Lista 4

Diogo Alves

Exercício 4.2 Escreva a matriz circulante associada ao vetor h
$h=(1,5,7,2)^T$ e use-a para computar a convolução circular
$x * h$ com o vetor $x=(1,-1,1,2)^T$

R:

$$M_h = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 & 5 \\ 5 & 1 & 2 & 7 \\ 7 & 5 & 1 & 2 \\ 2 & 7 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Y = M_h\, x$$

$$Y = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 & 5 \\ 5 & 1 & 2 & 7 \\ 7 & 5 & 1 & 2 \\ 2 & 7 & 5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$Y = \begin{bmatrix} 16 \\ 20 \\ 7 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Exercício 4.9

(a) Defina a reversão temporal (ou adjunto) de um filtro com coeficientes $h \in \mathbb{R}^N$ como o vetor $h' \in \mathbb{R}^N$ com componentes $h'_k = h_{-k \bmod N}$. Mostre que as matrizes

$$M_{h'} = M_h^T$$

R:

$$(M_{h'})^T_{k,m} = (M_h)_{k,m}$$

$$(M_{h'})_{m,k} = (M_h)_{k,m}$$

$$h'_{m-k} = h_{k-m} \longrightarrow \text{como } h \text{ e } h' \text{ é periódico em } N$$

$$h'_{-k} = h_k$$

ou

$$h'_k = h_{-k}$$

(b) Dizemos que um filtro é simétrico se $h = h'$. Mostre que h é simétrico se e somente se a matriz circulante M_h é simétrica

R: • A matriz M_h é simétrico se $M_h^T = M_h$

• Vimos anteriormente que a matriz da reversão temporal $M_{h'} = M_h^T$

• Se $h = h' \Rightarrow M_h = M_h^T$

$$(M_h)_{k,m} = (M_{h'})_{k,m} \quad \forall_{k,m}$$

$$h_{k-m} = h'_{m-k} \qquad \text{como } h \text{ e } h' \text{ são periódicos em } N$$

$$h_k = h'_{-k} \qquad h' \text{ é o } h \text{ flipado}$$

$$\cancel{h_{k,m}}$$

$$M_h = M_h^T$$

• Se $M_h \neq M_{h'}^T \Rightarrow h \neq h'$

$$(M_h)_{k,m} \neq (M_{h'})^T_{k,m}$$

$$(M_h)_{k,m} \neq (M_{h'})_{m,k}$$

$$h \neq h'$$

(c) PARA UM FILTRO COM COÉFICIENTES COMPLEXOS $h \in \mathbb{C}^N$ DEFINIMOS SEU ADJUNTO $h' \in \mathbb{C}^N$ COMO

$$h'_k = \overline{h_{-k \bmod N}}$$

Mostre que as matrizes circulantes h e h' satisfazem

$$M_{h'} = M_h^*$$

R: PARTINDO DA DEFINIÇÃO $h'_k = \overline{h_{-k \bmod N}}$

A PARTIR DAS QUESTÕES ANTERIORES $M_{h'} = \overline{M_h^T}$

PELA DEFINIÇÃO DE MATRIZ HERMITIANA $M_{h'} = M_h^*$

Exercício 4.10 Mostre que $(g' * h')' = g * h$

R: • Como a convolução é uma operação linear

$$= (g' * h')'$$

$$= ((g')' * (h')')$$

• Como adjunto do adjunto é igual ao vetor na ordem original.

$$(g')' = g \quad \text{e} \quad (h')' = h$$

• Então

$$(g' * h')' = g * h$$