DSP 2022 - 2ª Lista de Exercícios

Diogo Alves

Exercício 1.25: Existem infinitos outros produtos internos em $\mathbb{R}^n$ além do produto interno canônico, e eles também podem ser muito úteis. Considere $d = (d_1, d_2, \dots, d_n) \in \mathbb{R}^n$ e suponha $d_k > 0$ para todo $1 \leq k \leq n$.

(A) Sejam $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ e $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)$ vetores em $\mathbb{R}^n$. Mostre que a função $(v, w)_d = \sum_{k=1}^{n} d_k v_k w_k$ define um produto interno em $\mathbb{R}^n$. Escreva a expressão da norma $\|\cdot\|_d$ associada.

R: · Sendo V um espaço vetorial sob $\mathbb{R}^n$

· $\forall_{u,v,w} \in V$

- Escalare α, β, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Para ser um produto interno, precisa atender as 3 condições

1º Condição, simetria conjugada. $(v, w) = \overline{(w, v)}$

como V está definido sob os reais. $V = \overline{V}$, logo a simetria conjugada torna-se simplesmente simetria. $(v, w) = (w, v)$

$(v, w)_d = (w, v)_d$?

$$\sum_{k=1}^{n} d_k v_k w_k = \sum_{k=1}^{n} d_k w_k v_k$$

como a diferença de ordem no produto não altera o somatório essa condição es $\boxed{OK}$.

2ª CONDIÇÃO: LINEARIDADE DO PRIMEIRO ARGUMENTO

$$(\alpha u + \beta v, w)_d = \alpha(u,w)_d + \beta(v,w)_d \; ?$$

$$\sum_{k=1}^{n} d_k(\alpha u_k + \beta v_k) w_k = \alpha \sum_{k=1}^{n} d_k u_k w_k + \beta \sum_{k=1}^{n} v_k w_k$$

$$\sum_{k=1}^{n} d_k \cdot \alpha u_k w_k + \sum_{k=1}^{n} d_k \cdot \beta v_k w_k = \alpha \sum_{k=1}^{n} d_k u_k w_k + \beta \sum_{k=1}^{n} v_k w_k$$

$$\alpha \sum_{k=1}^{n} d_k u_k w_k + \beta \sum_{k=1}^{n} d_k v_k w_k = \alpha \sum_{k=1}^{n} d_k u_k w_k + \beta \sum_{k=1}^{n} v_k w_k \quad \boxed{\text{OK}}$$

3ª CONDIÇÃO: DEFINIÇÃO POSITIVA

$$(u,u)_d \geq 0 \quad \text{e} \quad (u,u) = 0 \quad \text{apenas se} \quad u = \vec{0} \; ?$$

$$\sum_{k=1}^{n} d_k u_k u_k \geq 0$$

- Como u_k está definido sob $\mathbb{R}^n$, então $\sum_{k=1}^{n} u_k u_k \geq 0$

- Como, por definição $d_k > 0$ para todo $1 \leq k \leq n$.
ENTÃO $\sum_{k=1}^{n} d_k > 0$

LOGO
$$\sum_{k=1}^{n} d_k u_k u_k = \sum_{k=1}^{n} d_k \sum_{k=1}^{n} u_k u_k \geq 0 \quad \boxed{\text{OK}}$$

A EXPRESSÃO DA NORMA.

$$\|u\|_d = (u,u)_d^{\frac{1}{2}} = \left(d_1 u_1^2 + d_2 u_2^2 + d_n u_n^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

(b) SEJA $d=(1,5) \in \mathbb{R}^2$ E SEJA $S=\{v_1, v_2\}$ COM $v_1=(2,1)$ E $v_2=(5,-2)$. MOSTRE QUE S NÃO É ORTOGONAL EM RELAÇÃO AO PRODUTO INTERNO CANÔNICO, MAS É ORTOGONAL COM RESPEITO AO PRODUTO $(\,,\,)_d$.

R: DOIS VETORES SÃO ORTOGONAIS SE O PRODUTO INTERNO ENTRE ELES É IGUAL A ZERO. PORTANTO, A NOÇÃO DE ORTOGONALIDADE DEPENDE, ALÉM DOS VETORES ENVOLVIDOS, DA DEFINIÇÃO DE PRODUTO INTERNO QUE ESTAMOS UTILIZANDO.

$(v_1, v_2) = (2.5 + 1.(-2)) = 8$ v_1 E v_2 NÃO SÃO ORTOGONAIS EM RELAÇÃO AO PRODUTO INTERNO CANÔNICO.

$(v_1, v_2)_d = (1.2.5 + 5.1.(-2)) = 0$ v_1 E v_2 SÃO ORTOGONAIS EM RELAÇÃO AO PRODUTO INTERNO $(\,,\,)_d$

(c) ENCONTRE O COMPRIMENTO DE CADA VETOR EM S COM RESPEITO A NORMA $\|\cdot\|_d$ GERADA PELO PRODUTO INTERNO $(\,,\,)_d$, E COMPARE-OS COM OS COMPRIMENTOS EM RELAÇÃO À NORMA USUAL (EUCLIDIANA).

$\|v_1\|_d = \sqrt{1.2.2 + 5.1.1} = \sqrt{9} = 3$ $\quad \|v_1\| = \sqrt{2.2 + 1.1} = \sqrt{5} \cong 2{,}23$

$\|v_2\|_d = \sqrt{1.5.5 + 5.(-2)(-2)} = \sqrt{25+20} = \sqrt{45} \cong 6{,}70$ $\quad \|v_2\| = \sqrt{5.5 + (-2)(-2)} = \sqrt{25+4} = \sqrt{29} \cong 5{,}38$

OS FATORES DE d FAZEM $\|v_1\|_d$ E $\|v_2\|_d$ MAIORES NUMERICAMENTE QUE $\|v_1\|, \|v_2\|$.

DE FORMA GERAL
PARA QUALQUER $d=(d_1, d_2)$ d_1 E $d_2 > 0$

$\|v_1\|_d \geq \|v_1\|$ E $\|v_2\|_d \geq \|v_2\|$

(d) ESCREVA O VETOR $w=(-2,5)$ COMO COMBINAÇÃO LINEAR DOS ELEMENTOS DE S. VERIFIQUE QUE A COMBINAÇÃO QUE VOCÊ OBTEVE REALMENTE DESCREVE w.

R: $w = aV_1 + bV_2$

$(-2,5) = a(2,1) + b(5,-2)$

$$\begin{cases} 2a + 5b = -2 & ① \\ a + (-2)b = 5 & ② \end{cases}$$

② $a = 5 + 2b$

① $2(5+2b) + 5b = -2$

$10 + 4b + 5b = -2$

$9b = -12$

$b = -\frac{4}{3}$

$a = 5 + 2\left(-\frac{4}{3}\right)$

$a = \frac{15 - 8}{3} = \frac{7}{3}$

$(-2,5) = \frac{7}{3}(2,1) + \left(-\frac{4}{3}\right)(5,-2)$

$(-2,5) = \left(\frac{14}{3}, \frac{7}{3}\right) + \left(\frac{-20}{3}, \frac{8}{3}\right)$

$(-2,5) = \left(\frac{-6}{3}, \frac{15}{3}\right)$

$(-2,5) = (-2,5)$ ok

$a = \frac{7}{3}$

$b = -\frac{4}{3}$

Exercício 1.31: Suponha que S é uma base ortogonal mas não ortonormal em $\mathbb{R}^n$ composta pelos vetores V_K, para $1 \leq K \leq n$.

Mostre que se $v = \sum_{K=1}^{n} a_K V_K$, então a identidade de Parseval se torna $\|v\|^2 = \sum_{K=1}^{n} |a_K|^2 \|V_K\|^2$.

R: Partindo de $\|v\|^2 = (v, v)$

$$= \left(\sum_{J=1}^{n} a_J V_J , \sum_{K=1}^{n} a_K V_K \right)$$

• como S é ortogonal $V_J V_K = 0$ se $J \neq K$

$$= \sum_{J \neq K = 1}^{n} a_J \bar{a}_K (V_J, V_K) =$$

$$= \sum_{K=1}^{n} a_K \bar{a}_K (V_K, V_K)$$

• como $z\bar{z} = |z|^2$

• como V_K não são ortonormais $(V_K, V_K) = \|V_K\|^2$

$$= \sum_{K=1}^{n} |a_K|^2 \|V_K\|^2$$

EXERCICIO 1.33 MOSTRE QUE A ORTOGONALIDADE DAS FORMAS BÁSICAS DE ONDA $\mathcal{E}_{k,l} \in M_{m,n}(\mathbb{C})$ DEFINIDAS PELA EQ. 1.25 $\left(\mathcal{E}_{k,l}\right)_{i,j} = e^{i2\pi\left(\frac{ki}{m} + \frac{lj}{n}\right)}$

USANDO O PRODUTO INTERNO CANÔNICO.

R: PARA MOSTRAR QUE SÃO ORTOGONAIS, BASTA MOSTRAR QUE

$$\left(\mathcal{E}_{K,L}, \mathcal{E}_{P,Q}\right) = 0 \quad , \text{ PARA } K \neq P \text{ OU } L \neq Q.$$

SE $K \neq P$ OU $L \neq Q$

$$\left(\mathcal{E}_{K,L}, \mathcal{E}_{P,Q}\right) = \sum_{r=0}^{m-1} \sum_{s=0}^{n-1} e^{i2\pi\left(\frac{Kr}{m} + \frac{Ls}{n}\right)} \overline{e^{i2\pi\left(\frac{Pr}{m} + \frac{Qs}{n}\right)}}$$

$$= \sum_{r=0}^{m-1} \sum_{s=0}^{n-1} e^{i2\pi\left(\frac{Kr}{m} + \frac{Ls}{n}\right)} \cdot e^{-i2\pi\left(\frac{Pr}{m} + \frac{Qs}{n}\right)}$$

$$= \sum_{r=0}^{m-1} \sum_{s=0}^{n-1} e^{i2\pi(K-P)\frac{r}{m}} \cdot e^{i2\pi(L-Q)\frac{s}{n}}$$

$$= \sum_{r=0}^{m-1} \sum_{s=0}^{n-1} \left(e^{i2\pi(K-P)/N}\right)^r \cdot \left(e^{i2\pi(L-Q)/N}\right)^s$$

APROVEITANDO A DICA QUE A SOMA DE UMA PROGRESSÃO GEOMÉTRICA DE RAZÃO z, $z \neq 1$ E $A_0 = 1$ É IGUAL A $\frac{1 - z^N}{1 - z}$

PODEMOS REESCREVER OS TERMOS ASSIM

$$\left(\mathcal{E}_{K,L}, \mathcal{E}_{P,Q}\right) = \left(\frac{1 - \left(e^{i2\pi(K-P)/N}\right)^N}{1 - e^{2\pi(K-P)/N}}\right)\left(\frac{1 - \left(e^{i2\pi(L-Q)/N}\right)^N}{1 - e^{2\pi(L-Q)/N}}\right)$$

COMO $e^{i2\pi(K-P)} = 1$

COMO $e^{i2\pi(L-Q)} = 1$

COMO NÃO PODEM SER ZERO

ENTÃO

$$\left(\mathcal{E}_{K,L}, \mathcal{E}_{P,Q}\right) = 0$$

EXERCÍCIO 2.3/4: USANDO AS EXPRESSÕES

$$X_k = (x, E_k) = \sum_{n=0}^{N-1} x_n \underbrace{e^{-i2\pi \cdot k \frac{n}{N}}}_{\overline{E_k}} \quad \text{(DFT)}$$

$$x = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_k E_k \quad \text{(IDFT)}$$

CALCULE A DFT do vetor $y = (1, 2, 0, -1)$
$k\{0,1,2,3)$ $N=4$

$$E_{4,0} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \overline{E_{4,0}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$E_{4,1} = \begin{bmatrix} 1 \\ i \\ -1 \\ -i \end{bmatrix} \quad \overline{E_{4,1}} = \begin{bmatrix} 1 \\ -i \\ -1 \\ +i \end{bmatrix}$$

$$E_{4,2} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \overline{E_{4,2}} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$E_{4,3} = \begin{bmatrix} 1 \\ -i \\ -1 \\ +i \end{bmatrix} \quad \overline{E_{4,3}} = \begin{bmatrix} 1 \\ i \\ -1 \\ -i \end{bmatrix}$$

$\underline{k=0}$

$$\begin{aligned} X_0 &= y_0 \overline{E_0}(0) + y_1 \overline{E_0}(1) + y_2 \overline{E_0}(2) + y_3 \overline{E_0}(3) \\ &= 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 \\ &= 2 \end{aligned}$$

$\underline{k=1}$

$$\begin{aligned} X_1 &= y_0 \overline{E_1}(0) + y_1 \overline{E_1}(1) + y_2 \overline{E_1}(2) + y_3 \overline{E_1}(3) \\ &= 1 \cdot 1 + 2 \cdot (-i) + 0 + (-1)(i) \\ &= 1 - 3i \end{aligned}$$

$\underline{k=2}$

$$\begin{aligned} X_2 &= y_0 \overline{E_2(0)} + y_1 \overline{E_2(1)} + y_2 \overline{E_2(2)} + y_3 \overline{E_2(3)} \\ &= 1 \cdot 1 + 2(-1) + 0 + (-1)(-1) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$\underline{k=3}$

$$\begin{aligned} X_3 &= y_0 \overline{E_3(0)} + y_1 \overline{E_3(1)} + y_2 \overline{E_3(2)} + y_3 \overline{E_3(3)} \\ &= 1 \cdot 1 + 2 \cdot (i) + 0 + (-1) \cdot (-i) \\ &= 1 + 3i \end{aligned}$$

$$X_n = (2, 1-3i, 0, 1+3i)$$

CALCULE A IDFT DO VETOR $W=(3,\ 1+i,\ 1,\ 1-i)$

$K=(0,1,2,3)$ $N=4$

$\underline{K=0}$

$$x_0 = \left(W_0E_0(0) + W_1E_0(1) + W_2E_0(2) + W_3E_0(3)\right)/N$$
$$= (3 + (1+i) + 1 + 1-i)/4$$
$$= 6/4 = \frac{3}{2} = 1{,}5$$

$\underline{K=1}$

$$x_1 = (W_0E_1(0) + W_1E_1(1) + W_2E_1(2) + W_3E_1(3))/N$$
$$= (3 + i - 1 - 1 - i - 1)/4$$
$$= 0$$

$\underline{K=2}$

$$x_2 = (W_0E_2(0) + W_1E_2(1) + W_2E_2(2) + W_3E_2(3))/N$$
$$= (3 - 1 - i + 1 - 1 + i)/4$$
$$= \frac{2}{4} = 0{,}5$$

$\underline{K=3}$

$$x_3 = (W_0E_3(0) + W_1E_3(1) + W_2E_3(2) + W_3E_3(3))/N$$
$$= (3 - i + 1 - 1 + i + 1)/4$$
$$= \frac{4}{4} = 1$$

$$x_n = (1.5,\ 0,\ 0.5,\ 1)$$

EXERCÍCIO 2.6 SEJA $\{e_0, e_1, \dots, e_{N-1}\} \subset \mathbb{C}^N$ A BASE CANÔNICA E $\mathbb{C}^N$, ONDE O VETOR e_j POSSUI 1 NA J-ÉSIMA POSIÇÃO E 0 NAS DEMAIS. CALCULE A DFT DE e_j E TAMBÉM A MAGNITUDE (O VALOR ABSOLUTO) DE CADA COEFICIENTE DA DFT. QUAL É A RELAÇÃO ENTRE $DFT(e_j)$ E AS FORMAS DE ONDA BÁSICAS E_k?

$$R: \ DFT(e_j) = X_k = (e_j, E_{N,k}) = \sum_{n=0}^{N-1} e_j(n) \cdot e^{-i \cdot 2\pi \cdot k \cdot \frac{n}{N}}$$

- Como $e_j(n) = 1$ APENAS PARA $n = j$ E ZERO PARA DEMAIS VALORES.

$$DFT(e_j) = e^{-i \cdot 2\pi \cdot k \cdot \frac{j}{N}} = e^{-i 2\pi \cdot j \cdot \frac{k}{N}} = \overline{E_{N,j}}$$

- SOBRE A MAGNITUDE DOS COEFICIENTES DA DFT.

PODEMOS VISUALIZAR AS COMPONENTES DE QUALQUER FORMA DE ONDA BÁSICA $E_{N,k}$ OU $\overline{E_{N,k}}$ COLOCANDO NO FORMATO Ae^{it}, SENDO A A MAGNITUDE DO SINAL. COMO $A = 1$ PARA TODOS OS ~~COEFICIENTES~~ TERMOS DE $E_{N,k}$ e $\overline{E_{N,k}}$ PODEMOS DIZER QUE A MAGNITUDE DE TODOS OS COEFICIENTES DA $DFT(e_j)$ SÃO IGUAIS A 1.

- QUAL A RELAÇÃO ENTRE $DFT(e_j)$ E AS FORMAS DE ONDAS BÁSICAS E_k?

$$DFT(e_j) = \overline{E_{N,j}} \quad (k = j)$$