Lista 6

Diogo Alves 13709881

Exercício 5.1 Seja $x = (x_0, x_1, x_2, x_3)$ um sinal e $X = (X_0, X_1, X_2, X_3)$ a DFT de x. Seja $w = (0,1,1,0)$ um vetor janela e $y = x \circ w$.

(A) Compute o vetor $X \in \mathbb{C}^4$.

R: $X = F_4 x$

$$\begin{bmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$X_0 = x_0 + x_1 + x_2 + x_3$$

$$X_1 = x_0 - ix_1 - x_2 + ix_3$$

$$X_2 = x_0 - x_1 + x_2 - x_3$$

$$X_3 = x_0 + ix_1 - x_2 - ix_3$$

(B) Compute as DFTs $W, Y \in \mathbb{C}^4$, e verifique que a equação (5.6) é satisfeita.

R: $W = F_4 w$

$$\begin{bmatrix} W_0 \\ W_1 \\ W_2 \\ W_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1-i \\ 0 \\ -1+i \end{bmatrix} \quad W = (2, -1-i, 0, -1+i)$$

$$y = (0, x_1, x_2, 0)$$

$$Y = F_4 y$$

$$\begin{bmatrix} Y_0 \\ Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ -ix_1 - x_2 \\ -x_1 + x_2 \\ ix_1 - x_2 \end{bmatrix} \quad Y = (x_1 + x_2, -ix_1 - x_2, -x_1 + x_2, ix_1 - x_2)$$

verificando que $Y = \frac{1}{N}(X * W)$

$$Y_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} X_n W_{k-n}$$

- como a convolução é comutativa podemos reescrever da seguinte forma

$$Y_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} W_n X_{k-n}$$

- como $W_2 = 0$ podemos abrir o somatório da seguinte forma

$$Y_k = \frac{1}{N}\left(W_0 X_k + W_1 X_{k-1} + W_3 X_{k-3}\right)$$

$$Y_k = \frac{1}{4}\left(2X_k + (-1-i)X_{k-1} + (-1+i)X_{k-3}\right)$$

Para $K=0$

$$Y_0 = \frac{1}{4}\left(2(x_0+x_1+x_2+x_3) + (-1-i)(x_0 - ix_1 - x_2 + ix_3) + (-1+i)(x_0 + ix_1 - x_2 - ix_3)\right)$$

$$= x_1 + x_2$$

Para $k=1$

$$Y_1 = \frac{1}{4}\left(2(x_0 - ix_1 - x_2 + ix_3) + (-1+i)(x_0 - x_1 + x_2 - x_3) + (-1-i)(x_0 + x_1 + x_2 + x_3)\right)$$

$$= -ix_1 - x_2$$

Para $k=2$

$$Y_2 = \frac{1}{4}\left(2(x_0 - x_1 + x_2 - x_3) + (-1-i)(x_0 - ix_1 + x_2 + ix_3) + (-1+i)(x_0 + ix_1 - x_2 - ix_3)\right)$$

$$= x_1 + x_2$$

Para $k=3$

$$Y_3 = \frac{1}{4}\left(2(x_0 + ix_1 - x_2 - ix_3) + (-1-i)(x_0 - x_1 + x_2 - x_3) + (-1+i)(x_0 + x_1 + x_2 + x_3)\right)$$

$$= ix_1 - x_2$$

VERIFICADO

(c) Compute a DFT $\tilde{X} \in \mathbb{C}^2$ da parte não nula do sinal janelado $\tilde{x} = (x_1, x_2)$, e verifique que o teorema 5.1 é satisfeito

R: $\tilde{X} = F_2 \tilde{x}$

$$\begin{bmatrix} \tilde{X}_0 \\ \tilde{X}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + y_2 \\ x_1 - x_2 \end{bmatrix}$$

• Teorema 5.1

$$\tilde{X}_s = \frac{e^{2\pi i m s/M}}{N} (x * w)_{qs}$$

• Aproveitando a equação 5.6 da letra anterior

$$\tilde{X}_s = e^{2\pi i m s/M} \cdot Y_{qs}$$

• Como $N=4$ e $M=2$ então $q=2$

• Calculando $\tilde{X}_s$ para $s=0$, $s=1$

$s=0$

$$\tilde{X}_0 = e^0 \cdot Y_{2\cdot 0} = Y_0 = x_1 + x_2$$

$s=1$, $m=1$

$$\tilde{X}_1 = e^{i2\pi \cdot 1/2} \cdot Y_{2\cdot 1} = -1 \cdot Y_2 = x_1 - x_2$$

VERIFICADO

EXERCÍCIO 5.4 CONSIDERE A ANÁLISE DO CONTEÚDO DE FREQUÊNCIA LOCAL DE UM SINAL $x \in \mathbb{R}^N$ REALIZADA TOMANDO SEGMENTOS DE TAMANHO M DA FORMA $\tilde{x} = (x_m, x_{m+1}, \ldots, x_{m+M-1})$, PARA ALGUM m, E CALCULANDO-SE UMA DFT M-dimensional DE $\tilde{x}$.

(A) EXAMINE O CASO EXTREMO COM $M=1$. EM PARTICULAR, COMPUTE A $DFT(\tilde{x})$. EXPLIQUE POR QUE $M=1$ OFERECE PERFEITA LOCALIZAÇÃO NO TEMPO, MAS ESSENCIALMENTE NENHUMA INFORMAÇÃO DE FREQUÊNCIA ALÉM DA COMPONENTE DC LOCAL.

RESPOSTA:

QUANDO $M=1$ A DFT DE $\tilde{x}$ TERÁ APENAS DIMENSÃO 1.

$$DFT(\tilde{x}) = \tilde{X}$$

$$\tilde{X}_k = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}_n e^{-i2\pi kn/N}$$

$$\tilde{X}_0 = \tilde{x}_0 \cdot e^{-i2\pi.0.0/1} = \tilde{x}_0 \cdot 1$$

O COEFICIENTE $\tilde{X}_0$ TRARÁ APENAS A INFORMAÇÃO RELACIONADA A PRIMEIRA FORMA DE ONDA BÁSICA, A QUE REPRESENTA A COMPONENTE DC.

COM $M=1$, SERÁ POSSÍVEL REALIZAR N JANELAMENTOS, UM JANELAMENTO POR AMOSTRA. EM OUTRAS PALAVRAS ESSE É O CASO ONDE SE OBTÉM A MÁXIMA RESOLUÇÃO TEMPORAL (OU PERFEITA LOCALIZAÇÃO NO TEMPO)

AO COMPUTARMOS N DFTs, ASSOCIADAS ÀS N JANELAS COM LARGURA $M=1$, ESTAREMOS BASICAMENTE FAZENDO UM CÓPIA DO SINAL ORIGINAL.

(B) EXAMINE O CASO EXTREMO $M=N$ (com $m=0$). EM PARTICULAR, COMPUTE A DFT DE $\tilde{x}$. EXPLIQUE POR QUE $M=N$ NÃO OFERECE NENHUMA LOCALIZAÇÃO DO TEMPO, MAS OFERECE A INFORMAÇÃO EM FREQUÊNCIA SEM QUALQUER TIPO DE DISTORÇÃO.

RESPOSTA:

QUANDO $M=N$ A DFT DE $\tilde{x}$ TERÁ DIMENSÃO N

$$\tilde{X}_k = \sum_{m=0}^{M-1} \tilde{x}_m e^{-i2\pi km/M} = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-i2\pi kn/N} = X_k$$

CONTINUA...

CONTINUANDO EXERCICIO 5.4 b

QUANDO $M=N$ (com $m=0$) CAIREMOS NO CASO DA DFT TRADICIONAL, NÃO JANELADA. $\tilde{X} = X$. A DFT DE $\tilde{x}$ SERÁ CAPAZ DE DETECTAR A PRESENÇA DE FREQUÊNCIAS NO INTERVALO $[-N/2, N/2)$. PORÉM, DEVIDO A CARACTERÍSTICA DA NÃO-LOCALIDADE DESSA TRANSFORMADA, NENHUMA INFORMAÇÃO SOBRE O MOMENTO DE ATIVAÇÃO OU DESATIVAÇÃO DAS FREQUÊNCIAS SERÁ FORNECIDO.

EXERCICIO 5.7

(A) Justifique a APROXIMAÇÃO!

$$w(t)t \approx w(t_0)t_0 + \left(w(t_0) + w'(t_0)t_0\right)(t - t_0))$$

RESPOSTA

A FREQUÊNCIA INSTÂNTANEA DE $f(t) = \text{sen}(w(t)t)$ NÃO É A PRÓPRIA FUNÇÃO $w(t)$, MAS SIM A VARIAÇÃO INSTÂNTANEA DE $w(t)$ CUJA EXPRESSÃO É

$$\tilde{w}(t) = \frac{\partial w(t)t}{\partial t} = w(t) + w'(t)$$

PODEMOS APROXIMAR NUMERICAMENTE O VALOR DE $w'(t)$ CALCULANDO A VARIAÇÃO DE $w(t)$ PARA INTERVALOS SUFICIENTEMENTE PRÓXIMOS. NO NOSSO CASO Δt PODE SER $\frac{1}{1000}$.

$$w'(t) = \frac{w(t+\Delta t) - w(t)}{\Delta t}$$

ESSE VALOR SOMADO COM $w(t)$ REPRESENTA A VARIAÇÃO INTÂNTANEA $\tilde{w}(t)$.

c. ESBOCE W_0 EM FUNÇÃO DE t_0 PARA $0 \leq t_0 \leq 1$