

DIOGO ALVES

Lista 3

EXERCÍCIO 2.16: CALCULE (A MÃO) A DFT bidimensional DA MATRIZ:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

EM SEGUIDA, CALCULE A TRANSFORMADA INVERSA DO RESULTADO.

RESPOSTA

A PARTIR DA DEFINIÇÃO

$$\text{DFT}(A) = \hat{A}_{K,L} = (A, E_{K,L}) = \sum_{R=0}^{M-1} \sum_{S=0}^{N-1} A_{R,S} e^{-i \cdot 2\pi \cdot \left( \frac{KR}{M} + \frac{LS}{N} \right)}$$

$$\hat{A}_{K,L} = A_{0,0} e^{-i2\pi \left( \frac{K \cdot 0}{M} + \frac{L \cdot 0}{N} \right)} + A_{0,1} e^{-i2\pi \left( \frac{K \cdot 0}{M} + \frac{L \cdot 1}{N} \right)} + A_{1,0} e^{-i2\pi \left( \frac{K \cdot 1}{M} + \frac{L \cdot 0}{N} \right)} + A_{1,1} e^{-i2\pi \left( \frac{K \cdot 1}{M} + \frac{L \cdot 1}{N} \right)}$$

$$\hat{A}_{K,L} = A_{0,0} e^0 + A_{0,1} e^{-i\pi L} + A_{1,0} e^{-i\pi K} + A_{1,1} e^{-i\pi(K+L)}$$

$$\hat{A}_{K,L} = 1 \cdot 1 + (-1)(-1)^L + 2 \cdot (-1)^K + 0$$

$$\hat{A}_{K,L} = 1 - (-1)^L + 2 \cdot (-1)^K$$

$$\boxed{K=0, L=0} \quad \hat{A}_{0,0} = 1 - 1 + 2 = 2$$

$$\boxed{K=0, L=1} \quad \hat{A}_{0,1} = 1 - 1 + 2 = 2$$

$$\boxed{K=1, L=0} \quad \hat{A}_{1,0} = 1 - 1 - 2 = -2$$

$$\boxed{K=1, L=1} \quad \hat{A}_{1,1} = 1 + 1 - 2 = 0$$

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{e^{-i\pi} = \cos \pi - i \sin \pi = -1}$$



A PARTIR DA DEFINIÇÃO

$$\text{IDFT}(\hat{A}) = A_{R,S} = \frac{1}{MN} \left( \hat{A}, \overline{E_{K,L}} \right) = \left( \sum_{K=0}^{M-1} \sum_{S=0}^{N-1} \hat{A}_{K,L} \cdot e^{i \cdot 2\pi \cdot \left( \frac{K \cdot R}{M} + \frac{L \cdot S}{N} \right)} \right) \cdot \frac{1}{MN}$$

$$A_{R,S} = \frac{1}{MN} \left( \hat{A}_{0,0} \cdot e^{i 2\pi \left( \frac{0 \cdot R}{M} + \frac{0 \cdot S}{N} \right)} + \hat{A}_{0,1} \cdot e^{i 2\pi \left( \frac{0 \cdot R}{M} + \frac{1 \cdot S}{N} \right)} + \hat{A}_{1,0} \cdot e^{i 2\pi \left( \frac{1 \cdot R}{M} + \frac{0 \cdot S}{N} \right)} + \hat{A}_{1,1} \cdot e^{i 2\pi \left( \frac{1 \cdot R}{M} + \frac{1 \cdot S}{N} \right)} \right)$$

$$A_{R,S} = \frac{1}{4} \left( \hat{A}_{0,0} \cdot e^0 + \hat{A}_{0,1} \cdot e^{i\pi S} + \hat{A}_{1,0} \cdot e^{i2\pi R} + \hat{A}_{1,1} \cdot e^{i2\pi(R+S)} \right)$$

$$A_{R,S} = \frac{1}{4} \left( 2 \cdot 1 + 4 \cdot (-1)^S + (-2) \cdot (-1)^R + 0 \right)$$

$$A_{R,S} = \frac{1}{4} \left( 2 + 4 \cdot (-1)^S + (-2) \cdot (-1)^R \right)$$

$$e^{i\pi} = \cos\pi + i\sin\pi = -1$$

$$\boxed{R=0, S=0} \quad A_{0,0} = \frac{1}{4} (2 + 4 - 2) = \frac{4}{4} = 1$$

$$\boxed{R=0, S=1} \quad A_{0,1} = \frac{1}{4} (2 + 4(-1) - 2(1)) = \frac{-4}{4} = -1$$

$$\boxed{R=1, S=0} \quad A_{1,0} = \frac{1}{4} (2 + 4(1) - 2(-1)) = \frac{8}{4} = 2$$

$$\boxed{R=1, S=1} \quad A_{1,1} = \frac{1}{4} (2 + 4(-1) - 2(-1)) = \frac{0}{4} = 0$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$



EXERCÍCIO 2.17 SEJAM  $X$  E  $Y$  DOIS VETORES COLUNA DE DIMENSÃO  $M$  E  $N$ , RESPECTIVAMENTE, COM DFT'S  $X$  E  $Y$ .

SEJA  $Z$  A MATRIZ  $M \times N$  DEFINIDA POR:

$$Z_{R,S} = x_R y_S, \text{ com } \begin{cases} 0 \leq R \leq M-1 \\ 0 \leq S \leq N-1 \end{cases}$$

E  $Z$  A DFT( $Z$ ) (BIDIMENSIONAL) DE  $Z$ .

A) MOSTRE QUE  $Z$  É UMA MATRIZ  $M \times N$  QUE SATISFAZ  $Z = XY^T$ , ONDE  $Y^T$  DENOTA A TRANSPOSTA DE  $Y$ .

RESPOSTA

$$x_M = \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_M \end{bmatrix}_{(M,1)} \quad y_N = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix}_{(N,1)} \quad Z_{M,N} = \begin{bmatrix} x_0 y_0 & x_0 y_1 & x_0 y_2 & \dots & x_0 y_N \\ x_1 y_0 & & & & \vdots \\ x_2 y_0 & & & & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots \\ x_M y_0 & & & & x_M y_N \end{bmatrix}_{(M,N)}$$

$$X = \text{DFT}(x) \quad Y = \text{DFT}(y) \quad Z = \text{DFT}(Z)$$

$$Z = XY^T \\ = \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_M \end{bmatrix}_{(M,1)} \begin{bmatrix} y_0 & y_1 & y_2 & \dots & y_N \end{bmatrix}_{(1,N)} = \begin{bmatrix} x_0 y_0 & x_0 y_1 & x_0 y_2 & \dots & x_0 y_N \\ x_1 y_0 & & & & \vdots \\ x_2 y_0 & & & & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots \\ x_M y_0 & & & & x_M y_N \end{bmatrix}_{(M,N)} = Z$$

B) MOSTRE QUE  $Z_{K,L} = X_K Y_L$  OU EQUIVALENTE  $Z = XY^T$ , ONDE  $Z_{K,L}$  DENOTA O ELEMENTO DA LINHA  $K$  E COLUNA  $L$  DE  $Z$ .

RESPOSTA:

$$Z_{K,L} = X_K Y_L$$

$$Z = XY^T$$

$$= \text{DFT}(x) \cdot \text{DFT}(y^T)$$

$$= \text{DFT}(XY^T)$$

$$= \text{DFT}(Z)$$

$$= Z$$

COMO  $\hat{A}$   
DFT É UMA OPERAÇÃO LINEAR

COMO MOSTRAMOS ANTERIORMENTE

Exercício 2.19 Seja  $x \in \mathbb{C}^N$  com DFT  $X$ . Seja  $y \in \mathbb{C}^N$ , o vetor obtido pelo deslocamento circular de  $x$  em  $m$  índices.

$$y_k = x_{(k+m) \bmod N}$$

Mostre que a DFT de  $y$  tem componentes  $Y_k = e^{i2\pi km/N}$  e que

$$|X_k| = |Y_k|, \text{ para todo } k.$$

Resposta:

$$\text{Sendo } \text{DFT}(x) = X_k = (x_k)_{k=0}^{N-1} = \sum_{r=0}^{N-1} x_r e^{-i2\pi kr/N}$$

$$\text{E } \text{DFT}(y) = \text{DFT}(x_{(k+m) \bmod N})$$

$$= \sum_{r=0}^{N-1} x_{(r+m) \bmod N} \cdot e^{-i2\pi kr \cdot \frac{r+m}{N}}$$

Como essa função já é periódica em  $N$ , não é necessário colocarmos o  $\bmod N$  aqui.

$$= \sum_{r=0}^{N-1} x_{(r+m) \bmod N} \cdot e^{-i2\pi kr \cdot \frac{r}{N}} \cdot e^{i2\pi km \cdot \frac{r}{N}}$$

$$= \left( \sum_{r=0}^{N-1} x_{(r+m) \bmod N} \cdot e^{-i2\pi kr \cdot \frac{r}{N}} \right) \cdot e^{i2\pi km \cdot \frac{r}{N}}$$

$$Y_k = X_k \cdot e^{i2\pi km}$$

$$\text{Seguindo para } |X_k| = |Y_k|$$

$$|X_k| = |X_k \cdot \underbrace{e^{i2\pi km}}_1|$$

Como esse fator multiplicativo tem magnitude 1, o produto resultante mantém a magnitude original

$$|X_k| = |Y_k|$$