RESOLUÇÃO ASSISTIDA DE PROBLEMAS

CAPÍTULO 3 – TEORIA ELEMENTAR DA PROBABILIDADE

PROBLEMA 3.1

APOIOS À RESOLUÇÃO

Alínea (i)

Apoio 1 (apenas o resultado)

7.32%. ■

Apoio 2 (sugestão)

Na secção 3.3 veja qual das definições de probabilidade se aplica a esta situação. ■

Apoio 3 (resolução completa)

		Género		TOTAL
		Masculino	Feminino	
Raça	Branca	1 726 348	2 110 253	3 836 601
	Negra	628 309	753 125	1 381 434
	Outra	15 239	7 435	22 674
	TOTAL	2 369 896	2 870 813	5 240 709

Acontecimento B: o indivíduo seleccionado é branco.

Recorrendo à definição clássica (expressão 3.1), vem

$$P(\mathrm{B}) = \frac{\text{Número de resultados favoráveis}}{\text{Número de resultados possíveis}} = \frac{\mathrm{N_B}}{\mathrm{N}} = \frac{3\,836\,601}{5\,240\,709} = 0.732\,. \;\blacksquare$$

Alínea (ii)

Apoio 1 (apenas o resultado)

26.4%. ■

Apoio 2 (sugestão)

Na secção 3.3 veja qual das definições de probabilidade se aplica a esta situação. ■

Apoio 3 (resolução completa)

		Género		TOTAL
		Masculino	Feminino	
Raça	Branca	1 726 348	2 110 253	3 836 601
	Negra	628 309	753 125	1 381 434
	Outra	15 239	7 435	22 674
	TOTAL	2 369 896	2 870 813	5 240 709

Acontecimento N: o indivíduo seleccionado é negro.

$$P(\mathrm{N}) = \frac{N_{\mathrm{N}}}{N} = \frac{1\,381\,434}{5\,240\,709} = 0.264 \,. \blacksquare$$

Alínea (iii)

Apoio 1 (apenas o resultado)

40.3%. ■

Apoio 2 (sugestão)

Note que o acontecimento «o indivíduo seleccionado é uma mulher branca» é equivalente à intersecção de dois acontecimentos: «o indivíduo seleccionado é mulher» e «o indivíduo seleccionado é branco». ■

Apoio 3 (resolução completa)

		Género		TOTAL
		Masculino	Feminino	
Raça	Branca	1 726 348	2 110 253	3 836 601
	Negra	628 309	753 125	1 381 434
	Outra	15 239	7 435	22 674
	TOTAL	2 369 896	2 870 813	5 240 709

Acontecimento $\mathrm{M} \cap \mathrm{B}$: o indivíduo seleccionado é uma mulher branca.

$$P(\mathrm{M} \cap \mathrm{B}) = \frac{N_{\mathrm{M}\cap\mathrm{B}}}{N} = \frac{2\,110\,253}{5\,240\,709} = 0.403 \,. \blacksquare$$

Alínea (iv)

Apoio 1 (apenas o resultado)

73.5%. ■

Apoio 2 (sugestão)

Para calcular a probabilidade pretendida, considere que retira um indivíduo de uma população mais restrita do que a original, apenas constituída por mulheres. Trata-se então de calcular, nestas condições, qual a probabilidade de a mulher seleccionada ser de raça branca. A probabilidade pretendida é condicional (ver secção 3.4). ■

Apoio 3 (resolução completa)

		Género		TOTAL
		Masculino	Feminino	
Raça	Branca	1 726 348	2 110 253	3 836 601
	Negra	628 309	753 125	1 381 434
	Outra	15 239	7 435	22 674
	TOTAL	2 369 896	2 870 813	5 240 709

Acontecimento B: O indivíduo seleccionado é branco.

Acontecimento M: O indivíduo seleccionado é mulher.

Recorrendo à definição de probabilidade condicional (expressão 3.10), vem

$$P(\mathrm{B} \mid \mathrm{M}) = \frac{P(\mathrm{B} \cap \mathrm{M})}{P(\mathrm{M})} = \frac{\dfrac{2\,110\,253}{5\,240\,709}}{\dfrac{2\,870\,813}{5\,240\,709}} = \frac{2\,110\,253}{2\,870\,813} = 0.735\,. \blacksquare$$

Alínea (v)

Apoio 1 (apenas o resultado)

Em sentido estrito, os acontecimentos não são independentes (na prática, são quase independentes). ■

Apoio 2 (sugestão)

O conceito que está em causa é o de independência entre acontecimentos (ver secção 3.5). ■

Apoio 3 (resolução completa)

		Género		TOTAL
		Masculino	Feminino	
Raça	Branca	1 726 348	2 110 253	3 836 601
	Negra	628 309	753 125	1 381 434
	Outra	15 239	7 435	22 674
	TOTAL	2 369 896	2 870 813	5 240 709

Acontecimento M: O indivíduo seleccionado é mulher.

Acontecimento N: O indivíduo seleccionado é negro.

$P(\mathrm{M} \cap \mathrm{N}) = \dfrac{753\,125}{5\ 240\ 709} = 0.143$.

$P(\mathrm{M}) \cdot P(\mathrm{N}) = \dfrac{2\ 870\ 813}{5\ 240\ 709} \cdot \dfrac{1\,381\,434}{5\ 240\ 709} = 0.145$.

$P(\mathrm{M} \cap \mathrm{N}) \neq P(\mathrm{M}) \cdot P(\mathrm{N}) \quad \Rightarrow$ M e N não são independentes.

Na realidade, M e N são quase independentes, pois $P(\mathrm{M} \cap \mathrm{N}) \approx P(\mathrm{M}) \cdot P(\mathrm{N})$, facto que resulta de a proporção de mulheres entre indivíduos de raça negra ser muito próxima da proporção de mulheres na população:

$\dfrac{753\,125}{1\,381\,434} \approx \dfrac{2\,870\,813}{5\,240\,709}$). ■

Problema 3.2

APOIOS À RESOLUÇÃO

Apoio 1 (apenas o resultado)

Probabilidade de ganhar o primeiro prémio: $7.15 \cdot 10^{-8}$.

Probabilidade de ganhar o segundo prémio: $4.29 \cdot 10^{-7}$.

Probabilidade de ganhar o terceiro prémio: $1.80 \cdot 10^{-5}$. ■

Apoio 2 (sugestão)

Considere os seguintes acontecimentos:

$6E_1$: Saem as 6 bolas boas, na primeira extracção

$5E_1$: Saem 5 das 6 bolas boas, na primeira extracção

AE_2: Acerta-se na restante bola boa, na segunda extracção

NAE_2: Não se acerta na restante bola boa, na segunda extracção.

Defina os acontecimentos «A_1: Ganhar o primeiro prémio», «A_2: Ganhar o segundo prémio» e «A_3: Ganhar o terceiro prémio» através de

$$A_1 = 6E_1,$$

$$A_2 = 5E_1 \cap AE_2$$

e

$$A_3 = 5E_1 \cap NAE_2.$$

A definição de probabilidade que se aplica ao acontecimento A_1 é a clássica. Para calcular os números de casos favoráveis e possíveis recorra aos conceitos de Análise Combinatória revistos no Apêndice 3.1. ■

Apoio 3 (resolução completa)

As regras do Totoloto são as seguintes:

- Numa aposta simples, escolhem-se (inscrevem-se no boletim) 6 de 49 números (as bolas correspondentes aos números ficam, a partir de então, classificadas como boas – as 6 inscritas no boletim – ou más – as 43 não seleccionadas).
- No dia do sorteio, fazem-se duas extracções das bolas correspondentes aos 49 números:
  - Primeiro sorteiam-se 6 números básicos.
  - Depois sorteia-se o número suplementar.
- Os diferentes prémios obtêm-se nas seguintes condições:
  - 1º. Prémio: Acerta-se nos 6 números básicos (ou seja, saem as seis bolas boas)
  - 2º. Prémio: Acerta-se em 5 dos 6 números básicos (isto é, saem 5 das 6 bolas boas) e acerta-se no número suplementar (isto é, sai a restante bola boa).
  - 3º. Prémio: Acerta-se em 5 dos 6 números básicos (isto é, saem 5 das 6 bolas boas) e não se acerta no número suplementar (isto é, não sai a restante bola boa)

Seja A_1 o acontecimento que corresponde a ganhar o primeiro prémio. Recorrendo à definição clássica, vem

$$P(A_1) = \frac{\text{Número de resultados favoráveis}}{\text{Número de resultados possíveis}} = \frac{1}{\binom{49}{6}} = \frac{1}{\frac{49!}{43!6!}} = 7.15 \cdot 10^{-8}.$$

Registe-se que de entre todas as combinações possíveis - combinações de 49 seis a seis - só uma é favorável: a que corresponde a saírem as 6 bolas boas e a ficarem de fora as restantes 43. Note-se ainda que $\frac{1}{\frac{49!}{43!6!}} = \frac{43!6!}{49!} = \frac{6}{49} \cdot \frac{5}{48} \cdot \frac{4}{47} \cdot \frac{3}{46} \cdot \frac{2}{45} \cdot \frac{1}{44}$.

O problema pode então ser resolvido da forma que se segue. Seja

B_i: A i-ésima bola a ser extraída, sendo bola boa.

$A_1 \equiv B_1 \cap B_2 \cap \cdots \cap B_6$

$P(A_1) =$

$$
\begin{aligned}
&= P(B_1 \cap B_2 \cap \cdots \cap B_6) \\
&= P\left[(B_6 \cap (B_1 \cap B_2 \cap \cdots \cap B_5)\right] \\
&= P(B_6 \mid B_1 \cap B_2 \cap \cdots \cap B_5) \cdot P\left[(B_5 \cap (B_1 \cap \cdots \cap B_4)\right] \\
&= P(B_6 \mid B_1 \cap B_2 \cap \cdots \cap B_5) \cdot P(B_5 \mid B_1 \cap \cdots \cap B_4) \cdot P(B_1 \cap \cdots \cap B_4) \\
&\quad (\cdots) \\
&= P\left[B_6 \mid (B_1 \cap B_2 \cap \cdots \cap B_5)\right] \cdot P\left[B_5 \mid (B_1 \cap \cdots \cap B_4)\right] \cdots P(B_2 \mid B_1) \cdot P(B_1)
\end{aligned}
$$

$P(B_1) = 6/49$ (entre as 49 bolas possíveis há seis boas que podem ser extraídas)

$P(B_2 | B_1) = 5/48$ (entre as 48 bolas que restam, há cinco bolas boas que podem ser extraídas)

(...)

$P(B_6 | (B_1 \cap \cdots \cap B_5) = 1/44$ (entre as 44 bolas que restam, há uma única boa que pode ser extraída).

Ou seja,

$$P(A_1) = \frac{6}{49} \cdot \frac{5}{48} \cdot \frac{4}{47} \cdot \frac{3}{46} \cdot \frac{2}{45} \cdot \frac{1}{44} = 7.15 \cdot 10^{-8}.$$

Veja-se agora como se procederia para calcular a probabilidade de ganhar o segundo prémio. Seja

A_2: Ganhar o segundo prémio

Ora,

$A_2 = 5E_1 \cap AE_2$,

onde

$5E_1$: Saem 5 (das 6) bolas boas, na primeira extracção, e

AE_2: Acerta-se na restante bola boa, na segunda extracção.

Recorrendo à expressão 3.11, obtém-se

$$P(A_2) = P(5E_1 \cap AE_2) = P(AE_2 \mid 5E_1) \cdot P(5E_1).$$

Por um lado,

$$P(5E_1)=\frac{\text{Número de resultados favoráveis}}{\text{Número de resultados possíveis}}=\frac{\binom{6}{5}\cdot\binom{43}{1}}{\binom{49}{6}}=\frac{6\cdot 43}{\binom{49}{6}}$$

(notar que de entre todas as combinações possíveis - combinações de 49 seis a seis – são favoráveis as que correspondem a saírem 5 bolas boas – combinações de 6 cinco a cinco - e, por cada uma destas, deve figurar uma das restantes 43 bolas – combinações de 43 uma a uma).

Por outro lado,

$$P(\mathrm{AE}_2\mid 5\mathrm{E}_1)=\frac{\text{Número de resultados favoráveis}}{\text{Número de resultados possíveis}}=\frac{1}{43}$$

(notar que entre as combinações possíveis – tantas quantas as 43 bolas que não saíram na primeira extracção – apenas uma é favorável – a que corresponde a retirar a única bola boa que resta).

Finalmente, substituindo obtém-se:

$$P(\mathrm{A}_2)=P(\mathrm{AE}_2\mid 5\mathrm{E}_1)\cdot P(5\mathrm{E}_1)=\frac{1}{43}\cdot\frac{6\cdot 43}{\binom{49}{6}}=6\cdot\frac{1}{\binom{49}{6}}=6\cdot P(\mathrm{A}_1)=4.29\cdot 10^{-7}$$

(onde $P(\mathrm{A}_1)$ representa a probabilidade de ganhar o primeiro prémio).

Procedimento idêntico pode ser adoptado para obter a probabilidade do acontecimento A_3, que corresponde a ganhar o terceiro prémio:

$$\mathrm{A}_3=5\mathrm{E}_1\cap \mathrm{NAE}_2,$$

onde

$5\mathrm{E}_1$: Saem 5 (das 6) bolas boas, na primeira extracção e

NAE_2: Não se acerta na restante bola boa, na segunda extracção.

$$P(\mathrm{A}_3)=P(5\mathrm{E}_1\cap\mathrm{NAE}_2)=P(\mathrm{NAE}_2\mid 5\mathrm{E}_1)\cdot P(5\mathrm{E}_1).$$

$P(5\mathrm{E}_1)=\dfrac{6\cdot 43}{\binom{49}{6}}$ (como se viu anteriormente) e

$$P(\mathrm{NAE}_2\mid 5\mathrm{E}_1)=\frac{\text{Número de resultados favoráveis}}{\text{Número de resultados possíveis}}=\frac{42}{43}$$

(notar que entre as combinações possíveis – tantas quantas as 43 bolas que não saíram na primeira extracção – são favoráveis as que correspondem a retirar qualquer uma das bolas que não são boas – em número de 42).

Então,

$$P(\mathrm{A}_3) = P(\mathrm{NAE}_2 \mid 5\mathrm{E}_1)\cdot \mathrm{P}(5\mathrm{E}_1)$$

$$= \frac{42}{43}\cdot\frac{6\cdot 43}{\binom{49}{6}} = 6\cdot 42\cdot\frac{1}{\binom{49}{6}} = 252\cdot P(\mathrm{A}_1) = 1.80\cdot 10^{-5}\,. \ \blacksquare$$

PROBLEMA 3.3

APOIOS À RESOLUÇÃO

Apoio 1 (apenas o resultado)

56.8%. ■

Apoio 2 (sugestão)

Em vez de calcular directamente a probabilidade do acontecimento «A: pelo menos duas pessoas fazem anos no mesmo dia», tente calculá-la a partir da probabilidade do acontecimento complementar «$\overline{\mathrm{A}}$: todas as pessoas fazem anos em dias diferentes».

Para calcular esta probabilidade admita que as 25 pessoas entram sequencialmente na sala e defina, para i = 2, 3, ... , 25, o acontecimento

D_i: A i-ésima pessoa a entrar na sala tem um dia de aniversário Diferente das pessoas que a precederam na entrada.

O acontecimento $\overline{\mathrm{A}}$ pode ser definido através de

$$\overline{\mathrm{A}} \equiv \mathrm{D}_2 \cap \mathrm{D}_3 \cap \cdots \cap \mathrm{D}_{24} \cap \mathrm{D}_{25}\,.$$

A probabilidade associada a este acontecimento pode ser calculada recursivamente. ■

Apoio 3 (resolução completa)

Alternativa 1

A resolução proposta assenta nas duas hipóteses seguintes:

- A probabilidade de cada uma das pessoas ter nascido num dia do ano é igual à de ter nascido noutro dia qualquer (admitindo que um ano tem 365 dias, aquela probabilidade é 1/365 para qualquer dia do ano).
- O facto de uma das pessoas ter nascido num dia do ano é independente dos dias de aniversário das restantes pessoas.

A: Pelo menos duas pessoas fazem anos no mesmo dia.

$\overline{\mathrm{A}}$: Todas as pessoas fazem anos em dias diferentes.

Admita-se que as 25 pessoas entram sequencialmente na sala e definam-se, para $i = 2, 3, \ldots, 25$, o acontecimento seguinte:

D_i: A i-ésima pessoa a entrar na sala tem um dia de aniversário Diferente das pessoas que a precederam na entrada.

$\overline{A} \equiv D_2 \cap D_3 \cap \cdots \cap D_{24} \cap D_{25}$.

$$
\begin{aligned}
P(\overline{A}) &= \\
&= P(D_2 \cap \cdots \cap D_{25}) \\
&= P\left[(D_{25} \cap (D_2 \cap D_3 \cap \cdots \cap D_{24})\right] \\
&= P(D_{25} \mid D_2 \cap D_3 \cap \cdots \cap D_{24}) \cdot P(D_2 \cap D_3 \cap \cdots \cap D_{24}) \\
&= P(D_{25} \mid D_2 \cap D_3 \cap \cdots \cap D_{24}) \cdot P\left[(D_{24} \cap (D_2 \cap D_3 \cap \cdots \cap D_{23})\right] \\
&= P(D_{25} \mid D_2 \cap \cdots \cap D_{24}) \cdot P(D_{24} \mid D_2 \cap \cdots \cap D_{23}) \cdot P(D_2 \cap \cdots \cap D_{23}) \\
&(\cdots) \\
&= P\left[D_{25} \mid (D_2 \cap \cdots \cap D_{24})\right] \cdot P\left[D_{24} \mid (D_2 \cap \cdots \cap D_{23})\right] \cdots P(D_3 \mid D_2) \cdot P(D_2).
\end{aligned}
$$

$P(D_2) = 364/365$ (entre os 365 dias possíveis, apenas um – o dia de aniversário da primeira pessoa a entrar - fica excluído).

$P(D_3 \mid D_2) = 363/365$ (entre os 365 dias possíveis, dois deles – os dias de aniversário das duas primeiras pessoas a entrar, que são diferentes - ficam excluídos).

$P(D_4 \mid (D_2 \cap D_3) = 362/365$ (entre os 365 dias possíveis, três deles – os dias de aniversário das três primeiras pessoas a entrar, que são diferentes - ficam excluídos).

(...)

$P(D_{24} \mid (D_2 \cap \cdots \cap D_{23}) = 342/365$ (entre os 365 dias possíveis, vinte e três deles – os dias de aniversário das vinte e três primeiras pessoas a entrar, que são diferentes - ficam excluídos).

$P(D_{25} \mid (D_2 \cap \cdots \cap D_{24}) = 341/365$ (entre os 365 dias possíveis, vinte e quatro deles – os dias de aniversário das vinte e quatro primeiras pessoas a entrar, que são diferentes - ficam excluídos).

$$P(\overline{A}) = \frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365} \cdot \cdots \frac{342}{365} \cdot \frac{341}{365} = 0.431$$

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 0.568.$$

Alternativa 2

$$P(\overline{A}) = \frac{\text{Número de resultados favoráveis}}{\text{Número de resultados possíveis}} = \frac{{}^{365}A_{25}}{{}^{365}A'_{25}}$$, em que

${}^{365}A'_{25}$ corresponde ao número total de sequências de dias do ano em que as 25 pessoas podem fazer anos (sendo uma permutação com repetições, ${}^{365}A'_{25} = 365^{25}$);

${}^{365}A_{25}$ corresponde ao número total de sequências de dias do ano em que as 25 pessoas fazem anos todas em dias diferentes (isto é, uma permutação sem repetições, ${}^{365}A_{25} = \frac{365!}{(365-25)!} = \frac{365!}{340!}$).

Assim, resulta

$$P(\overline{A}) = \frac{{}^{365}A_{25}}{{}^{365}A'_{25}} = \frac{\frac{365!}{340!}}{365^{25}} = 0.431\,. \ ■$$

PROBLEMA 3.4

APOIOS À RESOLUÇÃO

Apoio 1 (apenas o resultado)

15.4%. ■

Apoio 2 (sugestão)

Sugestão 1

A definição de probabilidade que se aplica a esta situação é a clássica. Para calcular os números de casos favoráveis e possíveis recorra aos conceitos de Análise Combinatória revistos no Apêndice 3.1. Na definição dos casos favoráveis ao acontecimento «você e o director financeiro ficam em lugares adjacentes», verifique quais as posições que o director financeiro pode ocupar na mesa e quais os lugares adjacentes que correspondem a cada caso. Não se esqueça de que, para cada posição ocupada por si e pelo director financeiro, os outros directores podem permutar as posições entre eles.

Sugestão 2

Considere os seguintes acontecimentos complementares:

A_e: O director financeiro fica num dos extremos.

A_m: O director financeiro fica num dos lugares do meio (ou seja, fora dos extremos).

Procure expressar a probabilidade do acontecimento «ADJ: Você e o director financeiro ficam em lugares adjacentes» através de $P(A_e)$ e $P(A_m)$ segundo um procedimento idêntico ao utilizado no denominador da expressão relativa ao teorema de Bayes (expressão 3.17). ■

Apoio 3 (resolução completa)

Alternativa 1

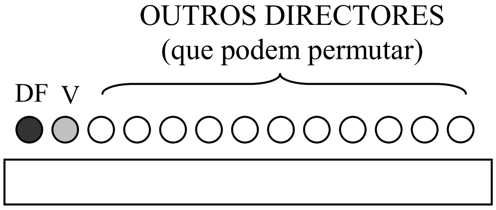
Acontecimento ADJ: Você (V) e o director financeiro (DF) ficam em lugares adjacentes.

Número de resultados possíveis: $N = \mathrm{P}_{13} = 13!$

Para calcular o número de resultados favoráveis convém distinguir duas situações:

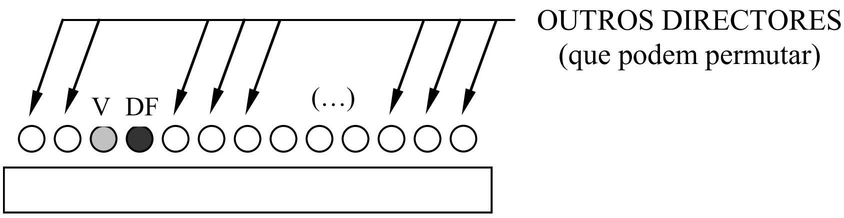
- DF fica num dos extremos

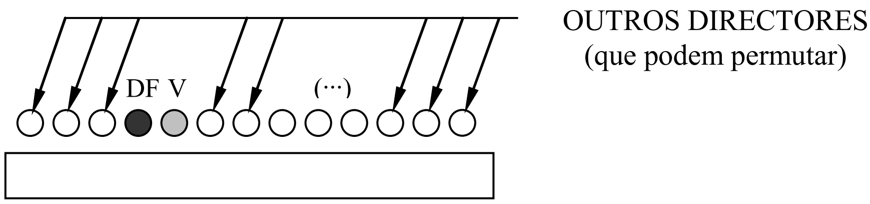
  Quando DF fica num dos extremos, V só dispõe de uma posição adjacente (ver diagrama). Os outros directores podem, entretanto, permutar entre si. O número de resultados favoráveis que correspondem a esta situação é então de $\mathrm{P}_{11} = 11!$



- DF fica num dos lugares do meio

  Quando DF fica num dos lugares do meio, V dispõe de duas posições adjacentes (ver diagrama seguinte). Para cada uma delas, os outros directores podem, entretanto, permutar entre si. O número de resultados favoráveis correspondentes à ocupação de um dos lugares do meio por DF é então de $2{\cdot}\mathrm{P}_{11} = 2{\cdot}11!$





Atendendo a que DF pode ocupar 2 lugares situados nos extremos ou 11 lugares do meio, o número de resultados favoráveis associados a ADJ vem dado por

$$N_{\mathrm{ADJ}} = 2 \cdot \mathrm{P}_{11} + 11 \cdot (2 \cdot \mathrm{P}_{11}) = 24 \cdot \mathrm{P}_{11} = 24 \cdot 11!$$

Finalmente, a probabilidade do acontecimento ADJ vem

$$P(\mathrm{ADJ}) = \frac{\text{Número de resultados favoráveis}}{\text{Número de resultados possíveis}} = \frac{N_{\mathrm{ADJ}}}{N} = \frac{24 \cdot 11!}{13!} = \frac{2}{13} = 0.154\ .$$

Alternativa 2

A_e: O director financeiro fica num dos extremos.

A_m: O director financeiro fica num dos lugares do meio (ou seja, fora dos extremos).

ADJ: Você e o director financeiro ficam em lugares adjacentes.

Expressando $P(\text{ADJ})$ através de $P(A_e)$ e $P(A_m)$ segundo um procedimento idêntico ao utilizado no denominador da expressão relativa ao teorema de Bayes (expressão 3.17), vem

$$P(\text{ADJ}) = P(\text{ADJ} \mid A_e) \cdot P(A_e) + P(\text{ADJ} \mid A_m) \cdot P(A_m)\,.$$

$P(A_e) = 2/13$ (dos 13 lugares disponíveis para o director financeiro se sentar, só 2 se situam nos extremos).

$P(\text{ADJ} \mid A_e) = 1/12$ (dos 12 lugares que restam depois de o director financeiro se sentar num dos extremos, só 1 é que lhe fica adjacente).

$P(A_m) = 11/13$ (dos 13 lugares disponíveis para o director financeiro se sentar, são 11 os que se situam no meio).

$P(\text{ADJ} \mid A_m) = 2/12$ (dos 12 lugares que restam depois de o director financeiro se sentar num dos lugares do meio, são 2 os que lhe ficam adjacentes).

$$\begin{aligned}
P(\text{ADJ}) &= P(\text{ADJ} \mid A_e) \cdot P(A_e) + P(\text{ADJ} \mid A_m) \cdot P(A_m) \\
&= \frac{1}{12} \cdot \frac{2}{13} + \frac{2}{12} \cdot \frac{11}{13} \\
&= \frac{2}{13} \\
&= 0.154\,. \blacksquare
\end{aligned}$$

PROBLEMA 3.5

APOIOS À RESOLUÇÃO

Apoio 1 (apenas o resultado)

7. ■

Apoio 2 (sugestão)

Em vez de calcular directamente a expressão da probabilidade de entre N mísseis enviados haver pelo menos um que acerta (que é a condição de destruição do alvo), tente obter aquela expressão a partir da que corresponde ao acontecimento complementar (nenhum dos *N* mísseis enviados acerta no alvo). ■

<u>Apoio 3</u> (resolução completa)

Considerem-se os seguintes acontecimentos:

A: Entre *N* mísseis enviados, há pelo menos um que acerta no alvo.

$\overline{\mathrm{A}}$: Nenhum dos *N* mísseis enviados acerta no alvo.

A probabilidade de um qualquer míssil não acertar é 1 - 0.3 = 0.7. Assim,

Assumindo como hipótese subjacente que os resultados associados aos diferentes mísseis são independentes uns dos outros, vem

$P(\overline{\mathrm{A}}) = (1-0.3)^N = 0.7^N$

$P(\mathrm{A}) = 1 - P(\overline{\mathrm{A}}) = 1 - 0.7^N$

pelo que

$P(\mathrm{A}) \geq 0.9 \quad \Rightarrow \quad 1 - 0.7^N \geq 0.9$.

Esta inequação pode ser resolvida de duas maneiras:

- Por tentativas:

  (...)

  $N = 6$: $1 - 0.7^6 = 0.88 < 0.9$ $\Rightarrow$ O número de mísseis que deve ser disparado é superior a 6

  $N = 7$: $1 - 0.7^7 = 0.92 > 0.9$ $\Rightarrow$ O número de mísseis que deve ser disparado é 7.

- Recorrendo ao cálculo de logaritmos:

  $1 - 0.7^N \geq 0.9 \quad \Rightarrow \quad 0.7^N \leq 0.1$

  $ln(0.7^N) \leq ln(0.1)$

  $N \cdot ln(0.7) \leq ln(0.1)$

  $N \cdot (-0.357) \leq -2.303$

  $0.357 \cdot N \geq 2.303$

  $N \geq \dfrac{2.303}{0.357} = 6.47$.

  Dado que *N* é inteiro, *N* = 7 corresponde ao número de mísseis que devem ser disparados. ■

PROBLEMA 3.6

APOIOS À RESOLUÇÃO

Apoio 1 (apenas o resultado)

Probabilidade de as duas peças serem boas: 42.3%.

Probabilidade de, entre as duas peças, pelo menos uma ser boa: 88.5%. ■

Apoio 2 (sugestão)

Considere os seguintes acontecimentos complementares:

A: As duas peças foram seleccionadas a partir do contentor A.

B: As duas peças foram seleccionadas a partir do contentor B.

Procure expressar a probabilidade do acontecimento «2PB: As 2 Peças seleccionadas são Boas» através de P(A) e P(B) segundo um procedimento idêntico ao utilizado no denominador da expressão relativa ao teorema de Bayes (expressão 3.17).

Repita o procedimento para o cálculo da probabilidade do acontecimento «PM1PB: Pelo Menos 1 Peça Boa, entre as seleccionadas» ■

Apoio 3 (resolução completa)

Adopte-se a seguinte notação:

A: As duas peças foram seleccionadas a partir do contentor A.

B: As duas peças foram seleccionadas a partir do contentor B.

2PB: As 2 Peças seleccionadas são Boas.

Expressando P(2PB) através de P(A) e P(B) segundo um procedimento idêntico ao utilizado no denominador da expressão relativa ao teorema de Bayes, vem

$$P(\text{2PB}) = P(\text{2PB} \mid \text{A}) \cdot P(\text{A}) + P(\text{2PB} \mid \text{B}) \cdot P(\text{B})$$

$P(\text{A}) = P(\text{B}) = 1/2$ (dos 2 contentores disponíveis, escolhe-se um deles para retirar as peças).

$P(\text{2PB} \mid \text{A}) = ?$

Considerem-se os seguintes acontecimentos:

PPB: A Primeira Peça seleccionada é Boa

SPB: A Segunda Peça seleccionada é Boa.

Ora,

$$P(\text{2PB}) = P(\text{PPB} \cap \text{SPB}) = P(\text{PPB}) \cdot P(\text{SPB} \mid \text{PPB}).$$

Se as peças forem seleccionadas a partir de A:

P(PPB) = 10/13 (das 13 peças incluídas no contentor A, 10 são boas).

P(SPB|PPB) = 9/12 (das 12 peças que restam no contentor A depois de ter sido retirada uma peça boa, 9 são boas).

$$P(2\text{PB} \mid \text{A}) = \frac{10}{13} \cdot \frac{9}{12}.$$

Se as peças forem seleccionadas a partir de B virá:

$$P(2\text{PB} \mid \text{B}) = \frac{7}{13} \cdot \frac{6}{12}.$$

Então

$$\begin{aligned} P(2\text{PB}) &= P(2\text{PB} \mid \text{A}) \cdot P(\text{A}) + P(2\text{PB} \mid \text{B}) \cdot P(\text{B}) \\ &= \left(\frac{10}{13} \cdot \frac{9}{12}\right) \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{7}{13} \cdot \frac{6}{12}\right) \cdot \frac{1}{2} \\ &= 0.423 \text{ (primeiro dos resultados pretendidos).} \end{aligned}$$

Para responder à segunda questão, adopte-se a seguinte notação:

PM1PB: <u>P</u>elo <u>M</u>enos <u>1</u> <u>P</u>eça <u>B</u>oa, entre as seleccionadas

1PB: <u>1</u> (e só 1) <u>P</u>eça <u>B</u>oa, entre as seleccionadas

2PB: <u>2</u> <u>P</u>eças seleccionadas são Boas.

Dado que os acontecimentos 1PB e 2PB são mutuamente exclusivos, vem

$$P(\text{PM1PB}) = P(1\text{PB} \cup 2\text{PB}) = P(1\text{PB}) + P(2\text{PB}).$$

Ora, P(2PB) = 0.423 (ver resultado obtido anteriormente). Falta o valor de P(1PB) que pode ser obtido do seguinte modo:

$$P(1\text{PB}) = P(1\text{PB} \mid \text{A}) \cdot P(\text{A}) + P(1\text{PB} \mid \text{B}) \cdot P(\text{B}).$$

Como $P(\text{A}) = P(\text{B}) = 1/2$ falta calcular P(1PB|A) e P(1PB|B).

Seja:

PPB: A <u>P</u>rimeira <u>P</u>eça seleccionada é <u>B</u>oa

PPD: A <u>P</u>rimeira <u>P</u>eça seleccionada é <u>D</u>efeituosa

SPB: A <u>S</u>egunda <u>P</u>eça seleccionada é <u>B</u>oa

SPD: A <u>S</u>egunda <u>P</u>eça seleccionada é <u>D</u>efeituosa.

Assim,

$$\begin{aligned} P(1\text{PB}) &= P(\text{PPB} \cap \text{SPD}) + P(\text{PPD} \cap \text{SPB}) \\ &= P(\text{PPB}) \cdot P(\text{SPD} \mid \text{PPB}) + P(\text{PPD}) \cdot P(\text{SPB} \mid \text{PPD}) \end{aligned}$$

Se as peças forem seleccionadas a partir de A, resulta

P(PPB) = 10/13 (das 13 peças incluídas no contentor A, 10 são boas).

P(SPD|PPB) = 3/12 (das 12 peças que restam no contentor A depois de ter sido retirada uma peça boa, 3 são defeituosas).

P(PPD) = 3/13 (das 13 peças incluídas no contentor A, 10 são boas).

P(SPB|PPD) = 10/12 (das 12 peças que restam no contentor A depois de ter sido retirada uma peça boa, 3 são defeituosas)

pelo que

$$P(1\text{PB} \mid \text{A}) = \frac{10}{13} \cdot \frac{3}{12} + \frac{3}{13} \cdot \frac{10}{12} = 0.385 .$$

Se as peças forem seleccionadas a partir de B, será então

$$P(1\text{PB} \mid \text{B}) = \frac{7}{13} \cdot \frac{6}{12} + \frac{6}{13} \cdot \frac{7}{12} = 0.538 .$$

Assim,

$$P(1\text{PB}) = \text{P}(1\text{PB} \mid \text{A}) \cdot P(\text{A}) + \text{P}(1\text{PB} \mid \text{B}) \cdot P(\text{B}) = 0.385 \cdot 0.5 + 0.538 \cdot 0.5$$

$$= 0.462.$$

Como P(PM1PB) = P(1PB) + P(2PB),

resulta, finalmente,

P(PM1PB) = 0.462 + 0.423 = 0.885 (segundo resultado pretendido). ■

PROBLEMA 3.7

APOIOS À RESOLUÇÃO

Alínea (i)

Apoio 1 (apenas o resultado)

25%. ■

Apoio 2 (sugestão)

Desenhe a árvore de resultados. ■

Apoio 3 (resolução completa)

Considerem-se os acontecimentos:

S: Faz sol

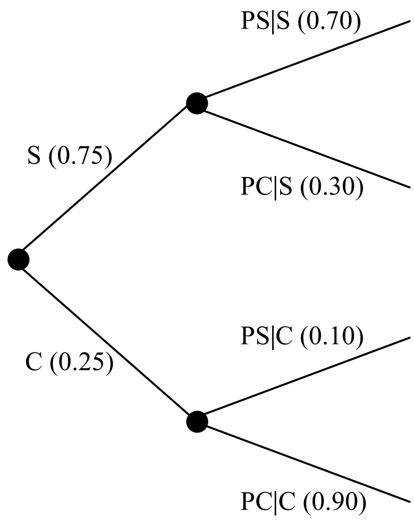
C: Chove

PS: O barómetro prevê sol

PC: O barómetro prevê chuva

BE: O barómetro erra a previsão.

Representa-se em seguida a árvore de resultados correspondente:



Assim,

$$
\begin{aligned}
P(\mathrm{BE}) &= P(\mathrm{S} \cap \mathrm{PC}) + P(\mathrm{C} \cap \mathrm{PS}) \\
&= P(S) \cdot P(\mathrm{PC} \mid \mathrm{S}) + P(\mathrm{C}) \cdot P(\mathrm{PS} \mid \mathrm{C}) \\
&= 0.75 \cdot 0.30 + 0.25 \cdot 0.10 \\
&= 0.25\,.\ \blacksquare
\end{aligned}
$$

<u>Alínea (ii)</u>

<u>Apoio 1</u> (apenas o resultado)

50%. ■

<u>Apoio 2</u> (sugestão)

Desenhe a árvore de resultados e aplique o teorema de Bayes. ■

<u>Apoio 3</u> (resolução completa)

Considerem-se os acontecimentos:

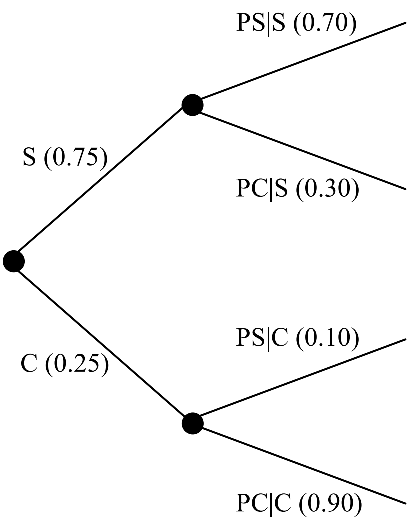
S: Faz sol

C: Chove

PS: O barómetro prevê sol

PC: O barómetro prevê chuva.

Representa-se em seguida a correspondente árvore de resultados:



Assim,

$$P(\mathrm{S}\mid\mathrm{PC}) = \frac{P(S \cap \mathrm{PC})}{P(PC)}$$

$$= \frac{P(\mathrm{S})\cdot P(\mathrm{PC}\mid\mathrm{S})}{P(\mathrm{S})\cdot P(PC\mid\mathrm{S}) + P(\mathrm{C})\cdot P(\mathrm{PC}\mid\mathrm{C})}$$

$$= \frac{0.75\cdot 0.30}{0.75\cdot 0.30 + 0.25\cdot 0.90}$$

$$= 0.5\,.$$ ■

PROBLEMA 3.8

APOIOS À RESOLUÇÃO

Apoio 1 (apenas o resultado)

16%. ■

Apoio 2 (sugestão)

Desenhe a árvore de resultados e aplique o teorema de Bayes. ■

Apoio 3 (resolução completa)

Adopte-se a seguinte notação:

A: A peça é produzida pela máquina A

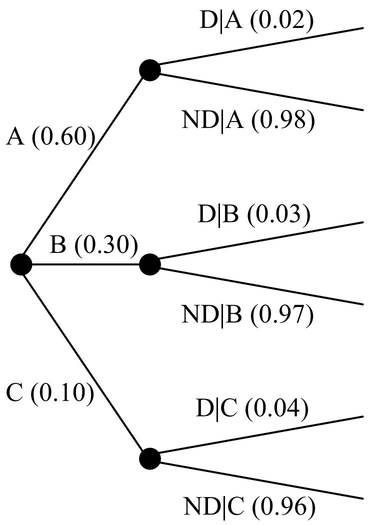
B: A peça é produzida pela máquina B

C: A peça é produzida pela máquina C

D: A peça é Defeituosa

ND: A peça é Não-Defeituosa.

Representa-se em seguida a correspondente árvore de resultados:



Assim,

$$P(\mathrm{C} \mid \mathrm{D}) = \frac{P(\mathrm{C} \cap \mathrm{D})}{P(\mathrm{D})}$$

$$= \frac{P(\mathrm{C}) \cdot P(\mathrm{D} \mid \mathrm{C})}{P(A) \cdot \mathrm{P}(\mathrm{D} \mid \mathrm{A}) + P(\mathrm{B}) \cdot P(\mathrm{D} \mid \mathrm{B}) + P(\mathrm{C}) \cdot P(\mathrm{D} \mid \mathrm{C})}$$

$$= \frac{0.10 \cdot 0.04}{0.60 \cdot 0.02 + 0.30 \cdot 0.03 + 0.10 \cdot 0.04}$$

$$= 0.16.$$

Note-se que este resultado está de acordo com aquilo que era de esperar. De facto, dado que a percentagem de peças defeituosas é maior na máquina C do que nas outras duas, a probabilidade condicional $P(\mathrm{C}|\mathrm{D})$ teria de ser maior do que a probabilidade incondicional $P(\mathrm{C})$. ■

PROBLEMA 3.9

APOIOS À RESOLUÇÃO

Apoio 1 (apenas o resultado)

79.4%. ■

Apoio 2 (sugestão)

Desenhe a árvore de resultados e aplique o teorema de Bayes. ■

Apoio 3 (resolução completa)

Seja,

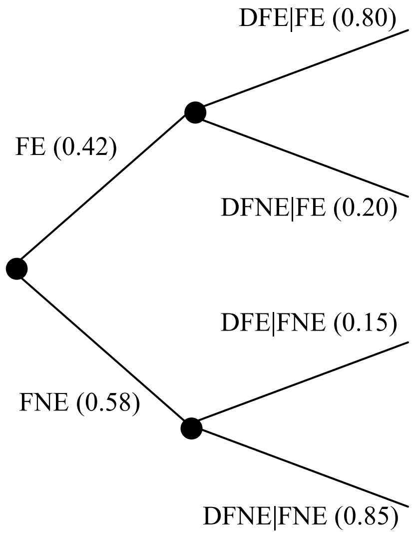
FE: Acidente causado por Falha Estrutural

FNE: Acidente causado por Falha Não-Estrutural

DFE: Diagnosticada Falha Estrutural

DFNE: Diagnosticada Falha Não-Estrutural.

Representa-se em seguida a correspondente árvore de resultados:



Assim,

$$P(\text{FE} \mid \text{DFE}) = \frac{P(\text{FE} \cap \text{DFE})}{P(\text{DFE})}$$

$$= \frac{P(\text{FE}) \cdot P(\text{DFE} \mid \text{FE})}{P(\text{FE}) \cdot P(\text{DFE} \mid \text{FE}) + P(\text{FNE}) \cdot P(\text{DFE} \mid \text{FNE})}$$

$$= \frac{0.42 \cdot 0.80}{0.42 \cdot 0.80 + 0.58 \cdot 0.15}$$

$$= 0.794. \blacksquare$$

PROBLEMA 3.10

APOIOS À RESOLUÇÃO

Apoio 1 (apenas o resultado)

10.7%. ■

Apoio 2 (sugestão)

Procure especificar os acontecimentos. Note que os acontecimentos são independentes. ■

Apoio 3 (resolução completa)

Num total de 8 chaves, 3 abrem a porta e 5 não abrem. Seja,

I_n: Insucesso na n-ésima tentativa de abertura da porta

S_n: Sucesso na n-ésima tentativa de abertura da porta

AB4: Abertura da porta à quarta tentativa.

Assim,

$$
\begin{aligned}
P(\text{AB4}) &= \\
&= P(I_1 \cap I_2 \cap I_3 \cap S_4) \\
&= P\big[(S_4 \cap (I_1 \cap I_2 \cap I_3)\big] \\
&= P(S_4 \mid I_1 \cap I_2 \cap I_3) \cdot P(I_1 \cap I_2 \cap I_3) \\
&= P(S_4 \mid I_1 \cap I_2 \cap I_3) \cdot P(I_3 \mid I_1 \cap I_2) \cdot P(I_1 \cap I_2) \\
&= P(S_4 \mid I_1 \cap I_2 \cap I_3) \cdot P(I_3 \mid I_1 \cap I_2) \cdot P(I_2 \mid I_1) \cdot \mathrm{P}(I_1).
\end{aligned}
$$

Ora,

$$P(I_1) = \frac{\text{Número de resultados favoráveis}}{\text{Número de resultados possíveis}} = \frac{5}{8}$$

$$P(I_2 \mid I_1) = \frac{\text{Número de resultados favoráveis}}{\text{Número de resultados possíveis}} = \frac{4}{7}$$

$$P(I_3 \mid I_1 \cap I_2) = \frac{\text{Número de resultados favoráveis}}{\text{Número de resultados possíveis}} = \frac{3}{6}$$

$$P(S_4 \mid I_1 \cap I_2 \cap I_3) = \frac{\text{Número de resultados favoráveis}}{\text{Número de resultados possíveis}} = \frac{3}{5}$$

Assim, resulta finalmente

$$P(\text{AB4}) = \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{5}{8} = \frac{3}{28} = 0.107\,.$$ ■

PROBLEMA 3.11

APOIOS À RESOLUÇÃO

Apoio 1 (apenas o resultado)

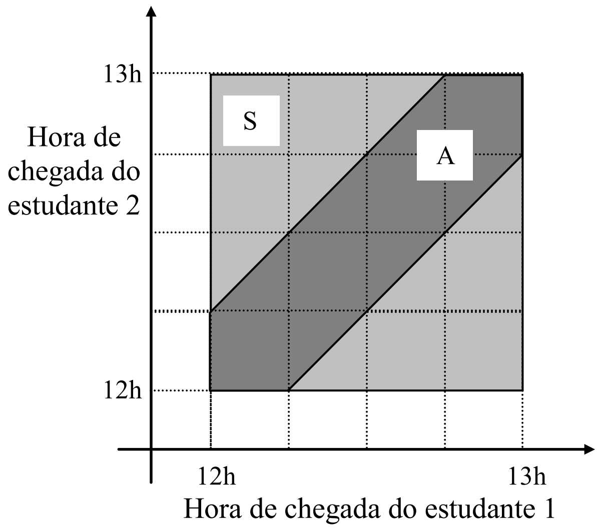
43.75%. ■

Apoio 2 (sugestão)

Tente fazer uma representação gráfica do problema e recorra ao conceito de probabilidade geométrica. ■

Apoio 3 (resolução completa)

Representação gráfica do problema:



Espaço amostral (S): Quadrado sombreado claro, que inclui 16 quadrados elementares com ¼ hora de lado.

Acontecimento A («O encontro realiza-se»): Polígono sombreado escuro.

Assim,

$$P(\text{A}) = \frac{\text{Área de A}}{\text{Área de S}}$$

$$= \frac{7\Omega}{16\Omega}$$ (onde Ω representa a área de um quadrado elementar de 1/4 hora de lado)

$$= \frac{7}{16} = 0.4375\,.$$ ■

PROBLEMA 3.12

APOIOS À RESOLUÇÃO

Apoio 1 (apenas o resultado)

38.6%. ■

Apoio 2 (sugestão)

Desenhe a árvore de resultados e aplique o teorema de Bayes. ■

Apoio 3 (resolução completa)

Seja:

A: Um utilizador é cliente de Ai

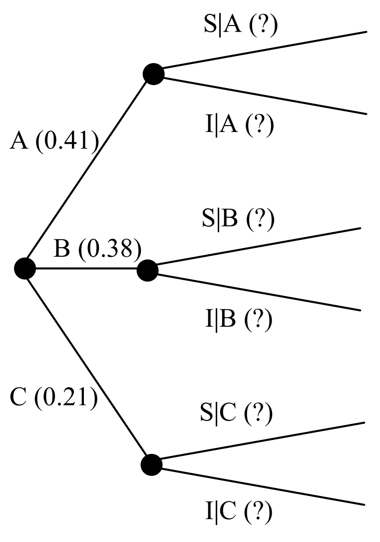
B: Um utilizador é cliente de B

C: Um utilizador é cliente de C

S: Um utilizador está Satisfeito

I: Um utilizador está Insatisfeito.

Representa-se em seguida a correspondente árvore de resultados:



Se 17% dos utilizadores estão insatisfeitos, então:

$P(\mathrm{A}) \cdot P(\mathrm{I} \mid \mathrm{A}) + P(\mathrm{B}) \cdot P(\mathrm{I} \mid \mathrm{B}) + P(\mathrm{C}) \cdot P(\mathrm{I} \mid \mathrm{C}) = 0.17$.

Dado que $P(\mathrm{A}) = 0.41$, $P(\mathrm{B}) = 0.38$ e $P(\mathrm{C}) = 0.21$, vem

$0.41 \cdot P(\mathrm{I} \mid \mathrm{A}) + 0.38 \cdot P(\mathrm{I} \mid \mathrm{B}) + 0.21 \cdot P(\mathrm{I} \mid \mathrm{C}) = 0.17$.

Como 35% dos utilizadores insatisfeitos são clientes de A, resulta

$$\frac{P(\mathrm{I} \cap \mathrm{A})}{P(\mathrm{A}) \cdot P(\mathrm{I} \mid \mathrm{A}) + P(\mathrm{B}) \cdot P(\mathrm{I} \mid \mathrm{B}) + P(\mathrm{C}) \cdot P(\mathrm{I} \mid \mathrm{C})} = 0.35,$$

ou seja,

$$\frac{P(\mathrm{A}) \cdot P(\mathrm{I} \mid \mathrm{A})}{P(\mathrm{A}) \cdot P(\mathrm{I} \mid \mathrm{A}) + P(\mathrm{B}) \cdot P(\mathrm{I} \mid \mathrm{B}) + P(\mathrm{C}) \cdot P(\mathrm{I} \mid \mathrm{C})} = 0.35.$$

Substituindo, vem

$$\frac{0.41 \cdot P(\mathrm{I} \mid \mathrm{A})}{0.17} = 0.35,$$

$$P(\mathrm{I} \mid \mathrm{A}) = \frac{0.35 \cdot 0.17}{0.41} = 0.145$$

e

$$P(\mathrm{S} \mid \mathrm{A}) = 1 - P(\mathrm{I} \mid \mathrm{A}) = 1 - 0.145 = 0.855.$$

Por outro lado, 35% dos utilizadores insatisfeitos são clientes de B. Assim,

$$\frac{P(\mathrm{B}) \cdot P(\mathrm{I} \mid \mathrm{B})}{P(\mathrm{A}) \cdot P(\mathrm{I} \mid \mathrm{A}) + P(\mathrm{B}) \cdot P(\mathrm{I} \mid \mathrm{B}) + P(\mathrm{C}) \cdot P(\mathrm{I} \mid \mathrm{C})} = 0.35$$

ou seja,

$$\frac{0.38 \cdot P(\mathrm{I} \mid \mathrm{B})}{0.17} = 0.35,$$

$$P(\mathrm{I} \mid \mathrm{B}) = \frac{0.35 \cdot 0.17}{0.38} = 0.157$$

e

$$P(\mathrm{S} \mid \mathrm{B}) = 1 - P(\mathrm{I} \mid \mathrm{B}) = 1 - 0.157 = 0.843.$$

Finalmente, 30% dos utilizadores insatisfeitos são clientes de C. Assim,

$$\frac{P(\mathrm{C}) \cdot P(\mathrm{I} \mid \mathrm{C})}{P(\mathrm{A}) \cdot P(\mathrm{I} \mid \mathrm{A}) + P(\mathrm{B}) \cdot P(\mathrm{I} \mid \mathrm{B}) + P(\mathrm{C}) \cdot P(\mathrm{I} \mid \mathrm{C})} = 0.30$$

ou seja,

$$\frac{0.21 \cdot P(\mathrm{I} \mid \mathrm{C})}{0.17} = 0.30,$$

$$P(\mathrm{I} \mid \mathrm{C}) = \frac{0.30 \cdot 0.17}{0.21} = 0.243$$

e

$$P(\mathrm{S} \mid \mathrm{C}) = 1 - P(\mathrm{I} \mid \mathrm{C}) = 1 - 0.243 = 0.757.$$

Substituindo na expressão seguinte (que dá a probabilidade de um cliente satisfeito estar ligado à rede da empresa B)

$$P(\mathrm{B} \mid \mathrm{S}) = \frac{P(\mathrm{B}) \cdot P(\mathrm{S} \mid \mathrm{B})}{P(\mathrm{A}) \cdot P(\mathrm{S} \mid \mathrm{A}) + P(\mathrm{B}) \cdot P(\mathrm{S} \mid \mathrm{B}) + P(\mathrm{C}) \cdot P(\mathrm{S} \mid \mathrm{C})}$$

os valores calculados, obtém-se:

$$P(\mathrm{B} \mid \mathrm{S}) = \frac{0.38 \cdot 0.843}{0.41 \cdot 0.855 + 0.38 \cdot 0.843 + 0.21 \cdot 0.757}$$

$P(\mathrm{B} \mid \mathrm{S}) = 0.386.$ ■

PROBLEMA 3.13

APOIOS À RESOLUÇÃO

Apoio 1 (apenas o resultado)

7.4%. ■

Apoio 2 (sugestão)

Desenhe a árvore de resultados e aplique o teorema de Bayes. ■

Apoio 3 (resolução completa)

Considerem-se os seguintes acontecimentos:

AD: Ao jogador A sai a pergunta de Desporto
AL: Ao jogador A sai a pergunta de Literatura
AP: Ao jogador A sai a pergunta de Política
AC: Ao jogador A sai a pergunta de Cinema
AT: Ao jogador A sai a pergunta de Telenovela
AM: Ao jogador A sai a pergunta de Música
BD: Ao jogador B sai a pergunta de Desporto
BL: Ao jogador B sai a pergunta de Literatura
BP: Ao jogador B sai a pergunta de Política
BC: Ao jogador B sai a pergunta de Cinema
BT: Ao jogador B sai a pergunta de Telenovela
BM: Ao jogador B sai a pergunta de Música
AA: O jogador A Acerta a resposta
AF: O jogador A Falha a resposta
BA: O jogador B Acerta a resposta
BF: O jogador B Falha a resposta.

Assim,

$$P[(\mathrm{AD}\cap\mathrm{BD})\mid(\mathrm{AA}\cap\mathrm{BF})]=\frac{P[(\mathrm{AD}\cap\mathrm{BD})\cap(\mathrm{AA}\cap\mathrm{BF})]}{P(\mathrm{AA}\cap\mathrm{BF})}$$
$$=\frac{P(\mathrm{AD}\cap\mathrm{BD}\cap\mathrm{AA}\cap\mathrm{BF})}{P(\mathrm{AA}\cap\mathrm{BF})}.$$

Reordenando os termos do numerador e admitindo que os acontecimentos AA e BF são independentes, vem

$$P[(\mathrm{AD}\cap\mathrm{BD})\mid(\mathrm{AA}\cap\mathrm{BF})]=\frac{P(\mathrm{AD}\cap\mathrm{AA}\cap\mathrm{BD}\cap\mathrm{BF})}{P(\mathrm{AA})\cdot \mathrm{P}(\mathrm{BF})}$$
$$=\frac{P[(\mathrm{AD}\cap\mathrm{AA})\cap(\mathrm{BD}\cap\mathrm{BF})]}{P(\mathrm{AA})\cdot \mathrm{P}(\mathrm{BF})}.$$

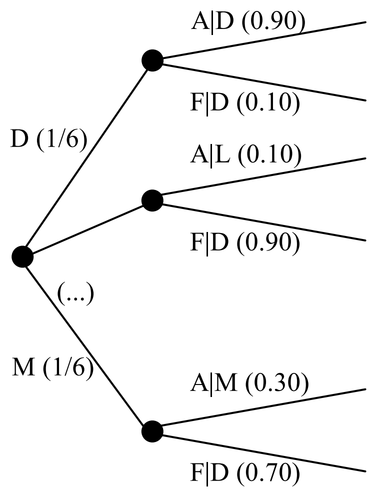
Admitindo que os acontecimentos $(\mathrm{AD}\cap\mathrm{AA})$ e $(\mathrm{BD}\cap\mathrm{BF})$ são independentes, obtém-se

$$P[(\mathrm{AD}\cap\mathrm{BD})\mid(\mathrm{AA}\cap\mathrm{BF})]=\frac{P(\mathrm{AD}\cap\mathrm{AA})\cdot P(\mathrm{BD}\cap\mathrm{BF})}{P(\mathrm{AA})\cdot \mathrm{P}(\mathrm{BF})}$$
$$=\frac{P(\mathrm{AD}\cap\mathrm{AA})}{P(\mathrm{AA})}\cdot\frac{P(\mathrm{BD}\cap\mathrm{BF})}{P(\mathrm{BF})}$$

ou seja,

$$P[(\mathrm{AD}\cap\mathrm{BD})\mid(\mathrm{AA}\cap\mathrm{BF})]=P(\mathrm{AD}\mid\mathrm{AA})\cdot P(\mathrm{BD}\mid\mathrm{BF}).$$

Calcula-se em seguida $P(\mathrm{AD}|\mathrm{AA})$ recorrendo a uma árvore de resultados:



Assim,

$$P(\mathrm{AD}\mid\mathrm{AA})=\frac{P(\mathrm{AD}\cap\mathrm{AA})}{P(\mathrm{AA})}$$

$$P(\mathrm{AD}\mid\mathrm{AA})=\frac{P(\mathrm{AD})\cdot P(\mathrm{AA}\mid\mathrm{AD})}{P(\mathrm{AD})\cdot P(\mathrm{AA}\mid\mathrm{AD})+P(\mathrm{AL})\cdot P(\mathrm{AA}\mid\mathrm{AL})+\cdots+P(\mathrm{AM})\cdot P(\mathrm{AA}\mid\mathrm{AM})}$$

$$= \frac{(1/6)\cdot 0.90}{(1/6)\cdot 0.90 + (1/6)\cdot 0.10 + \cdots + (1/6)\cdot 0.30} = 0.346\,.$$

Calcule-se agora $P(\text{BD} \mid \text{BF})$:

$$P(\text{BD} \mid \text{BF}) = \frac{P(\text{BD} \cap \text{BF})}{P(\text{BF})}$$

$$P(\text{BD} \mid \text{BF}) = \frac{P(\text{BD})\cdot P(\text{BF} \mid \text{BD})}{P(\text{BD})\cdot P(\text{BF} \mid \text{BD}) + P(\text{BL})\cdot P(\text{BF} \mid \text{BL}) + \cdots + P(\text{BM})\cdot P(\text{BF} \mid \text{BM}))}$$

$$= \frac{(1/6)\cdot(1-0.40)}{(1/6)\cdot(1-0.40) + (1/6)\cdot(1-0.50) + \cdots + (1/6)\cdot(1-0.85)} = 0.214\,.$$

Como

$$P\big[(\text{AD} \cap \text{BD}) \mid (\text{AA} \cap \text{BF})\big] = P(\text{AD} \mid \text{AA})\cdot P(\text{BD} \mid \text{BF})$$

vem, finalmente

$$P\big[(\text{AD} \cap \text{BD}) \mid (\text{AA} \cap \text{BF})\big] = 0.346\cdot 0.214$$

$$= 0.074. \blacksquare$$