: dá o valor da função distribuição $[P(X \leq x_0)]$ e da função densidade de probabilidade $f(x_0)$ de distribuição Exponencial Negativa.

Exemplo: Se X for $EN (\lambda = 3)$, calcular x_0 tal que $P(X \leq 0.25)$ [= 0.5276] e calcular $f(0.25)$ [= 1.4171].

X: valor em análise: 0.25

Lambda: número médio de ocorrências por unidade de tempo: 3

Cumulative: TRUE – dá a função de probabilidade acumulada

FALSE – dá a valor da função densidade de probabilidade

Distribuição Lognormal

LOGNORMDIST: dá o valor da função de probabilidade acumulada da variável X $[P(X \leq x_0)]$, onde $\ln(X)$ é um variável que segue uma distribuição Normal, com valor esperado μ e desvio padrão σ .

Exemplo: Se X for uma variável Lognormal, em que $\ln(X)$ é Normal ($\mu = 1.167$, $\sigma = 0.153$), calcular $P(X \leq 3.25)$ [= 0.5304].

X: valor em análise: 3.25

Mean: valor esperado (μ): 1.167

Standard_dev: desvio padrão (σ): 0.153

LOGINV: dá o valor crítico (x_0) de uma variável Lognormal cuja função distribuição é igual a um determinado valor $P1$ $[P(X \leq x_0) = P1]$.

Exemplo: Se X for uma variável Lognormal, em que $\ln(X)$ é Normal ($\mu = 1.167$, $\sigma = 0.153$), calcular x_0 tal que $P(X \leq x_0) = 0.5304$ [= 3.25].

Probability: valor da probabilidade acumulada: 0.5304

Mean: valor esperado (μ): 1.167

Standard_dev: desvio padrão (σ): 0.153