EXERCÍCIO 2.19 SEJA $x \in \mathbb{C}^N$ COM DFT X. SEJA $y \in \mathbb{C}^N$, O VETOR OBITIDO PELO DESLOCAMENTO CIRCULAR DE x EM m ÍNDICES.

$$y_k = x_{(k+m) \bmod N}$$

MOSTRE QUE A DFT DE y TEM COMPONENTES $Y_k = e^{i2\pi k \frac{m}{N}}$ E QUE $|X_k| = |Y_k|$, PARA TODO O k.

RESPOSTA:

SENDO $DFT(x) = X_k = (x, E_{N,k}) = \sum_{k=0}^{N-1} x_k \, e^{-i2\pi \cdot k \cdot \frac{k}{N}}$

E $DFT(y) = DFT(x_{(k+m) \bmod N})$

$$= \sum_{k=0}^{N-1} x_{(k+m) \bmod N} \cdot e^{-i2\pi \cdot k \cdot \frac{k+m}{N}}$$

COMO ESSA FUNÇÃO JÁ É PERIÓDICA EM N, NÃO É NECESSÁRIO COLOCARMOS O MOD N AQUI.

$$= \sum_{k=0}^{N-1} x_{(k+m) \bmod N} \cdot e^{-i2\pi \cdot k \frac{k}{N}} \cdot e^{i2\pi k \frac{m}{N}}$$

$$= \underbrace{\left(\sum_{k=0}^{N-1} x_{(k+m) \bmod N} \cdot e^{-i2\pi \cdot k \cdot \frac{k}{N}} \right)}_{} \cdot e^{i2\pi k \frac{m}{N}}$$

$$Y_k = X_k \cdot e^{i2\pi \cdot k \cdot m}$$

SEGUINDO PARA $|X_k| = |Y_k|$

$$|X_k| = |X_k \cdot \underbrace{e^{i2\pi k m}}_{}|$$

COMO ESSE FATOR MULTIPLICATIVO TEM MAGNITUDE 1, O PRODUTO RESULTANTE MANTÉM A MAGNITUDE ORIGINAL

$$|X_k| = |Y_k|$$