Capítulo 8 — Teste de Hipóteses

Testes à dispersão e à localização – Quadro resumo

Testes à dispersão (variância	Uma amostra, população Normal, amostra de qualquer dimensão	**Teste do χ^2**
	Duas amostras independentes, populações Normais, amostras de quaisquer dimensões	**Teste F**
Testes à Localização (valor esperado)	Uma amostra, população qualquer, amostra de grande dimensão	**Teste Z**
	Uma amostra, população Normal, amostra de pequena dimensão	**Teste t**
	Duas amostras independentes, populações quaisquer, amostras de grandes dimensões	**Teste Z**
	Duas amostras independentes, populações Normais, amostras de pequenas dimensões	**Teste t**
	Duas amostras emparelhadas, populações quaisquer, amostras de grandes dimensões	**Teste Z**
	Duas amostras emparelhadas, populações Normais, amostras de pequenas dimensões	**Teste t**
Testes à Localização (proporção Binomial)	Uma amostra, população dicotómica, amostra de grande dimensão	**Teste Z**
	Duas amostras independentes, populações dicotómicas, amostras de grandes dimensões	**Teste Z**

Definição dos valores críticos dos testes (para a tomada de decisão de rejeição - ou não - de H_0 a um nível de significância de α%):

- Para um teste bilateral (sinal $\neq$ em H_1), são definidos dois valores críticos, um na cauda direita da distribuição (Vc_d) e outro na cauda esquerda (Vc_e). Estes valores são obtidos na distribuição da ET (admitindo que H_0 é verdadeira), de tal forma que $P(ET \geq Vc_d) = \alpha/2$ e $P(ET \leq Vc_e) = \alpha/2$.
- Para um teste unilateral à direita (sinal > em H_1), o valor crítico é definido na cauda direita da distribuição: $P(ET \geq Vc_d) = \alpha$.
- Para um teste unilateral à esquerda (sinal < em H_1), o valor crítico é definido na cauda esquerda da distribuição: $P(ET \leq Vc_e) = \alpha$.

Teste à Variância (σ^2) de uma população Normal

Hipóteses	Estatística de teste
$H_0: \sigma^2 = \sigma^2_0$ $H_1: \sigma^2 \neq \sigma^2_0$ ou $\sigma^2 < \sigma^2_0$ ou $\sigma^2 > \sigma^2_0$	$ET = (N-1) \cdot \frac{s^2}{\sigma_0^2}$ Quando H_0 é verdadeira, ET segue uma distribuição χ^2_{N-1}

Teste ao Valor Esperado (μ) de uma população

Hipóteses	Estatística de teste
Amostra de grande dimensão ($s \approx \sigma$)	
$H_0: \mu = \mu_0$ $H_1: \mu \neq \mu_0$ ou $\mu < \mu_0$ ou $\mu > \mu_0$	$ET = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{N}}$ Quando H_0 é verdadeira, ET segue uma distribuição N(0,1)
Amostra de pequena dimensão, população Normal ($s \neq \sigma$)	
$H_0: \mu = \mu_0$ $H_1: \mu \neq \mu_0$ ou $\mu < \mu_0$ ou $\mu > \mu_0$	$ET = \frac{\bar{X} - \mu_0}{s/\sqrt{N}}$ Quando H_0 é verdadeira, ET segue uma distribuição t_{N-1}

Teste à Proporção Binomial (*p*) (amostra de grande dimensão)

Hipóteses	Estatística de teste
$H_0: p = p_0$ $H_1: p \neq p_0$ ou $p < p_0$ ou $p > p_0$	$ET = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0 \cdot (1-p_0)}{N}}}$ Quando H_0 é verdadeira, ET segue uma distribuição N(0,1)

Teste à razão de Variâncias (σ_A^2/σ_B^2) de duas populações Normais

Hipóteses	Estatística de teste
$H_0: \frac{\sigma_A^2}{\sigma_B^2} = 1$ $H_1: \frac{\sigma_A^2}{\sigma_B^2} \neq 1$ ou $\frac{\sigma_A^2}{\sigma_B^2} < 1$ ou $\frac{\sigma_A^2}{\sigma_B^2} > 1$	$ET = \frac{s_A^2}{s_B^2}$ (ver nota) Quando H_0 é verdadeira, ET segue uma distribuição F_{N_A-1,N_B-1}
$H_0: \frac{\sigma_A^2}{\sigma_B^2} = r_0$ $H_1: \frac{\sigma_A^2}{\sigma_B^2} \neq r_0$ ou $\frac{\sigma_A^2}{\sigma_B^2} < r_0$ ou $\frac{\sigma_A^2}{\sigma_B^2} > r_0$	$ET = r_0 \cdot \frac{s_A^2}{s_B^2}$ Quando H_0 é verdadeira, ET segue uma distribuição F_{N_A-1,N_B-1}

Nota: A estatística de teste pode ser definida colocando sempre em numerador a amostra com o maior valor da variância amostral (i.e., a $ET = \frac{s_A^2}{s_B^2}$ corresponde a valores das variâncias amostrais tais que: $s_A^2 \geq s_B^2$). Desta forma o valor crítico do teste deve ser sempre procurado na cauda direita da distribuição F.

Teste à Diferença entre Valores Esperados (μ_A - μ_B) de duas populações (Amostras Independentes)

Hipóteses	Estatística de teste
Amostras de grandes dimensões ($s_A^2 \approx \sigma_A^2$ e $s_B^2 \approx \sigma_B^2$), populações com variâncias diferentes ($\sigma_A^2 \neq \sigma_B^2$)	
$H_0: \mu_A - \mu_B = \delta_0$ $H_1: \mu_A - \mu_B \neq \delta_0$ ou $\mu_A - \mu_B > \delta_0$ ou $\mu_A - \mu_B < \delta_0$	$ET = \dfrac{(\bar{X}_A - \bar{X}_B) - \delta_0}{\sqrt{\sigma_A^2/N_A + \sigma_B^2/N_B}}$ Quando H_0 é verdadeira, ET segue uma distribuição N(0,1)
Amostras de grandes dimensões ($s_A^2 \approx \sigma_A^2$ e $s_B^2 \approx \sigma_B^2$), populações com variâncias iguais ($\sigma_A^2 = \sigma_B^2$) $\left(\text{a variância comum } (\sigma^2) \text{ pode ser estimada por: } \sigma^2 = \frac{(N_A-1)\cdot s_A^2 + (N_B-1)\cdot s_B^2}{N_A+N_B-2}\right)$	
$H_0: \mu_A - \mu_B = \delta_0$ $H_1: \mu_A - \mu_B \neq \delta_0$ ou $\mu_A - \mu_B > \delta_0$ ou $\mu_A - \mu_B < \delta_0$	$ET = \dfrac{(\bar{X}_A - \bar{X}_B) - \delta_0}{\sigma \cdot \sqrt{1/N_A + 1/N_B}}$ Quando H_0 é verdadeira, ET segue uma distribuição N(0,1)
Amostras de pequenas dimensões, populações Normais com variâncias diferentes ($\sigma_A^2 \neq \sigma_B^2$)	
$H_0: \mu_A - \mu_B = \delta_0$ $H_1: \mu_A - \mu_B \neq \delta_0$ ou $\mu_A - \mu_B > \delta_0$ ou $\mu_A - \mu_B < \delta_0$ O número de graus de liberdade é dado por: $GL = \dfrac{(s_A^2/N_A + s_B^2/N_B)^2}{\frac{(s_A^2/N_A)^2}{N_A-1} + \frac{(s_B^2/N_B)^2}{N_B-1}}$	$ET = \dfrac{(\bar{X}_A - \bar{X}_B) - \delta_0}{\sqrt{s_A^2/N_A + s_B^2/N_B}}$ Quando H_0 é verdadeira, ET segue uma distribuição t_{GL}
Amostras de pequenas dimensões, populações Normais com variâncias iguais ($\sigma_A^2 = \sigma_B^2$) $\left(\text{a variância comum } (s^2) \text{ pode ser estimada por: } s^2 = \frac{(N_A-1)\cdot s_A^2 + (N_B-1)\cdot s_B^2}{N_A+N_B-2}\right)$	
$H_0: \mu_A - \mu_B = \delta_0$ $H_1: \mu_A - \mu_B \neq \delta_0$ ou $\mu_A - \mu_B > \delta_0$ ou $\mu_A - \mu_B < \delta_0$ O número de graus de liberdade é dado por: $GL = N_A + N_B - 2$	$ET = \dfrac{(\bar{X}_A - \bar{X}_B) - \delta_0}{s \cdot \sqrt{1/N_A + 1/N_B}}$ Quando H_0 é verdadeira, ET segue uma distribuição t_{GL}

Teste à Diferença entre Valores Esperados (μ_A - μ_B) de duas populações (Amostras Emparelhadas)

Admita-se que, para um mesmo elemento amostral, se dispõem de resultados, não independentes, obtidos "antes e depois" de um dado acontecimento. Nestas condições, a variável aleatória *diferença entre pares de observações* (ou diferença relativa entre pares de observações) pode servir de base à realização de testes de localização. Existindo *N* observações emparelhadas de duas populações *A* e *B*, (x_A^n, x_B^n) , com $n = 1, \ldots, N$, a partir delas podem obter-se *N* observações da variável Δ: diferença entre observações emparelhadas, tais que $\Delta^n = x_A^n - x_N^n$, com $n = 1, \ldots, N$.

Nota: em certas situações é preferível utilizar a variável diferença relativa: $\Delta^n = (x_A^n - x_N^n)/x_A^n$. O teste incide sobre o valor esperado da variável Δ^n (μ_Δ).

Hipóteses	Estatística de teste
Amostras de grandes dimensões ($s_\Delta \approx \sigma_\Delta$)	
$H_0: \mu_\Delta = \delta_0$ $H_1: \mu_\Delta \neq \delta_0$ ou $\mu_\Delta < \delta_0$ ou $\mu_\Delta > \delta_0$	$ET = \dfrac{\bar{\Delta} - \delta_0}{\sigma_\Delta/\sqrt{N}}$ Quando H_0 é verdadeira, ET segue uma distribuição N(0,1)
Amostras de pequenas dimensões, populações Normais ($s_\Delta \neq \sigma_\Delta$)	
$H_0: \mu_\Delta = \delta_0$ $H_1: \mu_\Delta \neq \delta_0$ ou $\mu_\Delta < \delta_0$ ou $\mu_\Delta > \delta_0$	$ET = \dfrac{\bar{\Delta} - \delta_0}{s_\Delta/\sqrt{N}}$ Quando H_0 é verdadeira, ET segue uma distribuição t_{N-1}

Teste à Diferença entre Duas Proporções Binomiais ($p_A - p_B$) (amostras de grandes dimensões)

Hipóteses	Estatística de teste
$H_0: p_A - p_B = p_0$ $H_1: p_A - p_B \neq p_0$ ou $p_A - p_B < p_0$ ou $p_A - p_B > p_0$	$ET = \dfrac{(\hat{p}_A - \hat{p}_B) - p_0}{\sqrt{\frac{\hat{p}_A \cdot (1-\hat{p}_A)}{N_A} + \frac{\hat{p}_B \cdot (1-\hat{p}_B)}{N_B}}}$ Quando H_0 é verdadeira, ET segue uma distribuição N(0,1)
$H_0: p_A - p_B = 0$ $H_1: p_A - p_B \neq 0$ ou $p_A - p_B < 0$ ou $p_A - p_B > 0$ $\left(com: \hat{p}_0 = \dfrac{Y_A + Y_B}{N_A + N_B}\right)$	$ET = \dfrac{(\hat{p}_A - \hat{p}_B)}{\sqrt{\hat{p}_0 \cdot (1-\hat{p}_0) \cdot \left(\frac{1}{N_A} + \frac{1}{N_B}\right)}}$ Quando H_0 é verdadeira, ET segue uma distribuição N(0,1)

Formulário adaptado de:
Estatística
Rui Campos Guimarães, José A. Sarsfield Cabral
Verlag Dashöfer

Testes Exatos

Teste à Proporção Binomial (p)

Y: número de sucessos em N repetições de uma experiência de Bernoulli, em que p é a probabilidade de sucesso na experiência de Bernoulli

Hipóteses	Estatística de teste
$H_0 : p = p_0$	$ET = Y$
$H_1 : p \neq p_0$ ou $p < p_0$ ou $p > p_0$	Quando H_0 é verdadeira, ET segue uma distribuição $B(N, p)$

Teste à Média de uma Distribuição de Poisson (λ)

Y: número de ocorrências de um processo de Poisson com taxa média de ocorrências igual a λ

Hipóteses	Estatística de teste
$H_0 : \lambda = \lambda_0$	$ET = Y$
$H_1 : \lambda \neq \lambda_0$ ou $\lambda < \lambda_0$ ou $\lambda > \lambda_0$	Quando H_0 é verdadeira, ET segue uma distribuição $Poisson(\lambda)$

Nota: nestes testes é mais prático obter diretamente o valor de prova a partir do valor de ET em vez de obter o valor crítico.