Diogo Alves

Lista 3

Exercício 2.16: Calcule (a mão) a DFT bidimensional da matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Em seguida, calcule a transformada inversa do resultado.

Resposta

A partir da definição

$$DFT(A) = \hat{A}_{k,l} = (A, \mathcal{E}_{k,l}) = \sum_{r=0}^{M-1} \sum_{s=0}^{N-1} A_{r,s}\, e^{-i 2\pi \left(\frac{kr}{M} + \frac{ls}{N}\right)}$$

$$\hat{A}_{k,l} = A_{0,0}\, e^{-i2\pi\left(k.\frac{0}{M} + \frac{l.0}{N}\right)} + A_{0,1}\, e^{-i2\pi\left(\frac{k.0}{M} + \frac{l.1}{N}\right)} + A_{1,0}\, e^{-i2\pi\left(\frac{k.1}{M} + \frac{l.0}{N}\right)} + A_{1,1}\, e^{-i2\pi\left(\frac{k.1}{M} \dots\right)}$$

$$\hat{A}_{k,l} = A_{0,0}\, e^{0} + A_{0,1}\, e^{-i\pi l} + A_{1,0}\, e^{-i\pi . k} + A_{1,1}\, e^{-i\pi(k+l)}$$

$$\hat{A}_{k,l} = 1 . 1 + (-1)(-1)^{l} + 2 . (-1)^{k} + 0$$

$$\hat{A}_{k,l} = 1 - (-1)^{l} + 2 . (-1)^{k}$$

$\boxed{k=0, l=0}$ $\hat{A}_{0,0} = 1 - 1 + 2 = 2$

$\boxed{k=0, l=1}$ $\hat{A}_{0,1} = 1 + 1 + 2 = 4$

$\boxed{k=1, l=0}$ $\hat{A}_{1,0} = 1 - 1 - 2 = -2$

$\boxed{k=1, l=1}$ $\hat{A}_{1,1} = 1 + 1 - 2 = 0$

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{e^{-i\pi} = \cos\pi - i \operatorname{sen}\pi = -1}$$

A PARTIR DA DEFINIÇÃO

$$IDFT(\hat{A}) = A_{R,S} = \frac{1}{MN}\langle \hat{A}, \overline{\mathcal{E}_{K,L}} \rangle = \left(\sum_{K=0}^{M-1} \sum_{S=0}^{N-1} \hat{A}_{K,L} \cdot e^{i \cdot 2\pi \cdot \left(\frac{K \cdot R}{M} + \frac{L \cdot S}{N} \right)} \right) \cdot \frac{1}{MN}$$

$$A_{R,S} = \frac{1}{M.N}\left(\hat{A}_{0,0} \cdot e^{i2\pi\left(\frac{0 \cdot R}{M} + \frac{0 \cdot S}{N}\right)} + \hat{A}_{0,1}\, e^{i2\pi\left(\frac{0 \cdot R}{M} + \frac{S \cdot 1}{M}\right)} + \hat{A}_{1,0}\, e^{i2\pi\left(\frac{1 \cdot R}{M} + \frac{0 \cdot S}{N}\right)} + \hat{A}_{1,1}\, e^{i2\pi\left(\frac{R}{M} + \frac{S}{N}\right)} \right)$$

$$A_{R,S} = \frac{1}{4}\left(\hat{A}_{0,0} \cdot e^{0} + \hat{A}_{0,1}\, e^{i\pi S} + \hat{A}_{1,0}\, e^{i2\pi R} + \hat{A}_{1,1}\, e^{i2\pi(R+S)} \right)$$

$$A_{R,S} = \frac{1}{4}\left(2 \cdot 1 + 4 \cdot (-1)^{S} + (-2) \cdot (-1)^{R} + 0 \right)$$

$$A_{R,S} = \frac{1}{4}\left(2 + 4 \cdot (-1)^{S} + (-2)(-1)^{R} \right)$$

$e^{i\pi} = \cos\pi + i\,\text{sen}\,\pi = -1$

$\boxed{R=0,\ S=0}$ $A_{0,0} = \frac{1}{4}(2+4-2) = \frac{4}{4} = 1$

$\boxed{R=0,\ S=1}$ $A_{0,1} = \frac{1}{4}(2+4(-1) - 2 \cdot (1)) = \frac{-4}{4} = -1$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$\boxed{R=1,\ S=0}$ $A_{1,0} = \frac{1}{4}(2+4(+1) - 2(-1)) = \frac{8}{4} = 2$

$\boxed{R=1,\ S=1}$ $A_{1,1} = \frac{1}{4}(2+4(-1) - 2(-1)) = \frac{0}{4} = 0$

EXERCÍCIO 2.17 SEJAM x E y DOIS VETORES COLUNA DE DIMENSÃO M E N, RESPECTIVAMENTE, COM DFT'S $\mathbf{X}$ E $\mathbf{Y}$.

SEJA z A MATRIZ $M \times N$ DEFINIDA POR:

$$z_{r,s} = x_r y_s, \quad \text{com} \begin{cases} 0 \leq r \leq M-1 \\ 0 \leq s \leq N-1 \end{cases}$$

E $\mathbf{Z}$ A $DFT(z)$ (BIDIMENSIONAL) DE z.

A) MOSTRE QUE z É UMA MATRIZ $M \times N$ QUE SATISFAZ $z = xy^T$, ONDE y^T DENOTA A TRANSPOSTA DE y.

RESPOSTA

$$x_M = \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_M \end{bmatrix}_{(M,1)} \quad y_N = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix}_{(N,1)} \quad z_{M,N} = \begin{bmatrix} x_0y_0 & x_0y_1 & x_0y_2 & x_0y_N \\ x_1y_0 & & & \vdots \\ x_2y_0 & \cdot & \cdot & \vdots \\ \vdots & & & \\ x_My_0 & \cdots & & x_My_N \end{bmatrix}_{(M,N)}$$

$$\mathbf{X} = DFT(x) \quad \mathbf{Y} = DFT(y) \quad \mathbf{Z} = DFT(z)$$

$$z = xy^T$$

$$= \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_M \end{bmatrix}_{(M,1)} \begin{bmatrix} y_0 & y_1 & y_2 & \cdots & y_N \end{bmatrix}_{(1,N)} = \begin{bmatrix} x_0y_0 & x_0y_1 & x_0y_2 & x_0y_N \\ x_1y_0 & & & \vdots \\ x_2y_0 & \cdot & \cdot & \vdots \\ \vdots & & & \\ x_My_0 & \cdots & & x_My_N \end{bmatrix}_{(M,N)} = z$$

B) MOSTRE QUE $\mathbf{Z}_{k,l} = \mathbf{X}_k \mathbf{Y}_l$ OU EQUIVALENTE $\mathbf{Z} = \mathbf{X}\mathbf{Y}^T$, ONDE $\mathbf{Z}_{k,l}$ DENOTA O ELEMENTO DA LINHA k E COLUNA l DE $\mathbf{Z}$.

RESPOSTA:

$$\mathbf{Z}_{k,l} = \mathbf{X}_k \mathbf{Y}_l$$

$$\mathbf{Z} = \mathbf{X}\mathbf{Y}^T$$

COMO A DFT É UMA OPERAÇÃO LINEAR

$$= DFT(x) \cdot DFT(y^T)$$

$$= DFT(xy^T)$$

COMO MOSTRAMOS ANTERIORMENTE

$$= DFT(z)$$

$$= \mathbf{Z}$$

EXERCÍCIO 2.19 Seja $x \in \mathbb{C}^N$ com DFT X. Seja $y \in \mathbb{C}^N$, o vetor obitido pelo deslocamento circular de x em m índices.

$$y_k = x_{(k+m) \bmod N}$$

Mostre que a DFT de y tem componentes $Y_k = e^{i2\pi k \frac{m}{N}}$ e que $|X_k| = |Y_k|$, para todo o k.

RESPOSTA:

Sendo $DFT(x) = X_k = (x, E_{N,k}) = \sum_{k=0}^{N-1} x_k \, e^{-i2\pi . k . \frac{k}{N}}$

e $DFT(y) = DFT(x_{(k+m) \bmod N})$

$$= \sum_{k=0}^{N-1} x_{(k+m) \bmod N} \cdot e^{-i2\pi . k . \frac{k+m}{N}}$$

Como essa função já é periódica em N, não é necessário colocarmos o mod N aqui.

$$= \sum_{k=0}^{N-1} x_{(k+m) \bmod N} \cdot e^{-i2\pi . k \frac{k}{N}} \cdot e^{i2\pi k \frac{m}{N}}$$

$$= \underbrace{\left(\sum_{k=0}^{N-1} X_{(k+m) \bmod N} \cdot e^{-i2\pi . k . \frac{k}{N}} \right)}_{} \cdot e^{i2\pi k \frac{m}{N}}$$

$$Y_k = X_k \cdot e^{i2\pi . k . m}$$

Seguindo para $|X_k| = |Y_k|$

$$|X_k| = |X_k \cdot \underbrace{e^{i2\pi k m}}_{}|$$

Como esse fator multiplicativo tem magnitude 1, o produto resultante mantém a magnitude original

$$|X_k| = |Y_k|$$

EXERCÍCIO 3.12 Mostre que a DCT é uma transformada ortogonal, ou seja, que $\|DCT(x)\|^2 = \|x\|^2$ utilizando a norma euclidiana usual para vetores em $\mathbb{C}^N$. Esta é identidade de Parseval para a DCT. Dica: para qualquer vetor $v \in \mathbb{C}^N$, temos que $\|v\|^2 = v^* v$ onde v^* é o vetor-linha dado por $v^* = \bar{v}^T$

RESPOSTA

$$\|DCT(x)\|^2 = \|x\|^2 \quad ?$$

PARTINDO DE $\|v\|^2 = (v, v)$

$$\|DCT(x)\|^2 = \left\| \sum_{k=0}^{N-1} x_k C_k \right\|^2$$

$$= \left(\sum_{k=0}^{N-1} x_k C_k , \sum_{j=0}^{N-1} x_j C_j \right)$$

COMO, POR CONSTRUÇÃO A BASE DA DCT É ORTOGONAL, OS PRODUTO $C_k C_j$ SÃO ZERO PARA $k \neq j$.

$$= \sum_{k=j=0}^{N-1} x_k x_j^T C_k C_j^T$$

COMO, POR CONSTRUÇÃO, $(C_N)_{i,j} = (C_N)_{j,i}$

SABEMOS QUE $(C_N^T)(C_N) = I$

$$= \sum_{k=0}^{N-1} x_k^2$$

$$= \|x\|^2$$