DSP 2022 - 2º Lista de Exercícios

Diogo Alves

<u>Exercício 1.25</u>: Existem infinitos outros produtos internos em $\mathbb{R}^n$ além do produto interno canônico, e eles também podem ser muito úteis. Considere $d=(d_1,d_2,\dots,d_n)\in\mathbb{R}^n$ e suponha $d_k>0$ para todo $1\leq k\leq n$.

(A) Sejam $v=(v_1,v_2,\dots,v_n)$ e $w=(w_1,w_2,\dots,w_n)$ vetores em $\mathbb{R}^n$. Mostre que a função $(v,w)_d=\sum_{k=1}^{n} d_k v_k w_k$ define um produto interno em $\mathbb{R}^n$. Escreva a expressão da norma $\|\cdot\|_d$ associada.

R: · Sendo V um espaço vetorial sob $\mathbb{R}^n$

· $\forall_{u,v,w}\in V$

- Escalare α,β, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$

Para ser um produto interno, precisa atender as 3 condições

1º Condição, simetria conjugada. $(v,w)=\overline{(w,v)}$

como V está definido sob os reais. $V=\overline{V}$, logo a simetria conjugada torna-se simplesmente simetria. $(v,w)=(w,v)$

$(v,w)_d=(w,v)_d$?

$$\sum_{k=1}^{n} d_k v_k w_k=\sum_{k=1}^{n} d_k w_k v_k$$

como a diferença de ordem no produto não altera o somatório essa condição es $\boxed{\text{OK}}$.

2^{a} Condição: Linearidade do Primeiro Argumento

$$(\alpha u+\beta v, w)_d = \alpha(u,w)_d + \beta(v,w)_d \; ?$$

$$\sum_{k=1}^{n} d_k(\alpha u_k+\beta v_k)w_k = \alpha\sum_{k=1}^{n} d_k u_k w_k + \beta\sum_{k=1}^{n} v_k w_k$$

$$\sum_{k=1}^{n} d_k \cdot \alpha u_k w_k + \sum_{k=1}^{n} d_k \cdot \beta v_k w_k = \alpha\sum_{k=1}^{n} d_k u_k w_k + \beta\sum_{k=1}^{n} v_k w_k$$

$$\alpha\sum_{k=1}^{n} d_k u_k w_k + \beta\sum_{k=1}^{n} d_k v_k w_k = \alpha\sum_{k=1}^{n} d_k u_k w_k + \beta\sum_{k=1}^{n} v_k w_k \quad \boxed{\text{OK}}$$

3^{a} Condição: Definição Positiva

$$(u,u)_d \geq 0 \quad \text{e} \quad (u,u)=0 \text{ apenas se } u=\vec{0} \; ?$$

$$\sum_{k=1}^{n} d_k u_k u_k \geq 0$$

- Como u_k está definido sob $\mathbb{R}^n$, então $\sum_{k=1}^{n} u_k u_k \geq 0$

- Como, por definição $d_k > 0$ para todo $1 \leq k \leq n$.
  Então $\sum_{k=1}^{n} d_k > 0$

Logo

$$\sum_{k=1}^{n} d_k u_k u_k = \sum_{k=1}^{n} d_k \sum_{k=1}^{n} u_k u_k \geq 0 \quad \boxed{\text{OK}}$$

A Expressão da Norma.

$$\|u\|_d = (u,u)_d^{\frac{1}{2}} = \left(d_1 u_1^2 + d_2 u_2^2 + d_n u_n^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

(b) SEJA $d=(1,5)\in\mathbb{R}^2$ E SEJA $S=\{v_1,v_2\}$ COM $v_1=(2,1)$ E $v_2=(5,-2)$. MOSTRE QUE S NÃO É ORTOGONAL EM RELAÇÃO AO PRODUTO INTERNO CANÔNICO, MAS É ORTOGONAL COM RESPEITO AO PRODUTO $(\,,\,)_d$.

R: DOIS VETORES SÃO ORTOGONAIS SE O PRODUTO INTERNO ENTRE ELES É IGUAL A ZERO. PORTANTO, A NOÇÃO DE ORTOGONALIDADE DEPENDE, ALÉM DOS VETORES ENVOLVIDOS, DA DEFINIÇÃO DE PRODUTO INTERNO QUE ESTAMOS UTILIZANDO.

$(v_1,v_2)=(2.5+1.(-2))=8$ v_1 E v_2 NÃO SÃO ORTOGONAIS EM RELAÇÃO AO PRODUTO INTERNO CANÔNICO.

$(v_1,v_2)_d=(1.2.5+5.1.(-2))=0$ v_1 E v_2 SÃO ORTOGONAIS EM RELAÇÃO AO PRODUTO INTERNO $(\,,\,)_d$

(c) ENCONTRE O COMPRIMENTO DE CADA VETOR EM S COM RESPEITO A NORMA $\|.\|_d$ GERADA PELO PRODUTO INTERNO $(\,,\,)_d$, E COMPARE-OS COM OS COMPRIMENTOS EM RELAÇÃO À NORMA USUAL (EUCLIDIANA).

$\|v_1\|_d=\sqrt{1.2.2+5.1.1}=\sqrt{9}=3$ $\|v_1\|=\sqrt{2.2+1.1}=\sqrt{5}\cong 2{,}23$

$\|v_2\|_d=\sqrt{1.5.5+5.(-2)(-2)}=\sqrt{25+20}=\sqrt{45}\cong 6{,}70$ $\|v_2\|=\sqrt{5.5+(-2)(-2)}=\sqrt{25+4}=\sqrt{29}\cong 5{,}38$

OS FATORES DE d FAZEM $\|v_1\|_d$ E $\|v_2\|_d$ MAIORES NUMERICAMENTE QUE $\|v_1\|$, $\|v_2\|$.

DE FORMA GERAL
PARA QUALQUER $d=(d_1,d_2)$ d_1 E $d_2>0$

$\|v_1\|_d \geq \|v_1\|$ E $\|v_2\|_d \geq \|v_2\|$

(d) ESCREVA O VETOR $w=(-2,5)$ COMO COMBINAÇÃO LINEAR DOS ELEMENTOS DE S. VERIFIQUE QUE A COMBINAÇÃO QUE VOCÊ OBTEVE REALMENTE DESCREVE w.

R: $w = aV_1 + bV_2$

$(-2,5) = a(2,1) + b(5,-2)$

$$\begin{cases} 2a + 5b = -2 & (1) \\ a + (-2)b = 5 & (2) \end{cases}$$

(2) $a = 5 + 2b$

(1) $2(5+2b) + 5b = -2$

$10 + 4b + 5b = -2$

$9b = -12$

$b = -\frac{4}{3}$

$a = 5 + 2\left(-\frac{4}{3}\right)$

$a = \frac{15-8}{3} = \frac{7}{3}$

$(-2,5) = \frac{7}{3}(2,1) + \left(-\frac{4}{3}\right)(5,-2)$

$(-2,5) = \left(\frac{14}{3}, \frac{7}{3}\right) + \left(\frac{-20}{3}, \frac{8}{3}\right)$

$(-2,5) = \left(\frac{-6}{3}, \frac{15}{3}\right)$

$(-2,5) = (-2,5)$ ok

$a = \frac{7}{3}$

$b = -\frac{4}{3}$