EXERCÍCIO 3.12 Mostre que a DCT é uma transformada ortogonal, ou seja, que $\|DCT(x)\|^2 = \|x\|^2$ utilizando a norma euclidiana usual para vetores em $\mathbb{C}^N$. Esta é identidade de Parseval para a DCT. Dica: para qualquer vetor $v \in \mathbb{C}^N$, temos que $\|v\|^2 = v^* v$ onde v^* é o vetor-linha dado por $v^* = \bar{v}^T$

RESPOSTA

$$\|DCT(x)\|^2 = \|x\|^2$$

?

Partindo de $\|v\|^2 = (v, v)$

$$\|DCT(x)\|^2 = \left\| \sum_{k=0}^{N-1} x_k C_k \right\|^2$$

$$= \left(\sum_{k=0}^{N-1} x_k C_k , \sum_{j=0}^{N-1} x_j C_j \right)$$

Como, por construção a base da DCT é ortogonal, os produto $C_k C_j$ são zero para $k \neq j$.

$$= \sum_{k=j=0}^{N-1} x_k x_j^T C_k C_j^T$$

Como, por construção, $(C_N)_{i,j} = (C_N)_{j,i}$

Sabemos que $(C_N^T)(C_N) = I$

$$= \sum_{k=0}^{N-1} x_k^2$$

$$= \|x\|^2$$