Exercicio 1.12: Verifique que o conjunto $\ell^2(\mathbb{N})$ do Exemplo 1.5 com as respectivas operações é um espaço vetorial. Explique também por que $L^2(\mathbb{N})$ é um subspaço de $L^\infty(\mathbb{N})$.
Dica: use a desigualdade $(x-y)^2 \geq 0$ para provar que (
$(x+y)^2 \leq 2x^2 + 2y^2, \forall x, y$.

R: $L^2(\mathbb{N})$ representa o conjunto de sinais de energia limitada, infinito. Ele é formado por vetores do tipo:
$$x = (x_0, x_1, x_2, \dots), \quad \sum_{k=0}^{\infty} |x_k|^2 < \infty$$

CONSIDERANDO
$$u = (u_0, u_1, u_2, \dots), \sum_{k=0}^{\infty} |u_k|^2 < \infty \qquad \forall u \in L^2(\mathbb{N})$$
$$v = (v_0, v_1, v_2, \dots), \sum_{k=\infty}^{\infty} |v_k|^2 < \infty \qquad \forall v \in L^2(\mathbb{N})$$
$\alpha \in \mathbb{R}$

1. ADIÇÃO:
$$(u+v) = (u_0+v_0, u_1+v_1, u_2+v_2 + \dots), \quad \sum_{k=0}^{\infty} |u_k+v_k|^2 < \infty \; ?$$

SEGUINDO A DICA DO PROFESSOR PARA UTILIZAR A DESIGUALDE $(x-y)^2 \geq 0$. ESSA DESIGUALDE REPRESENTA UM VALOR ZERO OU POSITIVO. SE ADICIONARMOS ESSE VALOR ZERO OU POSITIVO AO TERMO QUE ESTAMOS VERIFICANDO, É POSSÍVEL DELIMITAR UM LIMITE SUPERIOR.

- PARA OS REAIS: $|x+y|^2 = (x+y)^2$
- ADICIONANDO ESSE VALOR ZERO OU POSITIVO: $(x+y)^2 + (x-y)^2 = 2x^2 + 2y^2$
- PODEMOS CONCLUIR: $(x+y)^2 \leq 2x^2 + 2y^2$
- REESCREVENDO A CONDIÇÃO PARA FECHAMENTO NA ADIÇÃO: $\sum_{k=0}^{\infty} |u_k+v_k|^2 \leq 2\left(\sum_{k=0}^{\infty} |u_k|^2 + \sum_{k=0}^{\infty} |v_k|^2\right)$
- JÁ QUE ADIÇÃO DE DOIS TERMOS $< \infty$ E A MULTIPLICAÇÃO POR 2 NÃO ALTERAM, NÃO AFETAM A CONDIÇÃO QUE ELES CONTINUAM $< \infty$ PODEMOS CONCLUIR QUE $\sum_{k=0}^{\infty} |u_k+v_k|^2 < \infty$, $(u+v) \in L^2(\mathbb{N})$

F: $(a+b)u = au + bu$

$\forall a,b \in \mathbb{R}$ e $u \in L^2(\mathbb{N})$

$((a+b)u_0, (a+b)u_1, (a+b)u_2, \dots) = (au_0, au_1, au_2, \dots) + (bu_0, bu_1, bu_2, \dots)$

$(au_0 + bu_0, au_1 + bu_1, au_2 + bu_2, \dots) = (au_0, au_1, au_2, \dots) + (bu_0, bu_1, bu_2, \dots)$

$(au_0, au_1, au_2, \dots) + (bu_0, bu_1, bu_2, \dots) = (au_0, au_1, au_2, \dots) + (bu_0, bu_1, bu_2, \dots)$

OK

G: $a(u+v) = au + av$

$\forall a \in \mathbb{R}$ e $\forall u,v \in L^2(\mathbb{N})$

$a(u_0+v_0, u_1+v_1, u_2+v_2, \dots) = (au_0, au_1, au_2, \dots) + (av_0, av_1, av_2, \dots)$

$(au_0+av_0, au_1+av_1, au_2+av_2, \dots) = (au_0, au_1, au_2, \dots) + (av_0, av_1, av_2, \dots)$

$(au_0, au_1, au_2, \dots) + (av_0, av_1, av_3, \dots) = (au_0, au_1, au_2, \dots) + (av_0, av_1, av_2, \dots)$ OK

H: $1u = u$

$(1u_0, 1u_1, 1u_2, \dots) = (u_0, u_1, u_2, \dots)$

$(u_0, u_1, u_2, \dots) = (u_0, u_1, u_2, \dots)$ OK

EXPLIQUE POR QUE $L^2(\mathbb{N})$ É UM SUBESPAÇO DE $L^\infty(\mathbb{N})$

$L^\infty(\mathbb{N})$ É O ESPAÇO DOS SINAIS INFINITOS NO TEMPO MAS LIMITADOS NA MAGNITUDE.

SEUS VETORES SEGUEM A FORMA

$x = (x_0, x_1, x_2, \dots)$, $|x_i| \leq M$ PARA TODOS $i \geq 0$

É PRECISO MOSTRAR QUE OS VETORES DO ESPAÇO $L^2(\mathbb{N})$ SE ELES SÃO FECHADOS NA ADIÇÃO E MULTIPLICAÇÃO POR ESCALAR EM $L^\infty(\mathbb{N})$.

ADIÇÃO: COMO $\forall u$, $u = (u_0, u_1, u_2, \dots)$, $\sum_{k=0}^{\infty} |u_k|^2 < \infty$

COMO EXISTE UM VALOR FINITO PARA SOMA DOS ELEMENTOS DO VETOR, PODEMOS CONSTRUIR MENTALMENTE SEMPRE UM M GRANDE O SUFICIENTE E FINITO PARA O FECHAMENTO NA ADIÇÃO

MULTIPLICAÇÃO POR ESCALAR: DA MESMA FORMA CONTINUAR EXISTINDO UM M GRANDE O SUFICIENTE E FINITO PARA O FECHAMENTO NA MULTIPLICAÇÃO PARA QUALQUER MULTIPLICAÇÃO POR ESCALAR FINITO.

ENTÃO $L^2(\mathbb{N}) \subset L^\infty(\mathbb{N})$

Exercício 1.13 O objetivo deste exercício é provar a Proposição 1.1 para um espaço vetorial abstrato V.

(a) Mostre que o vetor $\vec{0} \in V$ é único. Para fazê-lo, suponha que existam dois vetores $\vec{0}_a \in V$ e $\vec{0}_b \in V$ que satisfazem o axioma do vetor nulo, e mostre que $\vec{0}_a = \vec{0}_b$. Dica: considere $\vec{0}_a + \vec{0}_b$

R: Supondo a existência dos vetores $\vec{0}_a$ e $\vec{0}_b \in V$, que satisfazem o axioma do vetor nulo.

Partindo de $\vec{0}_A + \vec{0}_B$

1. $\vec{0}_A$ satisfazendo o axioma do vetor nulo $\vec{0}_A + \vec{0}_B = \vec{0}_B$
2. $\vec{0}_B$ satisfazendo o axioma do vetor nulo $\vec{0}_A + \vec{0}_B = \vec{0}_A$

Logo, mesmo sem conhecer a forma concreta dos vetores do espaço V podemos dizer que $\vec{0}_A = \vec{0}_B$

(b) Abaixo está a demonstração de $0m = m$ em qualquer espaço vetorial. Nesta demonstração, todos os escalares, inclusive o 0, estão sem negrito, e $-m$ representa o inverso aditivo de m, logo $m + (-m) = 0$. Quais das propriedades listadas na Definição 1.4.1 justificam cada passo?

$(1+0)m = 1m + 0m$ ... • Propriedade 3.F

$1m = m + 0m$ ... Propriedade 3.C Adição de identidade

$m = m + 0m$ ... • Propriedade 3.H

$m + (-m) = (m + (-m)) + 0m$ • Propriedades 3.D Existência do inverso aditivo
3.B Associatividade da adição

$0 = 0 + 0m$ ... • Propriedades 3.C e 2.C Fechamento na multiplicação por escala

$0 = 0m$ ... • Propriedade 3.A. Comutatividade da adição

(c) Mostre que se $m + v = 0$, então $v = (-1)m$. (Isto mostra que o inverso aditivo de m é $(-1)m$.

$$m + v = 0$$
$$m + (-m) + v = 0 + (-m)$$
$$v = 0 - m$$
$$v = -m$$
$$v = 1(-m)$$
$$v = (-1)m$$

2 MULTIPLICAÇÃO POR ESCALAR:

$$\alpha u = (\alpha u_0, \alpha u_1, \alpha u_2, \dots), \quad \sum_{k=0}^{\infty} |u_k|^2 < \infty \ ?$$

PODEMOS REESCREVER A CONDIÇÃO COMO: $\alpha \sum_{k=0}^{\infty} |u_k|^2 < \infty$

COMO A MULTIPLICAÇÃO POR UM ESCALAR FINITO É INCAPAZ DE ATINGIR O INFINITO PODEMOS CONCLUIR QUE $\alpha u \in L^2(\mathbb{N})$

3. REGRAS "FAMILIARES" DA ARITMÉTICA

A. COMUTATIVIDADE DA ADIÇÃO

$(u+v) = (v+u)$

$(u_0+v_0, u_1+v_1, u_2+v_2, \dots) = (v_0+u_0, v_1+u_1, v_2+u_2, \dots)$ OK

B. ASSOCIATIVIDADE DA ADIÇÃO

$\forall w \in L^2(\mathbb{N})$

$(u+v)+w = u+(v+w)$

$(u_0+v_0, u_1+v_1, u_2+v_2, \dots) + (w_0, w_1, w_2, \dots) = (u_0, u_1, u_2, \dots) + (v_0+w_0, v_1 w_1, v_2 w_2, \dots)$

$(u_0+v_0+w_0, u_1+v_1+w_1, u_2+v_2+w_2, \dots) = (u_0+v_0+w_0, u_1+v_1+w_1, u_2+v_2+w_2, \dots)$ OK

C. IDENTIDADE DA ADIÇÃO

EXISTE UM VETOR $\vec{0}$ TAL QUE $u+\vec{0} = \vec{0}+u = u$

ESSE VETOR É O $(0, 0, 0, \dots)$ OK

D. INVERSO ADITIVO

PARA CADA u existe um vetor w tal que $u+w=0$

$u+w = 0$

$(u_0+w_0, u_1+w_1, u_2+w_2, \dots) = (0, 0, 0, \dots)$

$(w_0, w_1, w_2, \dots) = (-u_0, -u_1, -u_2, \dots)$

$w = -u$ OK

E: $\forall a, b \in \mathbb{R}$ e $u \in L^2(\mathbb{N})$

$(ab)u = a(bu)$

$(abu_0, \cancel{abu_1}\ abu_1, abu_2, \dots) = a(bu_0, bu_1, bu_2, \dots)$

$(abu_0, abu_1, abu_2, \dots) = (abu_0, abu_1, abu_2, \dots)$ OK

EXERCÍCIO 1.18 Mostre que é possível fatorar a forma bidimensional básica $\mathcal{E}_{m,n,k,l}$ como: $\mathcal{E}_{m,n,k,l} = E_{m,k} E_{n,l}^{T}$

onde $E_{m,k}$ e $E_{n,l}$ são as formas de onda unidimensionais discretas básicas definidas na equação 1.22, como vetores de coluna.

Sendo: $$E_{m,k} = \begin{bmatrix} e^{i2\pi \cdot k \cdot \frac{0}{m}} \\ e^{i2\pi \cdot k \cdot \frac{1}{m}} \\ \vdots \\ e^{i2\pi \cdot k \cdot \frac{(m-1)}{m}} \end{bmatrix} \quad e \quad E_{n,l} = \begin{bmatrix} e^{i \cdot 2\pi \cdot l \cdot \frac{0}{n}} \\ e^{i 2\pi \cdot l \cdot \frac{1}{n}} \\ \vdots \\ e^{i \cdot 2\pi \cdot l \cdot \frac{(n-1)}{n}} \end{bmatrix}$$

$$E_{n,l}^{T} = \begin{bmatrix} e^{i \cdot 2\pi \cdot l \cdot \frac{0}{n}} & e^{i 2\pi \cdot l \cdot \frac{1}{n}} & \cdots & e^{i \cdot 2\pi \cdot l \cdot \frac{(n-1)}{n}} \end{bmatrix}$$

Então:
$$E_{m,k} \times E_{n,l}^{T} = \begin{bmatrix} e^{i2\pi \cdot k \cdot \frac{0}{m}} \\ e^{i2\pi \cdot k \cdot \frac{1}{m}} \\ \vdots \\ e^{i2\pi \cdot k \frac{(m-1)}{m}} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} e^{i \cdot 2\pi \cdot l \cdot \frac{0}{n}} & e^{i2\pi \cdot l \cdot \frac{1}{n}} & \cdots & e^{i2\pi l \frac{(n-1)}{n}} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} e^{i2\pi k \frac{0}{m}} \cdot e^{i2\pi l \frac{0}{n}} & e^{i2\pi k \frac{0}{m}} \cdot e^{i2\pi l \frac{1}{n}} & \cdots & e^{i2\pi k \frac{0}{m}} \cdot e^{i2\pi l \frac{(n-1)}{n}} \\ e^{i2\pi k \frac{1}{m}} \cdot e^{i2\pi l \frac{0}{n}} & e^{i2\pi k \frac{1}{m}} \cdot e^{i2\pi l \frac{1}{n}} & \cdots & e^{i2\pi k \frac{1}{m}} \cdot e^{i2\pi l \frac{(n-1)}{n}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{i2\pi k \frac{(m-1)}{m}} \cdot e^{i2\pi l \frac{0}{n}} & e^{i2\pi \cdot k \frac{(m-1)}{m}} & \cdots & e^{i2\pi k \frac{(m-1)}{m}} \cdot e^{i2\pi l \frac{(n-1)}{n}} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} e^{i2\pi 0} & e^{i2\pi l \frac{1}{n}} & \cdots & e^{i2\pi l \frac{(n-1)}{n}} \\ e^{i2\pi k \frac{1}{m}} & e^{i2\pi \left(k \frac{1}{m} + l \frac{1}{n}\right)} & \cdots & e^{i2\pi \left(k \cdot \frac{1}{m} + l \frac{(n-1)}{n}\right)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{i2\pi k \frac{(m-1)}{m}} & e^{i \cdot 2\pi \left(k \frac{(m-1)}{m} + l \cdot \frac{1}{n}\right)} & \cdots & e^{i2\pi \left(k \frac{(m-1)}{m} + l \frac{(n-1)}{n}\right)} \end{bmatrix} = \mathcal{E}_{m,n,k,l}$$

Exercício 1.21 Para uma forma de onda unidimensional pura de N amostras, mostre a relação de aliasing.

$$E_{N,N-k} = \overline{E_{N,k}}$$

Para $N = 4$

$$E_{4,0} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad E_{4,1} = \begin{bmatrix} 1 \\ i \\ -1 \\ -i \end{bmatrix} \quad E_{4,2} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad E_{4,3} = \begin{bmatrix} 1 \\ -i \\ -1 \\ i \end{bmatrix}$$

Para $k = 1$

$$E_{4,4-1} = \overline{E_{4,1}}$$

$$E_{4,3} = \overline{E_{4,1}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -i \\ -1 \\ i \end{bmatrix} = \overline{\begin{bmatrix} 1 \\ i \\ -1 \\ -i \end{bmatrix}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -i \\ -1 \\ i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -i \\ -1 \\ i \end{bmatrix}$$ ou