

Capítulo 7

Estimação

AMG, JFO (v8 – 2017)
adaptado de: *Estatística*,
Rui Campos Guimarães,
José A. Sarsfield Cabral

Slide 7b.-1

Conteúdo

7.1 Introdução	7-1
7.2 Propriedades desejáveis dos Estimadores Pontuais	7-2
7.2.1 Não-enviesamento	7-2
7.2.2 Eficiência	7-3
7.2.3 Consistência	7-4
7.2.4 Outras características desejáveis	7-5
7.3 Exercícios	7-5

Slide 7b.0

Resultados de aprendizagem

- Enunciar as propriedades desejáveis de estimadores
- Calcular o enviesamento e a eficiência de estimadores
- Comparar e escolher estimadores

Slide 7b.1

7.1 Introdução

Introdução

Exemplo

Dados

- $Y \sim B(N, p)$, com N e p desconhecidos
- Amostra aleatória simples $\{Y_1, Y_2, \dots, Y_K\}$

Pretende-se estimar os valores:

- de N e de p
- ou de outros parâmetros, como $\mu = N \cdot p$ ou $\sigma^2 = N \cdot p \cdot (1 - p)$

⇒ Definem-se estatísticas cujos valores particulares são estimativas dos parâmetros.

Por exemplo, seria razoável estimar μ a partir da média amostral:

$$\bar{Y} = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K Y_k$$

Em que:

- \bar{Y} é um estimador pontual de μ
- \bar{y} (realização da estatística) constitui uma estimativa de μ

Slide 7b.2

Estimadores e Estimativas

Estimador pontual — é uma estatística $\hat{\Theta}$ cujos valores particulares $\hat{\theta}$ constituem estimativas do parâmetro populacional θ

Estimativa — é um valor particular $\hat{\theta}$ de um estimador que é função dos valores y_1, y_2, \dots, y_n da amostra Y_1, Y_2, \dots, Y_n

Exemplos:

- Média amostral — estimador do valor esperado da população
- Variância amostral — estimador da variância da população
- ...

Notas

- Amostras diferentes \rightarrow valores diferentes para o estimador (ou seja estimativas $\hat{\theta}$ diferentes) $\rightarrow \hat{\Theta}$ é uma variável aleatória
- Os estimadores pontuais são representados por letras maiúsculas ($\hat{\Theta}, \bar{Y}, \dots$), enquanto as estimativas são representadas por letras minúsculas ($\hat{\theta}, \bar{y}, \dots$)

Slide 7b.3

7.2 Propriedades desejáveis dos Estimadores Pontuais

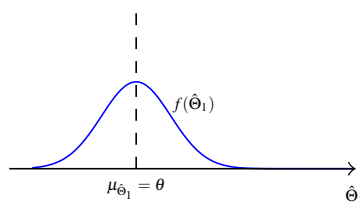
7.2.1 Não-enviesamento

Propriedades dos Estimadores: Não-enviesamento

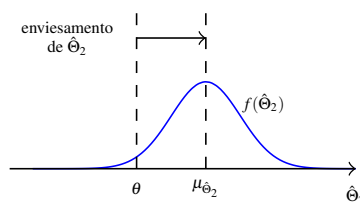
Enviesamento: diferença entre o valor esperado do estimador ($E(\hat{\Theta}) = \mu_{\hat{\Theta}}$) e o valor do parâmetro (θ)

$$\text{Enviesamento}_{\hat{\Theta}} = E(\hat{\Theta}) - \theta = \mu_{\hat{\Theta}} - \theta$$

(estimador não-enviesado)



(estimador enviesado)



- Se o enviesamento for nulo o estimador diz-se não-enviesado, cêntrico ou sem distorção
- O estimador diz-se assintoticamente não-enviesado se

$$\lim_{N \rightarrow \infty} E(\hat{\Theta}) - \theta = 0$$

Slide 7b.4

Exemplos:

Para uma população caracterizada pela v.a. X , da qual se retiram amostras de dimensão N , consideram-se os seguintes estimadores:

Média amostral — $\bar{X} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N X_n$

$$E(\bar{X}) = E(X) = \mu_X \rightarrow \text{Enviesamento}_{\bar{X}} = 0$$

Desvio quadrático amostral — $DQM = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (X_n - \bar{X})^2$

$$E(DQM) = \frac{N-1}{N} \sigma_X^2 = \sigma_X^2 - \frac{1}{N} \sigma_X^2 \neq \sigma_X^2$$
$$\rightarrow \text{Enviesamento}_{DQM} = -\frac{1}{N} \sigma_X^2$$

Variância amostral — $S^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{n=1}^N (X_n - \bar{X})^2 = \frac{N}{N-1} DQM$

$$E(S^2) = E\left(\frac{N}{N-1} DQM\right) = \frac{N}{N-1} \frac{N-1}{N} \sigma_X^2 = \sigma_X^2$$
$$\rightarrow \text{Enviesamento}_{S^2} = 0$$

Slide 7b.5

7.2.2 Eficiência

Propriedades dos Estimadores: Eficiência

Eficiência de um Estimador

- Reflete a sua precisão potencial
- Pode ser medida através do seu Erro Quadrático Médio (medida de dispersão do estimador em redor do parâmetro estimado)

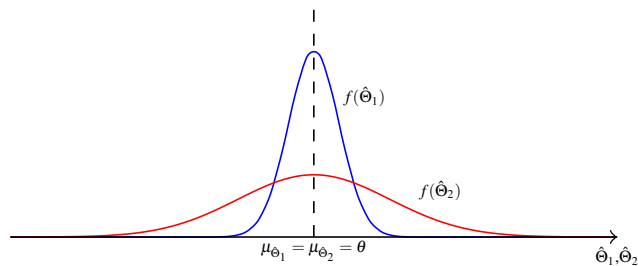
$$\text{Eficiência}_{\hat{\theta}} = E[(\hat{\theta} - \theta)^2] = \sigma_{\hat{\theta}}^2 + (\text{Enviesamento}_{\hat{\theta}})^2$$

Notas

- Como a eficiência de um estimador é calculada por uma medida de dispersão, pretende-se ter *valores baixos de eficiência*
- ou seja, quanto menor o valor da sua eficiência melhor é o estimador

Slide 7b.6

Eficiência entre estimadores não-enviesados



- O estimador $\hat{\theta}_1$ é mais eficiente que o estimador $\hat{\theta}_2$
- Estimador eficiente ou de fraca dispersão
- Um estimador é tanto “melhor” quanto menor for a sua variância

Slide 7b.7

Exemplo

Objectivo: estimar o valor esperado de uma população Normal com variância σ^2 a partir de estatísticas de uma amostra de tamanho N

Hipótese 1: média amostral \bar{X}

- $E(\bar{X}) = \mu_X \rightarrow$ estimador não enviesado
- $\sigma_{\bar{X}}^2 = \frac{\sigma_X^2}{N}$ (conforme visto em capítulo anterior)

Hipótese 2: mediana amostral

- $E(\text{Med}) = \mu_X$ (distribuição normal é simétrica) \rightarrow estimador não enviesado
- $\sigma_{\text{Med}}^2 = \frac{\pi}{2} \frac{\sigma^2}{N}$ (pode demonstrar-se)

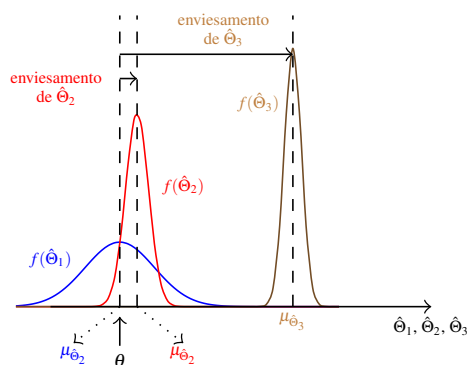
\Rightarrow a mediana é um estimador menos eficiente:

A mediana teria que ser calculada sobre uma amostra 1.57 vezes maior do que aquela sobre a qual se calcula a média, para ambos os estimadores serem igualmente eficientes

Slide 7b.8

Comparação de estimadores enviesados

- Qual é o melhor estimador do parâmetro θ , $\hat{\theta}_1$, $\hat{\theta}_2$ ou $\hat{\theta}_3$, ?



- $\hat{\Theta}_1$ é o estimador com menor enviesamento (tem enviesamento nulo)
- $\Rightarrow \hat{\Theta}_2$ é o estimador mais eficiente (menor Erro Quadrático Médio)
- $\hat{\Theta}_3$ é o estimador com menor variância

Slide 7b.9

A comparação da eficiência entre diferentes estimadores faz-se com base no conceito de *eficiência relativa* entre estimadores

A *eficiência relativa* entre dois estimadores $\hat{\Theta}_1$ e $\hat{\Theta}_2$ de um parâmetro θ é dada por:

$$\text{Eficiência relativa}_{\frac{\hat{\Theta}_1}{\hat{\Theta}_2}} = \frac{E[(\hat{\Theta}_1 - \theta)^2]}{E[(\hat{\Theta}_2 - \theta)^2]} \quad \left(= \frac{\sigma_{\hat{\Theta}_1}^2 + (\text{Envies}_{\hat{\Theta}_1})^2}{\sigma_{\hat{\Theta}_2}^2 + (\text{Envies}_{\hat{\Theta}_2})^2} \right)$$

Notas:

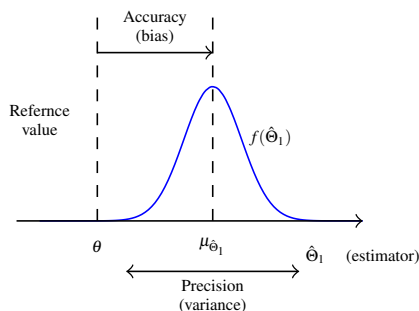
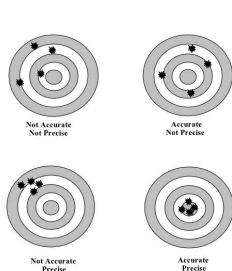
- Um estimador diz-se absolutamente eficiente se não existir outro estimador mais eficiente que ele
- Média amostral é o *estimador eficiente* do valor esperado para populações Normais

Slide 7b.10

Nota: Exactidão vs Precisão

Accuracy vs Precision

- Accuracy is how close an estimate is to the true value (bias)
- Precision is how close individual estimates are between each other (variance)

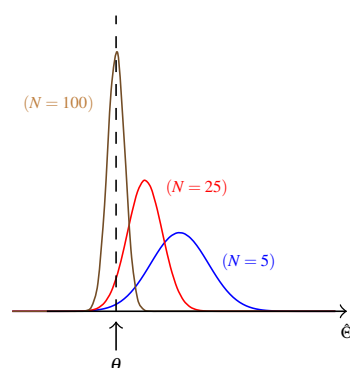


Slide 7b.11

7.2.3 Consistência

Propriedades dos Estimadores: Consistência

Estimador consistente: converge em probabilidade para o valor do parâmetro quando a dimensão da amostra N tende para ∞



Seja $\hat{\Theta}$ um estimador do parâmetro θ e N a dimensão da amostra com base na qual ele é calculado. Um estimador diz-se consistente se:

$$\forall \delta > 0 \quad \lim_{N \rightarrow \infty} P[|\hat{\Theta} - \theta| < \delta] = 1$$

(quando o tamanho da amostra tende para infinito o estimador concentra-se no seu alvo)

- Estimador consistente, coerente ou convergente
- A média amostral é um estimador consistente do valor esperado:
 - o enviesamento é nulo ($E(\bar{X}) = \mu_X$)
 - a variância tende para 0 quando N tende para infinito ($\sigma_{\bar{X}}^2 = \sigma_X^2 / N$)

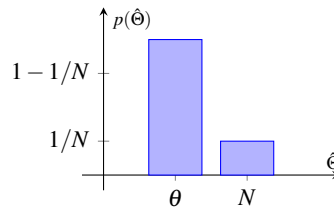
Slide 7b.12

Condições suficientes para a consistência de um estimador

São condições **suficientes** (mas não necessárias) para que um estimador seja consistente que o enviesamento e a variância do estimador tendam para zero quando a dimensão da amostra tender para infinito.

Exemplo: estimador $\hat{\Theta}$ do parâmetro θ com função de probabilidade:

$$p(\hat{\Theta}) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{N}, & \text{para } \hat{\Theta} = \theta \\ \frac{1}{N}, & \text{para } \hat{\Theta} = N. \end{cases}$$



Verificação da consistência pela definição:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \text{Probabilidade}(|\hat{\Theta} - \theta| < \delta) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{N}\right) = 1$$

(não) Verificação das condições suficientes de consistência:

- $E(\hat{\Theta}) = \theta \times \left(1 - \frac{1}{N}\right) + N \times \frac{1}{N} = \theta - \frac{\theta}{N} + 1 \neq \theta$
- $E[(\hat{\Theta} - \theta)^2] = (\theta - \theta)^2 \left(1 - \frac{1}{N}\right) + (N - \theta)^2 \frac{1}{N} = N + \frac{\theta^2}{N} - 2\theta \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \infty$

Slide 7b.13

7.2.4 Outras características desejáveis

Outras características desejáveis nos estimadores

Suficiência

Capacidade de um estimador conseguir condensar toda a informação, relativa ao parâmetro estimado, presente nas observações que integram uma amostra

Robustez

É a propriedade de um estimador em se manter aproximadamente não-enviesado e eficiente para um grande conjunto de distribuições populacionais

Slide 7b.14

7.3 Exercícios

1. T_1 e T_2 são estimadores de um parâmetro θ , tais que:

$$E(T_1) = \theta \quad \text{Var}(T_1) = 9 \quad E(T_2) = 3\theta \quad \text{Var}(T_2) = 3$$

Diga, justificando, qual destes estimadores é melhor estimador de θ .

(Resp.: Depende do valor de θ ...)

2. Considere uma população Normal e a estatística $T = \frac{X_1 + 2X_2}{3}$ para amostras aleatórias simples de dimensão 2.

- a) Determine a distribuição amostral de T e os respectivos parâmetros.

(Resp.: $T \sim N\left(\mu_X, \frac{5}{9} \cdot \sigma_X^2\right)$)

- b) T é um estimador não-enviesado para μ ?

(Rep.: Sim, ...)

- c) Obtenha uma estimativa para T com base na amostra (7.8; 6.7).

(Resp.: $t = 7.067$)

Slide 7b.15

3. Let X_1 and X_2 be independent random variables with mean μ and variance σ^2 . Suppose that we have two estimators of μ :

$$\hat{\Theta}_1 = \frac{X_1 + X_2}{2} \quad \hat{\Theta}_2 = \frac{X_1 + 3X_2}{4}$$

- a) Are both unbiased estimators of μ ?
- b) What is the variance of each estimator?

c) Which one is the most efficient estimator of μ ?

Resolução:

a) Cálculo dos valores esperados dos estimadores:

$$E(\hat{\Theta}_1) = E\left(\frac{X1 + X2}{2}\right) = \frac{E(X1) + E(X2)}{2} = \frac{\mu + \mu}{2} = \mu$$

$$E(\hat{\Theta}_2) = E\left(\frac{X1 + 3X2}{4}\right) = \frac{E(X1) + 3 \cdot E(X2)}{4} = \frac{\mu + 3\mu}{4} = \mu$$

Cálculo dos enviesamentos:

$$\text{Enviesamento}_{\hat{\Theta}_1} = E(\hat{\Theta}_1) - \mu = \mu - \mu = 0$$

$$\text{Enviesamento}_{\hat{\Theta}_2} = E(\hat{\Theta}_2) - \mu = \mu - \mu = 0$$

Logo, os dois estimadores são não enviesados.

b) Cálculo das variâncias dos estimadores:

$$\sigma_{\hat{\Theta}_1}^2 = \text{Var}(\hat{\Theta}_1) = \text{Var}\left(\frac{X1 + X2}{2}\right) = \frac{\text{Var}(X1) + \text{Var}(X2)}{4} = \frac{\sigma^2 + \sigma^2}{4} = \frac{1}{2} \cdot \sigma^2$$

$$\sigma_{\hat{\Theta}_2}^2 = \text{Var}(\hat{\Theta}_2) = \text{Var}\left(\frac{X1 + 3X2}{4}\right) = \frac{\text{Var}(X1) + 9 \cdot \text{Var}(X2)}{16} = \frac{\sigma^2 + 9\sigma^2}{16} = \frac{5}{8} \cdot \sigma^2$$

c) Cálculo das eficiências dos estimadores:

$$\text{Eficiência}_{\hat{\Theta}_1} = E\left[(\hat{\Theta}_1 - \mu)^2\right] = \sigma_{\hat{\Theta}_1}^2 + (\text{Enviesamento}_{\hat{\Theta}_1})^2 = \frac{1}{2} \cdot \sigma^2 + 0 = \frac{1}{2} \cdot \sigma^2$$

$$\text{Eficiência}_{\hat{\Theta}_2} = E\left[(\hat{\Theta}_2 - \mu)^2\right] = \sigma_{\hat{\Theta}_2}^2 + (\text{Enviesamento}_{\hat{\Theta}_2})^2 = \frac{5}{8} \cdot \sigma^2 + 0 = \frac{5}{8} \cdot \sigma^2$$

Cálculo da eficiência relativa entre os dois estimadores:

$$\text{Eficiência relativa}_{\hat{\Theta}_1/\hat{\Theta}_2} = \frac{\text{Eficiência}_{\hat{\Theta}_1}}{\text{Eficiência}_{\hat{\Theta}_2}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \sigma^2}{\frac{5}{8} \cdot \sigma^2} = \frac{4}{5}$$

Logo, o estimador $\hat{\Theta}_1$ é o mais eficiente porque a eficiência relativa é menor do que 1 (nota: um estimador será tanto melhor quanto menor for o valor da sua eficiência).

Resolução alternativa: como neste caso os dois estimadores são não enviesados o mais eficiente será o que tiver menor variância, logo será o estimador $\hat{\Theta}_1$