RESOLUÇÃO ASSISTIDA DE PROBLEMAS

PROBLEMA 11.1

APOIOS À RESOLUÇÃO

Apoio 1 (apenas o resultado)

Confirma-se a reivindicação do fabricante (p = 1.83%). ■

Apoio 2 (sugestão)

Está-se perante um teste de localização relativo ao valor esperado de uma população. O teste é unilateral à direita, concentrando-se por isso a região de rejeição na cauda direita da distribuição da estatística de teste. Uma vez que a amostra não é de grande dimensão, admite-se que a distribuição de X não se afasta substancialmente de uma distribuição Normal e, consequentemente, que a distribuição da média amostral resulta Normal. Atendendo ainda à pequena dimensão da amostra, não se assume como válida a aproximação $S \approx \sigma$. ■

Apoio 3 (resolução completa)

Sejam,

X: vida dos pneus MQL utilizados em condições normais

$\mu = E(X)$

$N = 30$

$\bar{x} = 43\,200$

$s = 8000$.

Enunciam-se seguidamente as hipóteses a testar:

$$H_0 : \mu = 40\,000$$

$$H_1 : \mu > 40\,000 .$$

A amostra não tem uma grande dimensão. Contudo, se se considerar que a distribuição de X não se afasta substancialmente de uma distribuição Normal, recorrendo ao Teorema do Limite Central pode considerar-se que a média amostral, $\overline{X}$, segue aproximadamente uma distribuição Normal. Nestas condições, se H_0 for verdadeira, a estatística de teste

$$ET = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{N}}$$

segue uma distribuição $N(0,1)$.

Note-se que o desvio padrão, σ, é desconhecido, sendo estimado através do desvio padrão amostral, S. Recorde-se que S representa o estimador desvio padrão amostral, cujos valores particulares são as estimativas s. No entanto, uma vez que a amostra não é muito grande, será prudente não considerar desprezável o erro de estimação, pelo que a aproximação $S \approx \sigma$ não será considerada válida. Assim, a estatística de teste a utilizar será:

$$ET = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{N}}},$$

que, se H_0 for verdadeira, seguirá uma distribuição t_{N-1}.

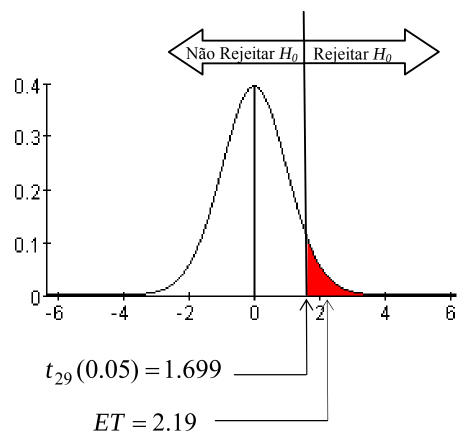
Assim,

$$ET = \frac{\overline{X} - 40000}{\frac{S}{\sqrt{N}}} \frown t_{29}.$$

Introduzindo na expressão de *ET* os valores amostrais, resulta:

$$ET = \frac{43\,200 - 40\,000}{\frac{8\,000}{\sqrt{30}}} = 2.19 > t_{29}(\alpha = 0.05) = 1.699.$$

Na figura seguinte ilustra-se este teste.



Como o valor de *ET* é superior ao valor crítico (1.699), H_0 é rejeitada, confirmando-se, assim, a reivindicação do fabricante.

O valor de prova (*p*) constitui uma medida do grau com que os dados amostrais contradizem a hipótese nula. Este valor corresponde à probabilidade de a estatística de teste tomar um valor igual ou mais extremo do que aquele que, de facto, é observado. Assim, $p = P[ET \geq 2.19 \mid H_0] \approx 1.83\%$. Note-se que, recorrendo às tabelas do Livro, só é possível determinar que $1\% < p < 2.5\%$. Aquele valor foi obtido recorrendo à função TDIST do "Microsoft Excel".

Resolução alternativa

Em alternativa ao procedimento clássico, o teste podia basear-se na definição do intervalo de confiança (aberto à direita) a 95% para o valor esperado:

$$\mu \in \left[\overline{X} - t_{29}(\alpha = 0.05) \cdot \frac{S}{\sqrt{N}}, +\infty \right[\text{ com 95\% de confiança.}$$

Substituindo,

$$\mu \in \left[43\,200 - 1.699 \cdot \frac{8\,000}{\sqrt{30}}, +\infty \right[$$

$$\mu \in [40\,718, +\infty[.$$

Ou ainda,

$\mu \geq 40718$, com 95% de confiança.

O intervalo de confiança não inclui o valor 40000. Pode assim rejeitar-se H_0 ao nível de significância de 5%. Mas o intervalo de confiança fornece uma informação adicional: o valor esperado mínimo da duração dos pneus será de 40718 km. ■

PROBLEMA 11.2

APOIOS À RESOLUÇÃO

Apoio 1 (apenas o resultado)

Há evidência no sentido de confirmar a hipótese de que $\mu_1 > \mu_2 \; (p = 2.4\%)$. ■

Apoio 2 (sugestão)

Está-se perante um teste de localização relativo à diferença de valores esperados de duas populações (amostras independentes e de pequenas dimensões). Para decidir qual a estatística de teste a utilizar (admitindo ou não a igualdade das variâncias), sugere-se que comece por efectuar um teste à razão de variâncias das duas populações. Recorde que foi assumido que as variáveis seguem distribuições Normais. ■

Apoio 3 (resolução completa)

Sejam,

X_1: diâmetro de um anel produzido na máquina 1 [cm]

X_2: diâmetro de um anel produzido na máquina 2 [cm]

$N_1 = 10, \quad \bar{x}_1 = 1.051, \quad s_1 = 0.021$

$N_2 = 15, \quad \bar{x}_2 = 1.036, \quad s_2 = 0.015$.

Como pressuposto admite-se que X_1 e X_2 seguem distribuições Normais.

Sugere-se que o teste à diferença entre valores esperados de duas populações seja precedido por um outro à razão de variâncias, uma vez que a estatística de teste à diferença entre valores esperados não é a mesma no caso de as variâncias serem iguais ou serem diferentes. Registe-se que o teste terá a máxima potência se for possível admitir que as variâncias são iguais. De facto, neste caso, o número de graus de liberdade da distribuição da estatística de teste (distribuição *t*) será $GL = N_1 + N_2 - 2 = 23$.

<u>Teste à razão de variâncias entre duas populações Normais</u> (teste F).

Formulação das hipóteses de teste sobre as variâncias:

$$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$$

$$H_1 : \sigma_1^2 > \sigma_2^2 .$$

Note-se que estas hipóteses são rigorosamente equivalentes às seguintes:

$$H_0 : \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1$$

$$H_1 : \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} > 1 .$$

Se H_0 for verdadeira a estatística de teste

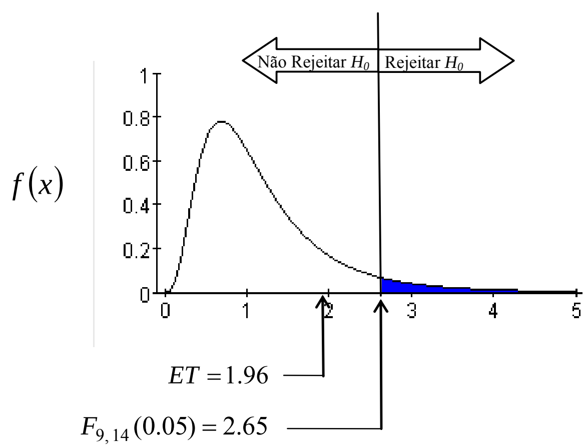
$$ET = \frac{S_1^2 / \sigma_1^2}{S_2^2 / \sigma_2^2},$$

Segue uma distribuição $F_{N_1-1,\, N_2-1}$.

Substituindo,

$$ET = \frac{0.021^2}{0.015^2} = 1.96 \quad < \quad F_{9,\,14}(\alpha = 0.05) = 2.65 .$$

Na figura seguinte ilustra-se este teste.



Como o valor de ET é inferior ao valor crítico (2.65), H_0 não é rejeitada (valor de prova $p = P[ET \geq 1.96 \mid H_0] \approx 12.5\%$). Assim, admite-se que as variâncias das duas populações são iguais, ou seja, que

$$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2 .$$

A variância comum das populações X_1 e X_2, σ^2, pode ser estimada por

$$S^2 = \frac{(N_1 - 1) \cdot S_1^2 + (N_2 - 1) \cdot S_2^2}{N_1 + N_2 - 2} .$$

Substituindo, resulta

$$s^2 = \frac{9 \cdot 0.021^2 + 14 \cdot 0.015^2}{23} = 0.0003095$$

$$s = \sqrt{0.0003095} \approx 0.0176 .$$

Teste à diferença entre valores esperados de duas populações (amostra de pequenas dimensões, populações Normais).

Formulação das hipóteses de teste:

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2$$

$$H_1 : \mu_1 > \mu_2 .$$

Admitindo que as variâncias são iguais e que H_0 é verdadeira, a estatística de teste é

$$ET = \frac{\left(\overline{X}_1 - \overline{X}_2\right)}{S \cdot \sqrt{\frac{1}{N_1} + \frac{1}{N_2}}} .$$

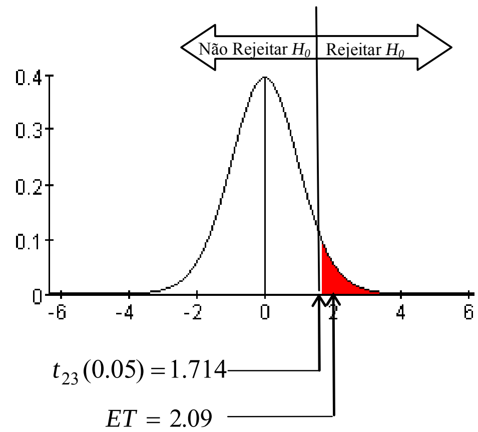
A estatística de teste segue uma distribuição t_{GL} (pois as amostras são de pequena dimensão, não sendo válida a aproximação $S \approx \sigma$) com

$$GL = N_1 + N_2 - 2 = 23 .$$

Substituindo os valores amostrais na expressão de ET, resulta

$$ET = \frac{1.051 - 1.036}{0.0176 \cdot \sqrt{\frac{1}{10} + \frac{1}{15}}} = 2.09 \quad > \quad t_{23}(\alpha = 0.05) = 1.714$$

Na figura seguinte ilustra-se este teste:



Como o valor de ET é superior ao valor crítico (1.714), H_0 é rejeitada (valor de prova $p = P[ET \geq 2.09 \mid H_0] \approx 2.4\%$). Assim, há evidência estatística que permite confirmar a hipótese de que $\mu_1 > \mu_2$, ou seja, de que, em média, os diâmetros dos anéis produzidos na máquina 1 são superiores aos dos anéis produzidos na máquina 2. ■

PROBLEMA 11.3

APOIOS À RESOLUÇÃO

Apoio 1 (apenas o resultado)

Ao nível de significância de 5%, não há evidência de que as fiabilidades dos dois tipos de termóstato sejam diferentes (p = 36.8%). ■

Apoio 2 (sugestão)

A fiabilidade de um termóstato refere-se à dispersão das temperaturas por ele observadas em relação a um determinado valor esperado. No sentido de confirmar a maior fiabilidade dos termóstatos do fornecedor *B* deverá realizar um teste de razão de variâncias das populações. Para efectuar este teste terá que admitir que as temperaturas de abertura dos fornos, equipados com os termóstatos proveniente de *A* ou de *B*, seguem distribuições Normais (embora a Normalidade não seja referida no enunciado). ■

Apoio 3 (resolução completa)

Sejam,

A: temperatura observada de abertura de um forno pelos termóstatos do fornecedor *A*

B: temperatura observada de abertura de um forno pelos termóstatos do fornecedor *B*

σ_A^2 : variância dos termóstatos vendidos pelo fornecedor A

σ_B^2 : variância dos termóstatos vendidos pelo fornecedor B

$N_A = 9$

$N_B = 11$

A média e variâncias amostrais das variáveis A e B são, respectivamente:

$\bar{x}_A = 419.67, \quad s_A^2 = 68.25$

$\bar{x}_B = 418.54, \quad s_B^2 = 54.87$.

Embora tal não seja referido no enunciado, admite-se que as temperaturas de aberturas dos fornos, X_A e X_B, seguem distribuições Normais.

Teste à razão de variâncias entre duas populações Normais (teste F)

Formulação das hipóteses do teste:

$$H_0 : \sigma_A^2 = \sigma_B^2$$

$$H_1 : \sigma_A^2 > \sigma_B^2.$$

Note-se que estas hipóteses são rigorosamente equivalentes às seguintes:

$$H_0 : \frac{\sigma_A^2}{\sigma_B^2} = 1$$

$$H_1 : \frac{\sigma_A^2}{\sigma_B^2} > 1.$$

A estatística deste teste é então

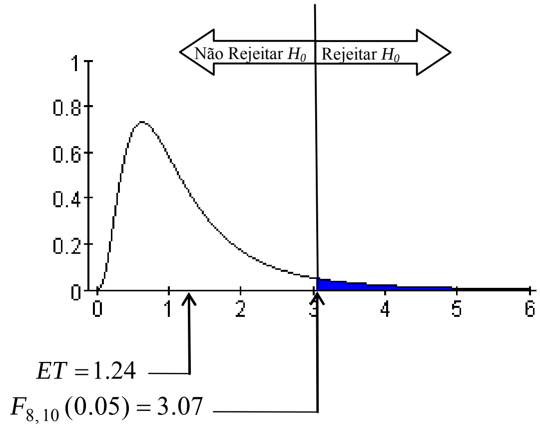
$$ET = \frac{S_A^2}{S_B^2},$$

que, quando H_0 é verdadeira, segue a distribuição $F_{N_A-1,\, N_B-1}$.

Substituindo, vem

$$ET = \frac{68.25}{54.87} = 1.24 \quad < \quad F_{8,10}(\alpha = 0.05) = 3.07.$$

Na figura seguinte ilustra-se este teste.



Ao nível de significância de 5% a hipótese H_0 não é rejeitada (isto é, ao nível de significância de 5%, não há evidência de que as fiabilidades dos dois tipos de termóstato sejam diferentes). O valor de prova $p = P[ET \geq 1.24 \mid H_0] \approx 36.8\%$.

■

PROBLEMA 11.4

APOIOS À RESOLUÇÃO

Apoio 1 (apenas o resultado)

Os resultados confirmam, ao nível de significância de 5%, que a densidade de defeitos diminuiu ($p = 4.2\%$) ■

Apoio 2 (sugestão)

Admita que a variável número de bolhas em cada placa, *Y*, segue uma distribuição de Poisson. Efectue um teste de hipóteses unilateral à esquerda de localização ao valor esperado de *Y*. ■

Apoio 3 (resolução completa)

Pressupõe-se que o número de bolhas, *Y*, em cada placa de $1.5 \cdot 3.0$ m^2 segue uma distribuição de Poisson. Antes da tentativa de melhorar o processo produtivo, o número médio de bolhas por placa seria:

$$\lambda = 0.4\,\text{bolhas/m}^2 \cdot (1.5 \cdot 3)\,\text{m}^2 = 1.8 \text{ bolhas/placa.}$$

Formulam-se de seguida as hipóteses do teste unilateral à esquerda de localização a μ_Y:

$$H_0 : \mu_Y = \lambda = 1.8$$

$$H_1 : \mu_Y < \lambda = 1.8.$$

Após as alterações no processo produtivo, obteve-se

$$\bar{y} = \frac{(1+0+3+\cdots+1+2+1)}{15} = \frac{18}{15} = 1.2 \text{ bolhas /placa.}$$

Recorde-se que se admitiu que Y seguia uma distribuição de Poisson(λ), com parâmetros $\mu = \lambda$ (e, portanto, $\sigma^2 = \lambda$). Embora a dimensão da amostra não seja muito grande (N = 15), será considerada suficiente para se tomar como válida a aproximação de $\bar{Y}$ pela Normal $N\left(\mu = \lambda,\ \sigma^2 = \dfrac{\lambda}{N}\right)$.

A estatística do teste será então:

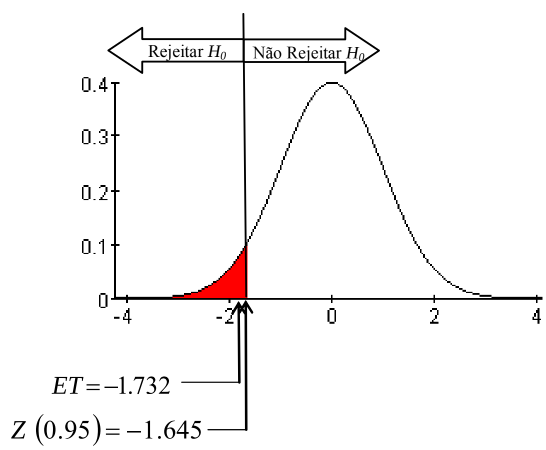
$$ET = \frac{\bar{Y} - \lambda}{\sqrt{\dfrac{\lambda}{N}}},$$

que quando H_0 é verdadeira segue (aproximadamente) uma $N(0, 1)$.

Substituindo, vem

$$ET = \frac{1.2 - 1.8}{\sqrt{\dfrac{1.8}{15}}} = -1.732 < Z(\alpha = 0.95) = -1.645\,.$$

Na figura seguinte ilustra-se este teste.



Como o valor de ET é inferior ao valor crítico (-1.645), H_0 é rejeitada ao nível de significância de 5%, confirmando-se a diminuição da densidade de defeitos. O valor de prova é $p = P[ET \leq -1.732 \mid H_0] \approx 4.2\%$ (este valor pode ser obtido recorrendo à função NORMDIST do a"Microsoft Excel" ou à Tabela 3 do Anexo «Tabelas»). ■

PROBLEMA 11.5

APOIOS À RESOLUÇÃO

Alínea (i)

Apoio 1 (apenas o resultado)

Não se pode concluir que o anúncio tenha tido um efeito positivo sobre o número de contratos (p = 7.95%). ■

Apoio 2 (sugestão)

Faça um teste à diferença de valores esperados do número de contratos de aluguer antes do anúncio e depois do anúncio. Assuma a hipótese de que as variáveis X_i (em que $i = A$ denota os dias antes anúncio e $i = D$ os dias depois do anúncio) seguem distribuições Normais com variâncias idênticas. O valor esperado do número de contratos depois do anúncio tem de ser estimado a partir do único valor observado. ■

Apoio 3 (resolução completa)

Seja

X_i: variável representando o número de contratos de aluguer no dia i

$$(\, i = \underbrace{1,\ldots 14}_{\substack{i=A \\ \text{(antes do} \\ \text{anúncio)}}}, \underbrace{15,16,17}_{\substack{i=D \\ \text{(depois do} \\ \text{anúncio)}}} \,)$$

A média e variância amostrais de X_A (antes do anúncio) são, respectivamente,

$\bar{x}_A = 21.71$ e $s_A^2 = 4.527 \Rightarrow s_A = 2.128$.

Admite-se que as variáveis X_i (antes e depois do anúncio) seguem distribuições Normais com variâncias idênticas.

Efectua-se em seguida o teste à diferença de valores esperados de duas populações (sejam μ_A e μ_D os valores esperados de X_i antes e depois do anúncio). As hipóteses em causa são as seguintes:

$$H_0 : \mu_D = \mu_A$$

$$H_1 : \mu_D > \mu_A .$$

Como só se considera a primeira observação do número de contratos depois do anúncio, a melhor estimativa disponível de μ_D será exactamente essa observação ($\hat{\mu}_D = x_{15}$). Por outro lado, uma vez que se admitiu que X_i eram Normais, então a variável $X_{15} - \bar{X}_A$ também o será. Assim a estatística de teste, no caso de H_0 ser verdadeira, é

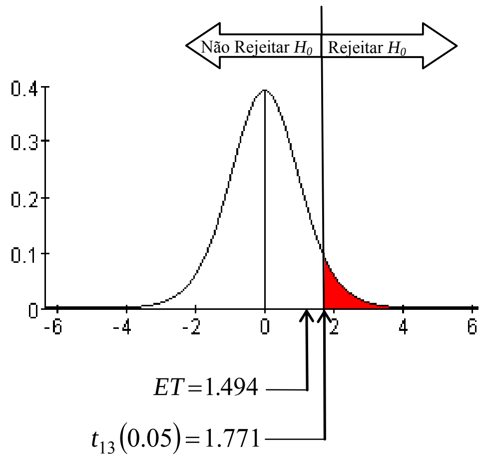
$$ET = \frac{X_{15} - \bar{X}_A}{S_A \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{14}}}$$

e segue uma distribuição t_{GL} (com $GL = N_A + N_D - 2 = 14 + 1 - 2 = 13$).

Substituindo, resulta

$$ET = \frac{25 - 21.71}{2.128 \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{14}}} = 1.494 < t_{13}(\alpha = 0.05) = 1.771 .$$

Na Figura seguinte ilustra-se este teste



Ao nível de significância de 5%, não se pode então concluir que o anúncio tenha tido um efeito positivo sobre o número de contratos. O valor de prova é $p = 7.95\%$. ■

Alínea (ii)

Apoio 1 (apenas o resultado)

Ao nível de significância de 5%, pode afirmar-se que o anúncio teve um efeito positivo sobre o número de contratos ($p = 0.73\%$). ■

Apoio 2 (sugestão)

Continue a assumir a hipótese de que as variáveis X_i (antes e depois do anúncio) seguem distribuições Normais com variâncias idênticas. No entanto, reestime a variância comum com base nos novos dados. O valor esperado do número de contratos depois do anúncio pode agora ser estimado com base numa amostra de dimensão 3. ■

Apoio 3 (resolução completa)

A média e variância amostrais da variável X_D (depois do anúncio) são, respectivamente:

$$\bar{x}_D = \frac{1}{3} \cdot (x_{15} + x_{16} + x_{17}) = 25.33 \text{ e } s_D^2 = \frac{1}{2} \cdot \sum_{15}^{17} (x_i - \bar{x}_D)^2 = 2.333 .$$

Continue a admitir-se que a variância de X_i não se alterou depois do anúncio (a hipótese $\sigma_A^2 = \sigma_B^2$ poderia agora ser testada, mas, com base nos dados disponíveis, claramente não poderia ser rejeitada). Assim, pode reestimar-se a variância comum através de:

$$s^2 = \frac{(14-1)\cdot s_A^2 + (3-1)\cdot s_D^2}{14+3-2} = 4.234 \Rightarrow s = 2.058\,.$$

Efectua-se em seguida um teste idêntico ao da alínea anterior (teste à diferença de valores esperados de duas populações Normais):

$$H_0 : \mu_D = \mu_A$$

$$H_1 : \mu_D > \mu_A\,.$$

No caso de H_0 ser verdadeira, a estatística de teste

$$ET = \frac{\overline{X}_D - \overline{X}_A}{S \cdot \sqrt{\frac{1}{3} + \frac{1}{14}}}$$

segue uma distribuição t_{GL} com GL = 14+3-2 = 15.

Substituindo,

$$ET = \frac{25.33 - 21.71}{2.058 \cdot \sqrt{\frac{1}{3} + \frac{1}{14}}} = 2.760 > t_{15}(\alpha = 0.05) = 1.753$$

Como o valor de ET é superior ao valor crítico (1.753), H_0 é rejeitada ao nível de significância de 5%, concluindo-se agora que o anúncio teve um efeito positivo sobre o número de contratos. O valor de prova é $p = P[ET \geq 2.760 \mid H_0] \approx 0.73\%$. ■

PROBLEMA 11.6

APOIOS À RESOLUÇÃO

Alínea (i)

Apoio 1 (apenas o resultado)

Ao nível de significância de 5% não é possível provar que a droga provoca, como efeito secundário, o aumento do tempo de resposta a estímulos auditivos (p = 6.23%). ■

Apoio 2 (sugestão)

Dado que as amostras não são independentes é difícil caracterizar a distribuição da estatística de teste (teste à diferença do valor esperado de duas populações). Em alternativa, procure testar a localização do valor esperado das diferenças relativas entre as "observações emparelhadas" para cada indivíduo. Isto é, trabalhe com a variável

$$\Delta r_n = \frac{x_C^n - x_S^n}{x_S^n}$$

que seguirá uma distribuição Normal. ■

Apoio 3 (resolução completa)

Sejam,

X_C: tempo de reacção a um sinal sonoro de um indivíduo com droga

X_S: tempo de reacção a um sinal sonoro de um indivíduo sem droga.

As variáveis X_C e X_S não são independentes, mas sim emparelhadas. Nestas condições, a distribuição da estatística de teste à diferença entre os valores esperados de duas populações seria difícil de caracterizar. Em alternativa, toma-se a variável

$$\Delta r_n = \frac{x_C^n - x_S^n}{x_S^n}.$$

No caso presente, a variável Δr_n é preferível à diferença absoluta $\Delta_n = x_C^n - x_S^n$ dado que existem disparidades substanciais nos tempos de reacção dos indivíduos antes de ingerirem a droga (por exemplo, o indivíduo A tem um tempo de reacção inicial de 19 segundos enquanto que esse valor em C é de 34).

Admitindo que Δr_n segue uma distribuição Normal, é possível definir o teste seguinte:

$$H_0 : \mu_\Delta = 0$$

$$H_1 : \mu_\Delta > 0 .$$

Se H_0 for verdadeira, a estatística de teste

$$ET = \frac{\overline{\Delta}}{S_\Delta / \sqrt{N}}$$

Segue uma distribuição t_{N-1}.

Na tabela seguinte apresentam-se os cálculos referentes às diferenças

$$\Delta r_n = \frac{x_C^n - x_S^n}{x_S^n}.$$

Indivíduo	x_C	x_S	$\Delta r_n = \frac{x_C^n - x_S^n}{x_S^n}$
A	17	19	-0.1053
B	27	22	0.2273
C	39	34	0.1470

D	27	21	0.2857
E	30	27	0.1111
F	21	24	-0.1250
G	36	29	0.2414
			$\overline{\Delta} = 0.1117$
			$s_\Delta = 0.1657$

Substituindo, vem

$$ET = \frac{0.1117}{\frac{0.1657}{\sqrt{7}}} = 1.784 < t_6(\alpha = 0.05) = 1.943 .$$

Nestas condições, H_0 não é rejeitada ao nível de significância de 5%. Assim, não se pode concluir que a droga provoca, como efeito secundário, o aumento do tempo de resposta a estímulos auditivos. O valor de prova é $p = P[ET \geq 1.784 \mid H_0] \approx 6.23\%$.

Registe-se que recorrendo à variável diferença absoluta, $\Delta_n = x_C^n - x_S^n$, o teste equivalente conduziria à rejeição de H_0 (com um valor de prova $p \approx 4.6\%$). ■

PROBLEMA 11.7

APOIOS À RESOLUÇÃO

Alínea (i)

Apoio 1 (apenas o resultado)

Ao nível de significância de 5%, não se pode concluir que o método novo é menos fiável do que o método convencional $(p = 18.7\%)$. ■

Apoio 2 (sugestão)

No contexto do problema, a fiabilidade do método de análise refere-se à sua repetibilidade, ou seja, à dispersão dos resultados que são obtidos em condições idênticas de trabalho. Se assumir que as distribuições dos resultados das análises são Normais, deverá realizar um teste à razão das variâncias para confirmar a maior fiabilidade do método novo. ■

Apoio 3 (resolução completa)

Sejam,

N_C: resultados obtidos nas análises de rotina com o método convencional

N_N: resultados obtidos nas análises de rotina com o método novo.

Como

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N} (x_i - \overline{x})^2}{N-1}$$, resulta

$$s_C^2 = \frac{30.5}{24-1} = 1.33 \quad \Rightarrow \quad s_C = 1.15$$

e

$$s_N^2 = \frac{55.7}{30-1} = 1.92 \quad \Rightarrow \quad s_N = 1.39\,.$$

Admite-se que os resultados das análises (com ambos os métodos) seguem distribuições Normais.

No contexto do problema, a fiabilidade do método de análise refere-se à sua repetibilidade, ou seja à dispersão dos resultados que são obtidos em condições idênticas de trabalho Trata-se então da comparação das variâncias de duas populações Normais. As hipóteses relativas ao teste à razão das variâncias de duas populações Normais são as seguintes:

$$H_0 : \sigma_N^2 = \sigma_C^2$$

$$H_1 : \sigma_N^2 > \sigma_C^2\,.$$

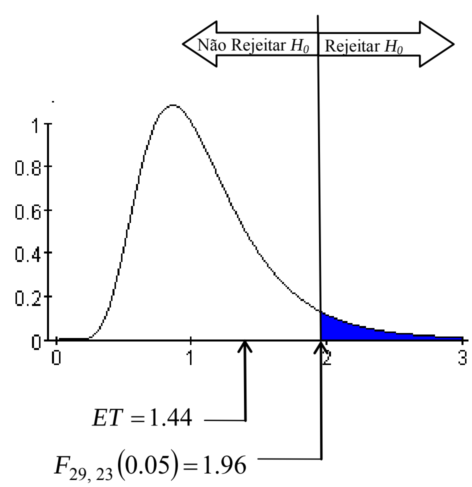
Se H_0 for verdadeira,

$$ET = \frac{S_N^2}{S_C^2}$$ segue uma distribuição $F_{29,\,23}$

Substituindo

$$ET = \frac{1.92}{1.33} = 1.44 < F_{29,\,23}(\alpha = 0.05) \approx 1.96$$

Na figura seguinte ilustra-se este teste.



Nestas condições, não é possível rejeitar H_0. Ou seja, ao nível de significância de 5% não se pode concluir que o método novo é menos fiável do que o método convencional. O valor de prova é $p = P\left[ET \geq 1.44 \mid H_0\right] \approx 18.7\%$. ■

Alínea (ii)

Apoio 1 (apenas o resultado)

Ao nível de significância de 5%, pode afirmar-se que a média de 3 observações obtidas a partir do novo método é mais preciso do que utilizar observações individuais obtidas a partir do método convencional $\left(p = 3.6\%\right)$. ■

Apoio 2 (sugestão)

Procure caracterizar a variável média de 3 observações obtidas com o novo método. No sentido de confirmar a maior fiabilidade desta variável face a um resultado individual produzido com o método convencional, deverá realizar um teste de razão de variâncias de duas populações Normais. ■

Apoio 3 (resolução completa)

Seja Z a média de 3 observações obtidas com o novo método. Nesse caso,

$$\mathrm{Var}(Z) = \sigma_Z^2 = \frac{\sigma_N^2}{3}.$$

Contemplam-se de seguida hipóteses idênticas às testadas na alínea anterior:

$$H_0 : \sigma_C^2 = \sigma_Z^2 = \frac{\sigma_N^2}{3}$$

$$H_1 : \sigma_C^2 > \sigma_Z^2 = \frac{\sigma_N^2}{3}.$$

Se H_0 for verdadeira, a estatística de teste

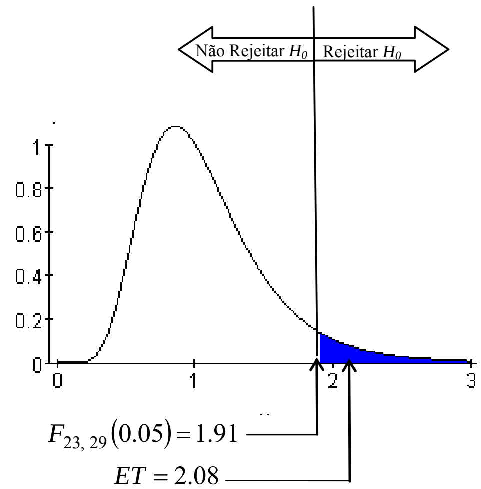
$$ET = \frac{S_C^2}{S_Z^2} = \frac{S_C^2}{\frac{S_N^2}{3}}$$

segue uma distribuição $F_{N_C - 1,\, N_N - 1} = F_{23,\, 29}$.

Substituindo,

$$ET = \frac{1.33}{\frac{1.92}{3}} = 2.08 > F_{23,\, 29}(\alpha = 0.05) \approx 1.91.$$

Na figura seguinte ilustra-se este teste.



A hipótese nula é rejeitada (ao nível de significância de 5%). Conclui-se que utilizar a média de 3 observações obtidas a partir do novo método é mais preciso do que recorrer a observações individuais obtidas a partir do método convencional. O valor de prova é p = 3.16%. ■

PROBLEMA 11.8

APOIOS À RESOLUÇÃO

Alínea (i)

Apoio 1 (apenas o resultado)

As peças produzidas actualmente são menos resistentes do que o habitual (p = 0.0178%). ■

Apoio 2 (sugestão)

Está-se perante um teste de localização, neste caso ao valor esperado de uma população cuja variância é conhecida. O teste é unilateral à esquerda, concentrando-se por isso a região de rejeição na cauda esquerda da distribuição da estatística de teste. Note que a amostra é de pequena dimensão. ■

Apoio 3 (resolução completa)

Sejam,

X: resistência à compressão das peças de um determinado material isolante produzidas por um molde de injecção

$\mu = 5.18$ kg/cm^2

$\sigma^2 = 0.0625\ \left(\text{kg/cm}^2\right)^2 \Rightarrow \sigma = 0.25\ \text{kg/cm}^2$

$N = 12$

$\bar{x} = 4.95$ kg/cm^2.

Embora a amostra seja de pequena dimensão, como X é Normal também a média amostral $\overline{X}$ segue uma distribuição Normal. Note-se que a variância não é estimada.

O teste de localização ao valor esperado contempla as seguintes hipóteses:

$$H_0 : \mu = 5.18$$

$$H_1 : \mu < 5.18.$$

A estatística de teste é:

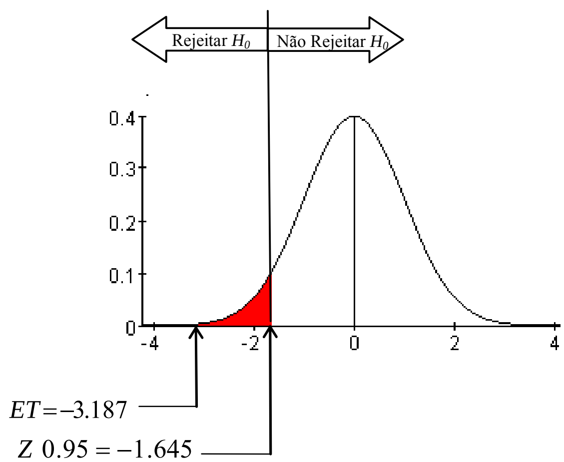
$$ET = \frac{\overline{X} - \mu}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{N}}},$$

que quando H_0 é verdadeira segue uma distribuição $N(0,1)$.

Substituindo, resulta

$$ET = \frac{4.95 - 5.18}{\sqrt{\dfrac{0.0625}{12}}} = -3.18 < Z(\alpha = 0.95) = -1.645$$

Na figura seguinte ilustra-se este teste.



A hipótese nula é rejeitada ao nível de significância de 5%. Conclui-se assim que as peças produzidas actualmente são menos resistentes do que o habitual. O valor de prova é $p = 0.0719\%$.

Alínea (ii)

Apoio 1 (apenas o resultado)

$(1 - \beta) = 0.98669$. ■

Apoio 2 (sugestão)

A potência do teste traduz a probabilidade de rejeitar H_0 quando ela é falsa, denotando-se tal probabilidade por $1 - \beta$. De acordo com o enunciado do problema, esta probabilidade é calculada tomando como verdadeira $H_1 = 4.90$. Considere que a variância da resistência à compressão das peças produzidas recentemente é idêntica à das peças produzidas anteriormente. ■

Apoio 3 (resolução completa)

Sejam,

X_A: resistência à compressão das peças produzidas anteriormente

$\mu_A = 5.18$

X_R: resistência à compressão das peças produzidas recentemente

$\mu_R = 4.90$.

Admita-se o pressuposto de que a variância não se altera ($\sigma^2 = 0.0625$).

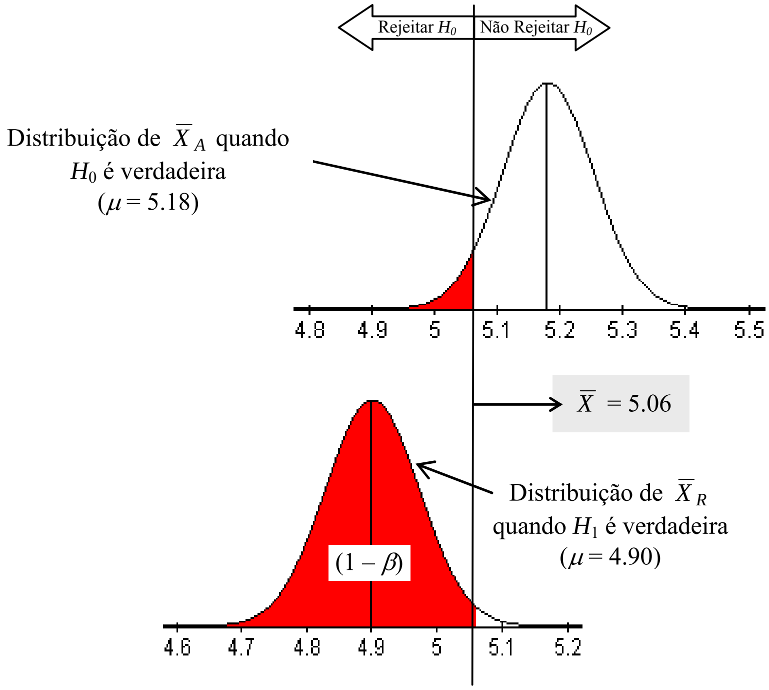
O erro de tipo II corresponde a não se rejeitar H_0 quando a hipótese alternativa, H_1, é verdadeira. A probabilidade de nele se incorrer denota-se por β. A potência do teste traduz a probabilidade de rejeitar H_0 quando ela é falsa, ou seja, $1 - \beta$.

O valor crítico (-1.645) utilizado na alínea anterior, que separa a zona de rejeição da zona de não rejeição de H_0, foi calculado a partir de uma distribuição Normal padronizada. O valor crítico correspondente na distribuição de $\overline{X}$ (que, igualmente, permite definir a região de rejeição de H_0) é dado por (ver figura seguinte):

$$\frac{\overline{X} - 5.18}{\frac{0.25}{\sqrt{12}}} = -1.645 \Rightarrow \overline{X} = 5.06 .$$

Sabendo que H_0 é falsa e que H_1: $\mu_R = 4.90$, a potência de teste corresponde a:

$1 - \beta = P\left[\overline{X}_R \leq 5.06 \mid H_1\right]$ (ver figura seguinte).



A probabilidade de $\overline{X}_R$ ocorrer na zona de rejeição de H_0 (ou seja $P\left(\overline{X}_R \le 5.06\right)$ é dada por:

$$P\left(\overline{X}_R \le 5.06\right) = P\left(Z = \frac{\overline{X}_R - 4.90}{\frac{0.25}{\sqrt{12}}} \le \frac{5.06 - 4.90}{\frac{0.25}{\sqrt{12}}}\right),$$

com Z sendo uma variável Normal $N(0,1)$.

Executando os cálculos, resulta

$P(Z \le 2.217) = (1-\beta) = 0.98669$. ∎

PROBLEMA 11.9

APOIOS À RESOLUÇÃO

Alínea (i)

Apoio 1 (apenas o resultado)

Ao nível de significância de 5%, pode afirmar-se que as máquinas A e B têm precisões diferentes: a precisão de A é inferior à precisão de B. ∎

Apoio 2 (sugestão)

A precisão de uma máquina traduz a dispersão dos resultados observados em torno do seu valor esperado. No sentido de confirmar se as máquinas diferem na precisão deverá realizar um teste de razão de variâncias de duas populações, admitindo que são Normais. ■

Apoio 3 (resolução completa)

Sejam,

X_A: diâmetro do veio registado pela máquina *A*

X_B: diâmetro do veio registado pela máquina *B*.

O teste à precisão das máquinas equivale a um teste às variâncias. Para tal, pressupõe-se que os diâmetros dos veios produzidos pelas máquinas A e B seguem distribuições Normais.

Formulação de hipóteses de teste à razão de variâncias (teste *F*):

$$H_0 : \sigma_A^2 = \sigma_B^2$$

$$H_1 : \sigma_A^2 \neq \sigma_B^2 .$$

Quando H_0 é verdadeira, a estatística de teste

$ET = \dfrac{S_A^2}{S_B^2}$ segue a distribuição $F_{N_A-1,\ N_B-1}$.

Substituindo,

$$ET = \frac{12.7}{4.7} = 2.70 > F_{131,\ 119}(\alpha = 0.05\,^*) = 1.3457$$

*Nota: apesar de o teste ser bilateral, pode usar-se o valor de α = 0.05 (e realizar o teste "à direita", se o critério utilizado na formulação da estatística de teste for o de fixar, *a priori*, que no numerador se coloca o maior dos dois valores, s_A^2 ou s_B^2. De facto, se H_0 for verdadeira, em 50% dos casos constará no numerador s_A^2 e, nos outros 50%, s_B^2.

A hipótese nula da igualdade das variâncias é rejeitada. Ao nível de significância de 5%, pode concluir-se que as máquinas A e B têm precisões diferentes: neste caso, a precisão de A é inferior à precisão de B. ■

Alínea (ii)

Apoio 1 (apenas o resultado)

Não há evidência estatística de que as proporções de veios defeituosos provenientes das máquinas A e B sejam significativamente diferentes. ■

Apoio 2 (sugestão)

Deverá realizar um teste à diferença entre duas proporções binomiais (amostras de grandes dimensões). ■

Apoio 3 (resolução completa)

Sejam,

p_A e p_B: proporções de veios defeituosos respectivamente nas populações A (veios produzidos pela máquina A) e B (veios produzidos pela máquina B)

N_A e N_B: dimensões das amostras de A e de B

Y_A e Y_B: número de veios defeituosos nas amostras de A e de B.

Admite-se que as amostras, de grandes dimensões, são independentes.

O teste à diferença entre as proporções binomiais contempla as seguintes hipóteses:

$$H_0 : p_A = p_B$$

$$H_1 : p_A \neq p_B .$$

Note-se que, se H_0 for verdadeira, então $p_A = p_B = p$. Combinando as duas proporções amostrais obtém-se a melhor estimativa possível de p:

$$\hat{p} = \frac{Y_A + Y_B}{N_A + N_B} = \frac{15+7}{132+120} = 0.0873 .$$

A estimativa do desvio padrão de $\hat{p}$ resulta assim:

$$s_{\hat{p}} = \sqrt{\frac{\hat{p}\cdot(1-\hat{p})}{N_A} + \frac{\hat{p}\cdot(1-\hat{p})}{N_B}} = \sqrt{\frac{0.0873\cdot 0.9127}{132} + \frac{0.0873\cdot 0.9127}{120}} = 0.03560 .$$

Por outro lado, como as amostras são de grandes dimensões, se H_0 for verdadeira, a estatística de teste segue uma distribuição $N(0,1)$ e toma a forma seguinte:

$$ET = \frac{\left(\frac{Y_A}{N_A} - \frac{Y_B}{N_B}\right)}{s_{\hat{p}}} .$$

Substituindo, resulta

$$ET = \frac{\frac{15}{132} - \frac{7}{120}}{0.03560} = 1.553 .$$

Adoptando $\alpha = 5\%$, vem

$ET = 1.553 < Z(\alpha/2 = 0.025) = 1.96$.

Realizando o mesmo teste, mas fazendo α = 10%, resulta

$ET = 1.553 < Z(\alpha/2 = 0.05) = 1.645$.

Pode assim concluir-se que, quer ao nível de significância de 5% quer mesmo ao de 10%, H_0 não é rejeitada (isto é, não há evidência de que as proporções de veios defeituosos provenientes das duas máquinas sejam significativamente diferentes). ■

PROBLEMA 11.10

APOIOS À RESOLUÇÃO

Alínea (i)

Apoio 1 (apenas o resultado)

$\mu \in [194.45, 197.55]$ com 95% de confiança. ■

Apoio 2 (sugestão)

Admita que a dimensão da amostra é suficiente para garantir que a média amostral, $\overline{X}$, segue, aproximadamente, uma distribuição Normal, independentemente da distribuição da variável *X*, que representa o peso da castanha de caju contido em cada embalagem. ■

Apoio 3 (resolução completa)

Sejam,

X: peso da castanha de cajú incluído numa embalagem

$N = 35$

$\overline{x} = 196g$

$s^2 = 20.47 = 4.52^2$

Admite-se que a variável *X* possui uma distribuição unimodal não muito assimétrica e, assim, a variável $\overline{X}$ obtida a partir de amostras com $N = 35$ segue aproximadamente uma distribuição Normal.

O Intervalo de confiança bilateral a 95% para μ_X é:

$$\overline{X} \pm t_{34}(\alpha = 0.025) \cdot \frac{S}{\sqrt{N}}.$$

Substituindo (com $t_{34}(0.025) = 2.034$), resulta

$$196 \pm 2.034 \cdot \frac{4.52}{\sqrt{35}}$$

$$196 \pm 1.55\,,$$

donde

$\mu_X \in [194.45, 197.55]$, com 95% de confiança. ■

Alínea (ii)

Apoio 1 (apenas o resultado)

O departamento de controlo de qualidade tem razão quanto à desonestidade do fornecedor. ■

Apoio 2 (sugestão)

Está-se perante um teste ao valor esperado de uma população. O teste é unilateral à esquerda, uma vez que o departamento de controlo de qualidade desconfia que, devido à desonestidade do fornecedor, o peso do conteúdo das embalagens é, em média, inferior a 200 gramas (concentrando-se a região de rejeição na cauda esquerda da distribuição da estatística de teste). O intervalo de confiança correspondente deverá ser unilateral, aberto à esquerda e fechado à direita. ■

Apoio 3 (resolução completa)

Formulação das hipóteses de teste:

$$H_0 : \mu = 200$$

$$H_1 : \mu < 200\,.$$

O intervalo de confiança que permite testar estas hipóteses deverá ser unilateral, aberto à esquerda e fechado à direita, com $(1 - \alpha) = 95\%$. Assim,

$$\mu \in \left]-\infty\,, \quad \overline{X} + t_{34}(\alpha = 0.05) \cdot \frac{S}{\sqrt{N}}\right]$$

ou

$$\mu < \left(\overline{X} + t_{34}(\alpha = 0.05) \cdot \frac{S}{\sqrt{N}}\right) \text{ com 95\% de confiança.}$$

Consultando a Tabela 5 pode verificar-se que $t_{34}(0.05) = 1.691$. Substituindo resulta

$$196 + 1.691 \cdot \frac{4.52}{\sqrt{35}} = 197.29 \,.$$

Ou seja,

$\mu \leq 197.29$, com 95% de confiança

O valor estipulado em H_0 (μ = 200) não pertence ao intervalo de confiança, o que permite (ao nível de significância α = 5%) rejeitar aquela hipótese. Mais ainda, pode afirmar-se (com 95% de confiança) que o valor esperado do peso da castanha de cajú incluída nas embalagens é inferior 197.29 gramas. O departamento de controlo de qualidade tinha razão quanto à desonestidade do fornecedor. ■