Exercício 1.33 Mostre que a ortogonalidade das formas básicas de onda $\mathcal{E}_{k,l} \in M_{m,n}(\mathbb{C})$ definidas pela Eq. 1.25 $(\mathcal{E}_{k,l})_{r,s} = e^{i2\pi\left(\frac{kr}{m}+\frac{ls}{n}\right)}$ usando o produto interno canônico.

R: Para mostrar que são ortogonais, basta mostrar que

$(\mathcal{E}_{k,l}, \mathcal{E}_{p,q}) = 0$, para $k \neq p$ ou $l \neq q$.

Se $k \neq p$ ou $l \neq q$

$$(\mathcal{E}_{k,l}, \mathcal{E}_{p,q}) = \sum_{r=0}^{m-1}\sum_{s=0}^{n-1} e^{i2\pi\left(\frac{kr}{m}+\frac{ls}{n}\right)} \overline{e^{i2\pi\left(\frac{pr}{m}+\frac{qs}{n}\right)}}$$

$$= \sum_{r=0}^{m-1}\sum_{s=0}^{n-1} e^{i2\pi\left(\frac{kr}{m}+\frac{ls}{n}\right)} \cdot e^{-i2\pi\left(\frac{pr}{m}+\frac{qs}{n}\right)}$$

$$= \sum_{r=0}^{m-1}\sum_{s=0}^{n-1} e^{i2\pi(k-p)\frac{r}{m}} \cdot e^{i2\pi(l-q)\frac{s}{n}}$$

$$= \sum_{r=0}^{m-1}\sum_{s=0}^{n-1} \left(e^{i2\pi(k-p)/n}\right)^r \cdot \left(e^{i2\pi(l-q)/n}\right)^s$$

Aproveitando a dica que a soma de uma progressão geométrica de razão z, $z \neq 1$ e $a_0 = 1$ é igual a $\frac{1-z^N}{1-z}$

podemos reescrever os termos assim

$$(\mathcal{E}_{k,l}, \mathcal{E}_{p,q}) = \left(\frac{1-\left(e^{i2\pi(k-p)/N}\right)^N}{1-e^{2\pi(k-p)/N}}\right)\left(\frac{1-\left(e^{i2\pi(l-q)/N}\right)^N}{1-e^{2\pi(l-q)/N}}\right)$$

como $e^{i2\pi(k-p)} = 1$

como $e^{i2\pi(l-q)} = 1$

como não podem ser zero

então

$$(\mathcal{E}_{k,l}, \mathcal{E}_{p,q}) = 0$$