

Distribuições Discretas e Contínuas Importantes

Distribuições Discretas

Distribuição Binomial

Envolve uma série de N experiências idênticas com as seguintes características:

- Cada experiência tem apenas 2 resultados possíveis (i.e., “sucesso” ou “insucesso”).
- A probabilidade de ocorrência de cada resultado mantém-se inalterada de experiência para experiência: $Prob.(sucesso) = p = constante$ e $Prob.(insucesso) = 1 - p = q = constante$.
- Os resultados das experiências são independentes.

Se Y for uma variável aleatória discreta que representa o número de vezes que no decurso de N experiências ocorrem sucessos, então X segue uma **distribuição Binomial** [em notação simbólica representa-se por: $Y \sim B(N, p)$].

Distribuição Binomial

Função de probabilidade; $p(y) = \binom{N}{y} \cdot p^y \cdot (1 - p)^{N-y} = \frac{N!}{y! \cdot (N - y)!} \cdot p^y \cdot (1 - p)^{N-y}$

Valor esperado de Y : $\mu_Y = N \cdot p$

Variância de Y : $\sigma_Y^2 = N \cdot p \cdot (1 - p)$

onde

- p : Probabilidade de ocorrência de um sucesso
- N : Número de experiências
- y : Número de sucessos

Distribuição Binomial Negativa

Envolve uma série de N experiências idênticas com as características referidas para a distribuição binomial. A diferença reside no facto haver um processo de contagem do número de insucessos encontrados até ocorrer o r -ésimo sucesso. Desta forma, se Y representar este número (insucessos) segue uma

distribuição Binomial Negativa [em notação simbólica representa-se por: $Y \sim BN(r, p)$].

Distribuição Binomial Negativa

Função de probabilidade: $p(y) = \binom{y + r - 1}{y} \cdot p^r \cdot (1 - p)^y$

Valor esperado de Y : $\mu_Y = \frac{r \cdot (1 - p)}{p}$

Variância de Y : $\sigma_Y^2 = \frac{r \cdot (1 - p)}{p^2}$

onde

- p : Probabilidade de ocorrência de um sucesso
- r : Número ordinal do sucesso (ou número de sucessos)
- y : Número de insucessos até ocorrer o r -ésimo sucesso

Distribuição Geométrica

Caso particular da distribuição Binomial Negativa quando $r = 1$ [em notação simbólica representa-se por: $Y \sim G(p)$].

Distribuição Geométrica

Função de probabilidade: $p(y) = p \cdot (1 - p)^y$

Valor esperado de Y : $\mu_Y = \frac{(1 - p)}{p}$

Variância de Y : $\sigma_Y^2 = \frac{(1 - p)}{p^2}$

onde

- p : Probabilidade de ocorrência de um sucesso
- y : Número de insucessos até ocorrer o primeiro sucesso

Distribuição Hipergeométrica

Considere-se uma população finita constituída por M elementos de dois tipos (por exemplo, *peças boas* e *peças defeituosas*). Considere-se que p e $(1-p)$ representam, respectivamente, a proporção de peças boas e de peças defeituosas existentes na população. Admita-se que desta população se retirem sucessivamente, sem reposição, N elementos.

Se Y for uma variável aleatória discreta que representa o número de elementos de um dos tipos que figuram entre os N elementos que foram retirados da população, então Y segue uma **distribuição Hipergeométrica** [em notação simbólica representa-se por: $Y \sim H(M \cdot p, M \cdot (1 - p), N)$].

Distribuição Hipergeométrica

Função de probabilidade: $p(y) = \frac{\binom{M \cdot p}{y} \cdot \binom{M \cdot (1 - p)}{N - y}}{\binom{M}{N}}$

Valor esperado de Y : $\mu_Y = N \cdot p$

Variância de Y : $\sigma_Y^2 = N \cdot p \cdot (1 - p) \cdot \frac{M - N}{M - 1}$

onde

- p : proporção de elementos do tipo em análise existente na população (ex.: *peças boas*).
- N : número de elementos retirados da população
- y : número de elementos do tipo em análise (ex.: *peças boas*) que figuram entre os N elementos retirados da população
- M : dimensão da população

Distribuição de Poisson

A variável aleatória discreta Y que representa o número de ocorrências de um determinado acontecimento por unidade de tempo (ou espaço) segue uma **distribuição de Poisson** [em notação simbólica representa-se por: $Y \sim Poisson(\lambda)$] se se verificarem as três condições seguintes:

- Os acontecimentos ocorrem um a um e não aos grupos
- Os acontecimentos são independentes entre si. Isto é, a ocorrência de um acontecimento num determinado intervalo (de tempo ou de espaço) não afecta a probabilidade de ocorrer um segundo acontecimento no mesmo, ou em qualquer outro, intervalo (de tempo ou de espaço).
- A probabilidade de se registar uma ocorrência do acontecimento num dado intervalo é proporcional à dimensão do intervalo..

Distribuição de Poisson

Função de probabilidade: $p(y) = \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^y}{y!}$

Valor esperado de Y : $\mu_Y = \lambda$

Variância de Y : $\sigma_Y^2 = \lambda$

onde

- y : número de ocorrências no intervalo considerado (de tempo ou de espaço)
- λ : número médio de ocorrências por unidade considerada (de tempo ou de espaço)

Distribuições Contínuas

Distribuição Uniforme

$F(x)$ é a probabilidade de $X \leq x$, o que corresponde à probabilidade de se verificar pelo menos uma ocorrência no intervalo $[0, x]$

Distribuição Uniforme	
Função densidade de probabilidade: $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{se } a \leq x \leq b \\ 0, & \text{outros valores} \end{cases}$	Função de distribuição: $F(x) = \begin{cases} 0 & , \text{ se } x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & , \text{ se } a \leq x \leq b \\ 1 & , \text{ se } x > b \end{cases}$
Valor esperado de X : $\mu_X = \frac{a+b}{2}$	Variância de X : $\sigma_X^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$
Onde	
<ul style="list-style-type: none">$F(x)$ é a probabilidade de $X \leq x$a e b são os limites do intervalo finito $[a, b]$; a função densidade de probabilidade é constante dentro desse intervalo e nula fora dele.	

Distribuição Exponencial Negativa

Esta distribuição está relacionada com a distribuição de Poisson. Admitindo que λ é o parâmetro da distribuição de Poisson que descreve o número de ocorrências de um dado fenómeno por unidade de tempo ou de espaço, a variável aleatória contínua X que representa o tempo ou espaço entre ocorrências sucessivas de um dado fenómeno segue uma distribuição **Exponencial Negativa** com parâmetro λ [em notação simbólica representa-se por: $X \sim EN(\lambda)$].

Distribuição Exponencial Negativa	
Função densidade de probabilidade: $f(x) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda x}, & \text{se } x \geq 0 \\ 0, & \text{se } x < 0 \end{cases}$	Função de distribuição: $F(x) = \begin{cases} 0 & , \text{ se } x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & , \text{ se } x \geq 0 \end{cases}$
Valor esperado de X : $\mu_X = \frac{1}{\lambda}$	Variância de X : $\sigma_X^2 = \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2$
Onde	
<ul style="list-style-type: none">$F(x)$ é a probabilidade de $X \leq x$, o que corresponde à probabilidade de se verificar pelo menos uma ocorrência no intervalo $[0, x]$	

Note-se que, como λ corresponde ao número médio de ocorrências por unidade de tempo ou de espaço, $1/\lambda$ representa o tempo ou o espaço que, em média, separa ocorrências sucessivas.

Distribuição Normal

Esta é a distribuição que mais se utiliza para descrever fenómenos que se traduzem através de variáveis aleatórias contínuas. Sempre que X é uma variável aleatória cujo valor resulta da soma de um grande número de efeitos provocados por causas independentes, em que o efeito de cada causa é negligenciável em relação à soma de todos os outros efeitos, então X segue uma distribuição Normal [em notação simbólica representa-se: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$].

A distribuição Normal é definida a partir de dois parâmetros: o seu valor esperado (μ_X) e a sua variância (σ_X^2).

Distribuição Normal Padronizada

A distribuição Normal Padronizada tem valor esperado igual a zero ($\mu_X = 0$) e variância igual a um ($\sigma_X^2 = 1$). Considere-se a variável:

$$Z = \frac{X - \mu_X}{\sigma_X}, \quad \text{em que } X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

Dado que a transformação da variável Normal X é linear, a variável Z é também Normal. Os seus parâmetros são:

$$\mu_Z = E\left(\frac{X - \mu_X}{\sigma_X}\right) = \frac{E(X) - \mu_X}{\sigma_X} = 0 \quad \sigma_Z^2 = Var\left(\frac{X - \mu_X}{\sigma_X}\right) = \frac{1}{\sigma_X^2} \cdot Var(X) = 1$$

A variável Z (obtida a partir da transformação linear da variável X) segue uma distribuição Normal padronizada [$Z \sim N(0,1)$].

Aproximação da distribuição Hipergeométrica pela distribuição Binomial

Válida quando M é muito maior do que N (i.e., na prática a aproximação só é razoável quando $M \geq 10 \cdot N$)

$$X \sim H(M \cdot p, M \cdot (1 - p), N) \approx X \sim B(N, p)$$

Aproximação da distribuição Binomial pela distribuição de Poisson

Válida para N grande (i.e., na prática a aproximação só é razoável para $N \geq 20$)

Só tem interesse quando a distribuição binomial for assimétrica (i.e., quando $N \cdot p \leq 7$ ou $N \cdot q \leq 7$)

$$X \sim B(N, p) \approx X \sim Poisson(\lambda = N \cdot p)$$

Aproximação da distribuição Binomial pela distribuição Normal

Válida para N grande ($N \geq 20$) e no caso da distribuição Binomial ser simétrica (i.e., na prática quando $N \cdot p > 7$ ou $N \cdot q > 7$)

$$X \rightsquigarrow B(N, p) \approx X \rightsquigarrow N(\mu = N \cdot p, \sigma^2 = N \cdot p \cdot (1 - p))$$

Aproximação da distribuição de Poisson pela distribuição Normal

Válida quando $\lambda > 10$

$$X \rightsquigarrow Poisson(\lambda) \approx X \rightsquigarrow N(\mu = \lambda, \sigma^2 = \lambda)$$

Distribuição Lognormal

Seja $X > 0$ uma variável aleatória contínua e admita-se que $V = \ln X$ segue uma distribuição $N(\mu_V, \sigma_V^2)$. Nestas condições, a variável X segue uma distribuição **Lognormal**, com parâmetros μ_V e σ_V^2 [em notação simbólica representa-se por: $X \rightsquigarrow LN(\mu_V, \sigma_V^2)$].

Distribuição Lognormal	
Valor esperado de X : $\mu_X = e^{\mu_V + \sigma_V^2/2}$	Variância de X : $\sigma_X^2 = e^{2 \cdot (\mu_V + \sigma_V^2)} - e^{2 \cdot \mu_V + \sigma_V^2}$
Mediana de X : $\eta_X = e^{\mu_V}$	Moda de X : $\xi_X = e^{(\mu_V - \sigma_V^2)}$
Valor esperado de V : $\mu_V = \frac{1}{2} \cdot \ln \left(\frac{\mu_X^4}{\sigma_X^2 + \mu_X^2} \right)$	Variância de V : $\sigma_V^2 = \ln \left(\frac{\sigma_X^2}{\mu_X^2} + 1 \right)$

Distribuição do Qui-quadrado

Considere-se um conjunto de variáveis aleatórias Z_i ($i = 1, 2, 3, \dots, GL$) obedecendo às seguintes condições:

- Cada variável Z_i segue uma distribuição Normal padronizada.
- As variáveis Z_i são mutuamente disponíveis independentes.

A variável aleatória X , constituída a partir da soma de GL variáveis Z_i elevadas ao quadrado, segue uma distribuição **Qui-Quadrado com GL graus de liberdade** [em notação simbólica representa-se por: $X \rightsquigarrow \chi^2_{GL}$].

$$X = \sum_{i=1}^{GL} Z_i^2$$

Distribuição do Qui-quadrado	
Valor esperado de X : $\mu_X = GL$	Variância de X : $\sigma_X^2 = 2 \cdot GL$

Distribuição t de Student

Considere-se que $Z \rightsquigarrow N(0,1)$ e $V \rightsquigarrow \chi^2_{GL}$. A distribuição da variável aleatória X obtida calculando o quociente $\frac{Z}{\sqrt{V/GL}}$ designa-se por distribuição **t de Student com GL graus de liberdade** [em notação simbólica representa-se por: $X \rightsquigarrow t_{GL}$].

Distribuição de t de Student	
Valor esperado de X : $\mu_X = 0$ (para $GL > 1$)	Variância de X : $\sigma_X^2 = GL/(GL - 2)$ (para $GL > 2$)

Distribuição F

Sendo χ^2_{GL1} e χ^2_{GL2} duas variáveis independentes, a distribuição da variável X dada pelo quociente $\frac{\chi^2_{GL1}/GL1}{\chi^2_{GL2}/GL2}$ designa-se por distribuição **F com $GL1$ e $GL2$ graus de liberdade** [em notação simbólica representa-se por: $X \rightsquigarrow F_{GL1, GL2}$].

Distribuição F	
Valor esperado de X	$\mu_X = \frac{GL2}{GL2 - 2}$ (para $GL2 > 2$)
Variância de X	$\sigma_X^2 = \frac{2 \cdot GL2 \cdot (GL1 + GL2 - 2)}{GL1 \cdot (GL2 - 2)^2 \cdot (GL2 - 4)}$ (para $GL2 > 4$)