EXERCÍCIO 2.17 SEJAM x E y DOIS VETORES COLUNA DE DIMENSÃO M E N, RESPECTIVAMENTE, COM DFT'S $\mathbf{X}$ E $\mathbf{Y}$.

SEJA z A MATRIZ $M \times N$ DEFINIDA POR:

$$z_{r,s} = x_r y_s, \quad \text{com} \begin{cases} 0 \le r \le M-1 \\ 0 \le s \le N-1 \end{cases}$$

E $\mathbf{Z}$ A DFT(z) (BIDIMENSIONAL) DE z.

A) MOSTRE QUE z É UMA MATRIZ $M \times N$ QUE SATISFAZ $z = xy^T$, ONDE y^T DENOTA A TRANSPOSTA DE y.

RESPOSTA

$$x_M = \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_M \end{bmatrix}_{(M,1)} \quad y_N = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix}_{(N,1)} \quad z_{M,N} = \begin{bmatrix} x_0y_0 & x_0y_1 & x_0y_2 & x_0y_N \\ x_1y_0 & & & \vdots \\ x_2y_0 & \cdot & \cdot & \vdots \\ \vdots & & & \\ x_My_0 & \cdots & & x_My_N \end{bmatrix}_{(M,N)}$$

$$\mathbf{X} = DFT(x) \quad \mathbf{Y} = DFT(y) \quad \mathbf{Z} = DFT(z)$$

$$z = xy^T$$

$$= \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_M \end{bmatrix}_{(M,1)} \begin{bmatrix} y_0 & y_1 & y_2 & \cdots & y_N \end{bmatrix}_{(1,N)} = \begin{bmatrix} x_0y_0 & x_0y_1 & x_0y_2 & x_0y_N \\ x_1y_0 & & & \vdots \\ x_2y_0 & \cdot & \cdot & \vdots \\ \vdots & & & \\ x_My_0 & \cdots & & x_My_N \end{bmatrix}_{(M,N)} = z$$

B) MOSTRE QUE $\mathbf{Z}_{k,l} = \mathbf{X}_k \mathbf{Y}_l$ OU EQUIVALENTE $\mathbf{Z} = \mathbf{X}\mathbf{Y}^T$, ONDE $\mathbf{Z}_{k,l}$ DENOTA O ELEMENTO DA LINHA k E COLUNA l DE $\mathbf{Z}$.

RESPOSTA:

$$\mathbf{Z}_{k,l} = \mathbf{X}_k \mathbf{Y}_l$$

$$\mathbf{Z} = \mathbf{X}\mathbf{Y}^T$$

$$= DFT(x) \cdot DFT(y^T)$$

COMO A DFT É UMA OPERAÇÃO LINEAR

$$= DFT(xy^T)$$

$$= DFT(z)$$

COMO MOSTRAMOS ANTERIORMENTE

$$= \mathbf{Z}$$