Lista 5

Diogo Alves

Exercício 4.17 Prove o Teorema da Convolução no caso bidemensional (Teo 4.4):

Se $x, h, y \in M_{M,N}(\mathbb{C})$ e $y = x * h$, então:

$$Y_{K,L} = X_{K,L} H_{K,L}, \quad \forall_K = 0, 1, \dots, M-1 \text{ e } \forall_L = 0, 1, \dots, N-1$$

onde $X, H, Y \in M_{M,N}(\mathbb{C})$ são as DFTs de x, h, y, respectivamente.

R: • Começamos pela definição da DFT 2D

$$Y_{K,L} = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} e^{-i 2\pi \left(K\frac{m}{M} + L\frac{n}{N}\right)} y_{m,n}$$

• Como $y = x * h$, nós temos $y_{m,n} = \sum_{R=0}^{M-1} \sum_{S=0}^{N-1} x_{R,S} h_{m-R, n-S}$

$$Y_{K,L} = \sum_{R=0}^{M-1} \sum_{S=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} e^{-i 2\pi \left(K\frac{m}{M} + L\frac{n}{N}\right)} \cdot x_{R,S} h_{m-R, n-S}$$

• Criando duas variáveis para simplificar a notação

$P = m - R$ e $Q = n - S$ e em seguida ajustando os somatórios, temos:

$m = P + R$ $\quad$ $n = Q + S$

$$Y_{K,L} = \sum_{R=0}^{M-1} \sum_{S=0}^{N-1} \sum_{P=-R}^{M-1-R} \sum_{Q=-S}^{N-1-S} e^{-i 2\pi \left(K\frac{(P+R)}{M} + L\frac{(Q+S)}{N}\right)} x_{R,S} h_{P,Q}$$

$$= \left(\sum_{R=0}^{M-1} \sum_{S=0}^{N-1} e^{-i 2\pi \left(\frac{KR}{M} + \frac{LS}{N}\right)} x_{R,S} \right) \left(\sum_{P=-R}^{M-1-R} \sum_{Q=-S}^{N-1-S} e^{-i 2\pi \left(\frac{KP}{M} + \frac{LQ}{N}\right)} h_{P,Q} \right)$$

• SABEMOS QUE OS SOMATÓRIOS DO SEGUNDO TERMO, SÃO PERIÓDICOS EM M e N, POR ISSO PODEMOS DESLOCÁ-LOS EM R e S SEM ALTERAR O VALOR FINAL

$$Y_{K,L} = \left(\sum_{R=0}^{M-1} \sum_{S=0}^{N-1} e^{-i2\pi\left(\frac{KR}{M} + \frac{LS}{N}\right)} x_{R,S} \right) \left(\sum_{P=0}^{M-1} \sum_{Q=0}^{N-1} e^{-i2\pi\left(\frac{KP}{M} + \frac{LQ}{N}\right)} h_{P,Q} \right)$$

$$Y_{K,L} = X_{K,L} \cdot H_{K,L}$$

Exercício 4.25 Para detectar todas as bordas em uma imagem como na seção 4.4.2 e figura 4.10 poderíamos filtrar a imagem nos dois sentidos simultaneamente fazendo: $A \longrightarrow (A*V)*H$ onde V e H são máscaras de deteção de bordas verticais e horizontais. Explique porque isso não funciona bem, calculando a máscara $V*H$ e mostrando o que acontece quando ela é aplicada em bordas (linhas) horizontais e verticais.

R: • começando o calculo da máscara $V*H$

$$y_{i,j} = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} V_{m,n} \, H_{i-m,\, j-n}$$

• como $V_{i,j}$ é igual a zero quando $(i,j) \neq (0,0)$ e $(i,j) \neq (0,1)$ podemos remover o somatório

$$y_{i,j} = V_{0,0} H_{i,j} + V_{0,1} H_{i,j-1}$$

• substituindo os valores de V

$$y_{i,j} = H_{i,j} - H_{i,j-1}$$

• Como $H_{i,j}$ é diferente de zero apenas quando $(i,j)=(0,0)$ ou $(i,j)=(1,0)$

Chegamos que $y_{i,j}$ é diferente de zero quando $i \in [0,1]$ e $j \in [0,1]$

Substituindo os valores de i,j temos:

$$y_{0,0} = H_{0,0} - \cancel{H_{0,-1}} = H_{0,0} = 1$$

$$y_{0,1} = \cancel{H_{0,1}} - H_{0,0} = -H_{0,0} = -1$$

$$y_{1,0} = H_{1,0} - \cancel{H_{1,-1}} = H_{1,0} = -1$$

$$y_{1,1} = \cancel{H_{1,1}} - H_{1,0} = -H_{1,0} = 1$$

$$y = (V * H) = \begin{bmatrix} \begin{matrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{matrix} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

• Utilizando como exemplo $P = \begin{bmatrix} 200 & 0 \\ 200 & 0 \end{bmatrix}$ representando uma imagem com borda vertical e $Q = \begin{bmatrix} 200 & 200 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ sendo uma imagem com borda horizontal

Percebemos que $(P * y) = (Q * y) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

Portanto $y = (V * H)$ é incapaz de detectar as linhas horizontais e verticais.

EXERCÍCIO 4.29 SEJA $x = (x_0, x_1, \ldots, x_{N-1}) \in \mathbb{C}^N$, E SEJA $\tilde{x} \in L^2(\mathbb{Z})$ SUA EXTENSÃO BI-INFINITA COM ZEROS DEFINIDA COMO $\tilde{x}_n = x_n$, $n = 0, \ldots, N-1$ E $\tilde{x}_n = 0$ CASO CONTRÁRIO.

(a) MOSTRE QUE OS COEFICIENTES X_k DA DFT DE x PODEM SER COMPUTADOS A PARTIR DE $\tilde{X}(f)$, A DTFT DE $\tilde{x}$.

R: • COMEÇANDO COM AS DEFINIÇÕES DA DFT E DTFT

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-i2\pi k \frac{n}{N}} \qquad \tilde{X}(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n e^{-i2\pi f n}$$

$$k = 0, 1, \ldots, N-1 \qquad -\frac{1}{2} \leq f \leq \frac{1}{2}$$

• COMO $\tilde{X}_n = 0$ PARA $n < 0$ OU $n > N-1$, PODEMOS RESTRINGIR OS ÍNDICES DO SOMATÓRIO.

$$\tilde{X}(f) = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}_n e^{-i2\pi f n}, \qquad -\frac{1}{2} \leq f \leq \frac{1}{2}$$

• EM RAZÃO DA PERIODICIDADE DA BASE DE FOURIER PODEMOS DEFINIR k PARA QUALQUER INTERVALO DE N NÚMEROS INTEIROS CONTÍGUOS. VAMOS REDEFINIR k PARA ~~o~~ $k = -\frac{N}{2}, -\frac{N}{2}+1, \ldots, \frac{N}{2}-1$

• AGORA COMPARANDO AS EQUAÇÕES DA

DFT

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-i2\pi k \frac{n}{N}}$$

$$k = -\frac{N}{2}, -\frac{N}{2}+1, \ldots, \frac{N}{2}-1$$

DTFT

$$\tilde{X}(f) = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}_n e^{-i2\pi f n}$$

$$-\frac{1}{2} \leq f \leq \frac{1}{2}$$

PERCEBEMOS QUE É POSSÍVEL COMPUTAR OS COEFICENTES DE X_k A PARTIR $\tilde{X}(f)$ PARA OS VALORES DE f QUE SATISFAZEM

$$f = \frac{k}{N}, \quad k = -\frac{N}{2}, -\frac{N}{2}+1, \ldots, \frac{N}{2}-1$$

Exercício 4.33 Seja $x = (-1, 2, 0, 4)$ e $y = (1, 1, 2, -1)$ vetores em $\mathbb{C}^4$.
Considere x e y também como elementos de $L^2(\mathbb{Z})$, através da extensão com zeros.

(A) Calcule as transformadas-z $X(z)$ e $Y(z)$, e o produto $X(z)Y(z)$

$$X(z) = -1z^0 + 2z^{-1} + 0z^{-2} + 4z^{-3} = -1z^0 + 2z^{-1} + 4z^{-3}$$

$$Y(z) = 1z^0 + 1z^{-1} + 2z^{-2} - 1z^{-3}$$

$$X(z)Y(z) = (-1z^0 + 2z^{-1} + 4z^{-3})(1z^0 + 1z^{-1} + 2z^{-2} - 1z^{-3})$$

$$\begin{aligned}
= &-1z^0 - 1z^{-1} - 2z^{-2} + 1z^{-3} \\
&+ 2z^{-1} + 2z^{-2} + 4z^{-3} - 2z^{-4} \\
&+ 4z^{-3} + 4z^{-4} + 8z^{-5} - 4z^{-6}
\end{aligned}$$

$$= -1z^0 + 1z^{-1} + 0z^{-2} + 7z^{-3} + 2z^{-4} + 8z^{-5} - 4z^{-6}$$

(B) Use o resultado do item do item (A) para escrever a convolução linear de x e y e $L^2(\mathbb{Z})$.

Sendo $w = x * y$

e $W(z) = X(z)\,Y(z)$

Então

$$x * y = (-1, 1, 0, 7, 2, 8, -4)$$

(C) Use o resultado do item (A) para escrever a convolução circular de x e y em $\mathbb{R}^4$, usando o Teorema 4.7.

Do Teorema 4.7

Sendo $w = x \circledast y$

e $W(z) = X(z)\,Y(z) \bmod z^{-4}$

$$\begin{aligned}
W(z) &= -1z^0 + 1z^{-1} + 0z^{-2} + 7z^{-3} + 2z^0 + 8z^{-1} - 4z^{-2} \\
&= 1z^0 + 9z^{-1} - 4z^{-2} + 7z^{-3}
\end{aligned}$$

Então

$$x \circledast y = (1, 9, -4, 7)$$

(D) USE O RESULTADO DO ITEM (B) PARA ESCREVER A CONVOLUÇÃO CIRCULAR DE X E Y EM $\mathbb{R}^4$ USANDO A EQUAÇÃO (4.29)

EQUAÇÃO 4.29

$$w_m = \tilde{w}_m + \tilde{w}_{m+N}$$

- O RESULTADO DE (B) FOI

$$\tilde{w} = (-1, 1, 0, 7, 2, 8, -4)$$

- $w_0 = \tilde{w}_0 + \tilde{w}_{0+4} = -1 + 2 = 1$

$w_1 = \tilde{w}_1 + \tilde{w}_{1+4} = 1 + 8 = 9$

$w_2 = \tilde{w}_2 + \tilde{w}_{2+4} = 0 + (-4) = -4$

$w_3 = \tilde{w}_3 + \tilde{w}_{3+4} = 7$

$$w = (1, 9, -4, 7)$$