CAPÍTULO 4 – VARIÁVEIS ALEATÓRIAS. DISTRIBUIÇÕES DE PROBABILIDADE

Problemas

PROBLEMA 4.1

Uma empresa de fiscalização de obras de construção civil tem 7 fiscais, dos quais 2 são do sexo feminino. Para visitar as obras de uma ponte ferroviária, foram seleccionados ao acaso dois fiscais. Denote-se por Y o número de mulheres seleccionadas.

(i) Defina o espaço amostral da experiência, designando os fiscais por A, ..., E (homens) e F, G (mulheres).

(ii) Defina o valor da variável aleatória Y, para cada elemento do espaço amostral.

(iii) Defina as funções de probabilidade e de distribuição da variável Y. Represente ambas as funções na forma tabular e através de diagramas de barras.

(iv) Calcule o valor esperado, o desvio padrão e o coeficiente de assimetria da variável Y.

PROBLEMA 4.2

Num balcão de uma companhia de aviação, o intervalo de tempo, Δt [minutos], que separa duas quaisquer chamadas consecutivas para reserva de voos, tem a seguinte função densidade de probabilidade:

$$f\ (\Delta t) = \begin{cases} e^{-\Delta t} & \text{, para } \Delta \text{t} \geq 0 \\ 0 & \text{, para } \Delta \text{t} < 0 \end{cases}$$

(v) Calcule a probabilidade $P(\Delta t > 2)$.

(vi) Calcule a probabilidade $P(\Delta t > 3)$.

(vii) Calcule a probabilidade condicional de $\Delta t > 3$, dado que $\Delta t > 1$ (compare esta probabilidade com a obtida em (i) e procure generalizar a relação entre elas).

PROBLEMA 4.3

Admita que, para acções de um determinada empresa cotada na bolsa de Nova Iorque, o lucro anual por acção, depois de impostos, aqui denotado por x [US\$], tem a seguinte função densidade de probabilidade:

$$f(x) = \begin{cases} \left(\dfrac{4}{27}\right) \cdot \left(9x - 6x^2 + x^3\right), & \text{para } 0 \leq x \leq 3 \\ 0 & \text{, para outros valores de } x \end{cases}$$

(i) Represente graficamente esta função.

(ii) Calcule as probabilidades seguintes:

$P(x \leq 1.50)$, $P(x \geq 2)$ e $P(1.00 \leq x \leq 2.5)$.

(iii) Calcule a função de distribuição *F(x)* e represente-a graficamente.

PROBLEMA 4.4

Admita que, num determinado processo de fabrico, a temperatura da água registada no início de cada turno no reservatório «R» segue uma distribuição com valor esperado 153º F e desvio padrão 7º F. Calcule estes dois parâmetros da distribuição da temperatura quando esta for expressa em ºC.

PROBLEMA 4.5

Numa determinada barragem, a relação entre a cota a montante e o volume de água armazenada na albufeira é a seguinte:

$$N = 75.22 + 0.2511 \cdot V - 0.000481 \cdot V^2 + 0.386 \cdot 10^{-6} \cdot V^3$$

onde

N: cota a montante [m]

V: volume de água armazenada [$10^6\, m^3$]

No fim do mês de Março, contempla-se a possibilidade de efectuar uma reparação que impede a utilização dos grupos de geradores. Durante a reparação, que decorrerá ao longo de um período de 3 meses, o volume de água que afluirá à albufeira, ΔV (expresso em $10^6\, m^3$), segue uma distribuição com valor esperado $\mu = 20$ e variância $\sigma^2 = 225$.

Admitindo que, no início da reparação, o volume de água armazenada na barragem é V_0 = 400 $10^6\, m^3$, calcule o valor esperado e o desvio padrão da cota a montante no fim da reparação, se no decurso desta não for descarregado qualquer caudal.

PROBLEMA 4.6

No planeamento de um concerto ao ar livre, programado para o dia 6 de Maio, a organização considera que a adesão do público depende do estado do tempo. Na tabela seguinte apresentam-se as estimativas do número de espectadores em função do estado do tempo. Foi ainda pedido ao instituto de meteorologia informação relativa ao estado do tempo no mês de Maio durante os últimos 10 anos.

Estado do tempo	Frequência relativa do estado do tempo [%]	Estimativa do n.º de espectadores
Húmido e frio	20	5000
Húmido e quente	20	20000
Seco e frio	10	30000
Seco e quente	50	50000

(i) Qual o valor esperado do número de espectadores?

(ii) Considere que os bilhetes vão ser vendidos a 4.5 € cada. Os custos associados à limpeza e à segurança da área do concerto são de 1.0 € por cada bilhete vendido. Sabe-se que o grupo musical cobra 75000 euros e que a organização do concerto custará 30000 euros (valor que inclui os custos de aluguer de espaço). Sabendo que os organizadores do concerto pretendem ter lucro, recomendaria avançar com o concerto? Justifique.

(iii) Suponha que a organização decidiu avançar com a preparação do concerto. Na semana anterior à realização do concerto a previsão do tempo não é favorável, de tal forma que os quatro tipos de condições meteorológicas têm agora as seguintes probabilidades estimadas:

Estado do tempo	Probabilidade de ocorrência [%]
Húmido e frio	30
Húmido e quente	20
Seco e frio	20
Seco e quente	30

Se o concerto for cancelado, a organização terá de pagar metade dos custos de organização mais 7500 euros ao grupo musical devido ao cancelamento do concerto. Nestas condições, recomendaria avançar ou cancelar o concerto?

PROBLEMA 4.7

Uma empresa de veículos de aluguer possui três veículos com idades e estados de conservação diferentes. Considere as seguintes probabilidades associadas à disponibilidade num determinado dia:

Veículo mais novo: 0.95

Veículo mais antigo: 0.85

Terceiro veículo: 0.9

A disponibilidade de um dado veículo não é afectada pelo facto de cada um dos outros estar, ou não, disponível.

(i) Defina a função de probabilidade e a função distribuição de probabilidade para a variável "número de veículos disponíveis por dia".

(ii) Calcule o valor esperado e o desvio padrão da variável definida na alínea anterior.

(iii) Admitindo que o lucro líquido relativo à utilização de cada Veículo é de 0.50 euros por dia, calcule o valor esperado e o desvio padrão do lucro líquido por dia.

CAPÍTULO 5 – DISTRIBUIÇÕES CONJUNTAS DE PROBABILIDADE

Problemas

PROBLEMA 5.1

Uma moeda E-C é lançada ao ar três vezes. Seja X o número de E's obtidos nos dois primeiros lançamentos e Y o número de C's obtidos nos dois últimos lançamentos.

(i) Defina a função conjunta de probabilidade das variáveis X e Y.

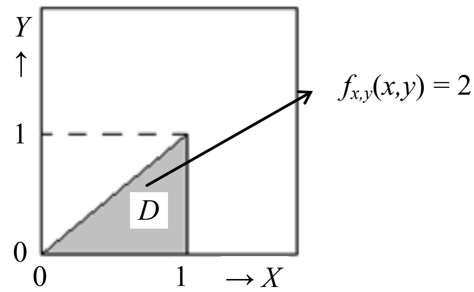
(ii) Defina a função condicional de probabilidade de Y, dado que $X = 1$.

(iii) Calcule o coeficiente de correlação ρ_{XY}.

PROBLEMA 5.2

Considere duas variáveis aleatórias X e Y com a seguinte função conjunta de densidade de probabilidade:

$$f(x,y) = \begin{cases} 2, & \text{se } x \text{ e } y \text{ pertencerem ao domínio } D \text{ (ver figura)} \\ 0, & \text{no caso contrário.} \end{cases}$$



Calcule:

(i) As distribuições marginais das variáveis X e Y;

(ii) Os valores esperados das variáveis X e Y;

(iii) As distribuições condicionais de X, dado que $Y = y$, e de Y, dado que $X = x$;

(iv) A covariância entre X e Y.

PROBLEMA 5.3

Numa linha de produção são fabricados osciladores de um certo tipo, que incluem uma resistência R e um condensador com capacidade C.

O período de oscilação depende de R e C, de acordo com a relação seguinte:

$$T = \left(\frac{1}{100}\right) \cdot R^3 \cdot C^3$$

Admita que R e C são variáveis aleatórias com os seguintes parâmetros:

$$R: \mu_R = 10^6, \qquad \sigma_R = 0.03 \cdot \mu_R$$

$$C: \mu_C = 10^{-6}, \qquad \sigma_C = 0.05 \cdot \mu_C$$

Supondo que a resistência e o condensador incorporados em cada oscilador são seleccionados independentemente um do outro, determine o valor esperado e o desvio padrão do período dos osciladores.

PROBLEMA 5.4

O teor de humidade de uma remessa de carvão foi estimado em 8%. O erro de estimação deste teor tem valor esperado nulo e desvio padrão de 0.5%. O peso da remessa – 1000 toneladas – foi obtido recorrendo a uma balança que introduz um erro com valor esperado nulo e desvio padrão de 5 toneladas.

Calcule o valor esperado e o desvio padrão do peso do carvão seco existente na referida remessa.

PROBLEMA 5.5

As variáveis aleatórias X_1, X_2, …, X_n representam as alturas de N indivíduos escolhidos ao acaso entre os portugueses adultos do sexo masculino. Cada variável X_i (i = 1, 2, …., N) tem valor esperado μ e desvio padrão σ.

A variável aleatória

$$\overline{X} = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^{N} X_i$$

representa a média das alturas dos N indivíduos seleccionados ao acaso.

Calcule as covariâncias seguintes e interprete os resultados obtidos.

(i) $Cov\left(X_i - \overline{X}, \overline{X}\right)$

(ii) $Cov\left(X_i - \overline{X}, X_i\right)$

(iii) $Cov\left(X_i - \overline{X}, X_j - \overline{X}\right)$ (para $i \neq j$)

PROBLEMA 5.6

Considere a seguinte população de casais cuja função conjunta de probabilidade do rendimento mensal do marido (X) e da mulher (Y) se encontra representada na tabela seguinte.

		Y [euros]			
		1000	2000	3000	4000
X [euros]	1000	0.20	0.04	0.01	0
	2000	0.10	0.36	0.09	0
	3000	0	0.05	0.10	0
	4000	0	0	0	0.05

(i) Determine as funções marginais de probabilidade para as variáveis X e Y.

(ii) Considere apenas as mulheres com um rendimento de 2000 euros mensais. Qual a probabilidade do marido ter um rendimento idêntico?

(iii) Calcule o valor esperado e o desvio padrão da variável X e da variável Y.

(iv) Verifique se as variáveis X e Y são independentes.

(v) Calcule a covariância e a correlação entre X e Y.

(vi) Calcule o valor esperado e o desvio padrão do:

a. Rendimento total (R), considerando $R = X + Y$

b. Do imposto sobre o rendimento familiar (I), considerando $I = 0.20X + 0.10Y$

PROBLEMA 5.7

Considere que tem uma poupança de 1000 euros e que está a ponderar aplicar este dinheiro em acções e em fundos de investimento geridos pelo seu banco. A taxa de rentabilidade dos dois tipos de investimento é incerta, apresentando a seguinte distribuição conjunta de probabilidade.

		Y: taxa de rentabilidade das acções			
		-10 %	0 %	10 %	20 %
X: taxa de rentabilidade dos fundos de investimento	6 %	0.10	0.10	0	0
	8 %	0	0.10	0.30	0.20
	10 %	0	0	0.10	0.10

Se investisse metade da sua poupança (que corresponde a 500 euros) em acções e a outra metade em fundos de investimento, qual seria o valor esperado e o desvio padrão da taxa de rentabilidade da sua poupança (que se denota por R)?