Exame MIEGI 17/18

1) a)

Sejam os acontecimentos:

A: "O componente é adquirido ao fabricante A"

B: " " " " " " B"

C: " " " " " " C"

P: "O componente é perfeito"

R: "O componente tem defeito reparável" I: "O componente tem defeito irreparável"

Dados:

- $P(A) = 0,5$
- $P(B) = 0,3$
- $P(C) = 0,2$

- $P(P \mid A) = 0,95$
- $P(P \mid B) = 0,95$
- $P(P \mid C) = 0,88$

- $P(R \mid A) = 0,04$
- $P(R \mid B) = 0,03$
- $P(R \mid C) = 0,06$

- $P(I \mid A) = 0,01$
- $P(I \mid B) = 0,02$
- $P(I \mid C) = 0,06$

$\cdot\ P(P) = P(P \cap A) + P(P \cap B) + P(P \cap C)$

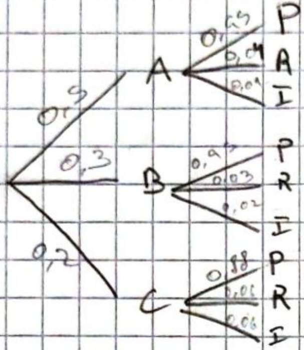
$= P(P|A) \cdot P(A) + P(P|B) \cdot P(B) + P(P|C) \cdot P(C)$

$= 0,95 \cdot 0,5 + 0,95 \cdot 0,3 + 0,88 \cdot 0,2$

$= 0,936$

$\cdot\ P(\overline{P}) = 1 - P(P) = 0,064 = 6,4\%$

b) $P(\overline{A} | I) = \dfrac{P(\overline{A} \cap I)}{P(I)}$



$= \dfrac{P(B \cap I) + P(C \cap I)}{P(A \cap I) + P(B \cap I) + P(C \cap I)}$

$= \dfrac{0,3 \times 0,02 + 0,2 \times 0,06}{0,5 \times 0,01 + 0,3 \times 0,02 + 0,2 \times 0,06}$

$= 0,783 = 78,3\%$

2) a)

P("Ambos dentro da especificação") $= 0,7 \times 0,85 = 0,595$

↳ Admite-se que os acontecimentos "A está dentro da especificação" e "B está dentro da especificação" são independentes, já que A e B são fabricados separadamente.

b)

Y: "Número de produtos dentro de ambas as especificações num lote de 10"

$Y \sim B(N = 10, p = 0,595)$

Para a distribuição binomial:

$\mu_Y = N \cdot p$

$\sigma^2_Y = N \cdot p \cdot (1 - p)$

$\therefore\ \mu_Y = 10 \times 0,595 = 5,95$

$\sigma_Y = \sqrt{\sigma^2_Y} = \sqrt{5,95 \cdot (1 - 0,595)} = 1,55$

c)

3 lotes de 10, dois ou mais dos quais têm duas ou menos unidades em que nem A nem B estão fora de especificação

$\cdot\ P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0,3 \times 0,25 = 0,075$

Y: "Nº de produtos com ambos os componentes fora de especificação, num lote de 10"

$Y \sim B(N=10,\ p=0{,}075)$

$p(y) = {}^{N}C_{y} \cdot p^{y} \cdot (1-p)^{N-y}$

$P(Y \leq 2) = P(Y=0) + P(Y=1) + P(Y=2)$

$= {}^{10}C_{0} \cdot (0{,}075)^{0} \cdot (1-0{,}075)^{10-0} + \ldots$

$= 0{,}966$

X: "Nº de lotes de 10 produtos com dois ou menos unidades com ambos os ~~...~~ componentes fora de especificação num conjunto de 3 lotes"

$X \sim B(N=3,\ p=0{,}966)$

$P(X \geq 2) = 1 - P(X=0) - P(X=1)$

$= 0{,}997$

$= 99{,}7\ \%$

d)

Há 4 casos possíveis:

1. Ambos os componentes estão dentro da especificação

Lucro $= -5 - 5 + 25 = 15€$

2. Pelo menos um componente é menor do que a especificação

Lucro $= -5 - 5 + 5 = -5\ €$

3. Há apenas 1 componente maior do que a especificação

Lucro $= -5 - 5 - 5 + 25 = 10€$

4. Ambos os componentes são maiores que a especificação

Lucro $= -5 - 5 - 5 - 5 + 25 = 5€$

$P(\text{"1"}) = 0{,}595$

$P(\text{"2"}) = P(\text{"Ambos menores"}) + P(\text{"A menor, B maior ou conforme"}) + P(\text{"B menor, A maior ou conforme"})$

$= 0{,}15 \times 0{,}05 + 0{,}15 \times 0{,}95 + 0{,}05 \times 0{,}85$

$= 0{,}1925$

$P(\text{"3"}) = P(\text{"A maior, B conforme"}) + P(\text{"B maior, A conforme"})$

$= 0{,}15 \times 0{,}85 + 0{,}1 \times 0{,}7 = 0{,}1975$

$P(\text{"4"}) = P(\text{"Ambos maiores"}) = 0{,}15 \times 0{,}1 = 0{,}015$

Seja L: "Lucro obtido na venda de um produto"

L	-5	5	10	15
$P(L)$	0,1925	0,015	0,1975	0,595

$$\mu_L = E(L) = \sum_l (l \cdot p(l))$$

$$= -5 \times 0,1925 + 5 \times 0,015 + \ldots$$

$$= 10,0125 \text{ €}$$

4) a)

$H_0: p = 0,75$

$H_1: p > 0,75$

$$ET = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0 \cdot (1-p_0)}{N}}} \sim N(0,1)$$

- $\hat{p} = \frac{82}{100} = 0,82$
- $ET = \frac{0,82 - 0,75}{\sqrt{\frac{0,75(1-0,75)}{100}}} = 1,617$

- $VC = N(0,05) = 1,645$

↦ Como $ET < VC$, não é possível rejeitar H_0

↦ O teste é inconclusivo

↦ Logo, não há evidência estatística que indique que a percentagem de pessoas que assiste ao programa seja superior a 75%, apesar de tal não ser uma prova em contrário

↦ Se a empresa valoriza a prudência, não arrancaria com a campanha. | $p\text{-value} = P(ET \geq 1,617 \mid H_0) = 5,29\%$

b)

Erro do tipo II → Aceitar H_0 quando é falsa

$$\bar{x}_c : \frac{\bar{x}_c - 0,75}{\sqrt{\frac{0,75 \times 0,25}{100}}} = 1,645 \qquad | p = 0,8$$

$$\Leftrightarrow \bar{x}_c = 0,8212$$

$$1 - \beta = P\left(Z = \frac{x - 0,8}{\sqrt{\frac{0,8 \times 0,2}{100}}} \geq \frac{0,8212 - 0,8}{\sqrt{\frac{0,8 \times 0,2}{100}}}\right) = P(Z \geq 0,53)$$
$$= 0,298$$

$1 - \beta = 0,298 \Leftrightarrow \beta = 0,702$

5)

$H_0: \mu_{depois} = \mu_{antes} \Leftrightarrow \mu_{depois} - \mu_{antes} = 0$

$H_1: \mu_{depois} > \mu_{antes} \Leftrightarrow \mu_{depois} - \mu_{antes} > 0$

→ A amostra é emparelhada, logo o teste passa a

$H_0: \mu_\Delta = 0$

$H_1: \mu_\Delta > 0$

$\Delta = x_{depois} - x_{antes}$

Voluntário	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
Antes										
Depois										
Δ	12	-1	28	23	-16	10	-4	16	9	12

$N = 10$

$\bar{\Delta} = 8,9$

$s_\Delta = \sqrt{\frac{\sum (\Delta_i - \bar{\Delta})^2}{N-1}} = \sqrt{\frac{1518,9}{9}} = 12,991$

$ET = \frac{\bar{\Delta} - \delta_0}{\frac{s_\Delta}{\sqrt{N}}} \sim t_9$

- $ET = \frac{8,9 - 0}{\frac{12,991}{\sqrt{10}}} = 2,166$

- $VC = t_9(0,05) = 1,833$

↦ $ET > VC$, logo, rejeita-se a H_0

↦ Há evidência significativa que a preparação física melhorou ao fim dos 3 meses

- $p\text{-value} = P(ET \geq 2,166 \mid H_0)$

$= 2,92\%$