DIOGO ALVES
#USP 13709881

EXERCÍCIO 7.1 SEJA $x \in \ell^2(\mathbb{Z})$ (CONJUNTO BI-INFINITO COM ENERGIA FINITA) UM SINAL COM COMPONENTES $x_0 = 1$, $x_1 = -2$, $x_2 = 2$, $x_3 = 4$ E TODAS DEMAS COMPONENTES NULAS. PROCESSE $x$ ATRAVÉS DO BANCO DE FILTROS HAAR COM COEFICIENTES $l_a = \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ $h_a = \left[\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right]$ A FIM DE COMPUTAR $X_l$ E $X_h$ EXPLICITAMENTE. EM SEGUIDA, USE FILTROS DE SÍNTESE COM COEFICIENTES $(l_s)_{-1} = (l_s)_0 = 1$, $(h_s)_{-1} = -1$ $(h_s)_0 = 1$ PARA RECONSTRUIR $x$.

RESPOSTA

- A PARTIR DA EQUAÇÃO 7.3

$$X_l := D(l_a * x) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} x_0 + x_{-1} \\ x_2 + x_1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1+4 \\ 2-2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2,5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- A PARTIR DA EQUAÇÃO 7.4

$$X_h = D(h_a * x) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} x_0 - x_1 \\ x_2 - x_1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1-4 \\ 2+2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1,5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$X = (X_l, X_h) = [2{,}5,\ 0,\ -1{,}5,\ 2]$$

• A reconstrução de $x$ é

$$x = v_\ell + v_h$$

• Existe só um detalhe, os vetores de filtro de síntese são não causais. Para transformá-los em causais basta adicionar um atraso igual ao número de índices negativos, neste caso atraso de 1 índice.

$$S^1(\ell_0) = [1, 1] \qquad S^1(h_0) = [-1, 1]$$

• Logo
$$S^1(x) = \underbrace{S^1(\ell_0) * U(X_\ell)}_{v_\ell} + \underbrace{S^1(h_0) * U(X_h)}_{v_h}$$

• Preparando as versões pós-upsampling

$$U(X_\ell) = [2{,}5,\ 0,\ 0,\ 0] \qquad U(X_h) = [-1{,}5,\ 0,\ 2,\ 0]$$

• Calculando $v_\ell$ e $v_h$

$$(v_\ell)_0 = S^1(\ell_0)_0 \cdot U(X_\ell)_0 + S^1(\ell_0)_1 \cdot U(X_\ell)_{-1} = 1 \times 2{,}5 + 1 \times 0 = 2{,}5$$
$$(v_\ell)_1 = S^1(\ell_0)_0 \cdot U(X_\ell)_1 + S^1(\ell_0)_1 \cdot U(X_\ell)_0 = 1 \times 0 + 1 \times 2{,}5 = 2{,}5$$
$$(v_\ell)_2 = S^1(\ell_0)_0 \cdot U(X_\ell)_2 + S^1(\ell_0)_1 \cdot U(X_\ell)_1 = 1 \times 0 + 1 \times 0 = 0$$
$$(v_\ell)_3 = S^1(\ell_0)_0 \cdot U(X_\ell)_3 + S^1(\ell_0)_1 \cdot U(X_\ell)_2 = 1 \times 0 - 1 \times 0 = 0$$

$$v_\ell = [2{,}5,\ 2{,}5,\ 0,\ 0]$$

$$(v_h)_0 = S^1(h_0)_0 \cdot U(X_h)_0 + S^1(h_0)_1 \cdot U(X_h)_{-1} = -1 \times -1{,}5 + 1 \times 0 = 1{,}5$$
$$(v_h)_1 = S^1(h_0)_0 \cdot U(X_h)_1 + S^1(h_0)_1 \cdot U(X_h)_0 = -1 \times 0 + 1 \times -1{,}5 = -1{,}5$$
$$(v_h)_2 = S^2(h_0)_0 \cdot U(X_h)_2 + S^1(h_0)_1 \cdot U(X_h)_1 = -1 \times 2 + 1 \times 0 = -2$$
$$(v_h)_3 = S^2(h_0)_0 \cdot U(X_h)_3 + S^1(h_0)_1 \cdot U(X_h)_2 = -1 \times 0 + 1 \times 2 = 2$$

$$v_h = (1{,}5,\ -1{,}5,\ -2,\ 2)$$

- RECONSTRUINDO O SINAL ATRASADO

$$S^1(x) = v_\ell + v_h$$

$$= [4, 1, -2, 2]$$

- RETIRANDO O ATRASO

$$x = [1, -2, 2, 4]$$

Exercício 7.7 Seja $x \in L^2(\mathbb{Z})$, $g \in L^2(\mathbb{Z})$ um filtro FIR e $S$ o operador de atraso definido na Observação 7.1

Mostre que:

$$(S^m(g)) * x = S^m(g * x)$$

- Criando e substituindo a variável $w = g * x$, podemos reescrever o termo da direita

$$= S^m(w)$$

- Entrando nos índices $k$ e na definição de $S^m$

$$= w_{k-m}$$

- Voltando na definição da variável $w$ e abrindo a convolução

$$= \sum_{n=0}^{N-1} x_n \, g_{k-m-n}$$

- Utilizando novamente a definição de $S^m$ podemos reescrever

$$= \sum_{n=0}^{N-1} x_n \, (S^m(g))_{k-n}$$

- Utilizando a definição de convolução, subimos um nível e chegamos ao termo da esquerda

$$= (S^m(g)) * g$$

EXERCÍCIO 7.8 SUPONHA QUE USEMOS NA ETAPA DE ANÁLISE OS FILTROS $l_a = \left[\frac{3}{4}, \frac{1}{2}\right]$ E $h_a = \left[\frac{2}{3}, \frac{-2}{3}\right]$. A PARTIR DISSO ENCONTRE OS FILTROS APROPRIADOS PARA SÍNTESE QUE GARANTAM A PROPRIEDADE DA RECONSTRUÇÃO PERFEITA SEM ATRASO.

RESPOSTA

- A PROPRIEDADE DA RECONSTRUÇÃO PERFEITA PODE SER EXPRESSA ASSIM

$$x = l_s * (U(D(l_a * x))) + h_s(U(D(h_a * x)))$$

- CALCULANDO O PRODUTO DA FILTRAGEM CONVOLUÇÃO DE ANÁLISE TEMOS

$$(l_a * x)_k = v_k = \sum_{n=0}^{N-1} l_{a_n} x_{k-n}$$

$$= l_{a_0} x_k + l_{a_1} x_{k-1}$$

$$= \frac{3}{4} x_k + \frac{1}{2} x_{k-1}$$

$$(h_a * x)_k = w_k = \sum_{n=0}^{N-1} h_{a_n} x_{k-n}$$

$$= h_{a_0} x_k + h_{a_1} x_{k-1}$$

$$= \frac{2}{3} x_k - \frac{2}{3} x_{k-1}$$

- CALCULANDO OS REPECTIVOS PRODUTOS DOS UPSAMPLING APÓS OS DOWNSAMPLING TEMOS

PARA OS ÍNDICES PARES:

$$U(D(l_a * x)) = v_k$$

$$U(D(h_a * x)) = w_k$$

PARA OS ÍNDICES ÍMPARES

$$U(D(l_a * x)) = 0$$

$$U(D(h_a * x)) = 0$$

- CONVOLUÍMOS V COM $l_s$ E W COM $h_s$.

PARA ATENDER A PROPRIEDE DA RECONSTRUÇÃO PERFEITA QUE O COMPONENTE NA POSIÇÃO N DE X SEJA IGUAL AO COMPONENTE NA POSIÇÃO N DA SOMA $l_s * V + h_s * W$

ISSO GERA A SEGUINTE EQUAÇÃO:

$$x_n = \sum_{k\,PAR} \left( \left(\frac{3}{4}x_k + \frac{1}{2}x_{k-1}\right)(l_s)_{n-k} + \left(\frac{2}{3}x_k - \frac{2}{3}x_{k-1}\right)(h_s)_{n-k} \right)$$

- REORGANIZANDO OS TERMOS PARA COLOCAR $x_k$ E $x_{k-1}$ EM EVIDÊNCIA

$$x_n = \sum_{k\,PAR} \left[ \left(\frac{3}{4}(l_s)_{n-k} + \frac{2}{3}(h_s)_{n-k}\right)x_k + \left(\frac{1}{2}(l_s)_{n-k} - \frac{2}{3}(h_s)_{n-k}\right)x_{k-1} \right]$$

- A EQUAÇÃO ANTERIOR SE SUSTENTA PARA QUALQUER X. PASSAMOS ENTÃO A ESCOLHA DE UM X ESPECÍFICO.

NO CASO $x_0 = 1$ E $x_k = 0$ PARA $k \neq 0$. ISSO GERA DUAS EQUAÇÕES:

(A) $\frac{3}{4}(l_s)_n + \frac{2}{3}(h_s)_n = 1$ QUANDO $n = 0$

(B) $\frac{3}{4}(l_s)_n + \frac{2}{3}(h_s)_n = 0$ QUANDO $n \neq 0$

- ESCOLHENDO UM OUTRO VALOR DE X. NO CASO $x_1 = 1$ E $x_k = 0$ PARA $k \neq 1$. GERAMOS MAIS DUAS EQUAÇÕES

(C) $\frac{1}{2}(l_s)_{n-2} - \frac{2}{3}(h_s)_{n-2} = 1$ QUANDO $n = 1$

(D) $\frac{1}{2}(l_s)_{n-2} - \frac{2}{3}(h_s)_{n-2} = 0$ QUANDO $n \neq 1$

- DA EQUAÇÃO (A) COM $n=0$ E DA EQUAÇÃO (D) COM $n=2$ OBTEMOS UM SISTEMA LINEAR COM DUAS VARIÁVEIS E DUAS EQUAÇÕES

$$(A)\quad \frac{3}{4}(l_s)_0 + \frac{2}{3}(h_s)_0 = 1$$

$$(D)\quad \frac{1}{2}(l_s)_0 - \frac{2}{3}(h_s)_0 = 0$$

$$\frac{5}{4}(l_s)_0 = 1$$

$$(l_s)_0 = \frac{4}{5}$$

$$\frac{2}{3}(h_s)_0 + \frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5} = 1$$

$$\frac{2}{3}(h_s)_0 = 1 - \frac{3}{5}$$

$$(h_s)_0 = \frac{\cancel{2}}{5}\cdot\frac{3}{\cancel{2}} = \frac{3}{5}$$

- DA EQUAÇÃO (B) COM $n=-1$ E (C) COM $n=1$ TAMBÉM CHEGAMOS A UM SISTEMA LINEAR DE DUAS VARIÁVEIS E DUAS EQUAÇÕES

$$(B)\quad \frac{3}{4}(l_s)_{-1} + \frac{2}{3}(h_s)_{-1} = 0$$

$$(C)\quad \frac{1}{2}(l_s)_{-1} - \frac{2}{3}(h_s)_{-1} = 1$$

$$\frac{5}{4}(l_s)_{-1} = 1$$

$$(l_s)_{-1} = \frac{4}{5}$$

$$\frac{2}{3}(h_s)_{-1} + \frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5} = 0$$

$$(h_s)_{-1} = \frac{-3}{5}\cdot\frac{3}{2} = \frac{-9}{10}$$

- OS VETORES DOS FILTROS DE SÍNTESE ENCONTRADOS FORAM

$$(l_s)_0 = \frac{4}{5}, \quad (l_s)_{-1} = \frac{4}{5}$$

$$(h_s)_0 = \frac{3}{5}, \quad (h_s)_{-1} = \frac{-9}{10}$$

Exercício 7.10 Escreva a matriz $W_6^a$ para os filtros Le Gall 5/3. Escreva também $W_6^s$. Compute algumas entradas do produto $W_6^a W_6^s$ afim de verificar $W_6^a W_6^s = I_6$

- A equação 7.19 define

$$W_N^a = \begin{bmatrix} DM_{l_a} \\ DM_{h_a} \end{bmatrix}$$

- Dado $l_a = \left[\frac{3}{4}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, 0, -\frac{1}{8}, \frac{1}{4}\right]$ passamos ao cálculo de $M_{l_a}$

$$M_{l_a} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{8} & 0 & -\frac{1}{8} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{8} & 0 & -\frac{1}{8} \\ -\frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{8} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{1}{8} & 0 & -\frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{8} & 0 & -\frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}_{(6,6)}$$

- Segundo a equação 7.18

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}_{(3,6)}$$

- Logo

$$DM_{l_a} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{8} & 0 & -\frac{1}{8} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{8} & 0 \\ -\frac{1}{8} & 0 & -\frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}_{(3,6)}$$

• DADOS $h_a = \left[ -\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2}, 0, 0, 0 \right]$ PASSAMOS AO CÁLCULO $M_{h_a}$

$$M_{h_a} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

• LOGO $DM_{h_a}$

$$DM_{h_a} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

• LOGO

$$W_6^a = \begin{bmatrix} DM_{g_a} \\ DM_{h_a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{8} & 0 & -\frac{1}{8} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{8} & 0 \\ -\frac{1}{8} & 0 & -\frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

- A EQUAÇÃO 7.21 DEFINE

$$W_N^s = \left[ M_{l_n} U \mid M_{h_n} U \right]$$

- DADO $l_n = \left[1, \frac{1}{2}, 0, 0, 0, \frac{1}{2}\right]$ PASSAMOS AO CÁLCULO DE $M_{l_n}$

$$M_{l_n} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

- DADO $h_n = \left[-\frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, 0, -\frac{1}{8}, -\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right]$ PASSAMOS AO CÁLCULO DE $M_{h_n}$

$$M_{h_n} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{8} & 0 & -\frac{1}{8} \\ -\frac{1}{8} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{8} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{1}{8} & 0 & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{8} & 0 & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{8} & 0 & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

- SEGUNDO EQUAÇÃO 7.20

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

• Logo $M_{l_n}U$ e $M_{h_n}U$ são

$$M_{l_n}U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \qquad M_{h_n}U = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{1}{8} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{8} \\ 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & \frac{3}{4} \\ -\frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} \end{bmatrix}$$

• Logo

$$W_6^5 = \left[ M_{l_n}U \,\middle|\, M_{h_n}U \right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{8} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{8} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} \end{bmatrix}$$

• Agora vou computar algumas entradas do produto $W_6^5 W_6^5 = I_6$

1º) Posição que fica na 1ª linha e primeira coluna. O valor esperado é 1.

$$= \frac{3}{4} \cdot 1 + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} - \cancel{\frac{1}{8}} \cdot 0 + 0 - \cancel{\frac{1}{8}} \cdot 0 + \frac{1}{8} = \frac{3}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = 1$$

2º) Posição que fica na 2ª linha e na segunda coluna. Valor esperado 1.

$$= \cancel{-\frac{1}{8}\cdot 0} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\cdot 1 + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2} \cancel{-\frac{1}{8}\cdot 0} \cancel{+0} = \frac{1}{8} + \frac{3}{4} + \frac{1}{8} = 1$$

3º) Posição que fica na 1ª linha e 2ª coluna, valor esperado 0.

$$= \cancel{\frac{3}{4}\cdot 0} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2} - \frac{1}{8}\cdot 1 + \cancel{0\cdot\frac{1}{2}} \cancel{-\frac{1}{8}\cdot 0} \cancel{+\frac{1}{4}\cdot 0} = \frac{1}{8} - \frac{1}{8} = 0$$

4º) Posição que fica na 1ª linha e 3ª coluna, valor esperado 0.

$$= \frac{3}{4}\cdot 0 + \frac{1}{4}\cdot 0 - \frac{1}{8}\cdot 0 + 0\cdot\frac{1}{2} - \frac{1}{8}\cdot 1 + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2} = -\frac{1}{8} + \frac{1}{8} = 0$$

EXERCÍCIO 7.19 PROVE AS QUATRO RELAÇÕES DA TABELA 7.2 E DA OBSERVAÇÃO 7.6.

• 1ª RELAÇÃO: QUANDO $\tilde{g}_k = (-1)^k g_k$ a $\tilde{G}(z) = G(-z)$

$$\tilde{G}(z) = \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{g}_k z^{-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1} (-1)^k g_k z^{-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1} \left(\frac{1}{-1}\right)^k g_k z^{-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1} (-1)^{-k} g_k z^{-k} = \sum_{k=0}^{N-1} g_k (-1)^{-k} (z)^{-k} = \sum_{k=0}^{N-1} g_k (-1 \cdot z)^{-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1} g_k (-z)^{-k} = G(-z)$$

• 2ª RELAÇÃO: QUANDO $\tilde{g}_k = g_{-k}$ a $\tilde{G}(z) = G(z^{-1})$

COMO $g$ É CAUSAL $\tilde{g}$ SERÁ NÃO CAUSAL, JÁ QUE OS ÍNDICES ESTÃO ESPELHADOS. DA MESMA FORMA $\tilde{G}$ TERÁ O SOMATÓRIO INICIANDO EM $-(N-1)$ E INDO ATÉ 0.

$\tilde{g}_0 = g_0$, $\tilde{g}_1 = g_1$, $\tilde{g}_2 = g_2$, ..., $\tilde{g}_{-(N-1)} = g_{(N-1)}$

$$\tilde{G}(z) = \sum_{k=-(N-1)}^{0} \tilde{g}_k z^{-k} = \sum_{k=-(N-1)}^{0} g_{-k} z^{-k} = \sum_{k=(N-1)}^{0} g_k z^{k}$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1} g_k z^{k} = \sum_{k=0}^{N-1} g_k \left(z^{(-1 \cdot -1)}\right)^k = \sum_{k=0}^{N-1} g_k (z^{-1})^{(-1 \cdot k)}$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1} g_k (z^{-1})^{-k} = G(z^{-1})$$

3ª RELAÇÃO QUANDO $\tilde{g}_K = g_{N-1-K}$ a $\tilde{G}(z) = z^{-N+1}\, G(z^{-1})$

$$\tilde{G}(z) = \sum_{K=0}^{N-1} \tilde{g}_K\, z^{-K}$$

$$= \sum_{K=0}^{N-1} g_{(N-1)-K}\, z^{-K}$$

$$= \sum_{K=(N-1)}^{0} g_K\, z^{+K-(N-1)}$$

$$= \sum_{K=0}^{N-1} g_K\, z^{K-(N-1)}$$

$$= \underbrace{\sum_{K=0}^{N-1} g_K\, z^{K}} \cdot z^{(-N+1)}$$

ESSA PARTE JÁ APARECEU NO DESENVOLVIMENTO DA 2ª RELAÇÃO E POR ISSO SABEMOS QUE ELA CULMINA EM $G(z^{-1})$.

$$= z^{(-N+1)} \cdot G(z^{-1})$$

4ª RELAÇÃO QUANDO $\tilde{g}_k = (-1)^k g_{N-1-k}$ a $\tilde{G}(z) = (-z)^{-N+1} G(-z^{-1})$

$$\tilde{G}(z) = \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{g}_k z^{-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1} (-1)^k g_{(N-1)-k} z^{-k} = \sum_{k=(N-1)}^{0} (-1)^{(N-1)-k} \cdot g_k \cdot z^{k-(N-1)}$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1} (-1)^{(N-1)-k} \cdot g_k \cdot z^{k-(N-1)} = \sum_{k=0}^{N-1} (-1)^{(N-1)-k} \cdot g_k \cdot z^k \cdot z^{(-N+1)}$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1} (-1)^{(N-1)} \cdot (-1)^{-k} \cdot g_k \cdot (z^{-1})^{-k} \cdot (z^{-1})^{(N-1)}$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1} (-1)^{(N-1)} \cdot (z^{-1})^{(N-1)} \cdot g_k \cdot (-1)^{-k} (z^{-1})^{-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1} (-1 \cdot z^{-1})^{(N-1)} \cdot g_k (-1 \cdot z^{-1})^{-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1} (-z^{-1})^{(N-1)} \cdot g_k (-z^{-1})^{-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1} (-z)^{(-N+1)} g_k (-z^{-1})^{-k}$$

$$= (-z)^{(-N+1)} \sum_{k=0}^{N-1} g_k (-z^{-1})^{-k}$$

$$= (-z)^{(-N+1)} \cdot G(-z^{-1})$$

Exercício 7.22 Em um banco de filtros

seja $l_a = [\frac{1}{2}, 1, \frac{-1}{2}]$ e $h_a = [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}]$

utilize as equações 7.32 e 7.33 para encontrar

os filtros de sínteses adequados para reconstrução perfeita.

Qual o delay?

Resposta

• Começando das equações 7.32 e 7.33, que apresentam os requisitos suficientes (e necessários) para reconstrução perfeita no domínio da transformada Z.

$$7.32 \quad L_a(z)L_s(z) + H_a(z)H_s(z) = 2z^{-m}$$

$$7.33 \quad L_a(-z)L_s(z) + H_a(-z)H_s(z) = 0$$

• Calculamos a transforma Z dos vetores dos filtros de análise

$$L_a(z) = \frac{1}{2} + z^{-1} - \frac{1}{2}z^{-2}$$

$$H_a(z) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}z^{-1} + \frac{1}{4}z^{-2}$$

• Com os filtros de análise definidos, as equações 7.32 e 7.33 podem ser reescritas:

$$7.34 \quad L_s(z) = \frac{2z^{-m} H_a(-z)}{L_a(z)H_a(-z) - L_a(-z)H_a(z)}$$

$$7.35 \quad H_s(z) = \frac{-2z^{-m} L_a(-z)}{L_a(z)H_a(-z) - L_a(-z)H_a(z)}$$

• APROVEITANDO QUE OS DENOMINADORES SÃO IGUAIS

$$= L_a(z)H_a(-z) - L_a(-z)H_a(z)$$

$$= \left(\frac{1}{2} + z^{-1} - \frac{1}{2}z^{-2}\right)\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}z^{-1} + \frac{1}{4}z^{-2}\right) - \left(\frac{1}{2} - z^{-1} - \frac{1}{2}z^{-2}\right)\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}z^{-1} + \frac{1}{4}z^{-2}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{8} \cancel{-\frac{1}{4}z^{-1}} \cancel{+\frac{1}{8}z^{-2}} \cancel{+\frac{1}{4}z^{-1}} - \frac{1}{2}z^{-2} + \frac{1}{4}z^{-3} \cancel{-\frac{1}{8}z^{-2}} + \frac{1}{4}z^{-3} - \frac{1}{8}z^{-4}\right) - \left( \;''\; \right)$$

$$= \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{2}z^{-2} + \frac{1}{2}z^{-3} - \frac{1}{8}z^{-4}\right) - \left( \;''\; \right)$$

$$= \left( \;''\; \right) - \left(\frac{1}{8} \cancel{+\frac{1}{4}z^{-1}} \cancel{+\frac{1}{8}z^{-2}} \cancel{-\frac{1}{4}z^{-1}} - \frac{1}{2}z^{-2} - \frac{1}{4}z^{-3} \cancel{-\frac{1}{8}z^{-2}} - \frac{1}{4}z^{-3} - \frac{1}{8}z^{-4}\right)$$

$$= \left( \;''\; \right) - \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{2}z^{-2} - \frac{1}{2}z^{-3} - \frac{1}{8}z^{-4}\right)$$

$$= \left(\cancel{\frac{1}{8}} \cancel{-\frac{1}{2}z^{-2}} + \frac{1}{2}z^{-3} \cancel{-\frac{1}{8}z^{-4}}\right) - \left(\cancel{\frac{1}{8}} \cancel{-\frac{1}{2}z^{-2}} - \frac{1}{2}z^{-3} \cancel{-\frac{1}{8}z^{-4}}\right)$$

$$= z^{-3}$$

• CALCULANDO O $L_s(z)$ DA EQUAÇÃO 7.34

$$L_s(z) = \frac{2z^{-m} \cdot H_a(-z)}{z^{-3}}$$

COMO $H_a(-z)$ POSSUI APENAS EXPOENTES QUE CORRESPONDEM A UM FILTRO CAUSAL NO DOMINIO DE ORIGEM ($z^0, z^{-1}, z^{-2}$), PARA QUE O RESULTADO $L_s(z)$ SEJA CAUSAL O VALOR DE <u>m</u> DEVE COMPENSAR O DENOMINADOR. POR ISSO m SERÁ IGUAL A 3.

$$L_s(z) = \frac{2 \cdot \cancel{z^{-3}}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}z^{-1} + \frac{1}{4}z^{-2}\right)}{\cancel{z^{-3}}} = \frac{1}{2} - z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2}$$

- CALCULANDO $H_s(z)$ DA EQUAÇÃO 7.35

$$H_s(z) = \frac{-2z^{-m} L_a(-z)}{z^{-3}}$$

PELA MESMA RAZÃO, PARA COMPENSAR O DENOMINADOR, O m SERÁ IGUAL A 3, COM ISSO TEREMOS UM ATRASO DE 3 ÍNDICES.

$$H_s(z) = \frac{-2\cancel{z^{-3}}\left(\frac{1}{2} - z^{-1} - \frac{1}{2}z^{-2}\right)}{\cancel{z^{-3}}} = -1 + 2z^{-1} + z^{-2}$$

- A PARTIR DE $L_s(z)$ E $H_s(z)$ CONSEGUIMOS DETERMINAR OS FILTROS CAUSAIS NO DOMÍNIO DE ORIGEM

$$l_s = \left[\frac{1}{2}, -1, \frac{1}{2}\right]$$

$$h_s = [-1, 2, 1]$$

COMO DESCRITO NOS PASSOS ANTERIORES FOI NECESSÁRIO APLICAR UM ATRASO DE 3 ÍNDICES PARA DETERMINAR O VALOR DO FILTRO CAUSAL.